

Niet-stationaire stroming van zoet en zout grondwater met de elementenmethode

1. Inleiding

Door de KIWA-commissie Infiltratie is in 1979 het project Hydrologie van Persput-systemen gestart [Roebert, 1979]. Daarin werken een aantal drinkwater-productie-bedrijven samen met de Technische Hogeschool Delft, met medewerking van experts van het KIWA, het RID en de Rijkswaterstaat. De belangrijkste doelstelling is de ontwikkeling van efficiënte berekeningsmethoden, met name op basis van numerieke modellen, voor de analyse van de grondwaterstroming bij een systeem



PROF. DR. IR. A. VERRUIJT
Technische Hogeschool Delft
Afdeling der Civiele Techniek
Vakgroep Geotechniek



IR. J. B. S. GAN
Technische Hogeschool Delft
Afdeling der Civiele Techniek
Vakgroep Geotechniek

van watervoorziening met een ondergrondse voorraad die gevormd wordt met behulp van persputten.

Twee aspecten hiervan hebben tot nu toe de meeste aandacht gekregen: verblijftijd-spreiding en de beweging van een eventueel scheidingsvlak tussen zoet en zout (of brak) grondwater. Over het eerste aspect is reeds vrij uitvoerig gepubliceerd [zie bijv. Van den Akker, 1982; Peters, 1982]. Dit artikel is speciaal gericht op het tweede aspect: de beweging van een grensvlak tussen zoet en

zout grondwater. Voor de voorspelling van de beweging van zo'n grensvlak bestaan verschillende methoden, elke met hun eigen toepassingsmogelijkheden. Op dit moment zijn er verschillende rekenmethoden beschikbaar, waarbij het zoute water aan de stroming kan deelnemen (zoals elementenmethode, differentiemethode, vortexbeleggingen). Om een aantal verschillende rekenmethoden met elkaar in verband te brengen en zo de meer algemene methoden te kunnen toetsen, zal in dit artikel onder meer gerapporteerd worden over een aantal berekeningen die betrekking hebben op zoveel mogelijk hetzelfde geval. Speciale aandacht zal worden besteed aan een tweetal numerieke modellen, beide op basis van de elementenmethode.

2. Toetsprobleem

Het eerste toetsprobleem betreft een homogeen zandpakket van constante dikte H , aan onder- en bovenzijde begrensd door volkomen ondoorlatende lagen. In het pakket bevindt zich oorspronkelijk een laag zout grondwater ter dikte h_0 , zie afb. 1. Het pakket wordt aan twee zijden begrensd door twee evenwijdige kanalen, op een afstand $2L$, waarin de hoogte van het zoete en zoute water constant wordt gehouden. Midden tussen de kanalen bevindt zich een rij van putten, met onderlinge afstanden B , en alle met hetzelfde debiet Q_0 .

De doorlatendheidscoëfficiënt van het zand wordt aangegeven met k , en de bergingscoëfficiënt met S . De massadichtheid van het zoete grondwater is ρ_f , en die van het zoute grondwater ρ_s .

In de numerieke berekeningen zullen de volgende getalwaarden worden aangehouden: $L = 500$ m, $B = 50$ m, $H = 40$ m, $h_0 = 10$ m, $Q_0 = 50$ m³/d, $k = 50$ m/d, $S = 0,4$, $\rho_f = 1.000$ kg/m³, $\rho_s = 1.025$ kg/m³. Deze waarden zijn redelijk representatief voor situaties zoals die voorkomen in het Nederlandse kustgebied. Het debiet van de putten is voor de praktijk onbruikbaar laag, maar in het hier beschouwde geval is er ook geen infiltratie.

3. Eenvoudige globale berekeningen

Alvorens over te gaan tot de behandeling van

algemene, maar meestal nogal gecompliceerde, numerieke modellen, zal eerst getracht worden enige globale analytische benaderingen te geven. Dergelijke eenvoudige benaderingen zijn altijd zinvol en nuttig om een eerste schatting te maken, of om een indruk te krijgen van de orde van grootte van de te verwachten fenomenen. In dit geval zijn er twee eenvoudige benaderingen mogelijk: een afschatting van de stationaire eindtoestand en een benadering van het tijdsafhankelijke gedrag kort na het in werking treden van de putten. Een eerste benadering voor de vorm van het scheidingsvlak in de stationaire eindtoestand kan men vinden met behulp van een twee dimensionale analyse in het verticale vlak volgens de benadering van Ghyben-Dupuit [Verruijt, 1982]. De daarvoor gebruikte schematisering is getekend in afb. 2.

De puttenrij moet voor deze benadering worden vervangen door een verticaal scherm waarvoor per meter breedte een debiet $0.5Q_0/B$ aan de grond wordt onttrokken. De aanname van Dupuit houdt in dat gesteld wordt dat zowel in het zoete als in het zoute grondwater de drukverdeling in verticale richting hydrostatisch is en dat op het scheidingsvlak de druk continu is. Dit betekent dat men kan schrijven:

$$\begin{aligned} 0 < z < h : p &= \rho_f g \phi - \rho_s g z \\ h < z < H : p &= \rho_f g - (\rho_s - \rho_f) g h - \rho_f g z \quad (1) \end{aligned}$$

Deze uitdrukkingen voldoen aan de eisen dat voor $z < h$ geldt dat

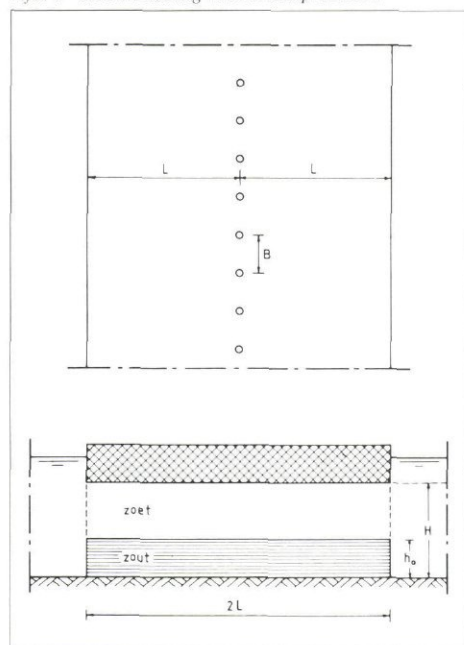
$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_s g, \text{ dat voor } z > h \text{ geldt dat } \frac{\partial p}{\partial z} =$$

