

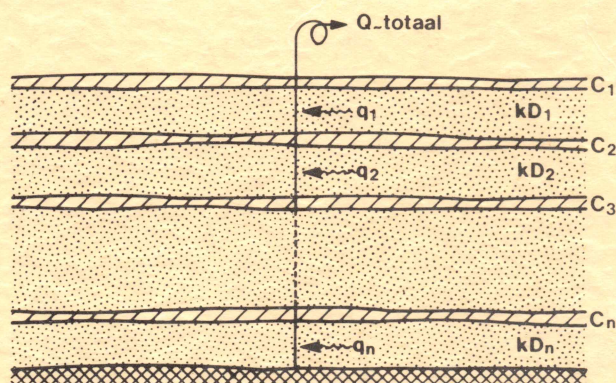
PROVINCIE



ZEELAND

provinciale waterstaat

de toepassing van matrixfuncties in de geohydrologie



voordracht ter gelegenheid van de
studiedag van de hydrologische
kring, te houden op 4 oktober 1984

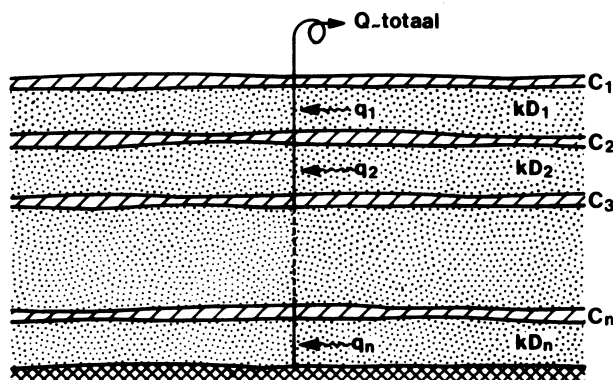
onderafdeling waterbeheer
nota 84-02

~~22/237 (84-02)~~

799 C 52

BIBLIOTHEEK
STARINGGEBOUW

de toepassing van matrixfuncties in de geohydrologie



voordracht ter gelegenheid van de
studiedag van de hydrologische
kring, te houden op 4 oktober 1984

onderafdeling waterbeheer
nota 84-02

31 JUL 1990

18n 521806*

VOORWOORD.

=====

De provinciale waterstaatsdiensten worden als grondwaterbeheerder veelvuldig geconfronteerd met de noodzaak om de hydrologische invloed af te schatten van nog niet gerealiseerde grondwateronttrekkingen, waarvoor een vergunning aangevraagd is op basis van de provinciale grondwaterverordeningen. Hiertoe is een beperkt aantal analytische formules beschikbaar dat slechts op de meest eenvoudige geohydrologische situaties betrekking heeft. Op zoek naar een handzame rekenmethode voor meer gekompliceerde situaties trof de onderafdeling waterbeheer van de provinciale waterstaat Zeeland een wiskundige techniek aan, die (voorzover bekend) nog geen ingang gevonden heeft in de geohydrologie. Deze zogenaamde theorie der matrixfuncties lijkt goede potentiële toepassingsmogelijkheden te bieden voor de berekening van grondwaterstijghoogten in systemen die zijn samengesteld uit meerdere watervoerende lagen, gescheiden door slecht doorlatende lagen. (Zulke systemen treft men in de praktijk eerder als regel dan als uitzondering aan).

Voor verschillende relatief gekompliceerde situaties levert de methode goed hanteerbare analytische formules op. Ter evaluatie zijn standaard wiskundige technieken nodig die op veel computersystemen routinematig aangeropen kunnen worden.

De voorliggende nota bevat de nader uitgewerkte tekst van een voordracht over dit onderwerp ter gelegenheid van een studiedag van de Hydrologische Kring. De tekst zal ter publikatie worden aangeboden aan het tijdschrift H_2O .

In het kader van het interprovinciale automatiseringsoverleg waterbeheer (AOW) is een programmapakket in standaard Fortran 77 in voorbereiding dat op de methode der matrixfuncties gebaseerd is. Dit pakket zal programma's bevatten voor gegeneraliseerde versies van de formules van De Glee, Mazure en Bosch. Programma's voor niet-stationaire stroming van grondwater zijn in voorbereiding, en zullen te zijner tijd aan het pakket toegevoegd worden. Het programmapakket zal selfcontained zijn, zodat het ook geïmplementeerd kan worden op machines die niet over de benodigde wiskundige routines beschikken.

Het gebruik van matrixfuncties in de geohydrologie.

=====

1. Inleiding.

De bestaande analytische formules voor de stroming van grondwater beperken zich hoofdzakelijk tot situaties waarin sprake is van één watervoerende laag. Deze stromingsgevallen laten zich door een enkele differentiaalvergelijking beschrijven. Voor een aantal verschillende randvoorwaarden zijn oplossingen in gesloten vorm bekend, zoals de formules van Mazure, De Glee, Theis, Hantush etc. Wanneer er meerdere lagen aanwezig zijn nemen de bestaande formules al gauw een ingewikkelde gedaante aan. Bekend is o.m. de formule van Huisman - Kemperman voor een tweelagensysteem. Ook Bruggeman en Ernst ontwikkelden formules voor meerlagensystemen.

Het voorliggende artikel heeft ten doel te demonstreren hoe met behulp van de theorie van de matrixfuncties ook voor situaties met veel watervoerende lagen relatief eenvoudige analytische uitdrukkingen af te leiden zijn. Het artikel sluit in verschillende opzichten aan bij een publikatie van C.J. Hemker in een recent nummer van het Journal of Hydrology (Hemker [1984]). De door Hemker aangegeven berekeningsmethode levert - voor zover de stromingssituaties identiek zijn - numeriek geheel gelijkwaardige resultaten. Het onderwerp van het voorliggende artikel is dan ook niet zozeer de numerieke evaluatie van meerlagenproblemen, als wel de presentatie van de oplossing in gesloten vorm.

De lezer wordt verondersteld bekend te zijn met het bestaan van matrices en met de elementaire rekenregels die daarop betrekking hebben.

2. De formule van De Glee.

Als inleiding en om het geheugen te steunen wordt in deze paragraaf de formule van De Glee afgeleid. De differentiaalvergelijking is welbekend:

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} = \frac{\phi}{kDc} \quad (1)$$

waarin ϕ = stijghoogte [L];

kD = kD -waarde van de watervoerende laag [$L T^{-1}$];

c = c -waarde van de semipermeabele laag [T].

De bijbehorende randvoorwaarden luiden:

$$\lim_{r \rightarrow 0} -2\pi r k D \frac{d\phi}{dr} = Q \quad (2)$$

$$\phi(r \rightarrow \infty) = 0 \quad (3)$$

Fig. 1 geeft het rekenschema weer.

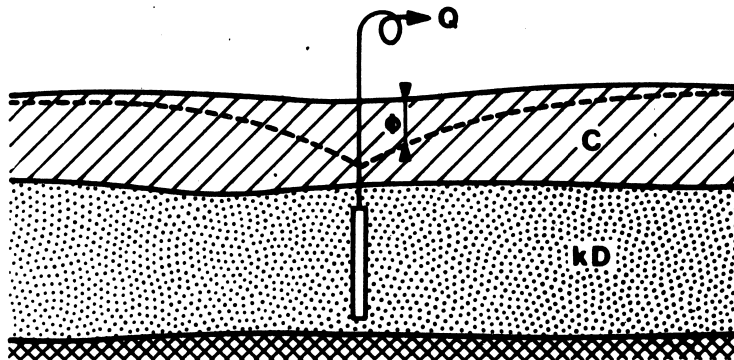


Fig. 1. Rekenschema de Glee.

De differentiaalvergelijking heeft als algemene oplossing:

$$\phi = c_1 K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) + c_2 I_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) \quad (4)$$

waarin: $\lambda = \sqrt{(kDc)}$

c_1 en c_2 zijn uit de randvoorwaarden op te lossen integratiekonstanten.

Aangezien de functie I_0 oneindig grote waarden aanneemt voor $r \rightarrow \infty$ moet (op grond van (3)) $c_2 = 0$ zijn, zodat

$$\phi = c_1 K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) \quad (5)$$

Differentiatie van deze uitdrukking en substitutie in randvoorwaarde (2) levert

$$\lim_{r \rightarrow 0} 2\pi r k D \frac{c_1}{\lambda} K_1\left(\frac{r}{\lambda}\right) = Q \quad (6)$$

Nu is uit de theorie van de Besselfuncties bekend dat

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{\lambda} K_1\left(\frac{r}{\lambda}\right) = 1 \quad (7)$$

zodat uit (6) volgt:

$$c_1 = \frac{Q}{2\pi k D} \quad (8)$$

Hiermee gaat (5) over in

$$\phi = \frac{1}{2\pi} K_0(r\lambda^{-1}) kD^{-1} Q \quad (9)$$

Dit is de formule van De Glee, in een wat ongebruikelijke notatie. In paragraaf 3 zal duidelijk worden waarom deze notatievorm gekozen is.

3. Stationaire stroming naar een put in een n-lagen systeem.

Alvorens in te gaan op het wezen van matrixfuncties, zal eerst gedemonstreerd worden hoe simpel en elegant de methode werkt. Daartoe wordt in deze paragraaf de formule van De Glee uitgebreid tot een formule voor stationaire stroming naar een put in een n-lagen systeem. Het rekenschema is weergegeven in fig. 2.

