De fysische onderbouwing van de overdrachtsfactor nader bekeken

Theo Olsthoorn[1]

Van den Akker (2013) postuleerde een eenvoudig hyperbolisch verband voor de doorwerking (overdrachtsfactor) van een verlaging van de regionale stijghoogte op die van het freatische grondwater in vrij afwaterende gebieden. Hij stelde voor dit verband toe te passen als grondslag voor de berekening van landbouwschade als gevolg van onttrekking van grondwater aan regionale, semi-gespannen aquifers in zulke gebieden. Omdat de keuze van de overdrachtsfactor gevolgen kan hebben voor uit te keren bedragen is een gedegen hydrologische analyse noodzakelijk, ook van zijn claim dat zijn doorwerkcurve fysisch onderbouwd is (Van den Akker (2014).

De vragen die in dit artikel worden beantwoord zijn: Hoe fysisch is de doorwerkcurve die Van den Akker (2013) postuleerde? Hoe hangt deze samen met de drainageweerstand, en met de grondwaterstand-afvoerrelatie, of beter, met de equivalente grondwaterdiepte-afvoerrelatie? Wat is de algemene fysische vorm van de doorwerkcurve en hoe verhoudt deze zich met die van Van den Akker (2013)? Is de doorwerkcurve van Van den Akker (2013) universeel toepasbaar?

Inleiding

Het staat buiten twijfel dat een onttrekking in een regionaal watervoerende pakket doorwerkt naar de freatische grondwaterstand. Aangezien dit verband in de tegenwoordige grondwatermodellen wordt meegenomen, en dus berekend, maakt deze onttrekking geen deel uit van de achtergrondverlaging, welke per definitie tot nu toe niet expliciet aan specifieke oorzaken kan worden gekoppeld. Olsthoorn (2014a) toonde al aan dat de gepostuleerde doorwerkcurve niet de verklaring kan zijn voor de achtergrondverlaging in ons land. Olsthoorn (2014b) laat bovendien zien hoe essentieel niet-stationaire analyse is in situaties waarin het oppervlaktewater in de zomer droogvalt.

Zolang afvoer van het grondwater uit een gebied groter is dan nul, bestaat er een doorwerkcurve welke een aantal ruimtelijke en fysische eigenschappen van het gebied integreert. De algemene, fysisch vereiste vorm van de doorwerkcurve, die hierna wordt afgeleid, laat zien dat deze enerzijds afhankelijk is van de weerstand c tussen het freatische en het regionale watervoerende pakket, en anderzijds van het verband tussen grondwaterdiepte $\overline{d}$ en drainageweerstand γ. De hyperbolische vorm van de doorwerk-

[1] Prof. dr.ir. T.N. Olsthoorn, t.n.olsthoorn@tudelft.nl (TUDelft), tevens hydroloog bij Waternet; Waternet is niet betrokken bij dit artikel

curve die Van den Akker (2013) postuleerde blijkt een bijzonder geval dat impliceert dat de grondwaterstand-afvoerrelatie logaritmisch verloopt met de grondwaterdiepte, en bovendien dat de drainageweerstand lineair daarmee toeneemt.

Men kan evengoed de grondwaterstand-afvoerrelatie van het beschouwde gebied als vertrekpunt nemen in plaats van de doorwerkcurve en dan daarvoor de doorwerkcurve en drainageweerstand afleiden. Een hyperbolisch verloop van de grondwaterstand-afvoerrelatie in plaats van de doorwerkcurve blijkt hiervoor mathematisch zeer geschikt en past even goed of slecht op het gebruikte empirische verloop van Ernst (1971), maar de uiteindelijke doorwerking wijkt af omdat de drainageweerstand nu praktisch kwadratisch in plaats van lineair toeneemt met de grondwaterdiepte.

Een kwadratische toename van de drainageweerstand met de diepte van de grondwaterstand blijkt vervolgens goed te passen op de drainageweerstand die numeriek werd afgeleid uit een gesimuleerde doorsnede met 6 verschillende drainageniveaus, vergelijkbaar met de praktijk.

Het gekozen wiskundige verband blijkt ertoe te doen.

Het hyperbolische verloop van de grondwaterstand-afvoerrelatie is eenvoudig te veralgemeniseren met een extra parameter (een macht). Hiermee past het wiskundige verband zeer goed op de empirische grondwaterstand-afvoerrelatie van Ernst (1971). Ook voor deze veralgemeniseerde kromme van de grondwaterstand-afvoerrelatie kunnen zowel de drainageweerstand als de doorwerkcurve direct worden berekend.

Is dit nu een fysische onderbouwing? Niet per se. De gekozen wiskundige relaties zijn immers niet vanuit de fysica opgebouwd; we hebben Darcy niet gebruikt; het blijven slechts mathematische verbanden die op de beschikbare empirische grondwaterstand-afvoerrelatie worden gefit en waarmee verder kan worden geredeneerd.

Het algemene hier afgeleide verband tussen doorwerkcurve, drainageweerstand en weerstand van de scheidende laag is echter wel bekend, maar dit zegt op zichzelf niets over de wiskundige vorm van deze verbanden. Het wiskundig vastprikken van de vorm impliceert een specifiek verband tussen doorwerking en grondwaterdiepte en tussen drainageweerstand en grondwaterdiepte, dat empirisch moet worden geverifieerd. Tenslotte moet herhaald, dat dergelijke stationaire analyses voor dynamische systemen hun geldigheid verliezen zodra het grondwater geheel losraakt van de drainagesystemen in het beschouwde gebied, zodat de wegzijging niet meer kan worden gecompenseerd door verminderde drainage en verdampingsreductie (Olsthoorn, 2014b).

