

Anisotropie, een verwaarloosd verschijnsel bij grondwatervraagstukken

Voor veel hydrologen heeft anisotropie van de bodemdoorlatendheid – het verschijnsel dat de bodemdoorlatendheid in de ene richting afwijkt van die in een andere – iets geheimzinnigs. Anisotropie wordt als moeilijk ervaren en veelal afgedaan als iets voor theoretici, waar je in de praktijk toch niets mee te maken hebt.

Het tegendeel is waar. Anisotropie komt in de praktijk veelvuldig voor, met name in gestuwde gebieden en gebieden die aan tektoniek onderhevig zijn geweest (Noord-Brabant). Ook komt het voor in grillige

blijftijden berekend in de getransformeerde ruimte geldig zijn en wordt ingegaan op de consequenties voor de uitvoering en interpretatie van pompproeven.

Theorie

Driedimensionale stroming

De grondwaterstroming in een homogene, maar anisotrope situatie, gehoorzaamt de volgende differentiaalvergelijking:

$$k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + q - S_s \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

terwijl voor het isotrope geval (1) overgaat in:

$$k' \left\{ \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial (x')^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial (y')^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial (z')^2} \right\} + q' - S_s' \frac{\partial \Phi'}{\partial t'} = 0 \quad (2)$$

Voor (2) zijn alle isotrope formules afgeleid. Wij kunnen (1) door een eenvoudige ingreep in (2) veranderen. Schrijf hiertoe:

$$k' = \sqrt[3]{(k_x k_y k_z)} \quad (3)$$

en vul de volgende relaties in, vgl. (1) in:

$$x = \sqrt{\left(\frac{k_x}{k'}\right)} x', \quad y = \sqrt{\left(\frac{k_y}{k'}\right)} y' \quad \text{en} \quad z = \sqrt{\left(\frac{k_z}{k'}\right)} z' \quad (4)$$

Indien nu nog $\Phi = \Phi'$ en $t = t'$ wordt genomen is (2) ontstaan.

Aangezien uitsluitend de coördinatentransformatie volgens (4) en (3) voldoende is om (1) identiek aan (2) te maken, volgt dat $q = q'$ en $S_s = S_s'$, zodat, na de transformatie, infiltratie-onttrekkingsstromen noch de op een kubieke meter grond betrokken specifieke bergingscoëfficiënt S_s behoeven te worden aangepast om de bekende formules voor isotrope stroming te kunnen gebruiken.

De stelling $q = q'$ kan ook formeel worden bewezen. Eis dat de integraal Q van q over volume G dezelfde is als de integraal Q van q' over het getransformeerde volume G' :

$$Q = \iiint_G q \, dx \, dy \, dz = \iiint_{G'} q' \, dx' \, dy' \, dz'$$

Uit (3) en (4) volgt $dx \, dy \, dz = dy' \, dx' \, dz'$ waardoor:

$$\iiint_G q \, dx \, dy \, dz = \iiint_{G'} q' \, dx' \, dy' \, dz'$$

hetgeen alleen klopt indien:

$$q' = q \quad (5)$$

Met andere woorden: volumestromen, infiltraties en onttrekkingen blijven onaangetast.

Het ongewijzigd blijven van de specifieke bergingscoëfficiënt volgt formeel uit de eis dat het volume water ΔV dat bij een potentiaalverhoging $\Delta \Phi$ vrijkomt uit het grondvolume $dx \, dy \, dz$ gelijk is aan het volume dat bij deze $\Delta \Phi$ vrijkomt uit het getransformeerde volume $dx' \, dy' \, dz'$:

$$\Delta V = \Delta \Phi S_s \, dx \, dy \, dz = \Delta \Phi S_s' \, dx' \, dy' \, dz'$$

Waaruit met (3) en (4) direct volgt:

$$S_s' = S_s \quad (6)$$

De situatie verandert echter, wanneer wij in plaats van de specifieke bergingscoëfficiënt S_s de normaliter toegepaste bergingscoëfficiënt S of μ gebruiken die geldt voor een kolom grond met een horizontaal oppervlak van 1 m² en die even hoog is als het watervoerend pakket dik (H):

$$S' \text{ of } \mu' = \int_0^H S_s' \, dz \quad (7)$$

De transformatie volgt nu uit de eis:

$$\Delta V = \mu \Delta \Phi \, dx \, dy = \mu' \Delta \Phi \, dx' \, dy'$$

Met (3) en (4) volgt hieruit:

$$\begin{aligned} \mu' &= \mu \frac{dx \, dy}{dx' \, dy'} = \mu \frac{\sqrt{(k_x k_y)}}{(k')} = \\ &= \mu \sqrt{\left(\frac{k'}{k_z}\right)} \end{aligned} \quad (8)$$

De weerstand van een weerstandbiedende laag dient in het driedimensionale geval ook aangepast te worden. Wij eisen hiertoe dat de stroom die in het anisotrope geval het watervoerende pakket binnenstroomt door het horizontale vlakje $dx \, dy$ grenzend aan de weerstandbiedende laag door de transformatie niet verandert:

$$q = \frac{\Delta \Phi}{c} \, dx \, dy = \frac{\Delta \Phi}{c'} \, dx' \, dy'$$

Ofwel:

$$c' = c \cdot \frac{dx' \, dy'}{dx \, dy}$$

En met vgl. (4) en (3)

$$c' = c \frac{k'}{\sqrt{(k_x k_y)}} = c \sqrt{\left(\frac{k_z}{k'}\right)} \quad (9)$$

Tweedimensionale stroming

In veel gevallen speelt de verticale component geen rol. Dit is niet alleen het geval in uitgestrekte horizontale lagen met volkomen putten en andere insnijdingen, maar ook steeds op enige afstand (namelijk 1 tot 1,5 H) van onvolkomen putten en insnijdingen. Bij zo'n tweedimensionaal stromingsgeval gaan (1) en (2) over in:



IR. T. N. OLSTHOORN
KIWA NV
Nieuwegein

rivierafzettingen en in andere afzettingen als aeolische afzettingen waarin een bepaalde structuur aanwezig is.

Anisotropie is praktisch altijd voorhanden in het verticale vlak, daar de verticale doorlatendheid wordt verminderd ten opzichte van de horizontale doorlatendheid door allerlei horizontaal ingeschaalde laagjes met een relatief geringe doorlatendheid. Daarom zou ik willen stellen dat niet de anisotrope, maar de isotrope situatie de uitzondering vormt.

