Grondwater modelleren met 'spreadsheets': enkele modellen voor het simuleren van drainage

Samenvatting
Drainage wordt in Nederland van oudsher toegepast om landerijen droog te houden. De beheersing van de grondwaterstand door sloten of buizen speelt hierbij een belangrijke rol. In toenemende mate wordt er echter ook drainage vereist in bouwputten en op lokaties waar grond gesaneerd moet worden. Bij drainage moet er vaak gerekend worden: in het algemeen worden analytische formules gebruikt om de te verwachten grondwaterstanden en hoeveelheden te draineren water uit te rekenen. De berekeningen kunnen echter ook op een numerieke manier gedaan worden door de inschakeling van grondwatermodellen. Van een aantal specifieke drainagegevallen hebben wij grondwatermodellen vervaardigd. Uitgaande van de numerieke Darcy en continuïteitsvergelijkingen zijn de modellen opgezet in een 'spreadsheet'. Handig voor de gebruiker van de modellen zijn de overzichtelijke en duidelijk gescheiden modelinvoer, reken- en uitvoergedeeltes in het 'spreadsheet'. Bij het testen van de numerieke modellen werd een goede overeenkomst gevonden met analytische oplossingen.
De 'spreadsheet' modellen vormen een aanvulling op de analytische drainage-vergelijkingen. Bij een inhomogene en/of anisotrope doorlatendheid van de grond, bij een niet evenredig verdeeld neerslagoverschot of bij wisselende rand-voorwaarden geven de modellen een goede oplossing. Aangezien in deze gevallen analytische formules vaak te kort schieten, zullen de 'spreadsheet' modellen hier een uitkomst kunnen bieden.

1. Inleiding

De laatste jaren is er op het gebied van drainage in Nederland en in het buitenland veel werk verzet. Zowel in gebieden met een stedelijk karakter als op het platteland heeft drainage tot doel om overtollig water te verwijderen. In het algemeen betekent dit, dat wateroverschotten op het landoppervlak zelf zo snel mogelijk moeten worden afgevoerd. Het betekent ook, dat een teveel aan grondwater verwijderd moet worden om al te hoge grondwaterstanden te vermijden. Het laat zich makkelijk voorstellen, dat een overschot aan water op het landoppervlak of in de grond nadelige gevolgen heeft voor de ontwikkeling van een gebied: bouwwerkzaamheden en vervoer worden gehinderd, gewasopbrengsten vallen terug, in droge gebieden treedt bodem verzilting op etc.



DRS. J. C. NONNER
Institute for Infrastructural Hydraulic and Environmental Engineering
Delft



IR. H. VERMULST
Landbouw Universiteit Wageningen
thans werkzaam bij Rijkswaterstaat/RIZA

Om drainage te realiseren kunnen een aantal maatregelen worden voorgesteld. De keuze van deze maatregelen hangt vaak nauw samen met de oorzaak van het wateroverschot: een overvloedige neerslag, wateroverlast door rivieren, opwaartse kwel of een teveel aan irrigatiewater. Veel gebruikte maatregelen zijn de aanleg van een slotensysteem, het ondergronds leggen van drainagebuizen en, in mindere mate, het installeren van putten. In veel gevallen moet er rekening mee worden gehouden, dat een drainagesysteem ook het opstellen van pompen met zich meebrengt om het overtollige water naar een hoger niveau te brengen.

Traditiegetrouw wordt voor het ontwerp van systemen die voor de drainage van grondwater zorgdragen van een aantal analytische vergelijkingen gebruik gemaakt. Deze vergelijkingen bepalen de belangrijkste ontwerpkenmerken zoals de afstanden tussen, en de capaciteit van sloten, drainagebuizen of putten. Hierbij spelen ontwerpcriteria zoals de omvang van het wateroverschot en de maximaal toelaatbare hoogte van de grondwaterstand een belangrijke rol. Veel gebruikte analytische vergelijkingen voor het bepalen van afstanden tussen sloten en drainagebuizen zijn die van Donnan, Hooghoudt, Kirkham, Ernst en Glover-Dumm. Alhoewel deze vergelijkingen vaak goed bruikbaar zijn gebleken, schieten zij in een aantal gevallen toch te kort. Vooral is dit het geval voor gebieden waarbij er zowel in ruimtelijke als in tijdsgebonden zin een aanzienlijke variatie optreedt in neerslagoverschot, als er verschillen zijn in de doorlatendheid van de grond of als de sloot of andere buitenwaterstanden niet constant zijn.

Waar analytische formules te kort schieten wordt heden ten dage vaak met numerieke methodes gewerkt. De analytische formules, die gebruikt worden voor het ontwerpen van grondwaterdrainage zijn gebaseerd op de formule van Darcy en de continuïteitsvergelijking. Behalve voor een analytische aanpak leent de uitwerking van deze vergelijkingen zich goed voor een numerieke behandeling.

Het numeriek oplossen van grondwaterstromingssituaties houdt in, dat er grondwatermodellen vervaardigd moeten worden. De inzet van het merendeel der beschikbare grondwatermodellen is ongeschikt voor drainage-ontwerp. Deze modellen hebben een andere oriëntatie, zijn in veel gevallen moeilijk aan te passen, en het gebruik ervan zou te tijdrovend zijn voor drainage-ontwerp. Dit beeld verandert echter als er aan 'spreadsheet' modellen gedacht wordt. Deze modellen zijn snel gemaakt, makkelijk aan te passen en erg vriendelijk en snel in het gebruik.

Derhalve zal in dit artikel verder worden ingegaan op een aantal 'spreadsheet' modellen, die gebruikt kunnen worden voor drainage-ontwerp. Deze zijn gemaakt volgens de door Olsthoorn ontwikkelde principes voor het aanmaken van grondwatermodellen door het 'spreadsheet' [zie ook de artikelen van Olsthoorn in H_2O, 1984, 1985, 1987, 1988, 1989 en 1990].