$-\rho_f g$, en dat voor $z = h$ de druk continu is. Er is voorts een zodanige integratieconstante ingevoerd dat de drukverdeling uitgedrukt is in een tweetal eenvoudige parameters: de hoogte h van het scheidingsvlak, en een stijghoogte ϕ , die eigenlijk de zoetwaterstijghoogte is op de bodem van de zandlaag (d.w.z. voor $z = 0$). De wet van Darcy voor de stroming in x -richting is:

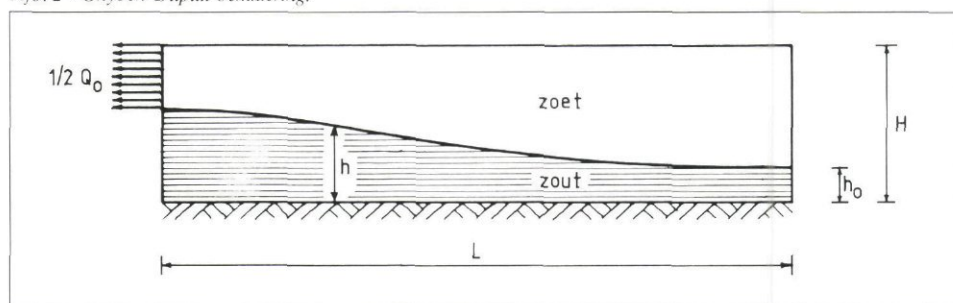
$$q_x = -\frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$

waarin κ de intrinsieke doorlatendheid is, en

Afb. 1 - Schematisering van het toetsprobleem.



Afb. 2 - Ghyben-Dupuit-benadering.



μ de viscositeit van de vloeistof. Uit (1) en (2) volgt, als aangenomen wordt dat beide vloeistoffen dezelfde viscositeit hebben, hetgeen in het algemeen slechts een geringe beperking is [Verruijt, 1980]:

$$0 < z < h : q_x = -k \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$h < z < H : q_x = -k \frac{\partial \phi}{\partial x} + \alpha k \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3)$$

Hierin is k de doorlatendheidscoëfficiënt,

$$k = \frac{\kappa \rho_f g}{\mu} \quad (4)$$

en α is het relatieve dichtheidsverschil

$$\alpha = \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} \quad (5)$$

De grootte van de factor α is ongeveer 0,025. De benadering van Badon Ghyben is nu om stijghoogteverliezen in het zoute grondwater te verwaarlozen. In de stationaire eindtoestand, wanneer het zoute water niet meer beweegt, is dat ook correct. Dat betekent dan, op grond van de eerste vergelijking van (3), dat ϕ constant is. Voor de stroming in het zoete grondwater geldt dan:

$$h < z < H : q_x = \alpha k \frac{\partial h}{\partial x} \quad (6)$$

Voor het debiet Q door een verticale strook ter breedte B krijgt men dan:

$$Q = (H-h)Bq_x = \alpha k(H-h)B \frac{\partial h}{\partial x}$$

ofwel

$$Q = -\frac{1}{2} \alpha k B \frac{\partial (H-h)^2}{\partial x} \quad (7)$$

Op grond van continuïteit van de stroming in het zoete water moet gelden dat dit een constante is, d.w.z. $\partial Q / \partial x = 0$, en dus

$$\frac{\partial^2 (H-h)^2}{\partial x^2} = 0 \quad (8)$$

De algemene oplossing hiervan is

$$(H-h)^2 = Ax + B \quad (9)$$

waarbij de integratieconstanten uit de randvoorwaarden moeten worden bepaald. De randvoorwaarden zijn in dit geval

$$x = 0 : Q = -\frac{1}{2} Q_0$$

$$x = L : h = h_0 \quad (10)$$

De uiteindelijke oplossing wordt nu

$$(H-h)^2 = (H-h_0)^2 - \frac{Q_0}{\alpha k B} (L-x) \quad (11)$$

Voor de maximale hoogte van het grensvlak, juist onder de verdeelde puttenrij, d.w.z. voor $x = 0$, vindt men nu,

$$(H-h_m)^2 = (H-h_0)^2 - \frac{Q_0 L}{\alpha k B} \quad (12)$$

Met behulp van de numerieke waarden, die in paragraaf 2 zijn gekozen vindt men nu

$$h_m = 17,64 \text{ m} \quad (13)$$

Volgens deze eenvoudige benadering zou het grensvlak onder de puttenrij dus 7,64 m omhoog komen. Men bedenke wel dat hier de invloed van de puttenrij gelijkmatig verdeeld is over de breedte B . In werkelijkheid zal het grensvlak ter plaatse van de putten waarschijnlijk meer omhoog komen, en tussen de putten dus iets minder.

Ook voor het verloop van de hoogte van het grensvlak als functie van de tijd kan men een eenvoudig globale berekening uitvoeren. Uitgangspunt is weer de Ghyben-Dupuit-benadering. Daarbij worden stijghoogteverschillen in het zoute water verwaarloosd, ook al beweegt het grensvlak. Dat kan weliswaar niet geheel juist zijn, maar men kan redeneren dat in dit geval, waarbij de snelheden in het zoete water aanmerkelijk groter zullen zijn dan die in het zoute grondwater (omdat zoet water wordt weggepompt), in eerste benadering de stijghoogteverschillen in het zoute water relatief gering zullen zijn. Dat betekent dat men ook in het niet-stationaire geval voor het debiet in het zoete water kan schrijven (zie bij de afleiding van vergelijking (7):

$$Q = \alpha k(H-h)B \frac{\partial h}{\partial x} \quad (14)$$

Deze uitdrukking kan men lineariseren door aan te nemen dat de factor $(H-h)$ niet veel zal verschillen van de beginwaarde $(H-h_0)$. Dit betekent uiteraard dat de benadering ook alleen maar bruikbaar kan zijn voor kleine veranderingen in de hoogte van het grensvlak. Vergelijking (14) kan nu dus worden benaderd door:

$$Q = \alpha k(H-h_0)B \frac{\partial h}{\partial x} \quad (15)$$

Continuïteit van het zoute grondwater vereist dat

$$BS \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (16)$$

waarin S de bergingscoëfficiënt is. Uit (15) en (16) volgt dat

$$\frac{\partial h}{\partial t} = c \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (17)$$

waarin

$$c = \frac{\alpha k(H-h_0)}{S} \quad (18)$$

Als randvoorwaarde worden gesteld:

$$x = \infty : h = h_0$$

$$x = 0 : Q = -\frac{1}{2} Q_0 \quad (19)$$

Het probleem beschreven door de differentiaalvergelijking (17) met de randvoor-

waarden (18), en met als beginvoorwaarde dat voor $t = 0$: $h = h_0$, kan men oplossen met behulp van de Laplace-transformatie. De details van de berekening zullen niet worden gegeven. Een van de eindresultaten van de berekening is dat voor de hoogte van het grensvlak ter plaatse $x = 0$ geldt dat

$$h = h_0 + \frac{Q_0}{B} \left\{ \frac{t}{\pi \alpha k (H-h_0) S} \right\}^{1/2} \quad (20)$$

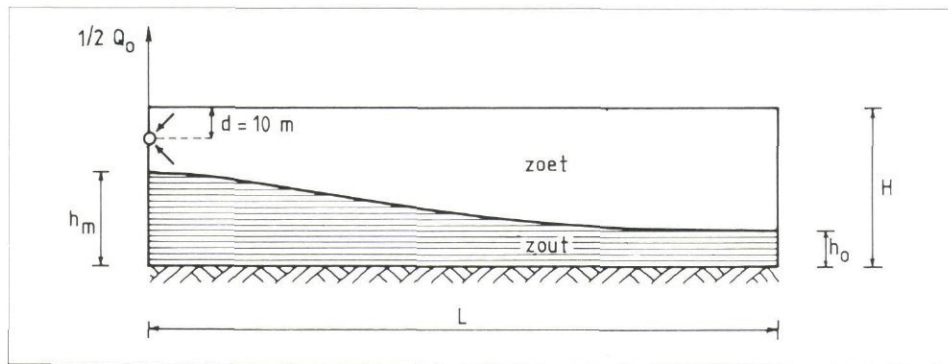
Met behulp van de numerieke waarden genoemd in paragraaf 2 is voor een aantal waarden van de tijd de hoogte van het scheidingsvlak berekend, zie tabel I. De benadering is, door de onrealistische randvoorwaarde aan de rechterzijde, en door de linearisering, alleen geldig voor kleine waarden van de tijd. Eigenlijk mag men alleen maar concluderen, dat de waarde van h in het begin ongeveer evenredig is met de wortel uit de tijd (na 4 maal zo lange tijd is de verhoging 2 maal zo groot), en dat na 10 dagen een stijging van de orde van grootte van 23 cm kan worden verwacht. De resultaten worden onbetrouwbaar als de tijd t groter is dan ongeveer 100 dagen.

4. Elementenmethode in een verticaal vlak

Bij het laboratorium voor Geotechniek van de Technische Hogeschool Delft is een computerprogramma ontwikkeld voor de stroming van een vloeistof met variabele dichtheid in een verticaal vlak [Verruijt, 1981]. Daarbij wordt de invloed van de zwaartekracht, die leidt tot een zogenaamde dichtheidsstroming, in rekening gebracht, voor een twee-dimensionale stroming. Dispersie wordt verwaarloosd. Het programma is gebaseerd op de elementenmethode, met een verdeling van het veld in driehoekige elementen, waarin de druk lineair verloopt. De massadichtheid kan per element verschillend zijn, en het programma werkt met in verticale richting vervormende elementen, zodat de beweging van een scheidingsvlak kan worden gevolgd. Met een elementaire versie van dit programma (SWIFT: Salt Water Interface by the Finite Element Technique) is een aantal berekeningen gemaakt voor de geometrie geschetst in afb. 3.

TABEL I – Ghyben-Dupuit-benadering.

t (d)	h (m)
0	10,00
1	10,07
2	10,10
3	10,13
4	10,15
5	10,16
10	10,23
20	10,33
30	10,40
40	10,46
50	10,51
100	10,73
200	11,03



Afb. 3 - SWIFT schematisering.

Het verschil met de schematisering van de vorige paragraaf is dat nu ook rekening gehouden wordt met stromingsweerstand in het zoute water (d.w.z. de aanname van Badon Ghyben speelt geen rol) en dat de verticale gradiënten ook in rekening worden gebracht (d.w.z. geen Dupuit-benadering). Er kan nu ook worden gespecificeerd op welke hoogte de putten zich bevinden. In dit geval is de puttenrij geschematiseerd tot een oneindig lange horizontale drain, op een diepte van 15 m.

Voor een isotroop poreus medium, waarvan de poriënruimte gevuld is met een vloeistof met variabele dichtheid, luidt de wet van Darcy

$$q_i = -\frac{\kappa}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g_i \right) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (21)$$

waarin

- q_i : het specifiek debiet in i -richting (L/T)
- κ : intrinsieke doorlatendheid van het poreuze medium (L^2/L).
- μ : dynamische viscositeit van de vloeistof ($(M/(L*T))$)
- p : de druk in de vloeistof ($(M/(L*T*T))$)
- ρ : $\rho_0 + c$
- ρ : dichtheid van de vloeistof ($M/(L*L*L)$)
- ρ_0 : constante dichtheid van de vloeistof
- c : variabele dichtheid van de vloeistof
- g_i : de versnelling van de zwaartekracht in i -richting ($L/(T*T)$)

Als het poreus medium onvervormbaar is dan luidt de vergelijking voor de continuïteit als volgt:

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (22)$$

De vergelijkingen voor de wet van Darcy (21) en voor continuïteit (22) leveren samen de volgende basisdifferentiaalvergelijking