Zoals bekend, veroorzaakt horizontale anisotropie bij een onttrekking ellipsvormige verlagingscontouren. Wanneer desondanks gemakshalve van cirkelvormige contouren wordt uitgegaan, ontstaat een beeld dat plaatselijk aanzienlijk kan afwijken van de werkelijkheid. Dat dit van belang is voor allerlei kwesties die met een verlagingenbeeld kunnen samenhangen, behoeft geen betoog. In zoverre is anisotropie zeker niet uitsluitend een hobby van theoretici.

Anisotropie heeft niets geheimzinnigs en is evenmin moeilijk. Zoals hierna zal worden aangetoond, zijn de bekende, voor isotrope situaties afgeleide formules zonder restrictie voor anisotrope situaties toepasbaar, wanneer enkele transformaties worden uitgevoerd. Mits de juiste transformaties worden toegepast (niet alleen de coördinaten maar tevens enkele bodemconstanten worden getransformeerd) blijven randvoorwaarden, opgegeven volumestromen, de potentiaal en de tijd ongewijzigd. Dit laatste is een wel zeer plezierige bijkomstigheid. Het gebruik zal worden geïllustreerd aan een op het eerste gezicht ingewikkeld gedeeltelijk driedimensionaal voorbeeld met semi-spanningswater. Tenslotte wordt aangetoond dat ook ver-

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (10)$$

en

$$k'H \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{(\partial x')^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{(\partial y')^2} \right\} + q'^* + \mu' \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (11)$$

waarin q^* , in tegenstelling tot q bij de hiervoor behandelde driedimensionale stroming, over de hele pakkethoogte wordt genomen:

$$q^* = \int_0^H q dz$$

Vgl. (10) gaat direct over in (11), wanneer wij schrijven:

$$k'H = \sqrt{\{ (k_x H) (k_y H) \}} \quad (12a)$$

of

$$k' = \sqrt{(k_x k_y)} \quad (12b)$$

en

$$x = \sqrt{\left(\frac{k_x H}{k' H}\right)} x' = \sqrt{\left(\frac{k_x}{k'}\right)} x' \quad (13a)$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{k_y H}{k' H}\right)} y' = \sqrt{\left(\frac{k_y}{k'}\right)} y' \quad (13b)$$

Zodat

$$dx dy = dx' dy', \quad t = t', \quad \Phi = \Phi' \quad \text{en} \quad q = q' \quad (14)$$

Anders dan in het driedimensionale geval blijft nu de weerstand c van een slecht doorlatende laag ongewijzigd:

$$\frac{\Delta \Phi}{c} dx dy = \frac{\Delta \Phi}{c'} dx' dy'$$

dus

$$c' = c \frac{dx' dy'}{dx dy} = c \quad (15)$$

Ook de bergingscoëfficiënt blijft in het tweedimensionale geval ongewijzigd:

$$\Delta \Phi \mu dx dy = \Delta \Phi \mu' dx' dy' \\ \mu' = \mu \frac{dx dy}{dx' dy'} = \mu \quad (16)$$

Conclusies

Wij kunnen derhalve de anisotrope situaties als volgt aanpakken met bekende formules die gelden voor isotrope situaties:

A. Bij driedimensionale stroming:

- Transformeer de 3 assen x , y en z volgens (4).
- Gebruik verder k' volgens (3).
- Laat stijghoogtes, volumestromen en de specifieke bergingscoëfficiënt (bergingscoëfficiënt per kubieke meter grond) ongewijzigd.
- Indien in plaats van de specifieke

bergingscoëfficiënt S_s die voor de volle pakkethoogte S of μ wordt gebruikt, transformeer dan deze volgens (8).

— Transformeer de weerstand van slecht doorlatende lagen volgens (9).

— Laat opgegeven volumestromen, tijden en potentialen ongewijzigd.

— Pas formules voor een isotroop medium toe.

B. Bij tweedimensionale stroming

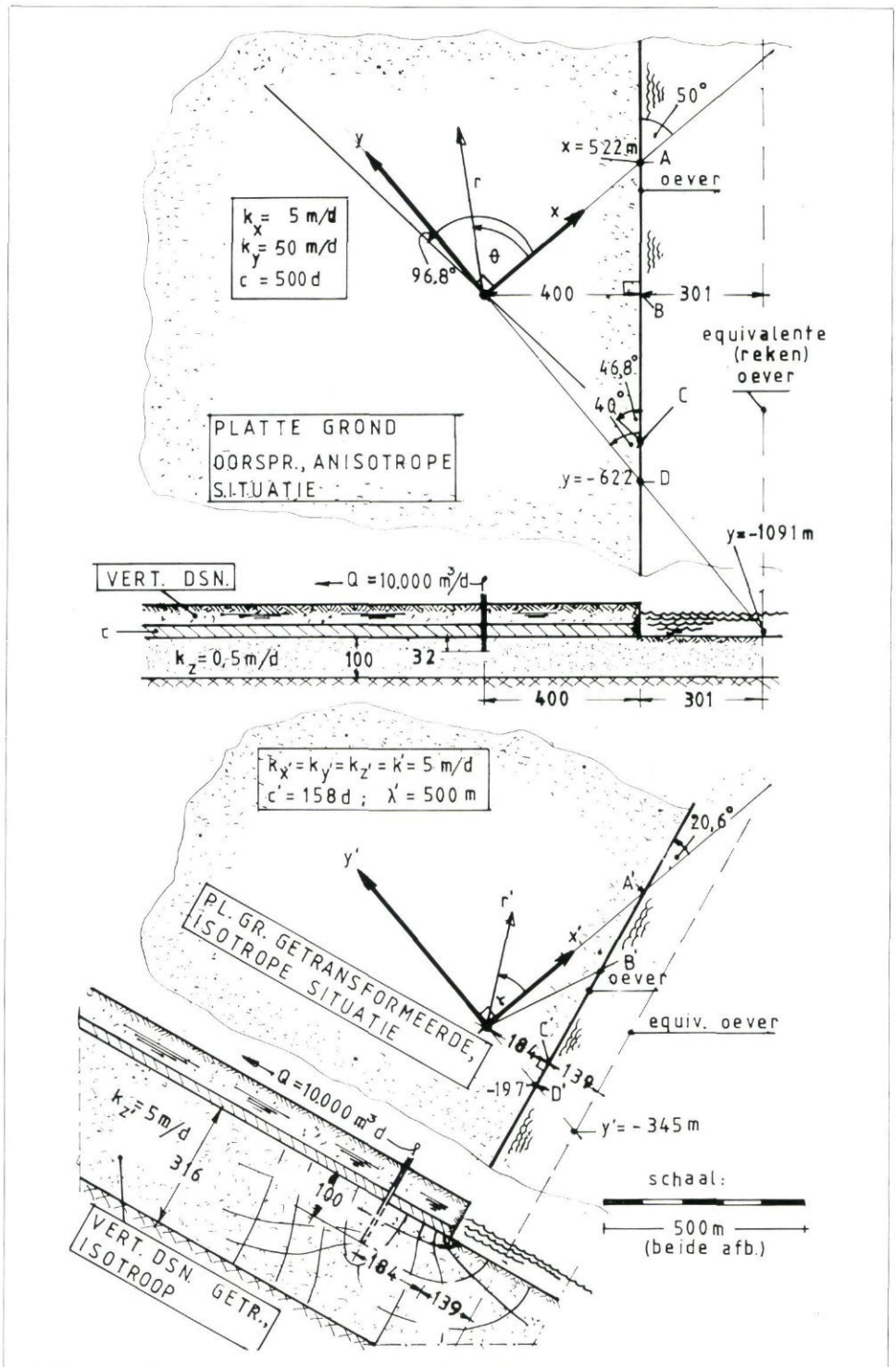
— Transformeer de assen volgens (13).