Een overzicht van de drainagemodellen wordt hieronder gegeven. Vervolgens wordt een theoretische uiteenzetting van de numerieke aanpak en de inbouw van het numerieke rekenwerk in het 'spreadsheet' gepresenteerd. Tenslotte volgt een vergelijking van de modelresultaten met uitkomsten van een analytische aanpak.

2. De modellenserie

De modellenserie voor het ontwerpen van drainage moet gezien worden in samenhang met een aantal andere 'spreadsheet' modellen die de stroming van grondwater door en onder dijken en dammen simuleert.
Het ligt in de bedoeling in een vervolgartikel verder op deze stromingssituaties in te gaan. Bijne alle modellen zijn opgezet in het LOTUS 123 en in het SYMPHONY 'spreadsheet'. Het gebruik van LOTUS 123 of SYMPHONY heeft ieder zo zijn eigen voordeel: het LOTUS pakket is bij een breder publiek bekend, terwijl de SYMPHONY programmatuur meer grafische mogelijkheden biedt. Er moet verder vermeld worden, dat zowel het adviesbureau Euroconsult te Arnhem als de Landbouw Universiteit te Wageningen betrokken zijn geweest bij het vervaardigen van de modellen.

Er kunnen met 'spreadsheets' zowel horizontale als verticale drainagemodellen vervaardigd worden. De horizontale modellen kunnen voor freatische watervoerende lagen worden opgezet dan wel voor watervoerende lagen die bedekt zijn met half-doorlatende of ondoorlatende lagen. In principe kan men uitgaan van een horizontaal model opgebouwd uit 1 watervoerende laag of men kan een systeem kiezen waarbij meer watervoerende lagen gemodelleerd worden. Er kan zelfs een 3-dimensionaal model opgezet worden. Men heeft ook de mogelijkheid om te kiezen tussen het simuleren van stationaire of instationaire stroming. Van geval tot geval is er bekeken hoe op de nuttigste manier het specifieke drainagegeval gemodelleerd kon worden.

Tabel I laat een overzicht zien van de vervaardigde drainagemodellen. Er is een grote variëteit aan modellen: drainagemodellen die gebruikt kunnen worden voor het ontwerpen van slootafstanden (DRDITCH), voor het bepalen van de capaciteit van drainagebuizen en het vaststellen van de optimale afstanden tussen deze buizen (DRPIPE, DRPIVE, DRPIINS) en er zijn modellen voor het vaststellen van de meest geschikte afstand tussen drainageputten waarbij ook verticale grondwaterstroming een rol speelt (DRWELL). Ook zijn er modellen gemaakt die gebruikt kunnen worden voor het bepalen van de hoeveelheid te draineren grondwater en de grondwaterstandsverlagingen bij bouwputten en lokaties voor het saneren van bodemvervuiling (SEBPITU, SEBPITC).

3. Algemene aanpak

3.1. *Theoretische ondergrond*

Het belangrijkste doel van de modelexercitie is het berekenen van grondwaterstanden en stromingen uitgaande van aannames voor te draineren neerslagoverschotten, afstanden tussen drainage sloten, buizen en putten, en dimensies van bouwputten of te saneren lokaties. Om dit doel te realiseren is van een aantal voorwaarden uitgegaan. Ten eerste is er alleen van verzadigde grondwaterstroming uitgegaan en ten tweede is er verondersteld dat er geen dichtheidsverschillen in het grondwater optreden.

Voor de berekening van de grondwaterstanden en stromingen zelf zijn als 'vertrekpunt' de welbekende grondwaterstromingsvergelijkingen genomen. Ten eerste is dit de Darcy formule die uitgesplitst voor de x-, y- en z-richtingen in algemene vorm als volgt geschreven kan worden (zie symbolenlijst):

$$v_x = -k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} ; v_y = -k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} ; v_z = -k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad (1)$$

Ten tweede is er de continuïteitsvergelijking die in zijn algemene niet stationaire vorm als volgt uitgeschreven kan worden:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} - Q_{ext} = -S \frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad (2)$$

3.2. *Numerieke aanpak*

De hierboven geïntroduceerde vergelijkingen zijn op een numerieke manier verwerkt door gebruik te maken van de 'eindige differentie' techniek. Voor de toepassing van numerieke methodes moeten eerst de te modelleren ruimtes onderverdeeld worden. Gezien de toepasssing van de 'eindige differentie' techniek en het gebruik van het 'spreadsheet' is er voor een rechthoekige verdeling gekozen. Afbeelding 1 laat delen van de onderverdeling van de 'drainage ruimtes' voor de verschillende drainagegevallen zien. In alle gevallen vormt het rechthoekige modelraster de basis voor het drainagemodel.

Op basis van de onderverdeling van de 'drainage ruimtes' in rechthoeken werden de stromingsvergelijkingen herschreven door gebruik te maken van de boven al aangehaalde 'eindige differentiatie' techniek. Het herschrijven van de vergelijkingen kan worden uitgelegd aan de hand van afbeelding 1. In de afbeelding zijn voor de verschillende drainagegevallen een aantal knopen gemarkeerd. Knopen zijn de snijpunten van de zijden van de rechthoeken. Rond de knopen zijn representatieve ruimtes gedefinieerd.