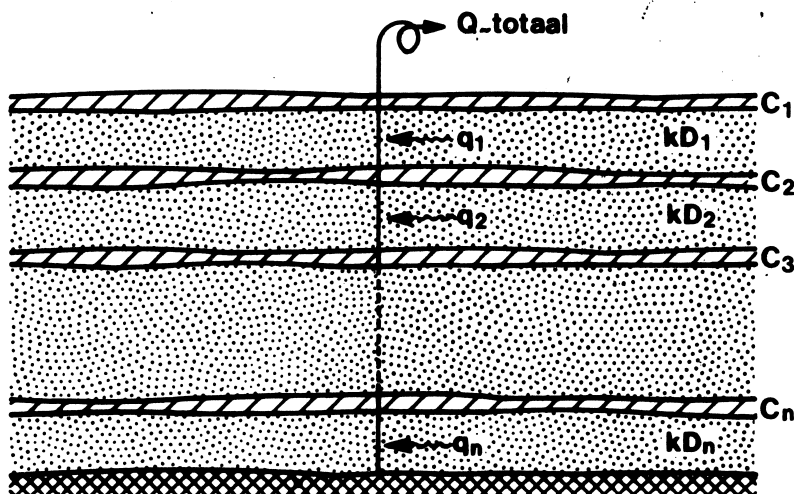


Fig. 2. Rekenschema voor putstroming in een n-lagen-systeem

De differentiaalvergelijking voor laag i luidt:

$$\frac{d^2 \phi_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi_i}{dr} + \frac{\phi_{i-1} - \phi_i}{kD_i c_i} + \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{kD_i c_{i+1}} = 0 \quad (i = 1, n) \quad (10)$$

De bijbehorende randvoorwaarden zijn:

$$\lim_{r \rightarrow 0} -2\pi r k D_i \frac{d\phi_i}{dr} = Q_i \quad (11)$$

$$\phi_i(r \rightarrow \infty) = 0 \quad (12)$$

Voorts is $\phi_0 = 0$ (konstant freatisch peil)
 en $c_{n+1} = \infty$ (ondoorlatende basis).

Vgl. (10) geeft in feite een stelsel weer van differentiaalvergelijkingen die onderling gekoppeld zijn. De matrixtheorie biedt de mogelijkheid om dit stelsel in kompakte vorm te schrijven:

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} = \Lambda^{-2} \phi \quad (13)$$

De randvoorwaarden luiden volgens deze schrijfwijze:

$$\lim_{r \rightarrow 0} -2\pi r \mathbf{KD} \frac{d\phi}{dr} = \mathbf{q} \quad (14)$$

$$\phi(r \rightarrow \infty) = 0 \quad (15)$$

Hierin zijn ϕ en $\mathbf{q}$ vektoren, terwijl $\mathbf{KD}$ en Λ^{-2} vierkante matrices voorstellen:

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{KD} = \begin{bmatrix} \mathbf{kD}_1 & & \\ & \mathbf{kD}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{kD}_n \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^{-2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

De elementen van Λ^{-2} bevatten de waarden $kD_1 c_1$ en $kD_1 c_{i+1}$:

$$\begin{aligned} a_{1,i-1} &= -1/(kD_1 c_1) & i &= 2, n \\ a_{1,i} &= 1/(kD_1 c_1) + 1/(kD_1 c_{i+1}) & i &= 1, n-1 \\ a_{1,i+1} &= -1/(kD_1 c_{i+1}) & i &= 1, n-1 \\ a_{n,n} &= 1/(kD_n c_n) \\ \text{overige elementen} & \text{nul.} \end{aligned}$$

De vergelijkingen (13) t/m (15) zijn qua vorm overeenkomstig aan de vergelijkingen (1) t/m (3). Het ligt dan ook voor de hand om een geheel analoge oplossingsprocedure toe te passen, en achteraf te bezien of die procedure formeel te rechtvaardigen is. We veronderstellen daarom dat de algemene oplossing van (13) te schrijven is als:

$$\phi = K_0 \{r\Lambda^{-1}\} c_1 + I_0 \{r\Lambda^{-1}\} c_2 \quad (16)$$

waarin c_1 en c_2 vektoren zijn die als elementen integratiekonstanten bevatten. Kennelijk hebben we in (16) te doen met functies van een matrix, en het zal noodzakelijk zijn om te definiëren wat daarmee bedoeld wordt. Voorlopig bekommeren we ons daar echter niet om, en we gaan door met het kopiëren van de oplossingsprocedure van paragraaf 2. Indien (net als voor de skalare I_0 -functie) geldt:

$$I_0 \{r\Lambda^{-1}\}_{r \rightarrow \infty} = \infty \quad (17)$$

dan volgt uit randvoorwaarde (15) dat $c_2 = 0$, zodat

$$\phi = K_0 \{r\Lambda^{-1}\} c_1 \quad (18)$$

Geldt bovendien (naar analogie met de skalare K_0 -functie):

$$\frac{d}{dr} K_0 \{r\Lambda^{-1}\} = -\Lambda^{-1} K_1 \{r\Lambda^{-1}\} \quad (19)$$

$$\text{en} \quad \lim_{r \rightarrow 0} r \Lambda^{-1} K_1 \{r\Lambda^{-1}\} = I \quad (20)$$

(I = eenheidsmatrix)

dan volgt uit randvoorwaarde (14):

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} K D^{-1} q \quad (21)$$

Hiermee gaat (18) over in:

$$\boxed{\phi = \frac{1}{2\pi} K_0 \{r A^{-1}\} K D^{-1} q} \quad (22)$$

De vormovereenkomst met de formule van De Glee (9) is duidelijk. Wanneer de juistheid van de ondernomen stappen (16) t/m (21) aangetoond kan worden, dan is (22) een generalisatie van de formule van De Glee voor n-lagen. De matrix A , die de plaats van de faktor λ inneemt, is dan op te vatten als een gegeneraliseerde λ -waarde.

4. Matrixfuncties.

De in paragraaf 3 gepresenteerde procedure is alleen gerechtvaardigd als het lukt om matrixfuncties $K_0\{r A^{-1}\}$, $K_1\{r A^{-1}\}$ en $I_0\{r A^{-1}\}$ te definiëren, zodanig dat:

$$\bullet \quad (16) \text{ een oplossing is van (13)}$$

$$\bullet \quad I_0\{r A^{-1}\}_{r \rightarrow \infty} = \infty \quad (17)$$

$$\bullet \quad \frac{d}{dr} K_0\{r A^{-1}\} = - A^{-1} K_1\{r A^{-1}\} \quad (19)$$

$$\bullet \quad \lim_{r \rightarrow 0} r A^{-1} K_1\{r A^{-1}\} = I \quad (20)$$

Het blijkt dat aan de eerste eis op een simpele wijze voldaan kan worden:

Zoals bekend is kunnen de skalaire functies $K_0(x)$ en $I_0(x)$ ontwikkeld worden in machtreeksen:

$$I_0(x) = 1 + \frac{\frac{1}{4} x^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{1}{4} x^2\right)^2}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{1}{4} x^2\right)^3}{(3!)^2} + \dots \quad (23)$$

$$K_0(x) = -\left\{\ln\left(\frac{1}{2}x\right) + \gamma\right\} I_0(x) + \frac{\frac{1}{4}x^2}{(1!)} +$$

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2}{(2!)} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{\left(\frac{1}{4}x^2\right)^3}{(3!)} + \dots \quad (24)$$

$$\gamma = 0.577215665\dots$$

Indien men in deze reeksen de x vervangt door $r\mathbf{A}^{-1}$ en de term 1 door $\mathbf{I}$ (en voorts de normale vermenigvuldigingsregels voor matrices in acht neemt) dan is door substitutie van de zo gevormde matrix-machtreeksen in (13) aan te tonen dat $K_0(r\mathbf{A}^{-1})$ en $I_0(r\mathbf{A}^{-1})$ ieder aan de matrixdifferentiaalvergelijking voldoen. Voor de klasse van matrices waartoe $\mathbf{A}^{-2}$ behoort (de zgn. diagonaliseerbare matrices) is verder eenvoudig aantoonbaar dat ook aan de vereisten (17), (19) en (20) is voldaan. Dit is in appendix 1 nader toegelicht. De toepasbaarheid van de in paragraaf 3 gevolgde procedure is hiermee bevestigd, of althans aannemelijk gemaakt. Uitdrukking (22) is dus inderdaad een generalisatie van de formule van De Glee. Voor $n=1$ is (22) identiek aan "De Glee"; voor $n=2$ aan "Huisman-Kemperman".

5. Evaluatie van matrixfuncties.

Het ontwikkelen van matrix-machtreeksen is in het algemeen erg bewerkelijk, en een goed deel van de literatuur over matrixfuncties is dan ook gewijd aan snellere en efficiëntere methoden om dit soort functies te evalueren. Er is in dit artikel slechts ruimte aanwezig voor een summiere bespreking.

Een functie van een zgn. diagonaliseerbare matrix $\mathbf{A}$ (dat is het type waartoe ook $\mathbf{A}^{-2}$ behoort) is volgens de theorie van de matrixfuncties te schrijven als:

$$f\{\mathbf{A}\} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n) \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \quad (25)$$

Hierin is P een vierkante matrix die de eigen vektoren van A bevat, terwijl de waarden λ_1 t/m λ_n de eigenwaarden van A zijn. (Men verwarre de notatie λ voor een eigenwaarde niet met de hydrologische λ - waarde!). Formule (22) is dus alternatief uit te drukken in de vorm

$$\phi = \frac{1}{2\pi} P \begin{bmatrix} K_0(r/\lambda_1) \\ K_0(r/\lambda_2) \\ \vdots \\ K_0(r/\lambda_n) \end{bmatrix} P^{-1} K D^{-1} q \quad (26)$$

waarin P de eigenvektorenmatrix van A^{-2} is, terwijl λ_1 t/m λ_n de eigenwaarden zijn van A^{-2} .

Een equivalente uitdrukking voor (26) is op een andere wijze afgeleid door Hemker [1984].