Het algemene fysische verband tussen doorwerkcurve, regionale weerstand en drainageweerstand

De doorwerkcurve van Van den Akker (2013) leent zich goed voor mathematisch doorredeneren, maar dat is op zichzelf geen verklaring is voor onderliggende fysica, ook al is ze wiskundig correct. Dit artikel geeft een analyse van de fysische onderbouwing van de doorwerkcurve. Hiertoe wordt een relatie gelegd tussen doorwerking en het verband

tussen grondwaterdiepte en gebiedsafvoer. De laatste kan empirisch worden bepaald en is daarom een beter uitgangspunt dan een gepostuleerde doorwerkcurve.
De doorwerkcurve wordt getoetst aan de empirische relatie tussen grondwaterstand en gebiedsafvoer uit Ernst (1971). De doorwerkcurve wordt tevens afgeleid uit de resultaten van een numeriek model van een doorsnede met zes drainageniveaus.
Bij de doorwerking van de grondwaterverlaging in een regionaal pakket op de stand van het freatische grondwater spelen twee weerstanden een centrale rol: 1) de weerstand tussen het freatische grondwater en het regionale watervoerende pakket en 2) de drainageweerstand, die afhankelijk is van de diepte van de freatische grondwaterstand.

Doorwerkcurve, drainageweerstand en grondwaterstand-afvoerrelatie in vrij afwaterende gebieden met een onderliggend regionaal watervoerend pakket

Elk vrij afwaterend, en dus freatisch pakket heeft een grondwaterstand-afvoerrelatie, dat wil zeggen een monotoon stijgende functie, die de gebiedsgemiddelde afvoer U [L/T] naar het drainagesysteem relateert aan de gebiedsgemiddelde grondwaterstand h [L]

$$\frac{dU(h)}{dh} = \frac{1}{\gamma} \geq 0 \tag{1}$$

waarin γ [T] de drainageweerstand is, die van de grondwaterstand afhangt.

Onttrekken we uniform een flux q [L/T] aan het freatische grondwater dan daalt daarvan de stand overeenkomstig deze grondwaterstand-afvoerrelatie

$$dq = -\frac{dU}{dh}dh \tag{2}$$

zodat

$$\frac{dq}{dh} = -\frac{dU}{dh} \tag{3}$$

De wegzijging naar een onderliggend regionaal watervoerend pakket met gebiedsgemiddelde stijghoogte ϕ [L] via een slecht doorlatende laag met weerstand c [T] voldoet aan

$$q = \frac{h-\phi}{c} \tag{4}$$

zodat

$$\frac{dq}{dh} = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{d\phi}{dh}\right) \tag{5}$$

Daar $\frac{dh}{d\phi}$ de doorwerking is, dat wil zeggen de mate waarin h daalt als gevolg van een verlaging van ϕ, en die Van den Akker (2013) aanduidt met $F = \frac{dh}{d\phi}$, geldt

$$\frac{dq}{dh} = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{1}{F}\right) \tag{6}$$

en met vergelijking (3) dus ook

$$\frac{dU}{dh} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{F} - 1\right) \tag{7}$$

waarmee de grondwaterstand-afvoerrelatie is gekoppeld aan de doorwerking. Met vergelijking (1) hebben we dus ook

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{F} - 1\right) \tag{8}$$

zodat

$$F = \frac{1}{\frac{c}{\gamma} + 1} \tag{9}$$

of

$$F = \frac{\gamma}{c + \gamma} \tag{10}$$

Vergelijking (10) geeft de algemene vergelijking voor de doorwerkcurve voor elk gebied. Hierin is de drainageweerstand γ een nog onbepaalde functie van de grondwaterstand of de grondwaterdiepte. Vergelijking (10) is ook fysisch; hij maakt alleen gebruik van het feit dat er een drainageweerstand bestaat en bekommert zich niet om diens wiskundige vorm.

De kern van de zaak is nu dat zowel de grondwaterstand-afvoerrelatie als de drainageweerstand onafhankelijk zijn van de aanwezigheid van een weerstand biedende laag met aquifer onder het freatisch pakket. Voor het freatisch pakket is q immers een onttrekking als elk ander, ongeacht of die nu wordt veroorzaakt door freatische winning, verdamping of door wegzijging via een kleilaag. Ergo, vergelijking (10), met de constatering dat γ niet van c afhangt, impliceert dat de doorwerkcurve altijd van de weerstand van de scheidende laag afhangt. Hier zit geen licht tussen de wiskunde en de fysica.

Hyperbolische doorwerkcurve

Van den Akker (2013) postuleerde een hyperbolisch verband tussen doorwerking F en de grondwaterdiepte $\overline{d}$. Hierin is $\overline{d} = (m_v - b) - h$, de afstand van de grondwaterspiegel h beneden een referentievlak op afstand $b = 0$ beneden maaiveld m_v. Dit referentievlak, dus waar $\overline{d} = 0$, is het vlak waar $F = 0$, althans wiskundig. De maaiveldhoogte en de grondwaterstand zijn uitgedrukt t.o.v. een referentievlak zoals NAP. De grootheden m_v, h en $\overline{d}$ zijn gebiedsgemiddelden, in die zin dat geen rekening hoeft te worden gehouden met de loop en eigenschappen van de individuele drainagemiddelen, noch met het precieze verloop van de opbolling daartussen. Met deze definitie van grondwaterdiepte vereenvoudigt de doorwerkcurve van Van den Akker (2013) tot

$$F = \frac{\overline{d}}{a + \overline{d}} \tag{11}$$

Hierin is a [L], een gebiedsconstante, wiskundig gelijk aan de grondwaterdiepte waarop

F = 0.5. Wiskundig is F een hyperbool, maar verticaal gespiegeld en verschoven, want te schrijven als $xy = a$ door de substitutie van $F = 1 - x$ en $\bar{d} = y - a$.