Volgens de 'eindige differentie' techniek kan de uitgesplitste grondwaterstromingsvergelijking van Darcy (1) op een numerieke manier worden herschreven met als resultaat dat de stroming tussen 2 knopen als een van de volgende vergelijkingen wordt weergegeven (zie symbolen lijst):

TABEL I – *Overzicht van de drainagemodellen.*

DRDITCH	Horizontaal stationair model dat de freatische grondwaterstroming naar twee parallelle sloten simuleert.
DRPIPE	Horizontaal stationair model dat de freatische grondwaterstroming naar twee parallelle drainage buizen bepaalt.
DRPIVE	Verticaal stationair model dat in maximaal 4 lagen de grondwaterstroming naar parallelle drainage buizen simuleert.
DRPIINS	Verticaal instationair model dat in maximaal 4 lagen de grondwaterstroming naar parallelle drainage buizen simuleert.
DRWELL	Horizontaal stationair model dat de grondwaterstroming naar verticale putten simuleert in een watervoerende laag bedekt met een half-doorlatende laag.
SEBPITC	Horizontaal stationair model dat de grondwaterstroming naar een bouwput simuleert in een watervoerende laag bedekt met een half-doorlatende laag.
SEBPITU	Horizontaal stationair model dat de grondwaterstroming naar een bouwput in een freatische watervoerende laag simuleert.

Symbolenlijst

v_x = stroming *in de x richting* (m/dag)
v_y = stroming *in de y richting* (m/dag)
v_z = stroming *in de z richting* (m/dag)

k_x = doorlatendheid *in de x richting* (m/dag)
k_y = doorlatendheid *in de y richting* (m/dag)
k_z = doorlatendheid *in de z richting* (m/dag)

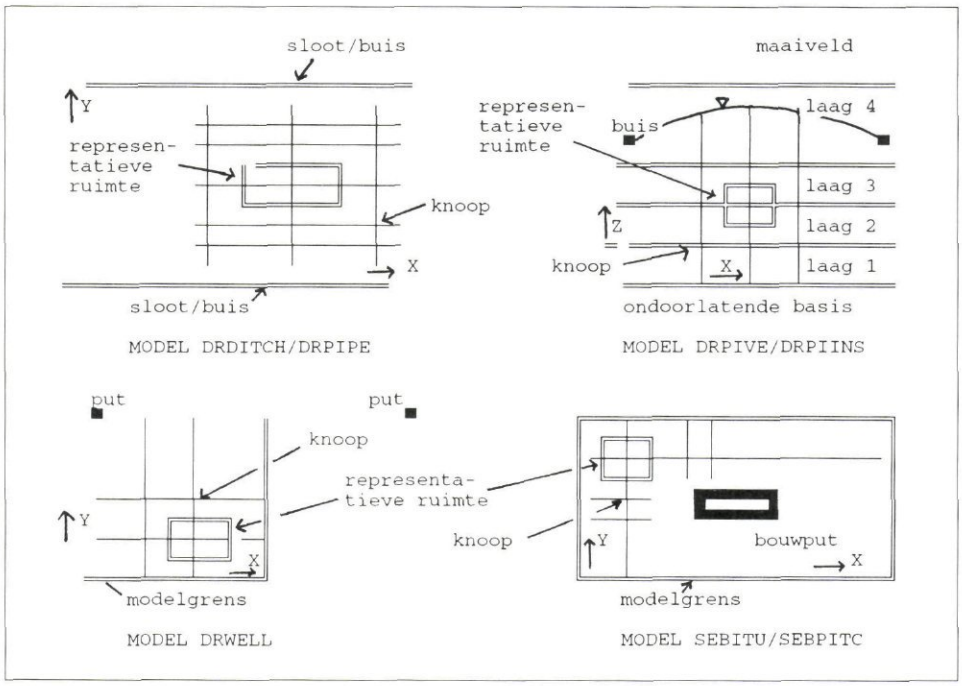
ϕ = grondwater potentiaal (m)
Q_{ext} = externe stroming (m)
S = bergings coëfficiënt (dimensieloos)

$q_{x,y,z}$ = numerieke stroming in de x, y, of z richting (m^3/dag)
D,B,L = dimensies van een rechthoekige representatieve ruimte in het model (m)
ϕ = grondwater potentiaal in centrale knoop (m)
$\phi_{x,y,z}$ = grondwater potentiaal in aanliggende knopen (m)
$l_{x,y,z}$ = knoop afstanden in de x,y en z *richtingen* (m)
Δt = lengte van een tijdstap (dag)

q_{x1} = stroming door linkerzijde in de x richting (m^3/dag)
q_{x2} = stroming door rechterzijde in de x richting (m^3/dag)
q_{y1} = stroming door 'onder'zijde in de y richting (m^3/dag)
q_{y2} = stroming door 'boven'zijde in de y richting (m^3/dag)

k_{x1} = doorlatendheid in x richting bij linkerzijde (m/dag)
k_{x2} = doorlatendheid in x richting bij rechterzijde (m/dag)
k_{y1} = doorlatendheid in y richting bij 'onder'zijde (m/dag)
k_{y2} = doorlatendheid in y richting bij 'boven'zijde (m/dag)

D_{x1} = dikte watervoerende laag bij linkerzijde (m)
D_{x2} = dikte watervoerende laag bij rechterzijde (m)
D_{y1} = dikte watervoerende laag bij 'onder'zijde (m)
D_{y2} = dikte watervoerende laag bij 'boven'zijde (m)



Afb. 1 - Rechthoekige netwerken in de 'drainage ruimtes'.

$$q_x = - k_x DB \frac{\phi - \phi_x}{l_x}; \quad q_y = - k_y DL \frac{\phi - \phi_y}{l_y};$$
$$q_z = - k_z BL \frac{\phi - \phi_z}{l_z} \qquad (3)$$

De continuïteitsvergelijking (2) kan ook worden herschreven op een numerieke manier. De resulterende vergelijking die dan in feite de grondwaterbalans voor de representatieve ruimte rond een knoop weergeeft ziet er als volgt uit:

$$q_x + q_y + q_z - Q_{ext} = - S \frac{\phi_{t=t} - \phi_{t=t-\Delta t}}{\Delta t} \qquad (4)$$

Uitgaande van de numerieke Darcy (3) en continuïteitsvergelijkingen (4) zijn de relevante vergelijkingen voor de verschillende gemodelleerde drainagegevallen opgesteld. Deze vergelijkingen zijn gecombineerd met elkaar en herschreven op een zodanige manier dat de grondwaterpotentiaal en de externe stroming gemakkelijk kunnen worden berekend. Een voorbeeld van een dergelijke procedure wordt uiteengezet in hoofdstuk 4.