— Gebruik $k'H$ volgens (12).

— Laat weerstanden van slecht doorlatende lagen bergingscoëfficiënten, volumestromen, tijden en potentialen ongewijzigd.

— Pas formules voor isotroop medium toe.

Afb. 1 - Boven: plattegrond en verticale doorsnede van het oorspronkelijke, dus anisotrope medium. Onder: plattegrond en verticale doorsnede na transformatie; isotroop medium.



Coördinatentransformaties

Bij de transformaties is het handig om de coördinaten gemakkelijk in elkaar te kunnen uitdrukken. Beperken wij ons (hoewel niet noodzakelijk) tot het horizontale vlak, dan geldt volgens (13):

$$x' = \alpha x, y' = \beta y \quad (17)$$

In het oorspronkelijke medium kiezen wij poolcoördinaten: (zie afb. 1, boven)

$$x = r \cos \Theta, y = r \sin \Theta \quad (18)$$

In het getransformeerde medium analoog: (afb. 1, onder)

$$x' = r' \cos \tau, y' = r' \sin \tau \quad (19)$$

Met vgl. (17):

$$\alpha r \cos \Theta = r' \cos \tau; \beta r \sin \Theta = r' \sin \tau$$

Waaruit volgt:

$$\frac{r'}{r} = \sqrt{[(\alpha \cos \Theta)^2 + (\beta \sin \Theta)^2]} \quad (20)$$

$$\frac{r}{r'} = \sqrt{\left[\left(\frac{\cos \tau}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\sin \tau}{\beta}\right)^2\right]} \quad (21)$$

$$\Theta = \arccos \left\{ \frac{1}{\alpha} \frac{r'}{r} \cos \tau \right\} \text{ dan wel}$$

$$\Theta = \arcsin \left\{ \frac{1}{\beta} \frac{r'}{r} \sin \tau \right\} \quad (22)$$

of

$$\tau = \arccos \left\{ \alpha \frac{r}{r'} \cos \Theta \right\} \text{ dan wel}$$

$$\tau = \arcsin \left\{ \beta \frac{r}{r'} \sin \Theta \right\} \quad (23)$$

Voorbeelden

Voorbeeld driedimensionale stroming (afb. 1)

Stel dat met een grote put 10.000 m³ water per dag wordt onttrokken en dat deze put een filterlengte heeft van 32 m, die onvolkomen is en zich bevindt bovenin een 100 m dikke watervoerende laag met semi-spanningswater. Op 400 m afstand is een breed open water aanwezig dat de afdekkende kleilaag juist doorsnijdt (zie afb. 1).

De watervoerende laag nu is anisotroop, waarbij de grote hoofdas, hier y-as, een hoek van 40° maakt met de oever van het open water en we nemen aan, dat de volgende doorlatendheidscoëfficiënten zijn bepaald:

$$k_y = 50 \text{ m/d}, k_x = 5 \text{ m/d} \text{ en } k_z = 0,5 \text{ m/d.}$$

De weerstand c van de afdekkende kleilaag bedraagt:

$$c = 500 \text{ d.}$$

De verticale doorsnede loodrecht op het open water, met gelijke horizontale en verticale schalen (afb. 1, boven, DSN), doet vermoeden, dat de stroming tussen het open water en de put in hoofdzaak tweedimensionaal is. Door de anisotropie, en met name door de lage waarde van k_z , is dit echter helemaal niet het geval. Dit blijkt direct uit de verticale doorsnede loodrecht op de oever in de getransformeerde situatie (afb. 1, onder, DSN). In deze situatie immers geldt:

$$k' = \sqrt[3]{(50)(5)(0,5)} = 5 \text{ m/d.}$$

$$x' = \sqrt{\left(\frac{5}{50}\right)} x = \frac{1}{10} x$$

$$y' = \sqrt{\left(\frac{5}{50}\right)} y = 0,3162 y$$

$$z' = \sqrt{\left(\frac{5}{0,5}\right)} z = 3,162 z$$

zodat de y-as met ongeveer een factor 3 wordt ingekort en de z-as met ongeveer een factor 3 wordt uitgerekt. Aangezien wij hier de driedimensionale transformatie toepassen geldt voorts vgl. (9).

$$c' = c \sqrt{\left(\frac{k_z}{k'}\right)} = c \sqrt{\left(\frac{0,5}{5}\right)} = (0,3162)(500) = 158 \text{ d.}$$

en

$$k'H = (5)(3,162)(100) = 1580 \text{ m/d}$$

alsmede

$$\lambda' = \sqrt{(1580)(158)} = 500 \text{ m.}$$

Aan dit vraagstuk is een aantal aspecten interessant. Zo willen we het open water in rekening brengen door een spiegelbron te plaatsen die evenveel water infiltreert als de put onttrekt. De vraag is nu, waar de relevante oeverlijn ligt, de lijn waarachter wij het water als volkomen ingesneden sloot mogen beschouwen. Dit is ook de lijn waarom de put gespiegeld moet worden. In een isotroop medium bevindt deze lijn zich op 0,44 maal de pakdikte uit de oever, wat hier niet zal worden afgeleid. Aangezien het werkelijke medium echter anisotroop is, dient de spiegellijn te worden betrokken op de getransformeerde situatie en ligt hij dus op (afb. 1, onder)