Weerspiegelt dit gepostuleerde mathematische verloop van de doorwerkcurve de onderliggende fysica weerspiegelt zoals die in vergelijkingen (9) en (11) is vastgelegd? Vergelijkingen (11) en (10) kunnen alleen equivalent worden gemaakt onder voorwaarde dat de drainageweerstand evenredig is met de grondwaterdiepte, dat wil zeggen wanneer we de drainageweerstand mogen schrijven als $y = \bar{d} \,/\, U_1$, waarin U_1 [L/T] een gebiedsconstante met dimensie gebiedsafvoer (zie verderop). Als we vergelijkingen (11) en (10) aldus naast elkaar zetten, dan volgt

$$\frac{\bar{d}}{a+\bar{d}} = \frac{\bar{d}/U_1}{c+\bar{d}/U_1} \tag{12}$$

$$\frac{\bar{d}}{a+\bar{d}} = \frac{\bar{d}}{cU_1+\bar{d}} \tag{13}$$

zodat beide vergelijkingen equivalent zijn als

$$a = cU_1 \tag{14}$$

met als voorwaarde dat drainageweerstand evenredig is met de grondwaterdiepte

$$\gamma = \frac{\bar{d}}{U_1} \tag{15}$$

De bijbehorende grondwaterstand-afvoerrelatie is nu ook bekend.

Daar

$$\frac{dU}{d\bar{d}} = -\frac{dU}{dh} \tag{16}$$

volgt met (15) immers

$$\gamma = -\frac{d\bar{d}}{dU} = \frac{\bar{d}}{U_1} \tag{17}$$

en na integratie blijkt

$$\frac{U}{U_1} + C = -\ln \bar{d} \tag{18}$$

Kiezen we een willekeurig punt van een empirische grondwaterdiepte-afvoerrelatie, $U = U_a$ als $\bar{d} = \bar{d}_a$, dan is de integratieconstante C ook bekend

$$C = -\frac{U_a}{U_1} - \ln \bar{d}_a \tag{19}$$

zodat de grondwaterdiepte-afvoerrelatie onder het uitgangspunt van vergelijking (15) voldoet aan het volgende logaritmische verband

$$U = U_a - U_1 \ln \frac{\bar{d}}{\bar{d}_a} \tag{20}$$

Dit is de grondwaterdiepte-afvoerrelatie die behoort bij een doorwerkcurve van de vorm zoals Van den Akker (2013) hem postuleerde (vergelijking (11).

De grondwaterdiepte-afvoerrelatie is onafhankelijk van een eventuele onderliggende weerstand biedende laag. De U_1 die we in (15) kozen als evenredigheidsconstante blijkt een constante in de grondwaterdiepte-afvoerrelatie. Het is eveneens een gebiedsconstante, die onafhankelijk is van het punt U_a, $\bar{d}_a$ dat we op de empirische grondwaterdiepte-afvoerrelatie kozen om de integratieconstante vast te pinnen; immers voor $\bar{d} = \bar{d}_a$ geldt altijd $U = U_a$, onafhankelijk van U_1. De constante U_1 kan worden bepaald door vervolgens een ander punt U_p, $\bar{d}_p$ van de empirische grondwaterdiepte-afvoerrelatie te kiezen:

$$U_1 = \frac{U_p - U_a}{\ln\left(\bar{d}_a / \bar{d}_p\right)} \tag{21}$$

Conceptueel is U_1 het afvoerverschil $U_p - U_a$ voor een grondwaterdiepte $\bar{d}_p = d_a$ / exp(1) = 0.3679d_a. Conceptueel wellicht enigszins complex, maar mathematisch volstrekt eenduidig en in de grafiek van de grondwaterdiepte-afvoerrelatie direct aan te wijzen.

Afbeelding 1 geeft het verloop van de empirische grondwaterdiepte-afvoerrelatie uit afbeelding 6 in Ernst (1971) en het best passende logaritmische verband hiervoor, samen met de twee gebruikte pas-punten. De fit is dezelfde als in Van den Akker (2014); de fit is feitelijk matig. Het logaritmische verband geeft $U = 0$ op een zekere diepte, ca. 1.6 m, waar beneden de curve dient te worden afgekapt resp. de drainageweerstand op oneindig groot moet worden gezet. De empirische curve lijkt dat niet te doen, wat op zichzelf niet rijmt met de fysica, die vereist dat de afvoer nul wordt wanneer de grondwaterstand zakt tot beneden het regionaal diepste drainageniveau.
Het empirische verloop is echter zelf met onzekerheid behept; het is in feite niet meer dan een lijn die getrokken is door een wolk of band van veldwaarnemingen, die Ernst (1971) niet in zijn publicatie opnam. Dat er afwijkingen zijn is derhalve niet verwonderlijk. Het is mij overigens niet gelukt om in een doorsnedemodel (zie verderop) een configuratie van drainageniveaus en slootafstanden te vinden die de lineaire toename van de drainageweerstand met de grondwaterdiepte voor elkaar krijgt, zoals die hoort bij de hyperbolische doorwerkcurve.

Alternatieve doorwerkcurven, grondwaterstand-afvoerrelatie als uitgangspunt

Het hyperbolische verloop van de doorwerkcurve is maar één van de vele wiskundige vormen die leiden tot krommen die redelijk tot goed door de waarnemingen lopen. Het hyperbolische verloop van de doorwerkcurve leidde tot een logaritmisch verloop van de grondwaterstand-afvoerrelatie. We kunnen echter ook direct de grondwaterstand-afvoerrelatie als basis nemen in plaats van de doorwerkcurve, en voor de eerste een eenvoudige wiskundige vorm kiezen. De doorwerkcurve en de drainageweerstand volgen daar dan uit. Het eenvoudige hyperbolische verloop van Van den Akker (2014) is hiervoor zeer geschikte wiskundige vorm. Het wiskundige verband voor de grondwaterdiepte-afvoerrelatie wordt dan

$$U = U_0\left(1 - \frac{\bar{d}}{\bar{d} + a}\right) \tag{22}$$

$$U = \frac{aU_0}{\bar{d} + a} \tag{23}$$

Merk op dat a in vergelijking (23) op zichzelf niets te maken heeft met parameter a in de doorwerkcurve van Van den Akker (2013) in vergelijking (11). Wel hebben beide de dimensie lengte. In vergelijking (23) is parameter a de grondwaterdiepte waarop de afvoer $U = 0.5$, in vergelijking (11) is parameter a de grondwaterdiepte waarop de doorwerking $F = 0.5$.