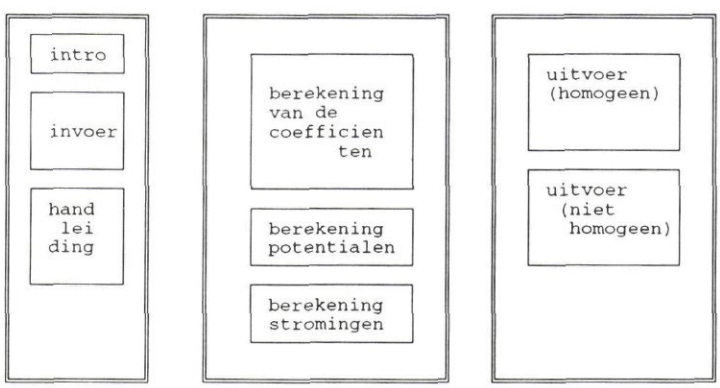
3.3. *Inbouw in het 'spreadsheet'*

Voor de uitwerking in het 'spreadsheet' van de vergelijkingen die de potentiaal en de externe stroming berekenen is het 'sheet' zelf in 3 gedeeeltes opgesplitst (afb. 2). Aan de linkerkant van het 'sheet' is een aantal kolommen gereserveerd voor een korte introductie, de invoer van gegevens en de handleiding. Daarnaast bevindt zich een rekengedeelte dat zich uitstrekt over een flink aantal kolommen: dit is het eigenlijke rekenmodel dus. Rechts van het rekengedeelte zijn een aantal kolommen ingericht voor de uitvoer.

De gegevens die men in het invoergedeelte kan opgeven aan het model zijn onder andere afstanden tussen drainagesloten, buizen of putten, hydraulische grootheden zoals de doorlatendheid of bergingscoëfficiënt van de ondergrond, neerslagoverschotten, vaste potentialen aan de randen van het model etc. Men heeft de keus tussen een homogene en een niet-homogene invoer voor een bepaalde grootheid. Men kan zich voorstellen dat men enerzijds het model wil gebruiken voor bijvoorbeeld het simuleren van drainage bij een homogene doorlatendheid van de ondergrond en anderzijds voor drainage bij een niet-homogene doorlatendheid. Beide mogelijkheden zijn ingebouwd: de modellen hebben de opties om in één keer een constante doorlatendheid aan de hele ruimte toe te kennen, of de grootheid per rechthoek op te geven.

Het rekengedeelte (afb. 2) in het 'spreadsheet' is zo opgebouwd dat er eerst coëfficiënten uitgerekend worden. Zoals boven al is genoemd kunnen er voor de verschillende drainagegevallen een aantal vergelijkingen worden afgeleid waarmee de grondwaterpotentialen en grondwaterstromingen worden berekend. In deze vergelijkingen kan men een aantal coëfficiënten definiëren die zijn opgebouwd uit grootheden zoals doorlatendheden, bergingscoëfficiënten, laagdiktes, dimensies van de rechthoeken, neerslag overschotten etc. De coëfficiënten worden berekend in velden (groepen cellen in het 'sheet') die de vorm hebben van het drainagemodel. In het bovenste gedeelte van het deel van het 'spreadsheet' waar de coëfficiënten worden bepaald vinden de berekeningen op basis van de rechthoeken van het model plaats en in het onderste gedeelte wordt overgestapt op de berekening van de coëfficiënten per knoop. Het werken op knoopbasis heeft als grootste voordeel dat de stromingsvergelijkingen aan de randen van het model niet hoeven te worden aangepast.

Het onderste gedeelte van het rekengedeelte is uit een aantal velden opgebouwd waar de uiteindelijke berekeningen van de potentialen en de grondwaterstromingen plaatsvinden. In het potentiaalveld worden per cel de potentialen berekend. Een cel komt in feite overeen met een knoop van het model. De potentiaalvergelijkingen zijn zodanig in de cellen van het 'spreadsheet' geplaatst dat er voor het aanhalen van de coëfficiënten wordt doorverwezen naar de bovengelegen velden. In het 'stromingen' veld worden de externe stromingen ook per cel berekend.
De manier van inbouw in het 'sheet' is ook hier weer zodanig dat er doorverwijzingen plaatsvinden naar boven-



Afb. 2 - Opbouw van het 'spreadsheet'.

liggende velden met coëfficiënten en het veld met de berekende potentialen.

Het rekengedeelte van het 'spreadsheet' is zo geconstrueerd dat de berekeningen volgens een zogenaamde MACRO worden gestuurd. Een MACRO is in feite een aantal 'rekenregels' die binnen een 'sheet' kunnen worden gedefinieerd. Een rol hierbij speelt dat een enkele berekening van de potentialen en externe stromingen (een iteratie) niet voldoende is om hun juiste waardes te bepalen. Het MACRO zorgt ervoor dat kolom of rijgewijs de berekeningen bij herhaling worden uitgevoerd uitgaande van beginwaardes van de potentialen en vaste potentialen. Het MACRO is zodanig geformuleerd dat de berekeningen doorgaan totdat de waarde van de waterbalans die voor het gehele model kan worden opgesteld uit de berekende grondwaterstromen beneden een bepaalde drempelwaarde valt. Voor de niet stationaire modellen (DRPIINS) wordt voor elke tijdstap afzonderlijk de drempelwaarde bereikt voordat het model met de volgende tijdstap begint.