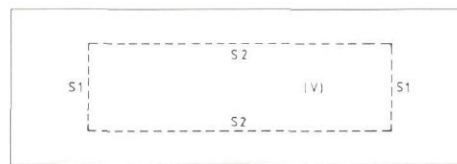
$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\kappa}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g_i \right) \right\} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (23)$$

Voor de oplossing van een differentiaalvergelijking zijn randvoorwaarden noodzakelijk. In dit geval wordt gesteld dat die zijn:

$$\text{voor } S1 : p = f \quad (24)$$

$$\text{voor } S2 : q_i n_i = h \quad (25)$$

$S1$ en $S2$ zijn de randen rond het beschouwde gebied V .



n_i is de richting van de normaal loodrecht op de rand $S2$. f is een gegeven functie, die langs $S1$ voorgeschreven is en voor het beschouwde probleem een gegeven druk in de vloeistof voorstelt. Evenzo is h een gegeven functie die langs $S2$ geldt en in dit geval het specifieke debiet vertegenwoordigt.

De wet van behoud massa zegt:

$$S \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0 \quad (26)$$

met

$$w_i = c q_i - D_{ij} \frac{\partial c}{\partial x_j} \quad (27)$$

waarin:

- S : porositeit
- w_i : massatransport
- c : variabele concentratie
- q_i : specifiek debiet
- D_{ij} : dispersiecoëfficiënt

Als de bijdrage van de dispersie wordt verwaarloosd, dan vindt men

$$S \frac{\partial c}{\partial t} = -q_i \frac{\partial c}{\partial x_i} \quad (28)$$

Dit betekent dat over de tijdstap Δt , de concentratie c constant is over een afstand Δx , zodanig dat

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta t} = \frac{q_i}{S} \quad (29)$$

De verplaatsing is te bepalen m.b.v. een simpele numerieke procedure

$$\Delta x_i = \frac{q_i}{S} \Delta t \quad (30)$$

De te volgen procedure is nu eerst om, uitgaande van een gegeven concentratieverdeling de differentiaalvergelijking (23) op te lossen. De oplossing hiervan levert een drukverdeling en een snelheidsveld. Uitgaande van dat snelheidsveld kan men dan de concentratieverdeling een tijdje Δt later berekenen. Vervolgens kan dan weer de differentiaalvergelijking (23) worden opgelost, enz.

De differentiaalvergelijking (23) leent zich goed voor een aanpak op basis van de elementenmethode, als tenminste de verdeling van de concentratie (en daarmee van de dichtheid ρ) bekend is. Gekozen is voor een eenvoudige techniek, waarbij het gebied in het verticale X, Y -vlak verdeeld wordt in driehoekjes. In elke driehoek is de concentratie constant en is de drukverdeling lineair, zodat ook de drukgradiënt per element constant is [Verruijt, 1981].

De gekozen schematisatie, met stroming in een verticaal vlak, houdt in dat de putten fysisch overeenkomen met oneindig lange drains loodrecht op het vlak van stroming. In de praktijk werkt men vaak met een groot aantal verticale putfilters op een rij. De schematisering tot een oneindige drain is daarvan een eerste benadering.

Als met de elementenmethode de druk p in ieder knooppunt berekend is, kan men m.b.v. de wet van Darcy (21) het specifieke debiet berekenen.

$$q_x = -\frac{\kappa}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \right) \quad (31)$$

$$q_y = -\frac{\kappa}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g_y \right) \quad (32)$$

Om de verplaatsing van een knooppunt te bepalen moet de snelheid in die knoop bekend zijn en daarvoor is een middeling van de snelheden in de omringende elementen nodig. Omdat niet alle elementen dezelfde vorm en grootte hebben is daarbij een gewichtsfactor gebruikt die overeenkomt met de bijdrage van elk element tot de systeem-matrix. De verplaatsingen van een knoop in een tijdje Δt worden berekend met de formules

$$\Delta x = \frac{q_x}{S} \Delta t$$

$$\Delta y = \frac{q_y}{S} \Delta t \quad (33)$$

Deze verplaatsingen betekenen dat het netwerk van driehoeken vervormt. In principe zou men zo na elke tijdstap alle knopen een nieuwe positie kunnen geven. Dicht bij een put kan dat tot moeilijkheden leiden, omdat daar knopen als het ware in de put verdwijnen (net als het water in de werkelijkheid). Daarom is voor gevallen met een scherp scheidingsvlak, waarbij alle

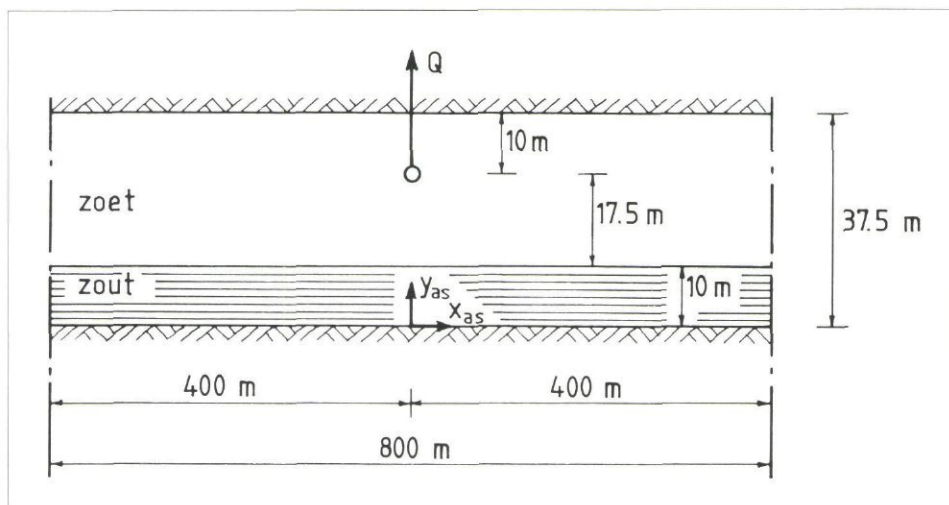
elementjes boven dat vlak water bevatten met een dichtheid ρ_0 en alle elementjes er onder water met een dichtheid $(\rho_0 + \Delta\rho)$, gekozen voor een schematisatie waarbij alleen de knopen op het scheidingsvlak bewegen met de berekende snelheid en dan nog alleen in verticale zin.