Merk ook op dat gebiedsafvoer U varieert tussen 0 en U_0 voor de grondwaterdiepte $\bar{d}$ tussen $-\infty$ en 0. Ook deze alternatieve, wiskundig eenvoudige kromme kan in de praktijk worden gepast op een empirische grondwaterdiepte-afvoerrelatie. Afbeelding 1 geeft de mate waarin hij past op de empirische grondwaterdiepte-afvoerrelatie van Ernst (1971), samen met de twee gebruikte paspunten. Ook voor deze kromme blijkt de fit met de empirische kromme niet bijzonder goed. En ook voor deze kromme gelden dezelfde kanttekeningen als voor de logaritmische grondwaterstand-afvoerrelatie die hiervoor is afgeleid uit de hyperbolische doorwerkcurve.

Het verloop van de drainageweerstand met de grondwaterdiepte die geldt voor vergelijking (23) is

$$\frac{1}{\gamma} = -\frac{dU}{d\bar{d}} = \frac{aU_0}{\left(\bar{d}+a\right)^2} \tag{24}$$

zodat de bijbehorende doorwerkcurve (vergelijking (10)) als volgt luidt

$$F = \frac{1}{c\dfrac{aU_0}{\left(\bar{d}+a\right)^2}+1} \tag{25}$$

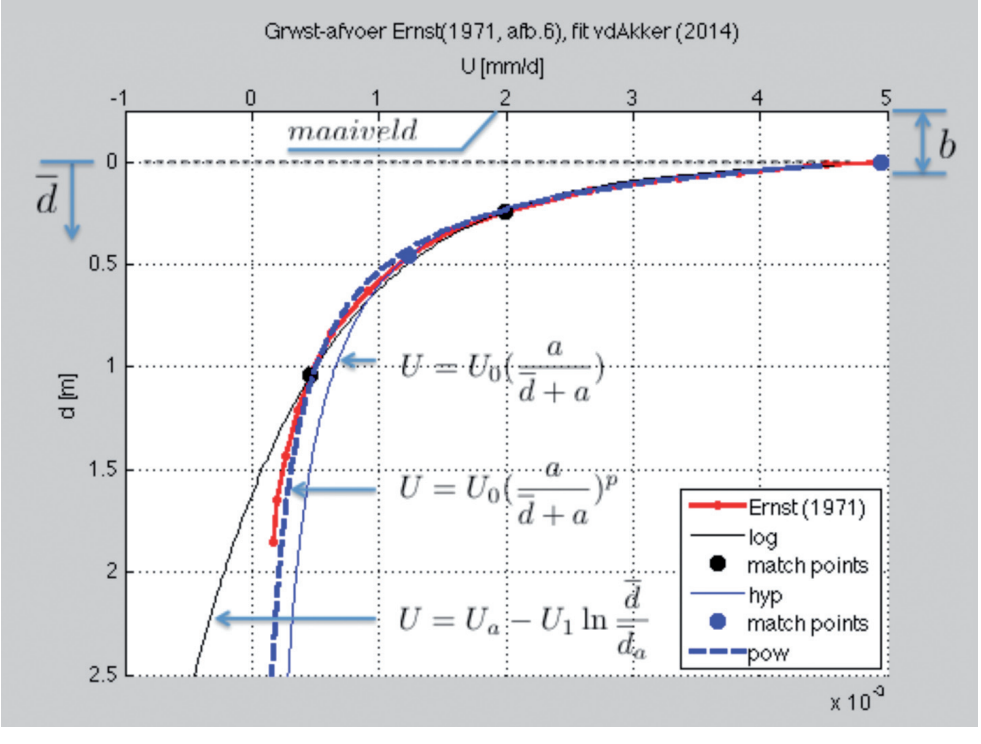
We zien dat $F \to 1$ als $\bar{d} \to \infty$ en of wanneer $c \to 0$. Voorts blijkt dat $F \to 0$ wanneer $c \to \infty$, zoals verwacht. Merk op dat de drainageweerstand γ nagenoeg evenredig is aan het kwadraat van de grondwaterdiepte $\bar{d}$. Ook op de hyperbolische grondwaterstand--afvoerrelatie valt het nodige af te dingen. Hij blijft gepostuleerd, en is niet van de grond af afgeleid; hij dient uitsluitend om gemakkelijk de doorwerking uit te kunnen rekenen. De hyperbolische grondwaterstand-afvoerrelatie voldoet niet aan de fysische eis dat de afvoer nul wordt wanneer de grondwaterstand zakt onder het diepste regionale drainageniveau. Dit hoeft in de praktijk geen bezwaar te zijn wanneer het verloop tenminste goed past op de empirische curve binnen het bereik van de waarnemingen; de passing bij nooit voorkomende hele ondiepe en hele diepe standen is irrelevant.