In de meeste numerieke bibliotheken (bijv. NUMRCN van het ENR reken-centrum in Petten) zijn subroutines voor het berekenen van de eigenwaarden λ_i en de eigenvektoren-matrix P van een vierkante matrix A standaard aanwezig. Wie toegang heeft tot zo'n bibliotheek of anderszins kan beschikken over programma's voor het berekenen van eigenwaarden en eigenvektoren, kan een uitdrukking als (26) rechtstreeks programmeren.

6. Generalisatie van de formule van Mazure.

Een tweede voorbeeld van de toepassing van matrixfuncties in de grondwaterstromingstheorie betreft de generalisatie van de formule van Mazure. Het rekenschema is weergegeven in fig. 3.

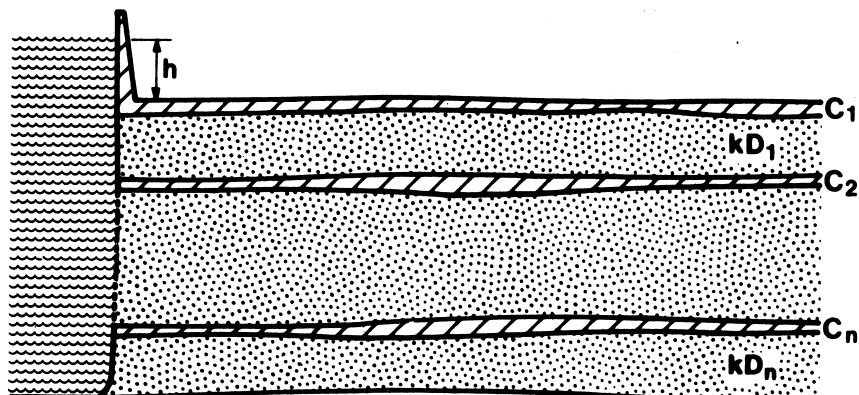


Fig. 3. Rekenschema voor de generalisatie van de formule van Mazure

Voor het geval van één watervoerende laag is de oplossing algemeen bekend:

$$\phi = e^{-x\lambda} h \quad (27)$$

waarin: ϕ = stijghoogte [L]

λ = spreidingslengte [L]

De betekenis van h blijkt uit figuur 3.

Voor een n-lagen-systeem luidt de matrixdifferentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = A^{-2} \phi \quad (28)$$

waarin ϕ en A^{-2} weer dezelfde betekenis hebben als in paragraaf 3.

De bijbehorende randvoorwaarden zijn:

$$\phi(0) = \text{gegeven stijghoogtenvektor} \quad (29)$$

$$\phi(r \rightarrow \infty) = 0 \quad (30)$$

Voorts is $\phi_0 = 0$ (konstant freatisch peil) en $c_{n+1} = \infty$ (ondoorlatende basis).

De algemene oplossing van (28) luidt:

$$\phi = e^{-xA}^{-1} c_1 + e^{xA}^{-1} c_2 \quad (31)$$

Uit randvoorwaarde (30) volgt dat $c_2 = 0$ zodat

$$\phi = e^{-xA}^{-1} c_1 \quad (32)$$

Randvoorwaarde (29) levert tenslotte:

$$c_1 = \phi(0) \quad (33)$$

waarmee (32) overgaat in

$$\phi = e^{-xA}^{-1} \phi(0) \quad (34)$$

Dit is de gegeneraliseerde vorm van de formule van Mazure.

Numerieke evaluatie van deze uitdrukking is weer mogelijk met behulp van regel (25).

7. Grondwatergetijden in een n-lagen-systeem (generalisatie van de formule van Bosch).

Als derde en laatste voorbeeld van de toepassing van matrixfuncties in de geohydrologie wordt hier de voortplanting van het getij in een n-lagen-systeem behandeld. Het rekenschema komt overeen met dat van figuur 3, met dien verstande dat nu h een harmonische funktie van de tijd is. Overeenkomstig met hetgeen in de elektrotechniek gebruikelijk is kiezen we voor h geen sinusvorm, maar een komplexe funktie omdat dat rekenkundige voordelen biedt:

$$h = e^{j\omega t} \Phi(0) \quad (35)$$

waarin $j = \sqrt{-1}$

$$\omega = 2\pi/T \text{ [rad. T}^{-1}\text{]}$$

T = periode van het getij [T]

$\Phi(0)$ = amplitude van het getij t.p.v. de oever [L]

Amplitude en fase van deze funktie gedragen zich op exakt dezelfde wijze als die van een sinus.

De differentiaalvergelijking voor de i^e watervoerende laag luidt:

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\phi_{i-1} - \phi_i}{kD_i c_i} + \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{kD_{i+1} c_{i+1}} = \frac{\epsilon_i}{kD_i} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \quad (i = 1, n) \quad (36)$$

Hierin is ϕ_i = stijghoogte [L]

kD_i = kD-waarde [$L T^{-1}$]

c_i = c-waarde [T]

ϵ_i = elastische bergingscoëfficiënt [dim loos]

$$\text{Stelt men: } \phi_i = \Phi_i e^{j\omega t} \quad (37)$$

dan gaat (36) over in

$$\frac{d^2 \Phi_i}{dx^2} + \frac{\Phi_{i-1} - \Phi_i}{kD_1 c_1} + \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{kD_1 c_{i+1}} = j\omega \frac{\epsilon_i}{kD_1} \Phi_i \quad (i = 1, n) \quad (38)$$

Dit stelsel is weer in kompakte vorm te schrijven als:

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} = (A^{-2} + j\omega B) \Phi \quad (39)$$

De randvoorwaarden zijn:

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \text{gegeven vektor, waarvan de elementen} \\ &\quad \text{overeenkomen met het amplitude van het} \\ &\quad \text{getij ter plaatse } x = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

$$\Phi(x \rightarrow \infty) = 0 \quad (41)$$

Verder is $\Phi_0 = 0$ en $c_{n+1} = \infty$

De matrix A^{-2} heeft weer dezelfde betekenis als in paragraaf 3, terwijl B is voor te stellen als:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_1}{kD_1} & & & \\ & \frac{\epsilon_2}{kD_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\epsilon_n}{kD_n} \end{bmatrix}$$

De oplossing van (39), (40) en (41) verloopt geheel analoog aan hetgeen in paragraaf 5 behandeld werd. Hij luidt:

$$\Phi = e^{-x\sqrt{(A^{-2} + j\omega B)}} \Phi(0)$$

(42)

De elementen van de vektor Φ zijn komplexe getallen. Het amplitude in de i^e laag wordt gegeven door:

$$\text{amplitude}_i = [\text{Re}\{\Phi_i\}^2 + \text{Im}\{\Phi_i\}^2]^{\frac{1}{2}}$$

en de fase door

$$\text{fase}_i = \arctang [\text{Im}\{\Phi_i\} / \text{Re}\{\Phi_i\}] - k\pi \quad (k \text{ geheel})$$

8. Enkele numerieke voorbeelden.

In appendix 2 zijn de listings opgenomen van een drietal computerprogramma's die gebaseerd zijn op de formules (22), (34) en (42). De programma's zijn geschreven in standaard Fortran 77. Voor het berekenen van eigenwaarden en eigenvektoren van matrices wordt de routine NORDIG uit de numerieke bibliotheek ACCULIB aangeroepen (ACCU [1980]). De source is verkrijgbaar bij het Academisch Computercentrum Utrecht. Matrixinversie wordt uitgevoerd met de routines CGECO en CGEDI uit de programmabibliotheek LINPACK. Van deze routines is de source gepubliceerd in de LINPACK-usersguide (SIAM [1979]). LINPACK is overigens voor een billijke prijs te koop bij IMSL te Houston.

Het eerste voorbeeld betreft de gegeneraliseerde formule van De Glee (vgl. 22). De in- en uitvoer verloopt interaktief; figuur 4 geeft daarvan een illustratie.

Het tweede voorbeeld is gebaseerd op de gegeneraliseerde formule van Mazure (vgl. 34) waaraan echter een uitbreiding gegeven is door rekening te houden met de mogelijkheid dat de rivier niet volledig in alle watervoerende lagen insnijdt. Daardoor ontstaat een rekenschema zoals in figuur 5 is weergegeven. Figuur 6 geeft een voorbeeld van de in- en uitvoer.

Het laatste voorbeeld betreft de gegeneraliseerde formule van Bosch (vgl. 42); zie figuur 7.

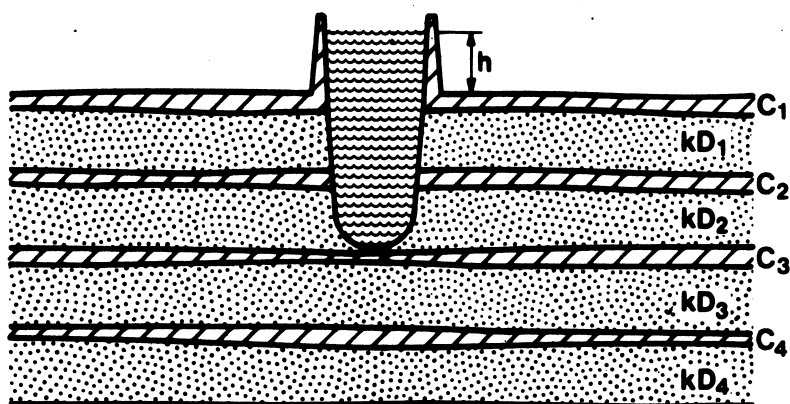


Fig. 5. Geohydrologisch schema voor het in figuur 6 weergegeven rekenvoorbeeld.