De knopen in het zoete water en in het zoute water kunnen ook wel iets in positie veranderen, maar deze bewegen in feite alleen maar op en neer met het grensvlak, om te vermijden dat een element zou verdwijnen. Als toetsing van het computerprogramma is het geval beschreven in paragraaf 2 opgelost. De puttenrij is daarbij geschematiseerd tot een drain op enige afstand boven het grensvlak. Uiteraard zijn de resultaten nogal afhankelijk van de hoogte van deze drain boven het scheidingsvlak. Er is, tamelijk arbitrair, gekozen voor een diepte van 15 m, dan is de afstand tussen de drain en het oorspronkelijke scheidingsvlak ook 15 m. In onderstaande tabel II is het verloop van de hoogte van het scheidingsvlak juist onder de drain weergegeven, als functie van de tijd.

TABEL II – SWIFT – de hoogte van het grensvlak onder de drain gedurende een aantal dagen.

t (dag)	hm (m)	
0	10,00	← Start van de onttrekking
1	10,02	
2	10,04	
3	10,06	
4	10,08	
5	10,10	
10	10,17	
20	10,28	

Het blijkt dat de resultaten nogal verschillen met die berekend volgens Ghyben-Dupuit (zie tabel I). Vooral in het begin blijven de meer exacte resultaten volgend uit de numerieke benadering duidelijk achter. Eigenlijk is dat ook wel begrijpelijk (achteraf), omdat nu in het zoute water ook een weerstand tegen stroming bestaat, en de weerstand tegen de verticale stroming nu in rekening wordt gebracht. Opvallend is ook dat de numerieke resultaten aangeven dat in het allereerste begin de verhoging evenredig is met de tijd, en niet met de wortel uit de tijd. Een nadere analyse hiervan, op basis van de exacte oplossing voor de stroming op het tijdstip $t = 0$ toont aan dat een lineair verloop eigenlijk ook realistischer is [Verruijt, 1981]. Omdat op het tijdstip $t = 0$ er een eindige en van nul verschillende, waarde wordt gevonden voor de verticale snelheid op het scheidingsvlak juist onder de drain, kan men verwachten, dat de aanvankelijke verhogingen lineair verlopen met de tijd. Ondanks alle verschillen tussen de resultaten van de twee berekeningen kan men toch stellen dat, voor het gebied waarin de benadering toegepast mag worden, de ordes van grootte van de resultaten met elkaar



Afb. 4 - Schematisering van het tweede probleem.

overeenkomen. Een tweede probleem dat is doorgerekend, betreft een realistischer voorbeeld, van een zandpakket met een dikte van 37,5 m, dat aan onder- en bovenzijde begrensd is door een volledig ondoorlatende laag. In het pakket bevindt zich oorspronkelijk een laag zout grondwater met een dikte van 10 m. De lengte van het pakket is begrensd door 2 evenwijdige kanalen waarin de hoogte van het zoete en zoute water constant wordt gehouden. De afstand van linkerrand tot rechterrand is veel groter dan de hoogte van het pakket, waardoor er op de linkerrand en rechterrand een hydrostatische drukverdeling zal heersen zodat de toestroming daar horizontaal verloopt. In het pakket ter hoogte van 27,5 m boven het zout bevindt zich een onttrekkingsput met een capaciteit Q van $10 \text{ m}^3/(\text{d} \cdot \text{m})$, die 50 dagen werkt.

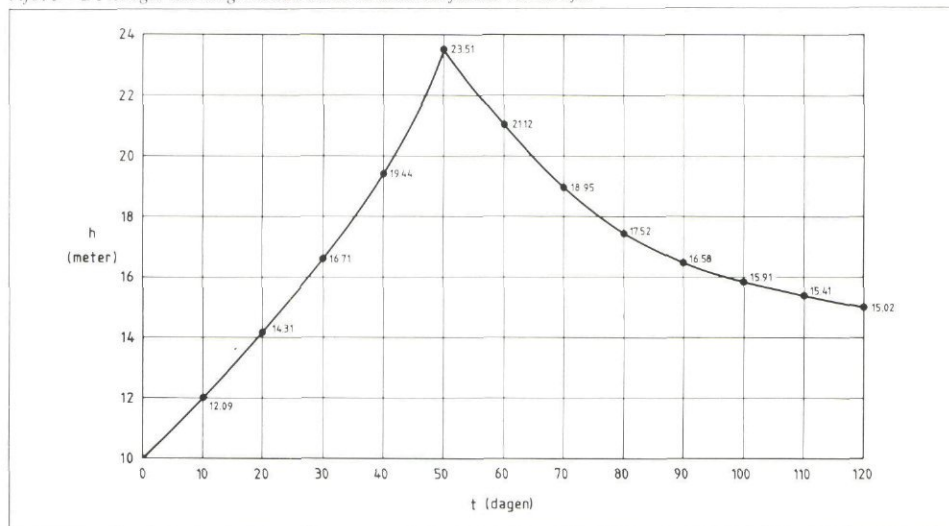
$$\begin{aligned} t < 0 & : Q = 0 \\ 0 < t < 50 \text{ d} & : Q = 10 \text{ m}^3/(\text{d} \cdot \text{m}) \\ t > 50 \text{ d} & : Q = 0 \end{aligned}$$

TABEL III – De hoogte van het grensvlak onder de drain gedurende een aantal dagen.

t (dag)	hm (m)	
0	10,0000	← Start van de onttrekking
10	12,0874	
20	14,3120	
30	16,7082	
40	19,4349	
50	23,5065	← Eind van de onttrekking
60	21,1192	
70	18,9449	
80	17,5192	
90	16,5751	
100	15,9059	
110	15,4048	
120	15,0166	
130	14,7051	
140	14,4481	

De doorlatendheidscoëfficiënt van het zand is 10 m/d en de porositeit is $0,35$. De dichtheid van zoet water is $1,000 \text{ kg/m}^3$ en de dichtheid van het zout water is $1,025 \text{ kg/m}^3$. Op het tijdstip $t = 0$ wordt het grensvlak tussen zoet en zout water in rust beschouwd. Gevraagd wordt naar de positie van het grensvlak op latere tijdstippen onder invloed

Afb. 5 - De hoogte van het grensvlak onder de drain als functie van de tijd.



van de werking van de onttrekkingsput (afb. 4).