$$0,44.H' = (0,44)(3,162)(100) = 139 \text{ m}$$

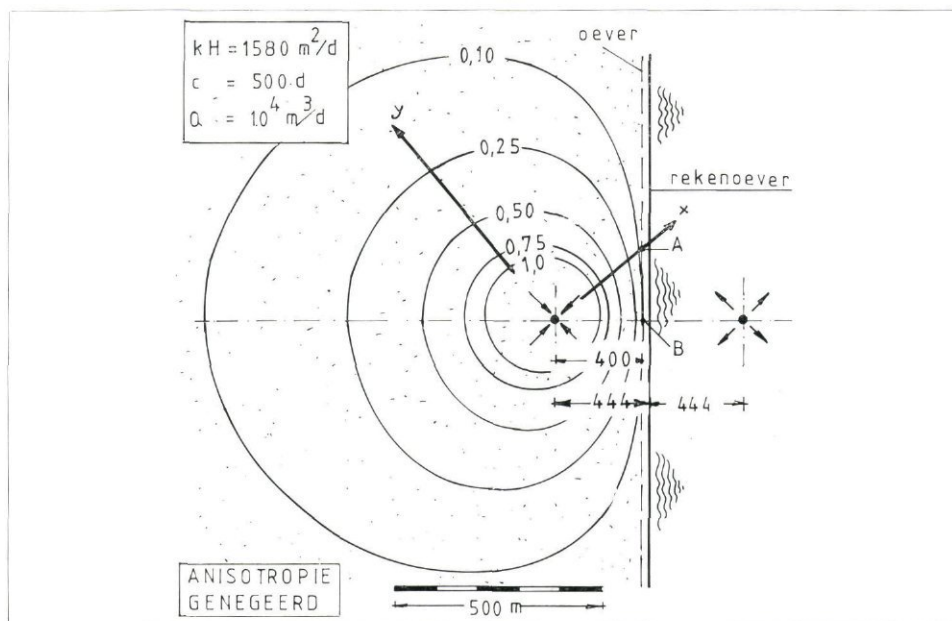
uit de oever in plaats van de 44 m die bij verwaarlozing van de anisotropie zou worden gekozen! (zie afb. 1). De getransformeerde situatie met spiegelput is in verticale doorsnede in afb. 3 weergegeven. De resultaten die wij op grond van afb. 3 verkrijgen gelden niet in de buurt van de oever, omdat verticale stroming zo niet wordt verdisconteerd. De stroming in de buurt van de oever moet apart bekeken worden.

Wij zullen eerst doen alsof beide putten volkomen zijn (afb. 3) en vervolgens de afwijkingen in rekening brengen die het gevolg zijn van de onvolkomenheid (afb. 4). Daarna wordt het geheel teruggetransformeerd naar de oorspronkelijke situatie en wordt de stroming in de buurt van de oever gecorrigeerd (afb. 5). (Deze laatste correctie is gemakshalve met de hand gemaakt.)

De verlaging Φ door de als volkomen beschouwde put met zijn spiegelbron aan de andere zijde van de equivalente oeverlijn wordt in het getransformeerde, isotrope geval gegeven door:

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi k'H'} \left\{ K_0 \left(\frac{r_1'}{\lambda'} \right) - K_0 \left(\frac{r_2'}{\lambda'} \right) \right\} \quad (24)$$

Afb. 2 - Tweedimensionaal berekeningsresultaat bij negatie van de anisotropie.

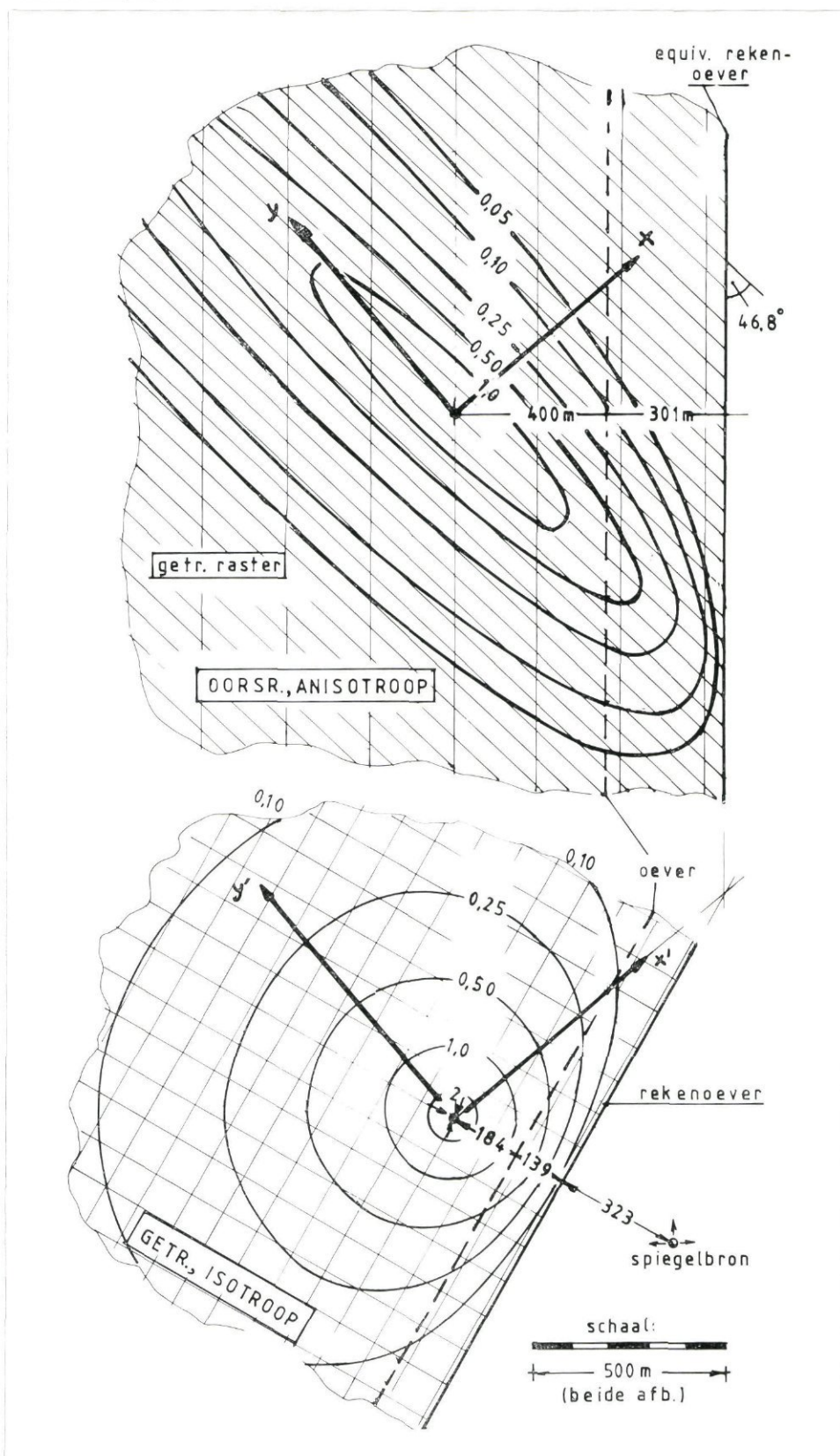


Waarin r_1' de afstand van het punt x', y' tot de put is en r_2' die tot de spiegelbron, beide in het getransformeerde en dus iso-