1-

DIT PROGRAMMA BEREKENT DE VERLAGING IN EEN N-LAGEN SYSTEEM
STATIONAIR VOLGENS DE GEGENERALISEERDE FORMULE VAN DE GLEE
DE INVOER GESCHIEDT INTERAKTIEF

AANTAL LAGEN ? : 4

LAAG :1 C (DAGEN)? : 1000.
KD (M2/DAG)? : 250.
DEBIET (M3/DAG)? : 0.

LAAG :2 C (DAGEN)? : 500.
KD (M2/DAG)? : 250.
DEBIET (M3/DAG)? : 1000.

LAAG :3 C (DAGEN)? : 1500.
KD (M2/DAG)? : 500.
DEBIET (M3/DAG)? : 0.

LAAG :4 C (DAGEN)? : 3000.
KD (M2/DAG)? : 400.
DEBIET (M3/DAG)? : 2000.

AFSTAND WAAROP DE VERLAGING MOET WORDEN PEREKEND? :25.

RESULTATEN

OPGEGEVEN AFSTAND UIT ONTTREKKING :25. M

LAAG	C (DAGEN)	KD (M2/DAG)	DEBIET (M3/DAG)	VERLAGING (M)
1	1000.00	250.00	.00	.372
2	500.00	250.00	1000.00	1.943
3	1500.00	500.00	.00	.443
4	3000.00	400.00	2000.00	3.311

Fig. 4. Voorbeeld in-/uitvoer gegeneraliseerde formule van De Glee.

DIT PROGRAMMA BEREKENT DE STATIONAIRE STIJGHOOGTEN IN EEN N-LAGEN SYSTEEM VOOR HET GEVAL VAN EEN RECHTE RIVIER DIE IN EEN OF MEERDERE LAGEN INSNIJDT. DE INVOER GESCHIEDT INTERAKTIEF

AANTAL LAGEN ? : 4

LAAG : 1 C (DAGEN) ? : 1000.
KD (M2/DAG) ? : 500.
INSNIJDING IN DEZE LAAG ? (JA/NEE) : JA

LAAG : 2 C (DAGEN) ? : 500.
KD (M2/DAG) ? : 250.
INSNIJDING IN DEZE LAAG ? (JA/NEE) : JA

LAAG : 3 C (DAGEN) ? : 200.
KD (M2/DAG) ? : 200.
INSNIJDING IN DEZE LAAG ? (JA/NEE) : NEE

LAAG : 4 C (DAGEN) ? : 2000.
KD (M2/DAG) ? : 500.

RIVIERPEIL T.O.V. POLDERPEIL (M) ? : 2.
AFSTAND WAAROP DE STIJGHOOGTE MOET WORDEN BEREKEND (M) ? : 25.

RESULTATEN

OPGEGEVEN AFSTAND UIT DE RIVIEROEVER : 25. M

LAAG	C (DAGEN)	KD (M2/DAG)	INSNIJDING	RIVIERPEIL (M)	STIJGHOOGTE (M)
1	1000.00	500.00	JA	2.000	1.936
2	500.00	250.00	JA		1.938
3	200.00	200.00	NEE		1.590
4	2000.00	500.00	NEE		.963

Fig. 6. Voorbeeld in-/uitvoer gegeneraliseerde formule van Mazure.

DIT PROGRAMMA BEREKENT DE STATIONAIRE DEMPING EN VERTRAGING VAN HET GETIJ IN EEN N-LAGEN SYSTEEM VOLGENS DE GEGENERALISEERDE FORMULE VAN BOSCH. DE INVOER GFSCHIEDT INTERAKTIEF.

AANTAL LAGEN ? : 4

LAAG 1 C (DAGEN) ? : 1000.
KD (M2/DAG) ? : 500.
ELASTISCHE BERGINGSCOEFFICIENT ? : .0001

LAAG 2 C (DAGEN) ? : 2000.
KD (M2/DAG) ? : 300.
ELASTISCHE BERGINGSCOEFFICIENT ? : .003

LAAG 3 C (DAGEN) ? : 400.
KD (M2/DAG) ? : 250.
ELASTISCHE BERGINGSCOEFFICIENT ? : .0006

LAAG 4 C (DAGEN) ? : 2000.
KD (M2/DAG) ? : 750.
ELASTISCHE BERGINGSCOEFFICIENT ? : .0002

AMPLITUDE VAN HET BUITENWATER (M) ? : 2.

PERIODE VAN HET GETIJ (DAGEN) ? : .5

AFSTAND WAAROP DE DEMPING EN DE VERTRAGING MOETEN WORDEN BEREKEND (M) ? : 25.

RESULTATEN

AMPLITUDE VAN HET BUITENWATER: 2.00 M
OPGEGEVEN AFSTAND: 25.00 M

LAAG	C (DAGEN)	KD (M2/DAG)	ELASTISCHE PER- GINGSCOEFFICIENT	DEMPINGS- FAKTOR	VERTRAGING (DAGEN) EVT. $+.5 * k * \text{PERIODE}$
1	1000.00	500.00	.000100	.956	.00146
2	2000.00	300.00	.003000	.824	.01596
3	400.00	250.00	.000600	.903	.00750
4	2000.00	750.00	.000200	.966	.00245

Fig. 7 Voorbeeld in- en uitvoer gegeneraliseerde formule van Bosch.

9. Diskussie.

In dit artikel zijn enkele voorbeelden gegeven van de toepassing van matrixfuncties in de geohydrologie. De mogelijkheden zijn daarmee verre van uitgeput, en we hopen dat ons verhaal inspirerend genoeg is om de lezer uit te lokken zelf naar verdere toepassingsmogelijkheden te zoeken. Aangezien het voorkomen van meerdere watervoerende lagen in de praktijk eerder regel is dan uitzondering, verwachten we dat de matrixrekening in ons vakgebied nog een nuttige rol zal kunnen vervullen.

Doordat de matrixdifferentiaalvergelijkingen die hier gepresenteerd werden lineair zijn ligt het voor de hand om superpositietechnieken toe te passen, zoals de spiegeling ten opzichte van voedende grenzen of barrières; superpositie van verlagingen ten gevolge van meerdere putten die bijvoorbeeld in verschillende lagen gesteld zijn, etc.

Tenslotte nog een opmerking over de identifikatie van hydrologische parameters. Formules van het type (22), (34) en (42) zijn daarvoor uitstekend geschikt, zij het dat tengevolge van het grote aantal onbekenden de traditionele curve-matching methoden niet meer toepasbaar zijn. Hier kan men eveneens de computer te hulp roepen. De provinciale waterstaat in Zeeland werkt met een niet-lineair optimalisatieprogramma dat in wezen overeenkomt met het optimalisatiegedeelte van het RIVM-programma HYDROPAR, RID [1982]. (Figuur 8 geeft een voorbeeld van een toepassing). Korthedshalve zij verwezen naar de gebruikershandleiding van HYDROPAR waarin de methode helder uiteengezet is, en naar *Leynse* [1982].

10. Literatuur.

We hebben in de hydrologische vaklektuur niet veel kunnen vinden over de toepassing van matrixfuncties. Algemene studieboeken over matrixrekening zijn er in overvloed; de meeste auteurs besteden echter weinig aandacht aan matrixdifferentiaalvergelijkingen. Een beknopte, maar heel prettig leesbare inleiding is te vinden in:

A.D. Michal

Matrix and Tensor Calculus

John Wiley & Sons, Inc., New York, 1947

Michals notaties en terminologie zijn wat verouderd. Hetzelfde geldt voor:

R.A. Frazer, W.J. Duncan, A.R. Collar

Elementary Matrices

Cambridge University Press, 1938

Dit is een goed boek, al is het in didactisch opzicht misschien een beetje ouderwets. Er is een groot aantal herdrukken van verschenen. Meer theoretisch is:

F.R. Gantmacher

Applications of the Theory of Matrices

Interscience Publishers Inc., New York, 1959

waarvan vooral hoofdstuk IV van belang is. (Zonder voorkennis van de matrixrekening is dit boek moeilijk toegankelijk).

Alle genoemde boeken zijn aanwezig in de bibliotheek van de T.H. te Delft; de tweede titel is ook te vinden in de bibliotheek van de afdeling Civiele Techniek.