De resultaten van de berekeningen zijn weergegeven in tabel III en in afbeelding 5. Een groot probleem bij computer-programma's zoals het hier beschreven programma SWIFT, is de numerieke stabiliteit. Het numerieke model is er op gebaseerd dat eerst de drukverdeling op een bepaald tijdstip wordt berekend, rekening houdend met de aanwezige dichtheidsverschillen, en dat vervolgens de snelheid en de daaruit volgende verplaatsingen van het grensvlak worden berekend. Een dergelijk proces is in het algemeen alleen stabiel als de tijdstappen klein genoeg zijn. Een schatting voor de toelaatbare tijdstap kan men maken op grond van de benaderde differentiaal-vergelijking (17). Voor een proces met voorwaarts tijdstappen leidt dat tot het criterium

$$t < \frac{1}{2} \frac{(\Delta x)^2}{c} \quad (34)$$

Bij het gebruikte numerieke model is een onderverdeling gebruikt waarbij dicht bij de drain een afmeting Δx wordt gebruikt van ongeveer 2 m. Met behulp van de numerieke waarden uit paragraaf 2 en met vergelijking (18) vindt men

$$c = 93,75 \text{ m}^2/\text{d}$$

Dat zou betekenen dat, bij benadering

$$\Delta t < 0,02 \text{ d} = 0,5 \text{ h} \quad (35)$$

Het stabiliteitscriterium leidt dus tot de eis dat de tijdstappen kleiner moeten zijn dan ongeveer een half uur. Omdat men toch al gauw een periode van enige jaren zou willen doorrekenen, betekent dit dan dat er vele tienduizenden tijdstappen nodig zijn. Weliswaar blijkt bij numerieke berekeningen de tijdstap wel wat groter te kunnen zijn (bijv. 0,1 d), maar dan blijft nog het aantal benodigde tijdstappen erg groot (enige duizenden). Dat brengt hoge kosten met zich mee, tenzij men de berekeningen kan uitvoeren op een speciaal daarvoor bestemde (dedicated) computer. Dan zijn de reken-tijden echter weer vrij groot.

5. Elementenmethode in een horizontaal vlak

In veel praktische gevallen zullen de verticale afmetingen nogal wat kleiner zijn dan de horizontale, en zal voorts de stroming begrensd worden door niet- of slecht-doorlatende lagen. Onder dergelijke omstandigheden valt te verwachten dat de horizontale componenten van de snelheid aanmerkelijk groter zullen zijn dan de verticale. Het is dan verantwoord om te veronderstellen dat in verticale richting de drukverdeling overal hydrostatisch is. Als

men dan rekening houdt met een variabele dichtheid in die zin dat er een scherp grensvlak wordt verondersteld op een (variabele) hoogte h , dan leidt dit tot de uitdrukkingen (1) voor de druk. Men kan dat een benadering volgens Ghyben-Dupuit noemen.

De stroming van de vloeistof in het horizontale vlak wordt beschreven door de wet van Darcy

$$\vec{q} = -\frac{\kappa}{\mu} \nabla p \quad (36)$$

Met behulp van de vergelijkingen (1) krijgt men nu voor de stroming in het zoute en in het zoete grondwater

$$\begin{aligned} 0 < z < h : \vec{q} &= -k \nabla \phi \\ h < z < H : \vec{q} &= -k \nabla \phi + \alpha k \nabla h \end{aligned} \quad (37)$$

Hierin is k de doorlatendheidscoëfficiënt en α is het relatieve dichtheidsverschil (zie (3) en (4)). De uitdrukkingen (37) geven aan dat de snelheid ter plaatse van het grensvlak discontinu is. Er is een zogenaamde schuifstroom [De Josselin de Jong, 1960] waarvan de grootte bepaald wordt door de helling van het scheidingsvlak. In vergelijking (37) is die schuifstroom evenredig met de tangens van de hellingshoek, terwijl dat eigenlijk de sinus zou moeten zijn [De Josselin de Jong, 1981]. Die fout, die klein is als het scheidingsvlak maar flauw helt, is een gevolg van de Dupuit-benadering. De continuïteitsvergelijkingen voor de twee vloeistoffen zijn

$$\begin{aligned} 0 < z < h : S \frac{\partial h}{\partial t} &= N_s - \nabla \cdot (h \vec{q}) \\ h < z < H : -S \frac{\partial h}{\partial t} &= N_f - \nabla \cdot \{ (H-h) \vec{q} \} \end{aligned} \quad (38)$$

waarin S de bergingscoëfficiënt is, en N_s en N_f de voeding van buitenaf in het zoute en zoete water zijn. Uit (37) en (38) verkrijgt men tenslotte het volgende stelsel van simultane differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} S \frac{\partial h}{\partial t} &= N_s + \nabla \cdot (kh \nabla \phi) \\ -S \frac{\partial h}{\partial t} &= N_f + \nabla \cdot \{ k(H-h) \nabla \phi \} - \nabla \cdot \{ \alpha k(H-h) \nabla \phi \} \end{aligned} \quad (39)$$