trope medium. Het resultaat is weergegeven in afb. 3. Terugtransformeren geschiedt eenvoudig door overbrenging van het

puntenraster naar de oorspronkelijke situatie (afb. 3, boven).

Afb. 3 - Onder: tweedimensionale berekening in getransformeerde, dus isotrope situatie met 100 m - raster. Boven: oorspronkelijk, anisotroop medium met teruggetransformeerd raster en overgenomen verlagingen.



De onvolkomenheid van de putten, waardoor naast horizontale tevens verticale stromingscomponenten optreden kan achteraf in rekening worden gebracht volgens Hantush [1964]:

$$\Delta \Phi = \frac{Q}{2\pi k' H'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \sin\left(\frac{n\pi b'}{H'}\right) - \sin\left(\frac{n\pi a'}{H'}\right) \right\} \cos\left(\frac{n\pi z'}{H'}\right) K_0 \left\{ \sqrt{\left(\frac{r'}{\lambda'}\right)^2 + \left(\frac{n\pi r'}{H'}\right)^2} \right\} \quad (25)$$

Waarin r' de afstand tot de put, z' de afstand verticaal omhoog vanaf de onderkant van het watervoerende pakket, $a' = z$ tot bovenkant putfilter = 316 m, $b' = z$ tot onderkant putfilter = 216 m, $d' =$ lengte putfilter = 100 m is de extra verlaging ten gevolge van de onvolkomenheid alleen en moet worden opgeteld bij het resultaat van de tweedimensionale berekening. De totale verlaging van de onvolkomen put en zijn spiegelput is voor de getransformeerde, isotrope situatie weergegeven in afb. 4. De afwijkende stroming in de buurt van de oever is in deze afb. nog niet verdisconteerd.

De transformatie

De hoek die de oeverlijn met de positieve x-as maakt bedraagt 50°. Een lijn door het assenkruis evenwijdig aan de oeverlijn voldoet dus aan (afb. 1, boven):

$$x = r \cos(50), \quad y = r \sin(50)$$

Aangezien, zie (17) en (13)

α hier 1 is en

$$\beta \text{ hier } 0,3162 \text{ is } \left(\sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)} \right),$$

volgt met (20):

$$\frac{r'}{r} = \sqrt{\cos^2(50) + \left(\frac{1}{10}\right) \sin^2(50)} = 0,687$$

en met (23):

$$\tau = \arccos \left[\frac{1}{0,687} \cos(50) \right] = 20,6^\circ$$

zodat de oeverlijn en alle lijnen daaraan evenwijdig in de getransformeerde, isotrope situatie geen hoek van 40°, maar een hoek van 20,6° met de positieve x-as maken (afb. 1, onder) en bovendien met een factor 0,687 zijn ingekort.

De lijn die in de getransformeerde, isotrope situatie door het assenkruis gaat en loodrecht staat op de oeverlijn, maakt een hoek τ van 110,6° met de positieve x'-as (namelijk 90° + 20,6°) en voldoet dus aan:

$$x' = r' \cos(110,6); \quad y' = r' \sin(110,6)$$

daar $\alpha^2 = 1$ en $\beta^2 = 0,1$ volgt met (21):

$$\frac{r}{r'} = \sqrt{[\cos^2(110,6) + 10 \sin^2(110,6)]} = 2,981$$

en met (22):

$$\Theta = \arccos \left[\frac{1}{2,981} \cos(110,6) \right] = 96,8^\circ$$

De lijnen loodrecht op de oever in de getransformeerde, isotrope situatie maken dus in het anisotrope, oorspronkelijke medium een hoek van $96,8^\circ$ met de positieve x-as en zijn bovendien dan met een factor 2,981 uitgerekt. De hoek die de loodlijnen op de oever in het getransformeerde, isotrope medium na terugtransformatie met de oever maken, bedraagt $96,8 - 50 = 46,8^\circ$ en is dus duidelijk verre van haaks (afb. 1, onder).

Een efficiënte werkwijze ontstaat nu wanneer wij vgl. (24) berekenen voor een aantal punten in een rechthoekig raster van het isotrope medium. Dit raster is met de hierboven afgeleide transformatie direct over te planten naar het anisotrope medium waarin dan de berekende verlagingen uit het isotrope medium eenvoudig kunnen worden overgenomen.

Het resultaat voor beide media is gegeven in afb. 3 onder en boven.

Afb. 2 geeft het resultaat dat u zoudt vinden wanneer u de anisotropie negeert ($kH = \sqrt{(5), (50)} (100) = 1580 \text{ m}^2/\text{d}$; de equivalente oeverlijn ligt dan op $(0,44) (100) = 44 \text{ m}$ uit de echte oever, de weerstand c wordt niet getransformeerd, zodat $\lambda = \sqrt{(1580) (500)} = 890 \text{ m}$). Het verschil is aanzienlijk en plaatselijk zelfs erg groot.

Afb. 4 geeft o.m. de verticale doorsnede loodrecht op de oever in het getransformeerde, isotrope medium. De extra verlagingen en verhogingen door onvolkomenheid (vgl. 25) zijn hier opgeteld bij respectievelijk afgetrokken van het resultaat dat geldt voor volkomen putten (vgl. 24). De verticale componenten springen duidelijk in het oog.

Uit afb. 3 en 4 mag worden afgeleid, dat het verlagingenbeeld van afb. 3 wordt aangetroffen op ongeveer halve hoogte van de watervoerende laag. Direct onder de klei zijn zij in de buurt van de put groter en onderin het pakket kleiner. Door de bijzondere stroming naar het open water is daar de situatie andersom. De teruggetransformeerde doorsnede vindt u in afb. 5, waarin de stroming bij

de oever met de hand is aangepast (streepjeslijn).