Tot slot valt er nog iets te zeggen over het uitvoergedeelte van de drainagemodellen. Als de potentialen en stromingen in het rekengedeelte bepaald zijn dan worden zij in het uitvoergedeelte omgerekend naar praktische waarden. Dit wil zeggen dat omgerekend wordt van potentialen per knoop naar grondwaterstanden per knoop uitgedrukt in meter onder het maaiveld. De externe stromingen per knoop worden omgerekend naar de afvoeren naar een drainagesloot of buis per meter lengte of als een totale wateroverlast in een bouwput of een debiet van een verticale drainageput. De presentatie van de berekende waarden, invoergegevens en administratieve gegevens zijn in de vorm van tabellen en dwarsschema's weergegeven. Met de grafische mogelijkheden van het 'spreadsheet' kunnen ook figuren worden gemaakt.

4. **Een modelvoorbeeld**

4.1. *Stromingsvergelijkingen*

In hoofdstuk 4 wordt de toepassing van het 'spreadsheet' voor het modelleren van drainage nader bekeken aan de hand van een geselecteerd stromingsgeval. Het betreft het geval van horizontale stationaire stroming in een freatische watervoerende laag zoals die ten grondslag ligt aan een aantal van de modellen voor drainage naar sloten, buizen of een bouwput (DRDITCH, DRPIPE en SEBPITU). Met verwijzing naar de Darcy vergelijking (1) zijn de relevante vergelijkingen voor horizontale stroming:

$$v_x = -k_x \frac{\partial \phi}{\partial x};\ v_y = -k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad (5)$$

En de relevante continuïteitsvergelijking voor horizontale stationaire stroming kan als volgt worden uitgeschreven:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} - Q_{ext} = 0 \qquad (6)$$

4.2. *Numerieke vergelijkingen*

De numerieke stromingsvergelijkingen voor horizontale stationaire stroming zullen worden afgeleid met verwijzing naar afbeelding 3. Deze afbeelding toont voor een aantal interne rechthoeken de stroming (in de x- en y-richtingen) naar en van een knoop omringd door een representatieve ruimte met een lengte L en een hoogte B. Met verwijzing naar de vergelijkingen (3) en (5) kan de relevante numerieke vergelijking, bijvoorbeeld voor de stroming door het linker zijvlak van de representatieve ruimte, als volgt worden vastgesteld (zie ook symbolenlijst):

$$q_{x1} = -k_{x1} D_{x1} B \frac{\phi - \phi_{x1}}{l_1} \qquad (7)$$

Op basis van de vergelijkingen (4) en (6) kan ook de relevante numerieke continuïteitsvergelijking worden bepaald. Hierbij moet men bedenken dat de stroming naar de knoop een negatief teken heeft:

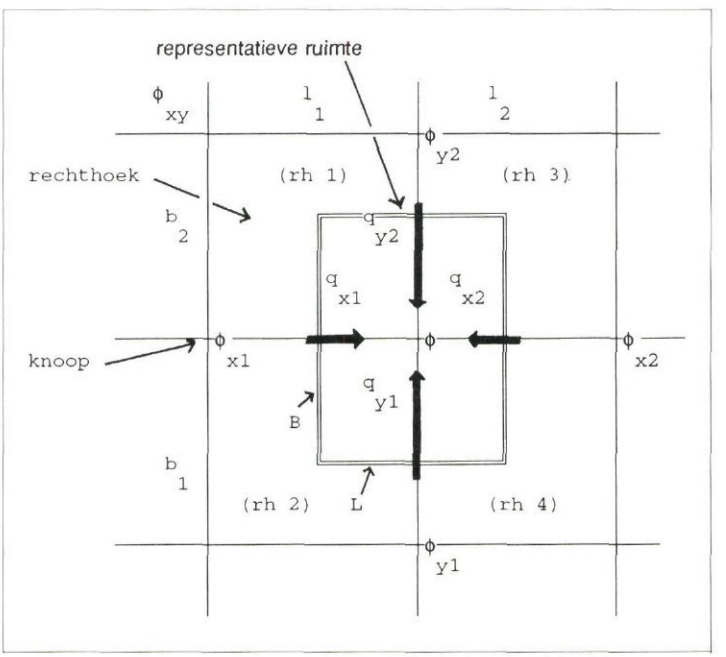
$$q_{x1} + q_{x2} + q_{y1} + q_{y2} - Q_{ext} = 0 \qquad (8)$$

De numerieke Darcy- en continuïteitsvergelijkingen (7) en (8) zijn echter geen einddoel op zichzelf als we het hebben over het modelleren van drainage. Zoals boven (hoofdstuk 3) al is aangegeven zijn de grondwaterpotentialen en de grondwaterstromingen dat wel. Dus zijn de numerieke Darcy- en continuïteitsvergelijkingen gecombineerd zodat er semi-expliciete (zie onder) vergelijkingen voor de potentiaal en de stroming konden worden opgesteld. De numerieke Darcy vergelijkingen voor de stroming door al de vier zijvlakken van de representatieve ruimte die de vorm hebben van vergelijking (7) zijn gecombineerd met de numerieke continuïteitsvergelijking (8):

$$k_{x1} D_{x1} B \frac{\phi - \phi_{x1}}{l_1} + k_{x2} D_{x2} B \frac{\phi - \phi_{x2}}{l_2} + k_{y1} D_{y1} L \frac{\phi - \phi_{y1}}{b_1} + k_{y2} D_{y2} L \frac{\phi - \phi_{y2}}{b_2} - Q_{ext} = 0 \qquad (9)$$

Na uitwerking van vergelijking (9) kan de potentiaal ϕ voor de centrale knoop in het horizontale model (afb. 3) in de volgende semi-expliciete vorm worden geschreven:

$$\phi = \frac{\frac{k_{x1} D_{x1} B}{l_1}\phi_{x1} + \frac{k_{x2} D_{x2} B}{l_2}\phi_{x2} + \frac{k_{y1} D_{y1} L}{b_1}\phi_{y1} + \frac{k_{y2} D_{y2} L}{b_2}\phi_{y2} + Q_{ext}}{\frac{k_{x1} D_{x1} B}{l_1} + \frac{k_{x2} D_{x2} B}{l_2} + \frac{k_{y1} D_{y1} L}{b_1} + \frac{k_{y2} D_{y2} L}{b_2}} \qquad (10)$$



Afb. 3 - Rechthoeken in een horizontaal model.