Deze vergelijkingen, waarin zowel h als ϕ onbekend zijn, moeten worden opgelost, tezamen met rand- en beginvoorwaarden. Een relatief eenvoudige oplosmethode kan worden verkregen met behulp van een verdeling van het horizontale vlak in driehoekige elementjes. Het is daarbij handig om in plaats van een van de beide vergelijkingen (39) de som van die twee te nemen,

$$\nabla \cdot (T \nabla \phi) = -N \quad (40)$$

waarin T de transmissiviteit is, $T = kH$, en waarin

$$N = N_f + N_s - \nabla \cdot \{ \alpha(1-h/H) T \nabla h \} \quad (41)$$

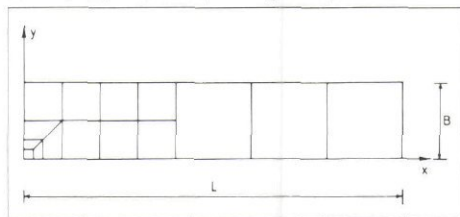
Vergelijking (40) leent zich erg goed voor oplossing met de elementenmethode. Als men die opgelost heeft, uitgaande van een zekere positie van het grensvlak, kan men vervolgens uit een van de twee vergelijkingen (39) de veranderingen van de positie van het scheidingsvlak expliciet berekenen. Daarbij moeten de verschillende termen uiteraard nog wel worden omgezet in numerieke waarden, op de in de elementenmethode gebruikelijke wijze. De grootte van de tijdstap moet weer begrensd zijn door een criterium van de vorm (34), waarin ditmaal $c = \alpha T/S$. In het voorbeeld van het toets-probleem is de waarde c ongeveer $100 \text{ m}^2/\text{d}$, hetgeen betekent dat ook in dit geval de tijdstap relatief klein moet zijn en, de rekentijd weer zeer groot zal zijn.

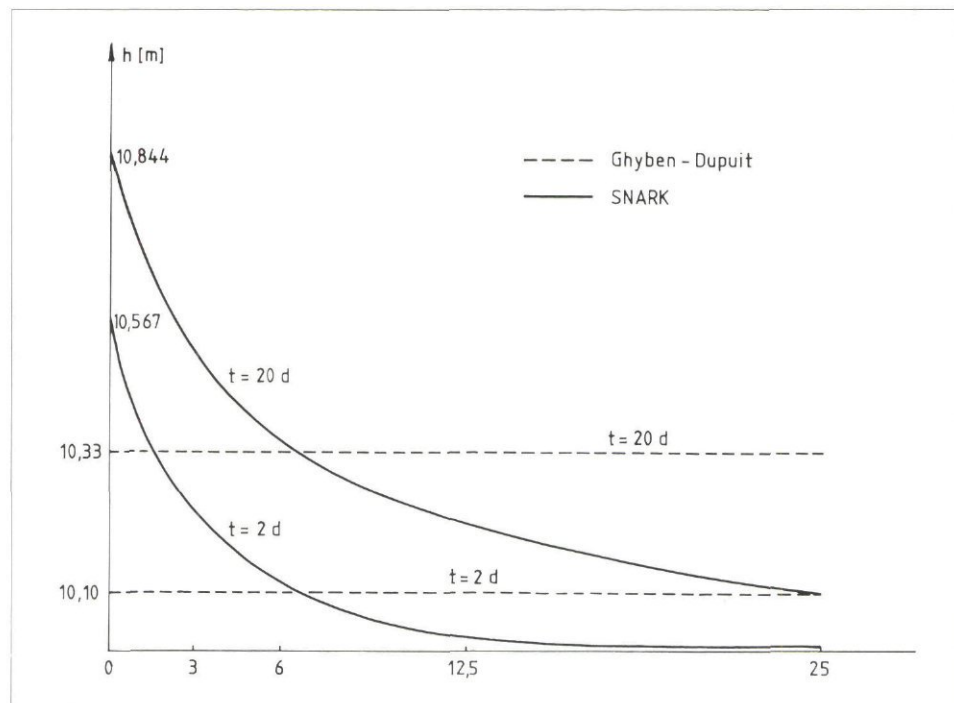
Voor de oplossing van de hierboven gegeven vergelijkingen, voor een enkele laag met constante dikte, is bij het laboratorium voor Geotechniek een programma ontwikkeld (SNARK). Dit programma werkt met vierhoekige elementjes, en heeft voorzieningen voor bronnen en putten in de knooppunten, en voor een verdeelde toevoer van water over de elementen. Het scheidingsvlak tussen zoet en zout water kan willekeurig over de hoogte verlopen, en het is zonder meer mogelijk dat lokaal alleen zoet of alleen zout water aanwezig is. Met dit programma zijn enige berekeningen gemaakt voor het in paragraaf 2 beschreven toetsprobleem. Het gebruikte netwerk is schematisch weergegeven in afb. 6, zij het niet op schaal.

In het werkelijke netwerk heeft het kleinste elementje nabij de put in de hoek links onder, afmetingen van $3 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ en heeft het grootste element, aan de rechterkant, afmetingen van $25 \text{ m} \times 150 \text{ m}$. Met dit programma kan de positie van het scheidingsvlak in de ruimte als functie van de tijd worden getekend. In de afbeelding 7 zijn enige resultaten weergegeven voor de positie van het grensvlak langs de linkerrand, dat is de as van symmetrie in het oorspronkelijke

Afb. 6 - Netwerk voor SNARK.

$$\begin{aligned} L &= 500 \text{ m}; & h &= 10 \text{ m}; & \rho_f &= 1,000 \text{ kg/m}^3 \\ B &= 25 \text{ m}; & k &= 50 \text{ m/d}; & \rho_s &= 1,025 \text{ kg/m}^3 \\ H &= 40 \text{ m}; & S &= 0,4; & Q &= 12,5 \text{ m}^3/\text{d} \end{aligned}$$





Afb. 7.

probleem, voor $t = 2$ dagen en $t = 20$ dagen. In die afb. zijn ook de waarden berekend met de eindimensionale analytische benadering (uit tabel I) getekend. Gemiddeld kloppen de verschillende berekeningen goed met elkaar. Uiteraard is het alleen met het programma SNARK mogelijk een echt lokale kegel van opgetrokken zout grondwater te voorspellen. De andere methode kan, evenals het programma SWIFT, op zijn best de gemiddelde verhoging berekenen.