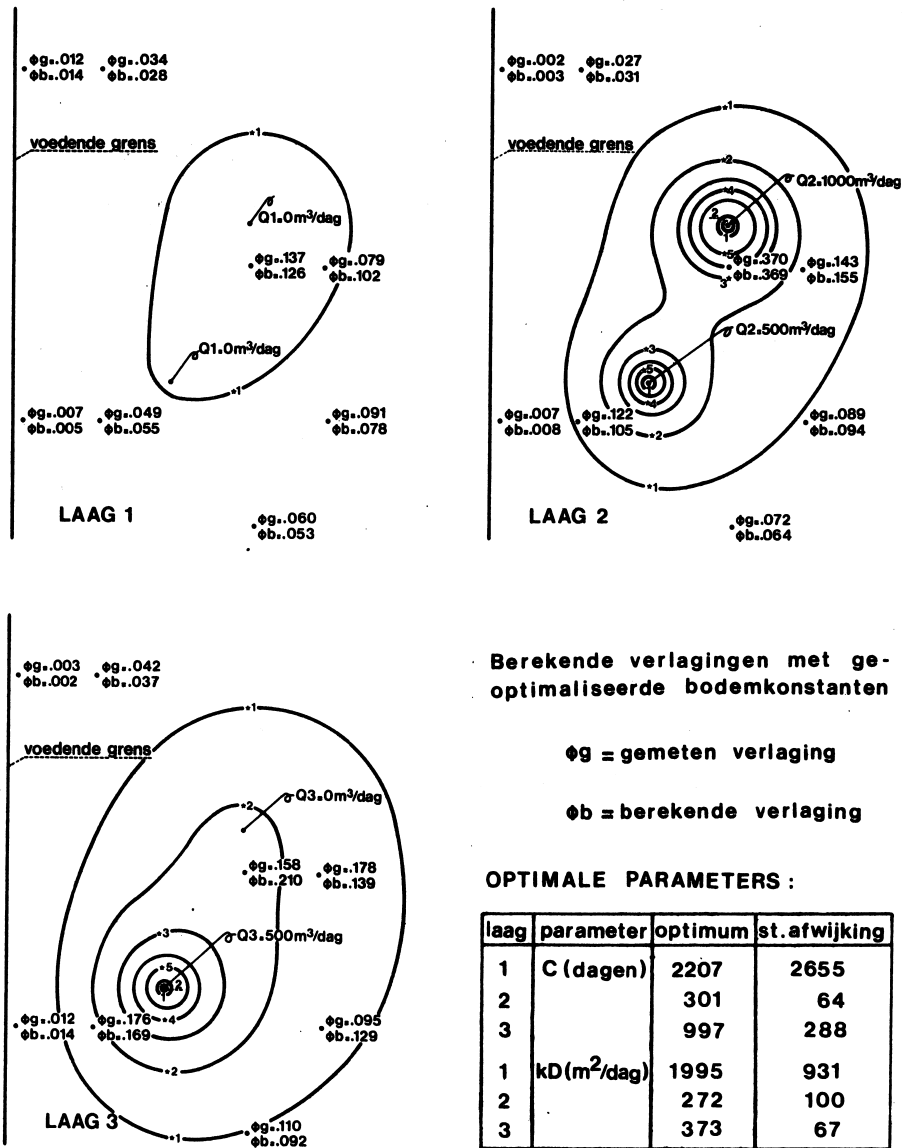


Fig. 8. Voorbeeld van een geautomatiseerde schatting van hydrologische parameters in een 3-lagensysteem. (Voor deze illustratie zijn de meetwaarden gefingeerd).

11. Referenties.

ACCU Academisch Computercentrum Utrecht, Acculib documentation
 minimanual.

Accureeks nr. 9, december 1980.

Hemker, C.J. Steady groundwaterflow in leaky multiple aquifer systems.
Journal of Hydrology Vol. 72 no. 3/4 June 15, 1984.

Leynse, A. Evaluation of pumping tests; identification of parameter-
 values and their reliability.

*IAHS Publ. no. 136 (Proceedings of the Exeter Symposium,
July 1982).*

Rijksinstituut voor Drinkwatervoorziening

Hydropar. A program package for the statistical analysis
of pumping test data. User's guide. *National Institute
for Water Supply, The Netherlands, 1982.*

SIAM LINPACK-usersguide.

SIAM, Philidelphia, 1979 (ISBN 0-89871-172-x).

APPENDIX 1.

In het navolgende worden met behulp van uitdrukking (25) de stappen (17), (19) en (20) uit paragraaf 3 geverifieerd. Vooraf zij opgemerkt dat de matrix Λ^{-2} behoort tot de klasse van diagonaliseerbare matrices en dat Λ^{-1} een éénduidige wortel is van Λ^{-2} . (Op het bewijs van deze beweringen kan omwille van de ruimte niet ingegaan worden).

* Stap (19) luidt:

$$\frac{d}{dr} K_0 \{ r \Lambda^{-1} \} = - \Lambda^{-1} K_1 \{ r \Lambda^{-1} \}$$

Blijkens (25) geldt:

$$K_0 \{ r \Lambda^{-1} \} = P \begin{bmatrix} K_0(r/\lambda_1) & & & \\ & K_0(r/\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_0(r/\lambda_n) \end{bmatrix} P^{-1}$$

zodat

$$\frac{d}{dr} K_0 \{ r \Lambda^{-1} \} = P \begin{bmatrix} -\lambda_1 K_1(r/\lambda_1) & & & \\ & -\lambda_2 K_1(r/\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\lambda_n K_1(r/\lambda_n) \end{bmatrix} P^{-1}$$

Op grond van (25) kan dit geschreven worden als:

$$\frac{d}{dr} K_0 \{ r \Lambda^{-1} \} = - \Lambda^{-1} K_1 \{ r \Lambda^{-1} \}$$

hetgeen aangetoond moest worden.

* Stap (20) luidt:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \Lambda^{-1} K_1 \{ r \Lambda^{-1} \} = I$$

De funktie $r\mathbf{A}^{-1}K_1\{r\mathbf{A}^{-1}\}$ is volgens (25) te schrijven als:

$$r\mathbf{A}^{-1}K_1\{r\mathbf{A}^{-1}\} =$$

$$= P \begin{bmatrix} r/\lambda_1 K_1(r/\lambda_1) & & & \\ & r/\lambda_2 K_1(r/\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & r/\lambda_n K_1(r/\lambda_n) \end{bmatrix} P^{-1}$$

zodat

$$\lim_{r \rightarrow 0} r\mathbf{A}^{-1}K_1\{r\mathbf{A}^{-1}\} =$$

$$= P \begin{bmatrix} \lim_{r \rightarrow 0} r/\lambda_1 K_1(r/\lambda_1) & & & \\ & \lim_{r \rightarrow 0} r/\lambda_2 K_1(r/\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lim_{r \rightarrow 0} r/\lambda_n K_1(r/\lambda_n) \end{bmatrix} P^{-1} =$$

$$= P \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} P^{-1} = PIP^{-1} = I$$

Dit bevestigt stap (20).

* Stap (17) luidt:

$$I_0(r\mathbf{A}^{-1})_{r \rightarrow \infty} = \infty$$

De juistheid van deze uitdrukking blijkt onmiddellijk wanneer men de funktie in diagonaalvorm schrijft en r naar ∞ laat gaan.

APPENDIX 2.

=====

Deze appendix bevat de listing van de programma's voor de gegeneraliseerde versies van:

- De Glee (1 - 5);
- Mazure (6 - 10);
- Bosch (11 - 14).

```

*****
*
*          PROVINCIALE WATERSTAAT IN ZEELAND
*          AFDELING NAT
*          ONDERAFDELING WATERBEHEER
*
*****

```

```

DIT PROGRAMMA BEREKENT DE VERLAGINGEN IN EEN N-LAGEN SYSTEEM
STATIONAIR VOLGENS DE GEGENERALISEERDE FORMULE VAN DEGREE

```

```

PROGRAM GLEENL

```

```

EXTERNAL GLEEN

```

```

DEKLARATIE IN BLANK COMMON

```

```

COMMON A(9000)

```

```

DO 10 I=1,9000
  A(I) = 0.

```

```

10 CONTINUE

```

```

OPENEN FILES

```

```

VOOR ZOWEL DE FILE INPUT ALS DE FILE OUTPUT WORDT DE TERMINAL
GEBRUIKT, HET TOETSENBORD FUNGEERT ALS 'INPUT', HET BEELDSCHERM
FUNGEERT ALS 'OUTPUT'

```

```

OPEN (1,FILE='INPUT')
OPEN (2,FILE='OUTPUT')

```

```

WRITE (2,*) ' '
WRITE (2,*)

```

```

1 ' DIT PROGRAMMA BEREKENT DE VERLAGING IN EEN N-LAGEN SYSTEEM'
WRITE (2,*)

```

```

1 ' STATIONAIR VOLGENS DE GEGENERALISEERDE FORMULE VAN DE GLEE'

```

```

WRITE (2,*) ' DE INVOER GESCHIEDT INTERAKTIEF'

```

```

WRITE (2,*) ' '

```

```

WRITE (2,*) ' AANTAL LAGEN ?:'

```

```

READ (1,*) NL

```

```

BEREKENEN GEHEUGENRUIMTE PER VARIABLE

```

```

I1 = 1
I2 = I1 + 2*NL*NL
I3 = I2 + NL
I4 = I3 + NL
I5 = I4 + 2*NL*NL
I6 = I5 + 2*NL*NL
I7 = I6 + 2*NL
I8 = I7 + 2*NL*NL
I9 = I8 + 2*NL*NL
I10 = I9 + 2*NL