Vergelijking van de twee- en de driedimensionale transformaties

Indien deze opgave direct tweedimensionaal zou zijn aangepakt, dan zou gewerkt zijn met de volgende bodemconstanten (zie vgl. (12) e.v.):

$$k'H = \sqrt{(k_x H \cdot k_y H)} = \sqrt{(k_x k_y)} = 100 \sqrt{(5) (50)} = 1580 \text{ m}^2/\text{d},$$

terwijl de weerstand c nu niet wordt getransformeerd en dus gelijk aan 500 d blijft (15). λ' wordt nu:

$$\lambda' = \sqrt{(1580) (500)} = 890 \text{ m}$$

en de coördinatentransformatie verloopt nu volgens (13):

$$x' = 1,78 x; \quad y' = 0,562 y$$

De verlaging Φ die onttrekking Q in het punt (0,0) in het willekeurige punt (x, y) veroorzaakt,

$$(x'; y') = ((1,78 x); (0,562 y))$$

waarvoor dus geldt:

$$r' = \sqrt{(3,17 x^2 + 0,316 y^2)}$$

wordt dus:

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi 1580} K_0 \left\{ \frac{\sqrt{(3,17 x^2 + 0,316 y^2)}}{890} \right\}$$

$$= \frac{Q}{2\pi 1580} K_0 \left\{ \sqrt{(4,00 \cdot 10^{-6} x^2 + 0,40 \cdot 10^{-6} y^2)} \right\}$$

Het driedimensionale geval zou nu hetzelfde antwoord moeten opleveren. In het driedimensionale geval geldt volgens vgl. (3) e.v.:

$$k' = \sqrt[3]{((50) (5) (0,5))} = 5$$

$$x' = x$$

$$y' = 0,316 y \quad \text{dus } (y')^2 = 0,1 y^2$$

$$z' = 3,162 y$$

en

$$c' = c \sqrt{\frac{0,5}{5}} = 0,316 c = 158 \text{ d}.$$

In het geval een volkomen put aanwezig is in (0,0) moet de driedimensionale berekening tot hetzelfde resultaat komen als de tweedimensionale. De verlaging Φ door een onttrekking Q in (0,0) in het punt (r, z) wordt nu met:

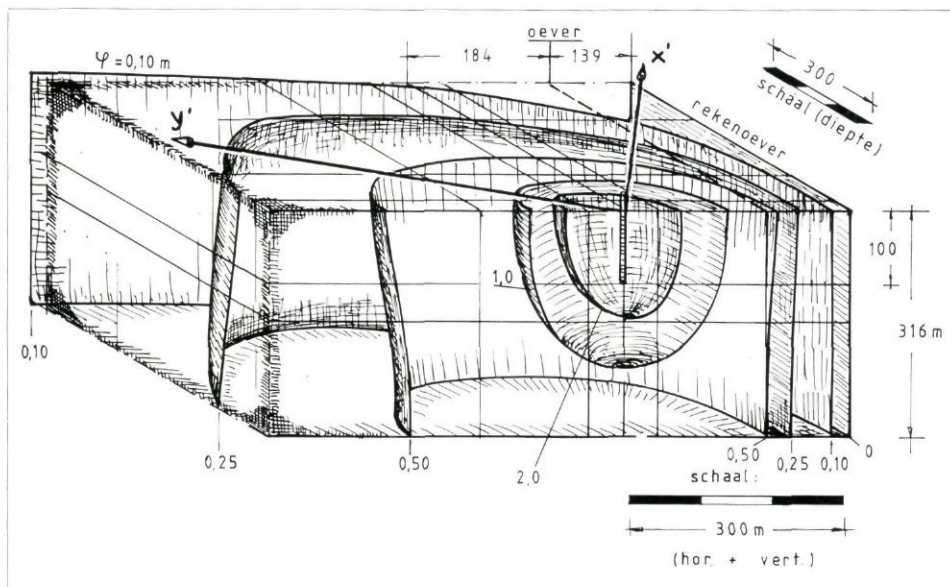
$$k'H' = (5) (3,162) (100) = 1580 \text{ m}^2/\text{d}$$

en

$$\lambda = \sqrt{[(1580) (158)]} = 500 \text{ m};$$

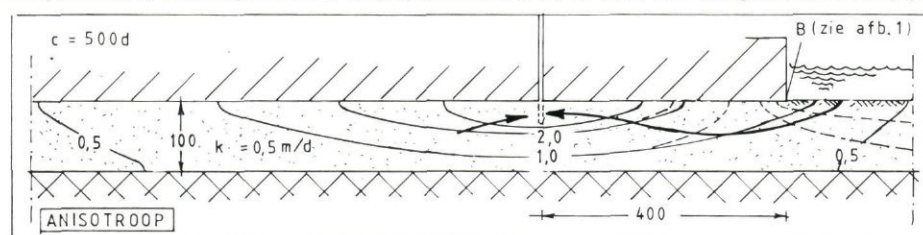
$$\Phi = \frac{Q}{2\pi 1580} K_0 \frac{\sqrt{(x^2 + 0,1 y^2)}}{500}$$

$$= \frac{Q}{2\pi 1580} K_0 \sqrt{(4,00 \cdot 10^{-6} x^2 + 0,40 \cdot 10^{-6} y^2)}$$



Afb. 4 - Potentiaalvlakken (verlagingsvlakken) rond de onvolkomen put in driedimensionale weergave. De oeversituatie is in deze afbeelding nog niet in rekening gebracht.

Afb. 5 - Verticale doorsnede over de lijn put-punt B (zie afb. 1) na terugtransformatie tot het oorspronkelijke, anisotrope medium waarbij de stroming bij de oever met streepjeslijnen is aangegeven.



hetgeen inderdaad hetzelfde is als hiervoor met de tweedimensionale transformatieformules was berekend. Hiermee is aangetoond dat de driedimensionale behandeling van het probleem in situaties die evengoed tweedimensionaal kunnen worden berekend, ondanks de andere transformaties, in elk willekeurig punt hetzelfde resultaat oplevert als de tweedimensionale berekening. (De twee- en driedimensionale transformaties mogen echter nooit worden vermengd).