Deze vergelijking is vereenvoudigd door de coëfficiënten te benoemen als C_1, C_2 etc:

$$\phi = \frac{(C_1\phi_{x1} + C_2\phi_{x2} + C_4\phi_{y1} + C_3\phi_{y2} + Q_{ext})}{(C_1 + C_2 + C_4 + C_3)} \quad (11)$$

Vervolgens kan men naar de externe stroming kijken. De Q_{ext} stelt de (externe) stroming naar of van de centrale knoop voor (afb. 3). Deze kan eenvoudig worden berekend door vergelijking (11) te herschrijven:

$$Q_{ext} = (C_1 + C_2 + C_4 + C_3)\ \phi - C_1\phi_{x2} - C_2\phi_{x2} - C_4\phi_{y1} - C_3\phi_{y2} \quad (12)$$

In het 'spreadsheet' zijn voor berekeningen voor ons voorbeeld van drainage met horizontale stroming de vergelijkingen (11) en (12) gebruikt. Met deze vergelijkingen kan men de potentiaal (en ook een grondwaterstand) en de externe stroom in elke knoop van het model berekenen. In dit verband moet opgemerkt worden dat de D in vergelijking (10) de dikte van de freatische watervoerende laag aangeeft op de randen van de representatieve ruimtes. In principe kan deze dikte D in een potentiaal worden uitgedrukt en kunnen de vergelijkingen derhalve nog verder worden uitgewerkt. Aangezien de berekening van de dikte van de freatische laag in het 'spreadsheet' echter afzonderlijk wordt uitgewerkt (zie 4.2) is deze uitwerking ook niet doorgevoerd in de afleiding van vergelijkingen (11) en (12).

TABEL II – *Inbouw van de formules in het spreadsheet.*

Voor rechthoek 1 (rh 1) linksboven in afb. 3
Dikte van de verzadigde laag:
$D(rh\ 1) = (\phi_{xy} + \phi_{x1} + \phi_{y2} + \phi)/4$
Coëfficiënt in de X-richting:
$(k_x(rh\ 1) * D(rh\ 1) * b_2)/l_1$
Coëfficiënt in de Y-richting:
$(k_y(rh\ 1) * D(rh\ 1) * l_1)/b_2$
Drainage of neerslag overschot:
$N(rh\ 1) * b_2 * l_1$
Voor de middelste knoop in afbeelding 3
Coëfficiënt C_1 voor de stroming van links:
$C_1 = 0{,}5 * ((k_x(rh\ 1) * D(rh\ 1) * b_2)/l_1 + (k_x(rh\ 2) * D(rh\ 2) * b_1)/l_1)$
Coëfficiënt C_2 voor de stroming van rechts:
$C_2 = 0{,}5 * ((k_x(rh\ 3) * D(rh\ 3) * b_2)/l_2 + (k_x(rh\ 4) * D(rh\ 4) * b_1)/l_2)$
Coëfficiënt C_3 voor de stroming van boven:
$C_3 = 0{,}5 * ((k_y(rh\ 1) * D(rh\ 1) * l_1)/b_2 + (k_y(rh\ 3) * D(rh\ 3) * l_2)/b_2)$
Coëfficiënt C_4 voor de stroming van beneden:
$C_4 = 0{,}5 * ((k_y(rh\ 2) * D(rh\ 2) * l_1)/b_1 + (k_y(rh\ 4) * D(rh\ 4) * l_2)/b_1)$
Drainage of neerslag overschot $Q_{(ext)}$:
$0{,}25*((N(rh\ 1)*b_2*l_1) + (N(rh\ 2)*b_1*l_1) + (N(rh\ 3)*b_2*l_2) + (N(rh\ 4)*b_1*l_2))$
Potentiaal ϕ: normale berekening zonder over-relaxatie coëfficiënt
$\phi = (C_1\phi_{x1} + C_2\phi_{x2} + C_3\phi_{y2} + C_4\phi_{y1} + Q_{ext})/(C_1 + C_3 + C_2 + C_4)$ (a)
Potentiaal ϕ^+: met over-relaxatie coëfficiënt 'alpha' ($1 <$ 'alpha' $< 1{,}75$)
$\phi^+ = (1 - \text{'alpha'})\phi + (\text{'alpha'}) * (C_1\phi_{x1} + C_2\phi_{x2} + C_3\phi_{y2} + C_4\phi_{y1} + Q_{ext})/(C_1 + C_3 + C_2 + C_4)$
(Externe stroming (= drainage of neerslag overschot) $Q_{(ext)}$):
$Q_{ext} = (C_1 + C_2 + C_3 + C_4)\phi - C_1\phi_{x1} - C_2\phi_{x2} - C_3\phi_{y2} - C_4\phi_{y1}$ (b)