```

```

IF (I10.GT.9000) THEN
  STOP 'ERROR, GEHEUGENRUIMTE IN BLANK COMMON TE KLEIN'
END IF

```

```
CALL GLEEN(NL, A(I1), A(I2), A(I3), A(I4), A(I5), A(I6), A(I7),
1 A(I8), A(I9))
```

```
C
CLOSE (1)
CLOSE (2)
```

```
C
STOP
END
```

```
C *****
```

```
C SUBROUTINE GLEEN(NL, A, C, KD, KDINV, P, PHIVEK, PINV, Q, QVEK)
```

```
C DEKLARATIE (ARRAY) VARIABELEN, DE GEBRUIKTE BENAMING DER VARIA-
C BELEN SLUIT ZOVEEL MOGELIJK AAN BIJ DIE IN DE AFGELEIDE FORMULES
```

```
C REAL C(NL), KD(NL), KNUL
```

```
C COMPLEX A(NL,NL), KDINV(NL,NL), P(NL,NL), PHIVEK(NL),
1 PINV(NL,NL), Q(NL,NL), QVEK(NL)
```

```
C LOGICAL LEFT, RIGHT, COMPLEX
```

```
C DE SURROUTINE NORDIG IS AFKOMSTIG VAN HET ACADEMISCH COMPUTER
C CENTRUM UTRECHT (ACCU) EN WORDT OP HET E.N.R. REKENCENTRUM TE
C PETTEN VIA DE TRYLIB-BIBLIOTHEEK TER BESCHIKKING GESTELD.
C OFSCHOON BIJ DIT PROBLEEM GEEN COMPLEXE GETALLEN VOORKOMEN, VRAAGT
C DE ROUTINE NORDIG TOCH COMPLEXE INVOER. VOOR HET VERDERE GEBRUIK
C VAN DEZE ROUTINE WORDT VERWEZEN NAAR HET ACADEMISCH COMPUTER
C CENTRUM UTRECHT.
C DE ROUTINES MTXCPR EN KNUL ZIJN EIGEN ROUTINES VOOR RESP. HET
C PRODUKT VAN 2 COMPLEXE MATRICES DAN WEL HET BEREKENEN VAN DE
C BESSSELFUNKTIE.
```

```
C EXTERNAL NORDIG, MTXCPR, KNUL
```

```
C LEFT = .TRUE.
C RIGHT = .TRUE.
C COMPLEX = .FALSE.
```

```
C PI = 4.*ATAN(1.)
```

```
C INLEZEN C, KD EN DEBIET PER LAAG
```

```
C DO 10 I=1,NL
C   WRITE (2,*) ' '
C   WRITE (2,*) ' LAAG :', I, ' C (DAGEN)?      : '
C   READ (1,*) C(I)
C   WRITE (2,*) '           KD (M2/DAG)?      : '
C   READ (1,*) KD(I)
C   WRITE (2,*) '           DEBIET (M3/DAG)? : '
C   READ (1,*) QVE
C   QVEK(I) = CMPLX(QVE,0.)
C   WRITE (2,*) ' '
```

```
10 CONTINUE
```

```
C INVULLEN MATRIX A (A STAAT VOOR HOOFDLETTER LAMBDA)
```

```
C DO 20 I=2,NL
C   A(I,I-1) = CMPLX(-1./(KD(I)*C(I)),0.)
```

```
20 CONTINUE
```



```

DO 30 I=1,NL-1
  A(I,I) = CMPLX(1./(KD(I)*C(I))+1./(KD(I)*C(I+1)),0.)
  A(I,I+1) = CMPLX(-1./(KD(I)*C(I+1)),0.)
30 CONTINUE
  A(NL,NL) = CMPLX(1./(KD(NL)*C(NL)),0.)

C
C
C   INVULLEN MATRIX KDINV
C
DO 40 I=1,NL
  KDINV(I,I) = CMPLX(1./KD(I),0.)
40 CONTINUE

C
C
C   BEREKENEN EIGENWAARDEN EN LINKER EN RECHTER EIGENVEKTOREN VAN DE
C   MATRIX A M.B.V. DE ROUTINE NORDIG (ACCU) VAN DE TRYLIB-BIBLIOTHEEK
C
CALL NORDIG(A, PINV, P, NL, COMPLX, LEFT, RIGHT, ICOUNT)

C
C
C   INLEZEN AFSTAND WAAROP DE VERLAGING MOET WORDEN BEREKEND
C
READ (1,*) R

C
C
C   INVULLEN MATRIX Q
C
DO 50 I=1,NL
  Q(I,I) = CMPLX(KNUL(R*SQRT(REAL(A(I,I))))),0.)
50 CONTINUE

C
C
C   VERMENIGVULDIGEN MATRIX P MET Q, RESULTAAT IN A
C
CALL MTXCPR(A, P, Q, NL, NL, NL, NL, NL, NL)

C
C
C   VERMENIGVULDIGEN MATRIX A MET PINV, RESULTAAT IN P
C
CALL MTXCPR(P, A, PINV, NL, NL, NL, NL, NL, NL)

C
C
C   VERMENIGVULDIGEN MATRIX P MET KDINV, RESULTAAT IN A
C
CALL MTXCPR(A, P, KDINV, NL, NL, NL, NL, NL, NL)

C
C
C   VERMENIGVULDIGEN MATRIX A MET VEKTOR QVEK, RESULTAAT
C   IN PHIVEK
C
CALL MTXCPR(PHIVEK, A, QVEK, NL, NL, NL, NL, NL, 1)

C
C
C   VEKTOR PHIVEK DELEN DOOR 2*PI
C
DO 60 I=1,NL
  PHIVEK(I) = PHIVEK(I)/(2.*PI)
60 CONTINUE

C
C
C   UITPRINTEN RESULTATEN
C
WRITE (2,*) ' '
WRITE (2,*) ' RESULTATEN'
WRITE (2,*) ' '
WRITE (2,*) ' OPGEGEVEN AFSTAND UIT ONTTREKKING :', R, ' M'
WRITE (2,*) ' '
WRITE (2,99999)
DO 70 I=1,NL
  WRITE (2,99998) I, C(I), KD(I), REAL(QVEK(I)) ,

```

```

1      REAL (PHIVEK(I))
70 CONTINUE
C
      RETURN
C
      FORMAT LABELS
C
C
99999 FORMAT ('0LAAG', 7X, 'C (DAGEN)', 7X, 'KD (M2/DAG)', 6X, 'DEBIE',
1 'T (M3/DAG)', 4X, 'VERLAGING (M)')/
99998 FORMAT (I4, F15.2, F16.2, F19.2, F18.3)
      END
C *****
C
C VERMENIGVULDIGEN VAN COMPLEXE MATRICES B EN C (B*C)
C
      SUBROUTINE MTXCPR(A, B, C, IA, IB, IC, NB, MB, MC)
C
      COMPLEX A(IA,MC), B(IB,MB), C(IC,MC)
C
      DO 30 I=1,NB
        DO 20 J=1,MC
          A(I,J) = (0.,0.)
          DO 10 K=1,MB
            A(I,J) = A(I,J) + B(I,K)*C(K,J)
10          CONTINUE
20          CONTINUE
30          CONTINUE
C
      RETURN
C
      END
C *****
C
C DEZE FUNKTIE BEREKENT DE GEMODIFICEERDE BESSELFUNKTIE VAN DE 2E
C SOORT ORDE 0 VOLGENS EEN POLYNOM BENADERING
C
C LITERATUUR: HANDBOOK OF MATHEMATICAL FUNCTIONS
C AUTEURS   : ABRAMOWITZ AND STEGUN
C
      FUNCTION KNUL(X)
C
      REAL X, T, I0, KNUL
C
      IF (X.LE.0.) THEN
        STOP ' ERROR, ARGUMENT IN BESSELFUNKTIE GELIJK OF KLEINER NUL '
      END IF
C
      IF (X.GT.22.3) THEN
        KNUL = 0.
      ELSE
        IF (X.LE.2.) THEN
          T = X/3.75
          I0 = 1. + 3.5156229*T**2. + 3.0899424*T**4. +
1          1.2067492*T**6. + .2659732*T**8. + .0360768*T**10. +
2          .0045813*T**12.
          KNUL = -ALOG(X/2.)*I0 - .57721566 + .4227842*(X/2.)**2. +
1          .23069756*(X/2.)**4. + .0348859*(X/2.)**6. +
2          .00262698*(X/2.)**8. + .0001075*(X/2.)**10. +
3          .0000074*(X/2.)**12.

```

ELSE

KNUL = (1.25331414-.07832358*(2./X)+.02189568*(2./X)**

1 2.-.01062446*(2./X)**3.+.00587872*(2./X)**4.-.0025154*(2./

2 X)**5.+.00053208*(2./X)**6.)/(SQRT(X)*EXP(X))

END IF

END IF

C

RETURN

C

END

```

*****
*
*          PROVINCIALE WATERSTAAT IN ZEELAND
*          AFDELING NAT
*          ONDERAFDELING WATERBEHEER
*
*****

```

DIT PROGRAMMA BEREKENT DE STATIONAIRE STIJGHOOGTEN IN EEN N-LAGEN
 SYSTEEM VOOR HET GEVAL VAN EEN RECHTE RIVIER DIE IN EEN OF MEERDE-
 RE LAGEN INSNIJDT.

PROGRAM MAZURE

EXTERNAL MAZUR

DEKLARATIE IN BLANK COMMON

COMMON A(9000)

DO 10 I=1,9000

A(I)=0.

CONTINUE

OPENEN FILES

VOOR ZOWEL DE FILE INPUT ALS DE FILE OUTPUT WORDT DE TERMINAL
 GEBRUIKT, HET TOETSENBORD FUNGEERT ALS 'INPUT', HET REELDSCHERM
 FUNGEERT ALS 'OUTPUT'

OPEN(5,FILE='INPUT')

OPEN(6,FILE='OUTPUT')

WRITE(6,*) ' '

WRITE(6,*) ' DIT PROGRAMMA BEREKENT DE STATIONAIRE STIJGHOOGTEN IN
 *EEN N-LAGEN SYSTEEM'

WRITE(6,*) ' VOOR HET GEVAL VAN EEN RECHTE RIVIER DIE IN EEN OF MEE
 *RDERE LAGEN INSNIJDT.'