Stroomlijnen en verblijftijden

De transformaties veranderen het anisotrope medium in een isotroop medium. In het isotrope, getransformeerde medium mogen wij stroomlijnen op de gebruikelijke manieren bepalen (tekenen van een vierkantennet, uitvoeren van conforme (complexe) transformaties, numeriek rekenen met de daarvoor beschikbare programma's). De coördinaten van de berekende stroomlijnen zijn vervolgens, zonder restricties, terug te transformeren naar het anisotrope medium, waarbij dan zal blijken dat stroom- en potentiaallijnen niet meer haaks op elkaar staan (afb. 5). Wij willen tenslotte nog de vraag beantwoorden of de tot nu toe uitgevoerde en afgeleide procedures en transformaties ook opgaan voor het berekenen van verblijftijden. Ook deze vraag zal positief worden beantwoord. Ten bewijze zal worden nagegaan of de verplaatsingsvector die een druppel in het anisotrope medium, uitgaande van het willekeurige punt (x, y) gedurende de tijd dt aflegt, na transformatie dezelfde is als die welke de druppel in het getransformeerde medium, vanuit het getransformeerde startpunt (x', y') gedurende dezelfde tijd dt aflegt.

De verplaatsingsvector in het anisotrope, oorspronkelijke medium bedraagt:

$$ds = -\frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} k_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ k_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ k_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (26)$$

waarin ε het poriënvolume.

De verplaatsingsvector in het isotrope medium bedraagt:

$$ds' = -\frac{k'}{\varepsilon'} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z'} \end{pmatrix} dt' = \begin{pmatrix} dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} \quad (27)$$

Transformatie van de x-, y- en z-coördinaat (26) volgens (3) levert dan met (4):

$$ds' = -\frac{1}{\varepsilon'} \begin{pmatrix} k'_x \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2} \\ k'_y \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2} \\ k'_z \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2} \end{pmatrix} dt \quad (28)$$

Waarin $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ en $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ nog vervangen

worden door respectievelijk:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \frac{k'}{k_x};$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \frac{k'}{k_y}$$

en

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z'} \frac{k'}{k_z}$$

zodat (28) reduceert tot:

$$ds' = -\left(\frac{1}{\varepsilon'}\right) \begin{pmatrix} k' \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \\ k' \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \\ k' \frac{\partial \Phi}{\partial z'} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} \quad (29)$$

Wanneer wij in het getransformeerde, isotrope medium $\varepsilon' = \varepsilon$ en $t' = t$ zetten, is dit inderdaad precies de verplaatsingsvector die optreedt wanneer wij het anisotrope medium vergeten en de verblijftijden gewoon direct in het getransformeerde, isotrope medium uitvoeren (27). Het berekenen van verblijftijden is dus, in tegenstelling tot wat soms gedacht wordt, zonder meer in het getransformeerde medium mogelijk, in die zin dat in het getransformeerde medium verkregen resultaten ook gelden voor het oorspronkelijke, anisotrope medium.

Pompproeven in een anisotroop medium

Bij veel pompproeven wordt slechts een enkele raai met waarnemingsputten gebruikt. Vanzelfsprekend valt daarmee elke anisotropie buiten het gezichtsveld. Wellicht is deze verkeerde uitvoering van pompproeven de reden dat in de praktijk weinig anisotropie is ontmoet. Met een tweede raai waarnemingsputten kan alleen dan wat over de anisotropie worden gezegd, wanneer de richting van de hoofdasen tevoren bekend is, maar waar is dit al het geval? Een goede pompproef behoeft, ter vaststelling van de anisotropie in het horizontale vlak, waarnemingsputten in minstens 3 verschillende richtingen.

Wat is het gevolg van pompproeven in een anisotroop medium met maar één enkele raai waarnemingsputten? Het zal wellicht verbazing wekken, dat het verhang rond de put in een anisotroop medium op elk punt van een willekeurige cirkel met de put als middelpunt precies hetzelfde is en overeenkomt met de getransformeerde $k'H$:

$$k'H = \sqrt{(k_x H : k_y H)} \quad (13)$$

Proeven met slechts één willekeurig georiënteerde raai waarnemingsputten leveren dan ook steeds dezelfde $k'H$ op. Wat echter niet meer klopt, zijn de andere parameters die uit de pompproefinterpretatie worden ontleend. Zo zijn de rand 'R' waarop geen verlagings meer optreedt, de spreidingslengte λ en dus de weerstand c , alsmede de bergingscoëfficiënt S of μ een functie van de toevallige richting waarin de waarnemingsputten staan opgesteld! Dit kan eenvoudig worden aangetoond. De verlaging rond een put in volkomen spanningswater met vaste rand op afstand 'R' in het getransformeerde, dus isotrope, medium voldoet aan:

$$s = \frac{Q}{2\pi k'H} \ln \left(\frac{R'}{r'} \right) \quad (30)$$

waarin Q , $k'H$ en R' vaste getallen zijn en r' variabel is.

$$(r')^2 = (x')^2 + (y')^2 \quad (31)$$

Met

$$a = \sqrt{\left(\frac{k_x H}{k'H}\right)} \text{ en } b = \sqrt{\left(\frac{k_y H}{k'H}\right)} \quad (32)$$

levert overgang op de oorspronkelijke coördinaten (x en y) ellipsen op:

$$r' = \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (33)$$

of met Θ als hoek tussen de voerstraal r en de positieve x-as ($x = r \cos \Theta$ en $y = r \sin \Theta$):

$$r' = r \sqrt{\left(\frac{\cos \Theta}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin \Theta}{b}\right)^2} \quad (34)$$

Hiermee kan (30) als volgt worden geschreven:

$$s = \frac{Q}{2\pi k'H} \ln \left(\frac{R}{r} \right) \quad (35)$$

waarin nu echter

$$R = R' / \sqrt{\left(\frac{\cos \Theta}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin \Theta}{b}\right)^2} \quad (36)$$

Aangezien Q , $k'H$ en R' vaste getallen zijn, gedraagt de verlaging op een cirkel rond de put in een anisotroop medium, dus $r = \text{vast}$, zich alsof $kH = k'H$ en

$$R = R' / \sqrt{\left(\frac{\cos \Theta}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin \Theta}{b}\right)^2}, \text{ dus}$$

hoeveelheid overstortend water van ongeveer 20 %. Nadere calibratie met de resterende parameters en een groter aantal onafhankelijke buien levert naar verwachting een aanzienlijk geringere afwijking op.

- De waarden van de gecalibreerde parameters komen overeen met de waarden die hiervoor uit de literatuur bekend zijn.
- STORM berekent voor het bergingsbassin aan de Roessinghbleekweg een gemiddeld aantal overstorten van 1,7 per jaar, hetgeen overeenkomt met het in de praktijk situatie optredende aantal overstorten van 1 à 2 maal per jaar.
- De grootste overeenkomst tussen prototype en model werd bereikt voor een concentratietijd van ongeveer 2 uur en een riooltransportcapaciteit van 0,56 à 0,58 m³ per seconde. De schatting van de gemeente Enschede voor deze transportcapaciteit bedroeg 0,6 m³ per seconde.