4.2. *Het 'spreadsheet'*

Hoe zijn de boven afgeleide vergelijkingen voor stationaire horizontale stroming naar drainage sloten, buizen of bouwputten nu precies ingebouwd in het 'spreadsheet'? Zoals al in algemene zin is aangeduid in hoofdstuk 3 worden eerst de coëfficiënten in het bovenste gedeelte van het rekengedeelte van het 'spreadsheet' berekend. Daartoe zijn in het eerste veld vergelijkingen gezet die de diktes (D(rh 1), D(rh 2) etc.) berekenen van de freatische laag waarin zich de sloot, buis of bouwput bevindt. Deze diktes worden per rechthoek berekend als het gemiddelde van de potentialen van de 4 omliggende knopen (zie tabel II). Daarna zijn in de volgende velden vergelijkingen geplaatst voor de bepalingen van de coëfficiënten per rechthoek. De coëfficiënten in de x-richting bijvoorbeeld worden dan berekend door de diktes te vermenigvuldigen zowel met de doorlatendheden (k_x (rh 1), k_x (rh 2) etc.) als met de totale rechthoek breedtes (b_1, b_2 etc.). Er wordt ook gedeeld door de totale rechthoek lengtes (l_1, l_2 etc.). De omschakeling naar coëfficiënten per knoop (C_1, C_2 etc.) wordt gerealiseerd door in de cellen van de daaronder geplaatste velden de coëfficiënten te halveren en vervolgens samen te stellen voor de representatieve ruimte rondom een knoop.

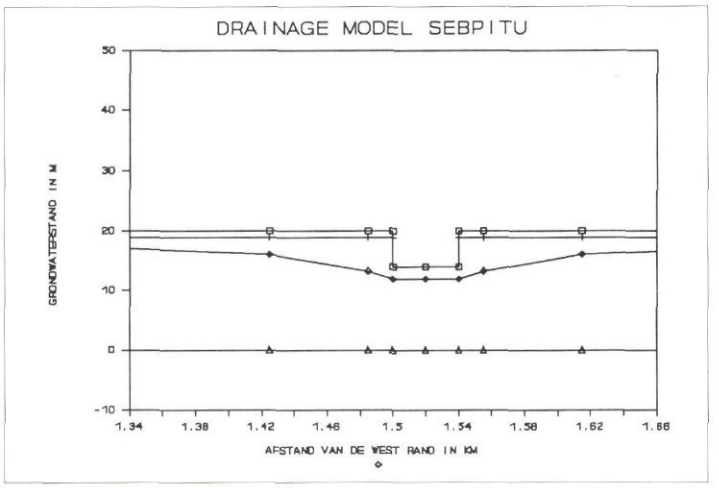
Vergelijking (11) voor de berekening van de potentialen wordt in het één na onderste veld van het rekengedeelte gekopieerd en vergelijking (12) voor de calculaties van stromingen wordt in het onderste veld ingevoerd. Dit betekent dat in een cel waarin vergelijking (11) de potentiaal berekent er verwijzingen zijn naar de bovenliggende velden met de berekende coëfficiënten C_1, C_2 etc. (zie ook Tabel II) en er zijn ook verwijzingen naar de omliggende cellen met al berekende potentialen (ϕ_{x1}, ϕ_{x2} etc.).

De aan het model opgelegde externe stromingen (Q_{ext}) zoals de neerslagoverschotten worden in een apart veld aangemaakt en de cellen waarin vergelijking (11) staat bevatten dan ook verwijzingen naar dit veld. Ook de noemer van de formule die gelijk is aan de som van al de coëfficiënten wordt in een apart veld aangemaakt. In de cellen die representatief zijn voor een sloot, buis of bouwputrand en waarin vergelijking (12) staat worden de externe stromingen (Q_{ext}) naar de sloot, de buis of de bouwput berekend door verwijzingen naar de cellen met coëfficiënten en naar de bovenliggende cellen waarin de potentialen (ϕ_{x1}, ϕ_{x2} etc.) berekend worden. Voor wat ons voorbeeld betreft is hiermee de inbouw van de vergelijkingen in de rekenmodule van het 'spreadsheet' uiteengezet.

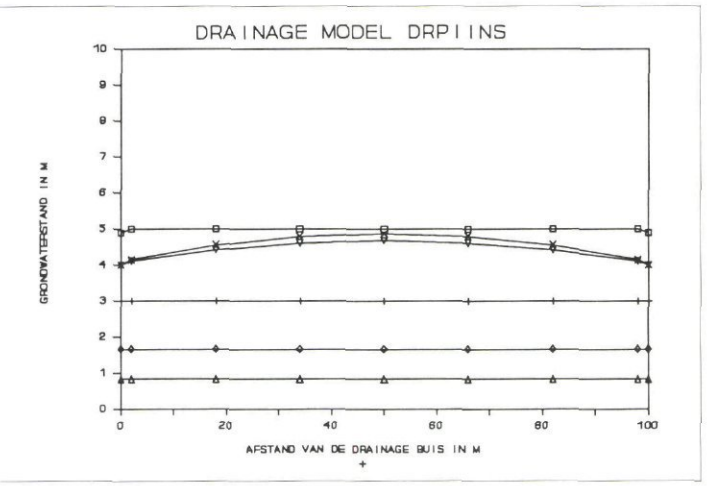
5. **Modeltoepassingen**

5.1. *Stroming rond een bouwput*

Voor een aantal concrete gevallen zijn de drainagemodellen toegepast. Als eerste voorbeeld van zo'n toepassing zal ingegaan worden op het geval van de grondwaterstroming rond een bouwput die is gegraven in een freatische watervoerende laag. Het model SEBPITU is hiervoor gebruikt en afbeelding 4 geeft de situatie in een dwarsdoorsnede schematisch weer. Voor de modellering is ervan uitgegaan dat de onderkant van de watervoerende laag zich bevindt op 0 m en de bovenkant op +20 m. De 'ondoorlatende' modelranden zijn op een afstand van 1.500 m van de bouwput vastgesteld. De doorlatendheid van de watervoerende laag is 10 m/dag, terwijl het neerslagoverschot 0,003 m/dag bedraagt. De vierkante bouwput heeft een dimensie van 40