WRITE(6,*) ' DE INVOER GESCHIEDT INTERAKTIEF'

WRITE(6,*) ' '

WRITE(6,*) ' AANTAL LAGEN ?:'

READ(5,*)NL

BEREKENEN GEHEUGENRUIMTE PER VARIABLE

I1=1

I2=I1+2*NL*NL

I3=I2+2*NL*NL

I4=I3+NL

I5=I4+2*NL*NL

I6=I5+2*NL*NL

I7=I6+2*NL*NL

I8=I7+2*NL

I9=I8+NL

I10=I9+NL

I11=I10+2*NL

I12=I11+2*NL*NL

I13=I12+NL*NL

I14=I13+2*NL*NL

```
I15=I14+2*NL
```

```
IF (I15.GT.9000) THEN
  STOP 'ERROR, GEHEUGENRUIMTE IN BLANK COMMON TE KLEIN'
END IF
```

```
CALL MAZUR(NL,A(I1),A(I2),A(I3),A(I4),A(I5),A(I6),A(I7),
* A(I8),A(I9),A(I10),A(I11),A(I12),A(I13),A(I14))
```

```
CLOSE(5)
CLOSE(6)
```

```
END
```

```
*****
```

```
SUBROUTINE MAZUR(NL,A,B,C,EEN,P,PINV,H,IPVT,KD,PHIVEK,Q,W,WM,Z)
```

```
DEKLARATIE (ARRAY) VARIABELEN, DE GEBRUIKTE BENAMING DER VARIA-
BELEN SLUIT ZOVEEL MOGELIJK AAN BIJ DIE IN DE AFGELEIDE FORMULES
```

```
REAL C(NL),KD(NL),W(NL)
```

```
INTEGER IPVT(NL)
```

```
COMPLEX A(NL,NL),B(NL,NL),EEN(NL,NL),PINV(NL,NL),P(NL,NL),H(NL),
* PHIVEK(NL),Q(NL,NL),WM(NL,NL),Z(NL),DET
```

```
CHARACTER IANTW*3
```

```
LOGICAL LEFT,RIGHT,COMPLX
```

```
DE SUBROUTINES NORDIG, CGECO EN CGEDI ZIJN AFKOMSTIG UIT DE TRYLIB
BIBLIOTHEEK VAN HET E.N.R. REKENCENTRUM TE PETTEN.
OFSCHOON BIJ DIT PROBLEEM GEEN COMPLEXE GETALLEN VOORKOMEN, VRAGEN
VOORNOEMDE ROUTINES TOCH COMPLEXE INVOER. VOOR HET VERDERE GEBRUIK
VAN DEZE ROUTINES WORDT VERWEZEN NAAR DE TRYLIBBIBLIOTHEEK.
DE SUBROUTINE MTXCPR IS EEN EIGEN ROUTINE VOOR HET VERMENIGVULDI-
GEN VAN 2 COMPLEXE MATRICES.
```

```
EXTERNAL NORDIG,CGECO,CGEDI
```

```
LEFT=.TRUE.
RIGHT=.TRUE.
COMPLX=.FALSE.
```

```
INVULLEN EENHEIDSMATRIX (EEN)
```

```
DO 5 I=1,NL
  EEN(I,I)=(1.,0.)
```

```
CONTINUE
```

```
INLEZEN C, KD EN MOGELIJKE INSNIJDING PER LAAG
```

```
INSN=0
```

```
DO 10 I=1,NL
```

```
  WRITE(6,*)' '
```

```
  WRITE(6,*)' LAAG :',I,' C (DAGEN)?' :
```

```
  READ(5,*)C(I)
```

```
  WRITE(6,*)' KD (M2/DAG)?' :
```

```
  READ(5,*)KD(I)
```

```

      IF (INSN.EQ.0) THEN
        WRITE(6,*) ' INSNIJDING IN DEZE LAAG ? (JA/NEE) : '
        READ(5,7) IANTW
        IF (IANTW.EQ.'NEE') THEN
          INSN=1
          W(I)=100E100
        ELSE
          W(I)=0.
        END IF
      ELSE
        W(I)=100E100
      END IF
      WRITE(6,*) ' '
10    CONTINUE
C
C    INVULLEN MATRIX A (A STAAT VOOR HOOFDLETTER LAMBDA)
C
      DO 30 I=2,NL
        A(I,I-1)=CMPLX(-1./(KD(I)*C(I)),0.)
30    CONTINUE
      DO 40 I=1,NL-1
        A(I,I)=CMPLX(1./(KD(I)*C(I))+1./(KD(I)*C(I+1)),0.)
        A(I,I+1)=CMPLX(-1./(KD(I)*C(I+1)),0.)
40    CONTINUE
      A(NL,NL)=CMPLX(1./(KD(NL)*C(NL)),0.)
C
C    BEREKENEN EIGENWAARDENVEKTOR VAN A EN LINKER EN RECHTER EIGENVEKTO
C    REN VAN A (PINV EN P) M.B.V. DE TRYLIB-ROUTINE NORDIG (ACCU).
C
      CALL NORDIG(A,PINV,P,NL,COMPLX,LEFT,RIGHT,ICOUNT)
C
C    INVULLEN MATRICES WM EN Q, WM BEVAT O.M. DE INTREEWEERSTAND
C    VAN DE RIVIER. WANNEER EEN LAAG WORDT INGESNEDEN WORDT IN DIT
C    PROGRAMMA W=0. GESTELD, ZONIET DAN WORDT W ONEINDIG VERONDER-
C    STELD.
C
      DO 85 I=1,NL
        WM(I,I)=CMPLX(W(I)*KD(I),0.)
        Q(I,I)=CSQRT(A(I,I))
85    CONTINUE
C
C    VERMENIGVULDIGEN MATRIX WM MET MATRIX P, RESULTAAT IN B
C
      CALL MTXCPR(B,WM,P,NL,NL,NL,NL,NL,NL,IFAIL)
C
C    VERMENIGVULDIGEN MATRIX B MET MATRIX Q, RESULTAAT IN WM
C
      CALL MTXCPR(WM,B,Q,NL,NL,NL,NL,NL,NL,IFAIL)
C
C    VERMENIGVULDIGEN MATRIX WM MET MATRIX PINV, RESULTAAT IN B
C
      CALL MTXCPR(B,WM,PINV,NL,NL,NL,NL,NL,NL,IFAIL)
C
C    OPTELLEN MATRIX B EN EENHEIDSMATRIX (EEN)
C
      DO 87 I=1,NL
        DO 88 J=1,NL
          WM(I,J)=B(I,J)+EEN(I,J)
88      CONTINUE
87    CONTINUE

```

```

C
C BEREKENEN INVERSE VAN MATRIX WM MET DE TRYLIB-ROUTINES CGECO EN
C CGEDI (LINPACK)
C

```

```

CALL CGECO(WM,NL,NL,IPVT,RCOND,Z)
CALL CGEDI(WM,NL,NL,IPVT,DET,Z,01)

```

```

C
C INLEZEN H-NUL EN DE AFSTAND WAAROP DE VERLAGING MOET WORDEN
C BEREKEND
C

```

```

WRITE(6,*) ' RIVIERPEIL T.O.V. POLDERPEIL (M) ? : '
READ(5,*) HNUL
WRITE(6,*) ' AFSTAND WAAROP DE STIJGHOOGTE MOET WORDEN BEREKEND (M)
* ? : '
READ(5,*) X

```

```

C
C INVULLEN VEKTOR PHIO
C

```

```

DO 90 I=1,NL
  H(I)=CMPLX(HNUL,0.)
90 CONTINUE

```

```

C
C INVULLEN MATRIX Q
C

```

```

DO 100 I=1,NL
  Q(I,I)=CEXP(-X*CSQRT(A(I,I)))
100 CONTINUE

```

```

C
C VERMENIGVULDIGEN MATRIX P MET Q, RESULTAAT IN B
C

```

```

CALL MTXCPR(B,P,Q,NL,NL,NL,NL,NL,NL,IFAIL)

```

```

C
C VERMENIGVULDIGEN MATRIX B MET PINV, RESULTAAT IN A
C

```

```

CALL MTXCPR(A,B,PINV,NL,NL,NL,NL,NL,NL,IFAIL)

```

```

C
C VERMENIGVULDIGEN MATRIX A MET WM, RESULTAAT IN P
C

```

```

CALL MTXCPR(P,A,WM,NL,NL,NL,NL,NL,NL,IFAIL)

```

```

C
C VERMENIGVULDIGEN MATRIX P MET H, RESULTAAT IN PHIVEK
C

```

```

CALL MTXCPR(PHIVEK,P,H,NL,NL,NL,NL,NL,1,IFAIL)

```

```

C
C UITPRINTEN RESULTATEN
C

```

```

WRITE(6,*) ' '
WRITE(6,*) ' RESULTATEN '
WRITE(6,*) ' '
WRITE(6,*) ' OPGEGEVEN AFSTAND UIT DE RIVIEROEVER : ',X,' M '
WRITE(6,*) ' '
WRITE(6,1)
DO 200 I=1,NL
  PHIR=REAL(PHIVEK(I))
  HP=REAL(H(I))
  IF(W(I).EQ.0.) THEN
    IF(I.EQ.1) THEN
      WRITE(6,2) I,C(I),KD(I),HR,PHIR
    ELSE
      WRITE(6,4) I,C(I),KD(I),PHIR
    END IF
  END IF
200 CONTINUE

```

```

        END IF
    ELSE
        IF (I.EQ.1) THEN
            WRITE(6,3) I,C(I),KD(I),HR,PHIR
        ELSE
            WRITE(6,6) I,C(I),KD(I),PHIR
        END IF
    END IF
200  CONTINUE
C
    RETURN
C
1000 STOP 'ERROR, FOUT TIJDENS INLEZEN VAN FILE IN'
C
    FORMAT LABELS
C
1    FORMAT('1LAAG   C (DAGEN)   KD (M2/DAG)   INSNIJDING   RIVIERPEIL
*(M)   STIJGHOOGTE (M)',/)
2    FORMAT(I4,2F12.2,10X,'JA',F15.3,F19.3)
3    FORMAT(I4,2F12.2,9X,'NEE',F15.3,F19.3)
4    FORMAT(I4,2F12.2,10X,'JA',15X,F19.3)
6    FORMAT(I4,2F12.2,9X,'NEE',15X,F19.3)
7    FORMAT(A3)
C
    END
C
C VERMENIGVULDIGEN VAN COMPLEXE MATRICES B MET C (B*C)
C
    SUBROUTINE MTXCPR(A,B,C,IA,IB,IC,NB,MB,MC,IFAIL)
C
    COMPLEX A(IA,MC),B(IB,MB),C(IC,MC)
C
    DO 10 I=1,NB
        DO 20 J=1,MC
            A(I,J)=(0.,0.)
20    CONTINUE
10    CONTINUE
C
    DO 100 I=1,NB
        DO 110 J=1,MC
            DO 120 K=1,MB
                A(I,J)=A(I,J)+B(I,K)*C(K,J)
120    CONTINUE
110    CONTINUE
100    CONTINUE
C
    RETURN
C
    END

```



```

*****
*
*          PROVINCIALE WATERSTAAT IN ZEELAND
*          AFDELING NAT
*          ONDERAFDELING WATERBEHEER
*
*****

```

```

DIT PROGRAMMA BEREKENT DE STATIONAIRE DEMPING EN VERTRAGING VAN
HET GETIJ IN EEN MEER-LAGEN SYSTEEM VOLGENS DE GEGENERALISEERDE
FORMULE VAN BOSCH.