Doorwerkcurven gekalibreerd op de grondwaterstand-afvoerrelatie

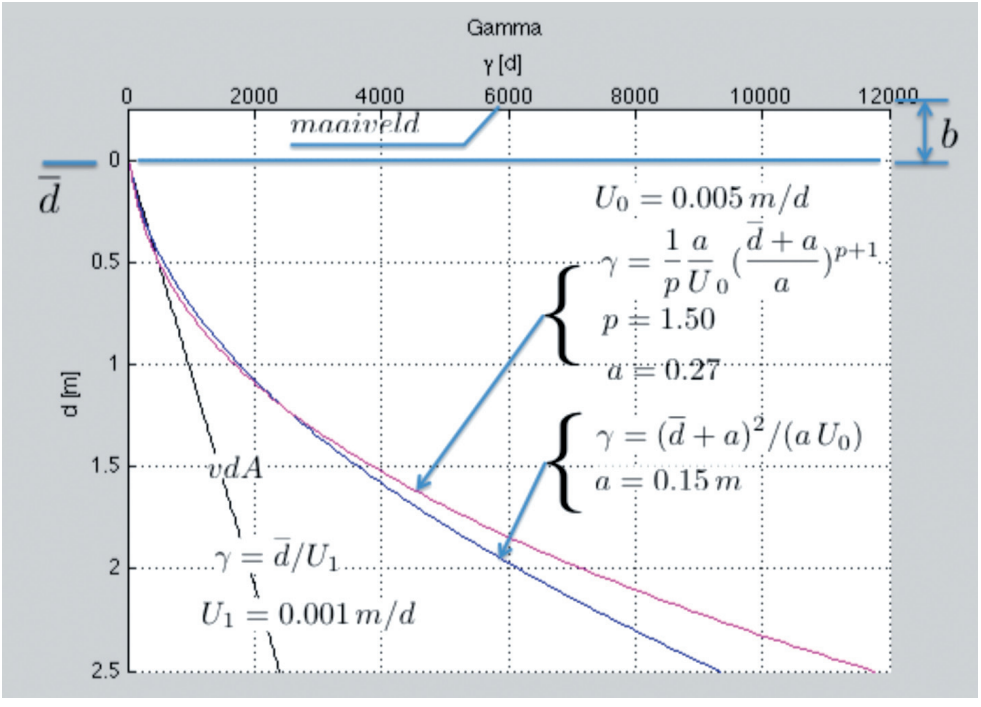
De doorwerkcurve in vergelijking (10) is fysisch. De vorm van de drainageweerstand als functie van de grondwaterdiepte $\gamma = \gamma(\bar{d})$is daarin niet vastgelegd. De drainageweerstand is echter één of andere functie van de grondwaterdiepte of de grondwaterstand, een relatie die bovendien gebied-specifiek is. Door het kiezen van een bepaalde wiskundige vorm leg je ook dit verband vast. Keuze voor een hyperbolisch verloop van de doorwerkcurve impliceert een lineaire toename van de drainageweerstand met de diepte. Hij impliceert ook een logaritmisch verlopende grondwaterdiepte-afvoerrelatie. Keuze van een hyperbolisch verloop van de grondwaterdiepte-afvoerrelatie daarentegen

impliceert een drainageweerstand die ongeveer kwadratisch toeneemt met de grondwaterdiepte en een daarmee consistent verloop van de doorwerkcurve, een die sneller toeneemt met de grondwaterdiepte. Aangezien de doorwerkcurve voortkomt uit de grondwaterdiepte-afvoerrelatie en niet omgekeerd, ligt het voor de hand om uit te gaan van een empirisch uit veldwaarnemingen bepaald verloop van de grondwaterstand-afvoerrelatie, en vervolgens de wiskundige kromme daarop te fitten. Met de best passende wiskundige curve kan dan verder worden gewerkt. Waar de veldmetingen alternatieve wiskundige vormen toelaten, behoort de gevoeligheid te worden onderzocht voor beslissingen die zullen worden gebaseerd op de uitkomsten van de hydrologische analyse. In elk geval zal de doorwerkcurve aan vergelijking (10) moeten voldoen en dus afhankelijk zijn van de weerstand c van de onderliggende scheidende laag. Daar waar deze varieert in een gebied, daar varieert ook de doorwerking, zoals bij Terwisscha, waar op sommige plekken wel en elders geen potklei in de ondergrond voorkomt (Maas, 2012).

Een goede procedure is de gebiedsconstante U_1 te ijken door vergelijking (20) te passen op de empirische grafiek van de grondwaterstand-afvoerrelatie van Ernst (1971), en vervolgens met de weerstand van de scheidende laag c, die bijvoorbeeld bekend is uit pompproeven, de gebiedsconstante $a = cU_1$ in de doorwerkcurve van vergelijking (11)



Afbeelding 1: Passing van beide grondwaterstand-afvoerrelaties op de grafiek van Ernst (1971, Afbeelding 6). Getalswaarde van de paspunten [U, $\overline{d}$] van de log-curve zijn: [0.46, 1.0] en [2.0, 0.24] en van de hyperbool [1.23, 0.46] en [4.95, 0]. U-waarden in mm/d. In de formules levert dit U_a = 2.0 en U_1 = 1.0 mm/d = 0.001 m/d, a = 0.15 m en d_a = 0.152 m. De a en p in de power curve (legenda "pow") zijn bepaald door kalibratie: a = 0.28 m en p = 1.50.



Afbeelding 2: Drainageweerstand als functie van de grondwaterdiepte, overeenkomstig de hyperbolische doorwerkcurve van Van den Akker (2013) (zwarte lijn), bij een hyperbolisch verloop van de grondwaterstand-afvoerrelatie (blauw) en bij een hyperbolische curve met macht p. De blauwe curve neemt kwadratisch toe met de grondwaterdiepte en de zwarte lineair. De paarse curve hoort bij een grondwaterdiepte--afvoerrelatie volgens vergelijking (28) met gekalibreerde waarden van a = 0.28 m en macht p = 1.50. Een macht p = 1.50 impliceert dat de drainageweerstand evenredig is met de grondwaterdiepte tot de macht 2.5, zie vergelijking (30), waar macht p + 1 in voorkomt.

vast te stellen. Voor de hyperbolische grondwaterdiepte-afvoerrelatie geldt eenzelfde procedure. Bepaal uit de empirische grondwaterdiepte-afvoerrelatie de waarden van U_0 en a, waarna drainageweerstand en doorwerkcurve kunnen worden berekend volgens vergelijkingen (24) en (25). De logaritmische grondwaterdiepte-afvoerrelatie is in afbeelding 1 gefit op afbeelding 6 uit Ernst (1971). Hierbij zijn a = 0.15 m en U_1 = 0.001 m/d bepaald zoals genoemd in de legenda van afbeelding 1. De numerieke waarde van de weerstand van de scheidende laag volgt dan uit

$$c = \frac{a}{U_1} = \frac{0.15}{0.001} = 150\,d \qquad (26)$$

zodat de doorwerkcurve vervolgens voor verschillende c-waarden kan worden berekend met

$$F = \frac{\gamma}{c+\gamma} = \frac{\bar{d}}{cU_1+\bar{d}} \qquad (27)$$

De doorwerkcurve voor de hyperbolische grondwaterdiepte-afvoerrelatie kan voor verschillende c-waarden worden uitgerekend met vergelijking (25), daarbij gebruik makend van a = 0.15 m, U_0 = 0.005 m/d. Afbeelding 3 geeft de resultaten; de grafieken over-