5.3. Aanbevelingen voor nader onderzoek

- Voor een goede calibratie van de kwantiteit zijn registraties van neerslag, vulling van het bergingsbassin en het aantal overstorten per jaar onvoldoende. Registratie van het debiet op verschillende plaatsen in het rioolwatersysteem wordt dan ook aanbevolen.
- Calibratie van de waterkwaliteitsparameters van STORM voor Enschede-Noord bleek door de zeer geringe hoeveelheid waterkwaliteitsgegevens niet mogelijk. De huidige, eenmaal per twee weken door het waterschap bij de RWZI genomen verzamelingen zijn ontoereikend voor een bepaling van de kwaliteit van het aanvoerde afvalwater. Tevens dient de kwaliteit op meer plaatsen dan alleen de RWZI-West te worden bepaald om na te gaan welke kwaliteitsverandering optreedt door het verblijf in het rioolstelsel inclusief de bergingsbassins.
- Indien uitbreiding van de bepalingen m.b.t. de waterkwaliteit niet mogelijk is, dient te worden nagegaan of (en zo ja in welke mate) de kwaliteit van het afvalwater kan worden beschreven door gemiddelde concentraties.
- Als de afvalwaterkwaliteit kan worden beschreven door gemiddelde concentraties, is het kwantitatieve gedeelte van STORM reeds nu een bruikbaar instrument ten behoeve van het oppervlaktewaterkwaliteitsbeheer, mede omdat STORM kan worden gekoppeld aan een waterkwaliteitsmodel voor oppervlaktewater, zoals het reeds bij het Waterloopkundig Laboratorium operationele model MODQUAL [3]. Met behulp van STORM en MODQUAL kunnen de gevolgen voor het oppervlaktewater worden

bepaald voor wat betreft de waterkwantiteit en -kwaliteit.

Literatuur

1. Ribbius, F. J. *Waterverontreiniging door regenoverstorten*. Publieke Werken Enschede, 1951.
2. Ten Heuvel, W. *Enschede op het hoogste punt in het waterschap de Regge*. Technisch Gemeentebld Enschede, sept. 1963.
3. Klomp, R. en Pagee, J. A. van. *Een modelmatige benadering van de waterkwaliteit van de Rijn*. H₂O (16) 1980, pp. 365 - 371.
4. Sautier, W. L. and Deleur, W. J. *Calibration and sensitivity analysis of the continuous runoff simulation model 'STORM'*. Purdue University, Water Resources Research Centre, West Lafayette, Indiana, IGR no. 144, Aug. 1978.
5. Chow, V. T., 1964. *Handbook of applied hydrology*. McGraw-Hill.



Metalen ruimtevakwerken

- Slot van pagina 261

aanzienlijk hoger zijn dan de siliciumlegeringen.

De kostprijs van een aluminium koepel kan het dubbele zijn van een geconserveerde stalen koepel. De gewichtsreductie bij gebruik van aluminium kan 40 % bedragen, maar kan teruglopen tot 20 % indien het voor een kegel wordt gebruikt die een lagere hellingshoek heeft dan 20°. Van de bekende ruimtevakwerksystemen kunnen *Mero* en *Octacube* worden uitgevoerd in roestvast staal, en *Triodetic* en *Octacube* in aluminium. De drie systemen kunnen alle in gewoon staal worden uitgevoerd.

15. Conclusie

Voor het overdekken van onderdelen van rioolwaterzuiveringsinrichtingen is een aantal combinaties van kunststof afsluitende huiden en metalen ruimtevakwerken als dragende skeletten mogelijk:

1. een ronde of rechthoekige plattegrond;
2. in doorsnede plat dak, kegel- of koepelvormig;
3. ruimtevakwerk in aluminium, staal of roestvast staal;
4. de kunststof huid boven of onder het skelet;
5. huid van PVC gecoat polyester weefsel of van glasvezel gewapende polyester panelen.



Anisotropie

- Slot van pagina 267

alsof uitsluitend de R van de richting Θ afhankelijk is.

Voor semi-spanningswater geldt geheel analoog

$$\lambda = \lambda' / \sqrt{\left(\frac{\cos \Theta}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin \Theta}{b}\right)^2} \quad (37)$$

Voor instationaire stroming geldt in het getransformeerde, isotrope medium:

$$s = \frac{Q}{4 \pi k' H} W(u') \quad (38)$$

met

$$u' = \frac{(r')^2 \mu'}{4k' H} \quad (39)$$

(39) is, analoog aan bovenstaande, te schrijven als:

$$u' = \frac{r^2 \mu}{4k' H} \quad (40)$$

met

$$\mu = \mu' \left\{ \left(\frac{\cos \Theta}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin \Theta}{b}\right)^2 \right\} \quad (41)$$

zodat bij de interpretatie uitsluitend een van de oriëntatie afhankelijke bergingscoëfficiënt wordt verkregen.

Bij instationair, semi-spanningswater zijn zowel de verkregen bergingscoëfficiënt als de λ -waarde afhankelijk van de richting waarin de ene rij peilputten toevallig is geplaatst. Het feit dat in alle gevallen van anisotropie de juiste $k'H$ -waarde wordt gevonden, mag geen aanleiding zijn het probleem als onbelangrijk van de hand te doen. Immers de cirkels die men trekt, op grond van weliswaar goede $k'H$ maar verkeerde, toevallig verkregen waarden van R' , λ' en μ' , kunnen aanzienlijk afwijken van de ellipsen die men eigenlijk zou moeten trekken.

De conclusies die dan aan de cirkels worden verbonden kunnen dan ook ronduit verkeerd zijn, met name waar voorspellingen worden gedaan over de te verwachten grondwaterstandsverlagen op specifieke plaatsen als natuurterreintjes en dergelijke. Het is dan ook van harte aan te bevelen pompproeven zodanig op te zetten dat een eventuele anisotropie kan worden achterhaald.

Literatuur

- Hantush, M. S. *Hydraulics of Wells in Adv. in Hydroscience*, 1964.
- Huisman, L. and Olsthoorn, T. N. *Artificial Groundwater recharge*. Pitman inc., 1982 (in press).
- Verruijt, A. *Theory of Groundwater Flow*. Macmillan New York etc., 1970.
- Kruseman, G. P. and Ridder, N. A. de. *Analysis and evaluation of pumping test data*. Int. Inst. for land reclamation and improvement, Wageningen, the Netherlands, 1970, Bulletin 11.