Afb. 4 - Grondwaterstanden rondom een bouwput.
+ originele grondwater stand
✦ grondwater stand bij droogleggen △ top van de ondoorlatende basis



Afb. 5 - Niet stationaire stroming naar drainage buizen.
x grondwaterstand na 5 dagen
✦ grondwaterstand na 10 dagen

bij 60 m, terwijl de bodem van de put zich op +14 m bevindt. De vraag is hoeveel water er uit de bouwput gepompt moet worden om de grondwaterstand in de put op +12 m te houden (2 m onder de putbodem) en hoe zich de grondwaterstanden in de omgeving ontwikkelen. Na enig rekenwerk gaf het 'spreadsheet' een grondwateroverlast in de put van 3.392 m^3 /dag aan en zakken de grondwaterstanden, bijvoorbeeld op een afstand van 100 m van de rand van de put, 2,8 m ten opzichte van de natuurlijke grondwaterstand van +19 m.

5.2. *Stroming naar drainagebuizen*
Het tweede voorbeeld van een toepassing van een van de drainagemodellen betreft het geval van instationaire stroming naar drainagebuizen door een aantal grondlagen. De simulatie is gedaan met het model DRPIINS. Afbeelding 5 laat een dwarsdoorsnede van de 'ruimte' tussen 2 drainagebuizen zien. De buizen liggen op 100 m van elkaar en zijn gesitueerd in de bovenste van de 4 gemodelleerde grondlagen. De basis van deze lagen is gezet op 0 m, de buizen liggen op +4 m en het landoppervlak ligt op +5 m. De horizontale en verticale doorlatendheden van al de 4 lagen zijn voor deze toepassing op 1 m/dag gesteld (uiteraard kan er met allerlei variaties gesimuleerd worden), de bergingscoëfficiënt bedraagt 0,04 en het neerslag overschot is 0,01 m/dag. Hoe verloopt de afvoer van de drainagebuizen in de tijd en hoe ontwikkelen de grondwaterstanden zich tussen de drainagebuizen als er van een begin grondwaterstand van +5 m wordt uitgegaan. Na zijn rekenwerk gedaan te hebben kwam het 'spreadsheet' tot de volgende resultaten. Na 5 dagen is de afvoer door een drainagebuis afgenomen tot 0,13 m^3/dag per m buislengte en na 10 dagen tot 0,096 m^3/dag per m lengte. De grondwaterstanden midden tussen de buizen zijn na 5 dagen gezakt tot 0,12 m min maaiveld en na 10 dagen tot 0,32 m min maaiveld.

6. Toetsing aan analytische oplossingen

Met de 'spreadsheet' modellen is een aantal standaard drainagegevallen doorgerekend. De resultaten van deze berekeningen zijn vergeleken met hun analytische oplossingen. Om een goede vergelijking mogelijk te maken zijn de berekeningen uitsluitend gedaan voor eenvoudige drainagegevallen: de ingevoerde doorlatendheden, de verticale weerstanden, de vaste waterstanden en de neerslagoverschotten etc. zijn als zijnde constant over het gemodelleerde gebied aangehouden. De resultaten van de vergelijking vindt men in tabel III.

Tabel III geeft aan dat er in het algemeen een goede overeenkomst is tussen de resultaten van de modelsimulaties en de analytische oplossingen: de ratio's van de potentialen berekend met de modellen en bepaald met de analytische methodes zijn gelijk aan 1 of liggen hier niet ver vandaan. Voor de externe stromingen geldt eenzelfde resultaat. Bij DRPIINS en SEBPITU wijken de ratio's echter wat af van 1. Een verklaring voor de relatief lage ratio voor de potentiaal voor het model DRPIINS voor het drainagegeval van niet-stationaire stroming zou kunnen liggen in het feit dat de Kraijenhoff-V. d. Leur vergelijking die voor de analytische berekening gebruikt is de verzadigde dikte boven de drainagebuizen niet meeneemt. Dit betekent een geringere doorstroomdikte met als gevolg dat deze vergelijking de potentialen te hoog berekent en dit resulteert dan in een te lage ratio. Een explicatie voor de relatief hoge ratio voor de externe stroming zoals die gevonden is met SEBPITU voor het geval van stroming naar een bouwput in een freatische watervoerende laag zou kunnen zijn dat het model een relatief grof vierkantennetwerk heeft en ook uitgaat van een vierkante bouwput en een vierkant intrekgebied. Analytische benaderingen gaan daarentegen uit van cirkelvormige putten en intrekgebieden.

TABEL III – *Vergelijking van modelresultaten en analytische oplossingen.*

Model naam	Analytische benadering	Afstanden m	Doorlatendheid m/dag	Bergingscoëfficiënt	Neerslag overschot m/dag	Ratio resultaat[1] voor:	
						Potentiaal	Ext Stroming
DRDITCH	Donnan	100[2]	1	–	0,005	1	1
DRPIPE	Hooghoudt	87[2]	0,8	–	0,002	1	1
DRPIVE	Hooghoudt	87[2]	0,8	–	0,002	0,99	1
DRPRINS	Kraijenhof/Leur	80[2]	2	0,04	0,01	0,81	1
DRWELL	De Glee	10.000[3]	50	–	0,002	0,99	1
DRWELLE	De Glee	10.000[3]	50	–	0,002	0,99	1
SEBPITU	Dupuit	2.800[4]	10	–	0,003	–	1,08
SEBPITC	De Glee	2.800[4]	10	–	–	–	0,98

[1] Als: *ratio modelresultaat en analytische oplossing*
[2] Afstand tussen drainagebuizen
[3] Afstand tussen putten
[4] Afstand van bouwput tot rand model

● ● ●