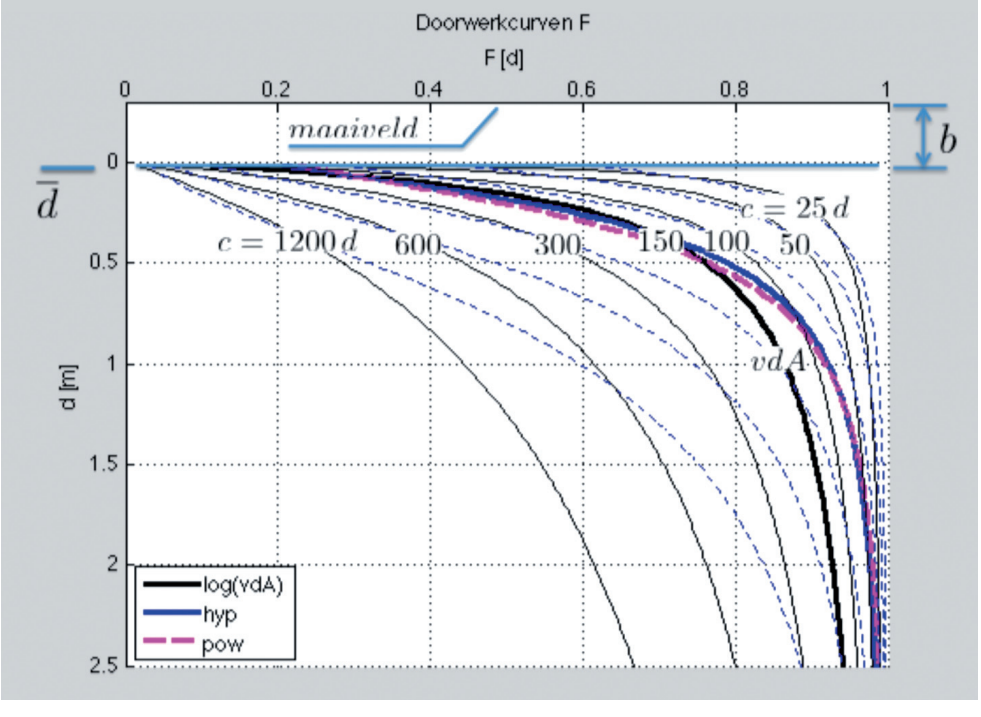
eenkomstig de getalswaarden van Van den Akker (2014) zijn vet getekend. Het is goed te zien dat de blauwe krommen wat sneller oplopen met de grondwaterdiepte dan de zwarte. Dit is uiteraard het gevolg van de snellere want kwadratische toename van de drainageweerstand met de grondwaterdiepte volgens vergelijking (24) in plaats van lineair volgens (15). De doorwerkcurven blijken alle van de weerstand van de scheidende laag af te hangen. Intuïtief klopt het dat de doorwerking minder is naarmate de weerstand van de scheidende laag groter is. Dit verband tussen doorwerking en de weerstand van de scheidende laag heeft uiteraard grote consequenties in het gebruik van doorwerkcurven ter raming van de invloed van diepe onttrekkingen op het ondiepe grondwater.

Veralgemenisering

Omdat we nu weten hoe de doorwerking is af leiden uit grondwaterstand-afvoerrelaties, kunnen we deze veralgemeniseren door de grondwaterdiepte-afvoerrelatie te schrijven als

$$U = U_0 \left(\frac{a}{\bar{d} + a} \right)^p \qquad (28)$$

waarvan we hiervoor het bijzondere geval, namelijk voor $p = 1$ hebben uitgewerkt.



Afbeelding 3: Doorwerkcurven volgens vergelijking ((24), zwarte, getrokken lijnen) en Van den Akker (2013) (vgl. 11, blauwe streepjeslijnen) voor verschillende waarden van de weerstand c [d]. De dikke lijnen zijn voor weerstand $c = 150$ d. Dit zijn de lijnen op basis van de fit van de grondwaterdiepte-afvoerrelatie op de empirische curven van Ernst (1971) . De getrokken, paarse streepjeslijn is de doorwerkcurve volgens vergelijking (29) met geoptimaliseerde waarden voor $a = 0.28$ m en $p = 1.50$.

Dit levert een extra vrijheidsgraad, waarmee de wiskundige curve beter op de empirische kan worden gepast. Als hiervoor gelden vergelijkingen (1) en (16), zodat met (28)

$$\frac{1}{\gamma} = U_0 \frac{ap}{\left(\bar{d}+a\right)^2}\left(\frac{a}{\bar{d}+a}\right)^{p-1} = U_0 \frac{p}{a}\left(\frac{a}{\bar{d}+a}\right)^{p+1} \tag{29}$$

en dus, met vergelijking (9)

$$F = \frac{1}{cU_0 \frac{p}{a}\left(\frac{a}{\bar{d}+a}\right)^{p+1} + 1} \tag{30}$$

Wanneer we een empirische grondwaterdiepe-afvoerrelatie ter beschikking hebben, zoals afbeelding 6 uit Ernst (1971) kunnen a en p bepalen door kalibratie. Dit levert in dit geval a = 0.28 m en p = 1.50. De resulterende grafiek is eveneens in Afbeelding 1 weergegeven. De fit blijkt zeer goed. De aldus geoptimaliseerde doorwerkcurve is in paars weergegeven in Afbeelding 3, voor c 150 d. De bijbehorende drainageweerstand is eveneens in paars weergegeven in Afbeelding 5. De fit tussen de grondwaterdiepte-afvoerrelaties met Afbeelding 6 uit Ernst (1971) bleek goed voor grondwaterdiepten kleiner dan 0.5 m. Om deze reden komen ook de resulterende doorwerkcurven en drainageweerstanden goed overeen voor dergelijke geringe dieptes. Bij grotere dieptes, juist waar ze voor de doorwerking en eventuele landbouwschade relevant zijn, zijn de verschillen aanzienlijk. De wiskundige vorm van de grondwaterstand-afvoerrelatie doet er dus toe. Het feitelijke beoordelingscriterium zou het verband moeten zijn tussen grondwaterdiepte en de drainageweerstand. Hier gaat het volgende deel over.