```

```

PROGRAM GETIJ

```

```

COMMON A(9000)

```

```

EXTERNAL GETY

```

```

OPENEN FILES

```

```

OPEN (1,FILE='INPUT')

```

```

OPEN (2,FILE='OUTPUT')

```

```

DO 10 I=1,9000

```

```

    A(I) = 0.

```

```

10 CONTINUE

```

```

WRITE (2,*) 'DIT PROGRAMMA BEREKENT DE STATIONAIRE DEMPING EN '//
1 'VERTRAGING VAN HET GETIJ'

```

```

WRITE (2,*) 'IN EEN N-LAGEN SYSTEEM VOLGENS DE GEGENERALISEERD'//
1 'E FORMULE VAN BOSCH.'

```

```

WRITE (2,*) 'DE INVOER GESCHIEDT INTERAKTIEF.'

```

```

WRITE (2,*) ' '

```

```

WRITE (2,*) 'AANTAL LAGEN ? : '

```

```

READ (1,*) NL

```

```

BEREKENEN GEHEUGENRUIMTE PER VARIABLE

```

```

I1 = 1

```

```

I2 = I1 + NL*NL

```

```

I3 = I2 + NL*NL

```

```

I4 = I3 + NL

```

```

I5 = I4 + 2*NL*NL

```

```

I6 = I5 + NL

```

```

I7 = I6 + NL

```

```

I8 = I7 + 2*NL*NL

```

```

I9 = I8 + 2*NL*NL

```

```

I10 = I9 + 2*NL

```

```

I11 = I10 + 2*NL

```

```

I12 = I11 + 2*NL*NL

```

```

IF (I12.GT.9001) THEN

```

```

    STOP 'ERROR, BLANK KOMMON TE KLEIN'

```

```

END IF

```

```

CALL GETY(NL, A(I1), A(I2), A(I3), A(I4), A(I5), A(I6), A(I7),
1 A(I8), A(I9), A(I10), A(I11))

```

```

DO 20 I=1,2

```

CLOSE (I)
20 CONTINUE

STOP
END

SUBROUTINE GETY(NL, A, B, C, CC, EPS, KD, P, PH, PHI, PHINUL,
1 PINV)

DEKLARATIE (ARRAY) VARIABELEN, DE GEBRUIKTE BENAMING DER VARIABE-
LEN SLUIT ZOVEEL MOGELIJK AAN BIJ DIE IN DE AFGELEIDE FORMULES.

REAL A(NL,NL), B(NL,NL), C(NL), EPS(NL), KD(NL)

COMPLEX PHINUL(NL), PHI(NL), CC(NL,NL), P(NL,NL), PINV(NL,NL),
1 PH(NL,NL), JEE

LOGICAL LEFT, RIGHT, COMPLX

DE SUBROUTINE NORDIG IS AFKOMSTIG VAN HET ACADEMISCH COMPUTER CEN-
TRUM UTRECHT EN WORDT DOOR HET E.N.R. REKENCENTRUM TE PETTEN VIA
DE TRYLIB-BIBLIOTHEEK TER BESCHIKKING GESTELD. VOOR HET GEBRUIK
VAN DEZE ROUTINE WORDT VERWEZEN NAAR HET ACADEMISCH COMPUTER CEN-
TRUM UTRECHT (ACCU).

DE SUBROUTINE MTXCPR IS EEN EIGEN ROUTINE VOOR HET VERMENIGVULDI-
GEN VAN TWEDE COMPLEXE MATRICES

EXTERNAL NORDIG, MTXCPR

LEFT = .TRUE.
RIGHT = .TRUE.
COMPLX = .TRUE.

JEE = (0.,1.)
PIE = 4.*ATAN(1.)

INLEZEN DATA INTERAKTIEF

WRITE (2,*) ' '
DO 10 I=1,NL

WRITE (2,*) 'LAAG ', I, ' C (DAGEN) ?

READ (1,*) C(I)

WRITE (2,*) ' KD (M2/DAG) ?

READ (1,*) KD(I)

WRITE (2,*) ' ELASTISCHE BERGINGSCOEFFICIENT ?

READ (1,*) EPS(I)

WRITE (2,*) ' '

10 CONTINUE

WRITE (2,*) 'AMPLITUDE VAN HET BUITENWATER (M) ?

READ (1,*) AMP

WRITE (2,*) 'PERIODE VAN HET GETIJ (DAGEN) ?

READ (1,*) PER

OMEGA = 2.*PIE/PER

WRITE (2,*) 'AFSTAND WAAROP DE DEMPING EN DE VERTRAGING MOETEN'//
1 ' WORDEN BEREKEND (M) ?

READ (1,*) X

INVULLEN VEKTOR PHINUL

```

DO 20 I=1,NL
  PHINUL(I) = AMP
20 CONTINUE

C
C
C  INVULLEN MATRIX A (A STAAT VOOR HOOFDLETTER LAMBDA)
DO 30 I=1,NL
  IF (I.NE.1) THEN
    A(I,I-1) = -1./(KD(I)*C(I))
  END IF
  IF (I.NE.NL) THEN
    A(I,I) = 1./(KD(I)*C(I)) + 1./(KD(I)*C(I+1))
    A(I,I+1) = -1./(KD(I)*C(I+1))
  ELSE
    A(NL,NL) = 1./(KD(NL)*C(NL))
  END IF
30 CONTINUE

C
C
C  INVULLEN MATRIX B
DO 40 I=1,NL
  B(I,I) = EPS(I)/KD(I)
40 CONTINUE

C
C
C  SAMENSTELLEN MATRIX CC: CC=A+J*OMEGA*B
DO 60 I=1,NL
  DO 50 J=1,NL
    CC(I,J) = A(I,J) + JEE*OMEGA*B(I,J)
50 CONTINUE
60 CONTINUE

C
C
C  BEREKENEN EIGENWAARDEN EN LINKER EN RECHTER EIGENVEKTOREN VAN DE
C  MATRIX CC M.B.V. DE TRYLIB-ROUTINE NORDIG (ACCU).
CALL NORDIG(CC, PINV, P, NL, COMPLX, LEFT, RIGHT, ICOUNT)

C
C
C  SAMENSTELLEN DIAGONAAL MATRIX PH: PH(I,I)=EXP(-X*CSQRT(LAM(I)))
DO 80 I=1,NL
  DO 70 J=1,NL
    IF (I.EQ.J) THEN
      PH(I,J) = EXP(-X*CSQRT(CC(I,I)))
    ELSE
      PH(I,J) = (0.,0.)
    END IF
70 CONTINUE
80 CONTINUE

C
C
C  VERMENIGVULDIGEN MATRIX P MET PH, RESULTAAT IN CC
CALL MTXCPR(CC, P, PH, NL, NL, NL, NL, NL, NL, IFAIL)

C
C
C  VERMENIGVULDIGEN MATRIX CC MET PINV, RESULTAAT IN PH
CALL MTXCPR(PH, CC, PINV, NL, NL, NL, NL, NL, NL, IFAIL)

C
C
C  VERMENIGVULDIGEN MATRIX PH MET VEKTOR PHINUL, RESULTAAT IN PHI
CALL MTXCPR(PHI, PH, PHINUL, NL, NL, NL, NL, NL, 1, IFAIL)

```

```

C
C   ONTLEDEN PHI IN DEMPING EN VERTRAGING EN PRINTEN RESULTATEN
C
C   WRITE (2,99999) AMP, X
C   DO 90 I=1,NL
C       DEMP = SQRT(REAL(PHI(I))**2.+AIMAG(PHI(I))**2.)/AMP
C       VERTR = ATAN(AIMAG(PHI(I))/REAL(PHI(I)))/OMEGA
C       WRITE (2,99998) I, C(I), KD(I), EPS(I), DEMP, -VERTR
C   90 CONTINUE
C
C   RETURN
C
C   FORMAT LABELS
C
C   99999 FORMAT ('1RESULTATEN'//'0AMPLITUDE VAN HET BUITENWATER:', F9.2,
C       1 ' M'/'0OPGEGEVEN AFSTAND:', F9.2, ' M'// '0LAAG C (DAGEN) KD ',
C       2 '(M2/DAG) ELASTISCHE BER- DEMPINGS- VERTRAGING (DAGEN)'/
C       3 31X, 'GINGSCOEFFICIENT FAKTOR', 7X, 'EVT. +.5*K*PERIODE'/)
C   99998 FORMAT (I4, F10.2, F12.2, F16.6, F14.3, F20.5)
C   END
C *****
C
C   VERMENIGVULDIGEN VAN COMPLEXE MATRICES B MET C (B*C)
C
C   SUBROUTINE MTXCPR(A, B, C, IA, IB, IC, NB, MB, MC, IFAIL)
C
C   COMPLEX A(IA,MC), B(IB,MB), C(IC,MC)
C
C   DO 30 I=1,NB
C       DO 20 J=1,MC
C           A(I,J) = (0.,0.)
C           DO 10 K=1,MB
C               A(I,J) = A(I,J) + B(I,K)*C(K,J)
C   10      CONTINUE
C   20      CONTINUE
C   30      CONTINUE
C
C   RETURN
C
C   END

```