6. Conclusies

Het is mogelijk gebleken voor stroming in een verticaal vlak en voor een stroming die voornamelijk in een horizontaal vlak optreedt redelijk werkende numerieke modellen te maken op basis van de elementenmethode. Vergelijking met analytische oplossingen voor eenvoudige en verder geschematiseerde gevallen geven aan dat de resultaten betrouwbaar zijn. De computerprogramma's vereisen voor numerieke stabiliteit relatief kleine tijdstapjes en derhalve grote rekentijden. Een mogelijke oplossing kan zijn het gebruik van een dedicated (micro-)computer. De computerprogramma's SNARK en SWIFT zijn ontwikkeld in het kader van de KIWA-Werkgroep Hydrologie van Persput-systemen. Van beide programma's zijn versies in FORTRAN en BASIC ontwikkeld.

Literatuur

Bear, J. (1972). *Dynamics of fluids in porous media*. Elsevier New York, 764 pp.
 Bredehoeft, J. D. (1971). *Comment on Numerical solution*

to the convective diffusion equation. Water Resources Res., Vol. 7, p. 755-756.
 Cundall, P. (1976). *Explicit finite difference methods in geomechanics*. Proc. 2nd Int. Conf. Num. Meth. in Geomechanics, Blacksburg, Virginia, Vol. 1, p. 132-150.
 Genuchten, M. T. van, Pinder, G. F. and Frind, E. O. (1977). *Simulation of two-dimensional contaminant transport with isoparametric hermitian finite elements*. Water Resources Res., Vol. 13, p. 451-458.
 Josselin de Jong, G. de (1960). *Singularity distribution for the analysis of multiple fluid flow through porous media*. J. Geophys. Res. Vol. 65, 9, p. 3739-3758.
 Josselin de Jong, G. de (1969). *Generation functions in the theory of flow through porous media* (R. J. M. de Wiest, editor). Academic Press, New York, p. 377-400.
 Josselin de Jong, G. de (1977). *Review of vortex theory for multiple fluid flow*. Delft Progress Report, Vol. 2, p. 225-236.
 Josselin de Jong, G. de (1981). *The simultaneous flow of fresh and salt water in aquifers of large horizontal extension determined by shear flow and vortex theory*. Proc. Euromech 143, Balkema, Rotterdam, p. 75-82.
 Knudsen, W. C. (1962). *Equations of fluid flow through porous media*. Incompressible fluids of varying density. J. Geophys. Res., Vol. 67, p. 733-737.
 Peters, J. H. *Enkele mogelijkheden van persputten bij watervoorziening*. H₂O, 1982.
 Pinder, G. F. and Galerkin, A. (1973). *Finite element simulation of groundwater contamination on Long Island*. New York, Water Resources Res. Vol. 9, p. 1657-1669.
 Pinder, G. F., and Cooper, H. H. (1970). *A numerical technique for calculating the transient position of the saltwater front*. Water Resources Res., Vol. 6, p. 875-882.
 Roebert, A. J. *Werkgroep Hydrologie van Persput-systemen geïnstalleerd*. H₂O (1979), nr. 12, p. 341-343.
 Sikkema, P. C. and Dam, J. C. van (1982). *Approximate solution of the problem of the shape of the interface in a semi-confined aquifer*. Journal of Hydrology, Vol. 56, p. 221-237.
 Yih, C. S. (1961). *Flow of a nonhomogeneous fluid in a porous medium*. J. Fluid Mech., Vol. 10, p. 133-141.
 Strack, O. D. L. (1973). *Manyvaluedness in groundwater flow*. Doctor's thesis, Delft, 126 pp.
 Verruijt, A. (1982). *Theory of groundwater flow*. Macmillan, London, Second Edition, 144 pp.
 Verruijt, A. (1980). *The rotation of a vertical interface in a*

porous medium. Water Resources Res., Vol. 16, p. 239-240.

Verruijt, A. (1981). *A numerical model for multiphase flow in porous media*. Proc. Euromech 143, Balkema, Rotterdam, p. 135-138.

Verruijt, A., Gan, J. B. S. and Peters, J. H. (1982). *Handleiding bij het gebruik van computerprogramma SWIFT*.

● ● ●

Summaries

● Slot van pagina 541

Three different categories of surface water quality are distinguished, in conformity with the EC-directive. For each category the prescribed level of purification should be met.

The technical aspects of the obligations and implications of the new legislation are discussed.

The revised drinking water by-law also contains a new structure on measuring obligations. The significance of using the standardized measuring methods of the NNI is underlined.

H₂O (16) 1983, nr. 24; 557

U.D.C. 628.1(049.1)

T. TROUWBORST:

The drinking water by-law revised; technical aspects II. Regulations on drinking water.

In the revised drinking water legislation four different categories of standards are distinguished: standards on toxicological and bacteriological parameters, standards on physicochemical and quality determining parameters, standards on parameters which apply if the drinking water is being softened and standards which generally spoken serve as guide levels.

The legal obligations for the different categories of standards are discussed. Emphasis is given to the necessity for developing data collection and evaluation systems with the aim to facilitate interpretation of the measuring results.

H₂O (16) 1983, nr. 24; 562

U.D.C. 556(1-21)

FRANS H. M. VAN DE VEN:

Research on urban hydrology & Nationwide Urban Runoff Program;

Report on a meeting in Baltimore

In Baltimore (Maryland, USA) an international meeting was held on urban hydrology in order to summarize the progress since 1979.

Moreover, reports were given on the American Nationwide Urban Runoff Program and topics for future research were discussed.

To make an inventory of the progress, reports were presented by 15 countries. Both for the quality and the quantity of the research large differences exist.

Some improved the hydraulics of the sewer systems, some changed the design practice in the country and others are working more on water quality aspects. In developing countries the urban hydrology has a low priority.

The Nationwide Urban Runoff Program is coming to its end.

Data were collected in 28 basins all over the United States. The results indicate, that copper, lead and zinc concentrations are fairly high in urban stormwater runoff. However, lead constructions tend to decrease.

Streetsweeping is not effective for improving the quality of stormwater runoff.

Topics in the research on urban hydrology that have to be done include: Areal distribution of rainfall, runoff from permeable areas under design conditions, hydraulics of sewer system structures, improvements in Computer Aided Design, formulating standards for data bases in order to make them exchangeable and sewer system renovation.