Simulatie grondwaterstand-afvoerrelatie en drainageweerstand

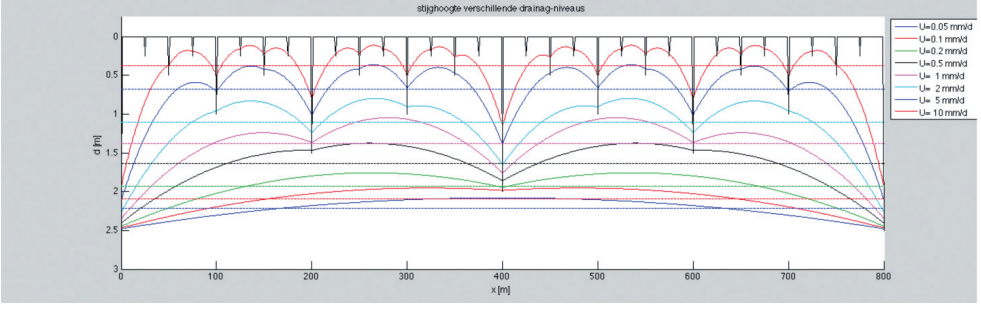
Van den Akker (2014) bediscussieert tot slot de drainageweerstand en het werk van Ernst (1971) en meent dat drainageweerstand in zijn eigen artikelen niet aan de orde is omdat hij uitgaat van de gebiedsgemiddelde grondwaterstand. Hij meent ook dat Ernst (1971) in zijn analyse een drainageweerstand nodig had, maar dat strikt genomen niet van een drainageweerstand kan worden gesproken. De drainageweerstand kan echter altijd worden bepaald uit een gegeven grondwatersituatie. Ik zal dit illustreren door zowel doorwerkcurve, draingeweerstand als grondwaterstand-afvoerrelatie te berekenen uit een numeriek model van een doorsnede met 6 drainageniveaus, en daarvan tevens te laten zien dat het verband tussen drainageweerstand en grondwaterdiepte in dit geval nagenoeg kwadratisch is, dus geldend voor een hyperbolisch verloop van de grondwaterstand-afvoerrelatie en een logaritmisch verloop van de doorwerkcurve.

We hebben al gezien wat de drainageweerstand is, namelijk dh / dU, de wiskundige afgeleide van de gebiedsgemiddelde grondwaterstand naar de gebiedsafvoer via de beschikbare drainagesystemen. Deze drainageweerstand is niet alleen een wiskundig begrip, maar net zo goed een fysische grootheid; hij is namelijk de som van de weerstand die het af te voeren water ondervindt bij zijn stroming door de matig doorlatende toplaag, door gebogen stroomlijnen in de buurt van de drainagemiddelen, de te overwinnen uittredeweerstand van de drainagemiddelen, en zelfs van de weerstand in het oppervlaktewatersysteem. De laatste zorgt ervoor dat de waterstand stijgt naarmate meer water moet worden afgevoerd. Dit alles is geheel fysisch.

Het is direct duidelijk dat bij een bepaald niveau van het grondwater en een bepaald effectief drainageniveau altijd eenduidig een gebiedsafvoer U past. Hiermee ontstaat een grondwaterstand-afvoerrelatie, die een fysische gebiedseigenschap is. Het is ook duidelijk dat in een stationaire situatie en zonder lek de afvoer gelijk is aan het neerslagoverschot, maar tevens dat je dat neerslagoverschot niet nodig hebt voor het bepalen van de grondwaterstand-afvoerrelatie.

Het is mogelijk om hier inzicht in te verschaffen door de grondwaterstand-afvoerrelatie met al zijn verschillende drainageniveaus fysisch te simuleren, en de verschillende relaties uit de resultaten te berekenen. De resultaten staan in Afbeelding 4, een dwarsdoorsnede van 800 m breed, gelijk aan de afstand tussen de wateren van het diepste drainagesysteem met drainageniveau op 2.5 m beneden maaiveld. De overige drainageniveaus hebben een slootafstand van resp. 400, 200, 100, 50 en 25 m en drainageniveaus van respectievelijk 2.0, 1.5, 1.0, 0.5 en 0.25 m beneden maaiveld. Het fijnste drainagesysteem kan worden opgevat als greppeltjes of drains. Het model is een éénlaags eindig differentiemodel met cellen van 1 m breed. De intredeweerstand, of feitelijk de uittredeweerstand, want een dergelijk gebied kent geen aanvoer, is zo dat in de doorsnede een sloot $Q = C\,(\phi - h)$ m²/d afvoert. De waarde van C = 1 m/d gekozen voor alle drainagesystemen. Het doorlaatvermogen is klein, 10 m²/d, als van een deklaag. De afbeelding laat de grondwaterstand zien bij neerslagoverschot (=afvoer) U van resp. 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5 en 10 mm/d. Omdat we het steeds over de gebiedsgemiddelde grondwaterstand hebben, is deze ook ingetekend als rechte, horizontale gestippelde lijnen met dezelfde kleur als het bijbehorende gebogen verloop.

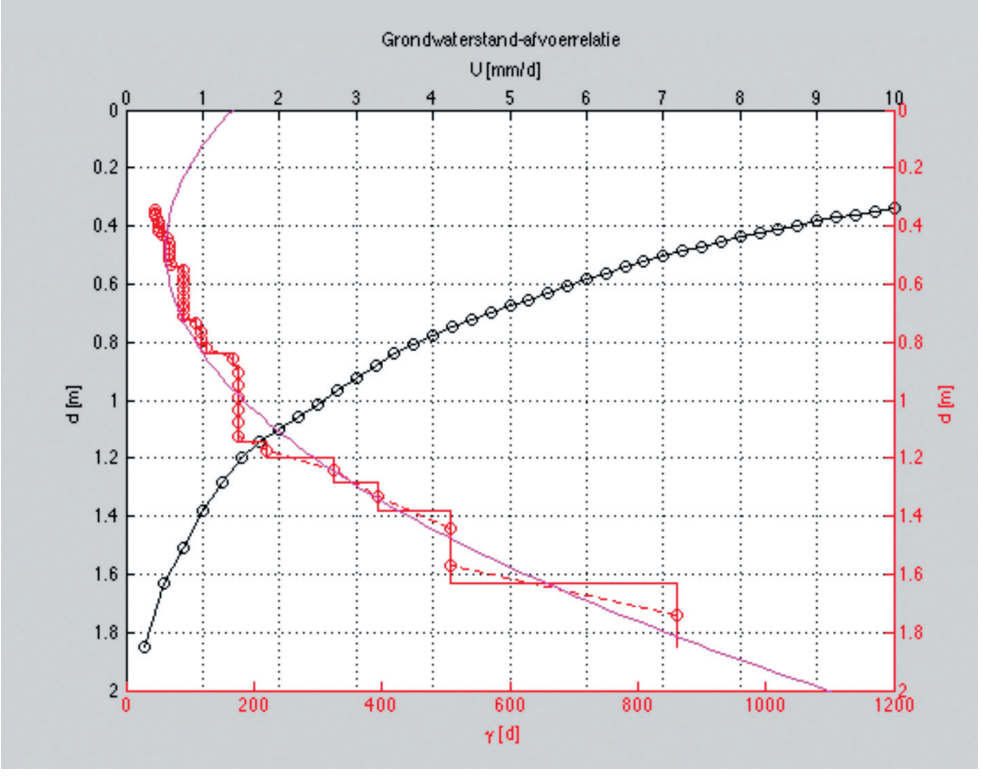
Naarmate het neerslagoverschot en dus de even grote afvoer U toeneemt, worden meer drainageniveaus vanzelf ingeschakeld. We zien ook dat de grondwaterstand onmiddellijk naast elk werkend drainageniveau hoger is dan de bodem van de betreffende sloot. Dit komt uiteraard door de toegepaste uittredeweerstand. Zelfs bij 10 mm/d neerslagoverschot blijken niet alle greppels “te lopen”.



Afbeelding 4: Grondwaterstanden bij verschillend neerslagoverschot in de situatie met een flink aantal drainageniveaus.

We kunnen de drainageweerstand van dit systeem uitrekenen, geheel fysisch en precies zoals Ernst (1971) dat waarschijnlijk voor zich zag. (Zie voor achtergrond over het leven van Ernst, Van Bakel, 2007). Ik heb het resultaat weergegeven in Afbeelding 5. Deze afbeelding geeft allereerst de grondwaterdiepte-afvoerrelatie berekend voor 41 waarden van U, nl. 0.25-10 mm/d in stapjes van 0.25 mm/d. De afzonderlijke waarden zijn

aangeduid met zwarte balletjes. Dit is het verband tussen de afvoer en de gebiedsgemiddelde grondwaterdiepte in Afbeelding 4. De drainageweerstand γ kan worden berekend tussen elk opeenvolgend paar afvoeren waar het model mee is doorgerekend, namelijk als Δh / ΔU waarbij Δh het verschil is van de gemiddelde grondwaterstand tussen twee berekeningen en ΔU het verschil in neerslagoverschot. Dit is de rode trapjeslijn in Afbeelding 5. De rode lijn verbindt de berekende drainageweerstanden met de gemiddelde diepte waarvoor zijn gelden. Het discrete karakter van de drainageweerstand is natuurlijk het gevolg van het discreet aanhaken van drainageniveaus wanneer de grondwaterstand stijgt. Bij geringe diepte en kleine drainageweerstand is het verloop meer continu omdat de verschillende sloten van het meer dichte drainagenet niet alle bij hetzelfde neerslagoverschot aanhaken; zo zijn ook bij de hoogste grondwaterstand in Afbeelding 4 niet alle kleine sloten afvoerend. In een werkelijke situatie, zoals beschouwd door Ernst (1971) is er veel meer variatie in maaiveld, helling, slootdiepte, ruimtelijk grondwaterhoogte etc., waardoor de lijnen een meer statistisch karakter krijgen, respectievelijk tot een puntenband van gegevens leiden, waar slechts een benaderende lijn doorheen getrokken kan worden. Maar de fysische basis blijft onverlet. Ten slotte geeft de paarse lijn een fit met een kwadratische curve. Het blijkt dat een kwadratisch verband tussen grondwaterdiepte en drainageweerstand, zoals volgt uit een hyperbolisch verloop van de grondwaterstand-afvoerrelatie, zo gek nog niet is. Dit verloop past althans goed op de resultaten van dit numerieke doorsnedemodel.



Afbeelding 5: Grondwaterstand-afvoerrelatie en drainage-weerstand voor 6 drainageniveaus als aangegeven in de tekst, samen met de passing van een kwadratische kromme op het verband tussen de grondwaterdiepte en de drainageweerstand.

Het is me overigens niet gelukt om de drainageniveaus en slootafstanden zo de manipuleren dat het verband tussen drainageweerstand en grondwaterdiepte lineair wordt.

Conclusies

Doorwerking is de mate waarin de freatische grondwaterstand zakt als gevolg van een verlaging van de stijghoogte in een onderliggend regionaal watervoerend pakket. Een vaste doorwerking is alleen mogelijk wanneer de gebiedsafvoer positief blijft, daar anders de grondwaterstand geheel los staat van randvoorwaarden en een volstrekt tijdsafhankelijke situatie het gevolg is (Olsthoorn, 2014b).

Zoals afgeleid is doorwerking het gevolg van de verhouding tussen drainageweerstand en weerstand van de scheidende laag, onafhankelijk van de wiskundige vorm van de doorwerkcurve. De fysica van de doorwerking zoals gegeven in vergelijking 10 staat weliswaar buiten kijf, maar dat geldt niet voor de gekozen mathematische vorm van de doorwerkcurve. De specifieke vorm daarvan is uiteindelijk slechts het resultaat van een mathematische fit met een empirische curve van de grondwaterstand-afvoerrelatie.

Van den Akker (2013) postuleerde een specifieke hyperbolische vorm voor deze doorwerkcurve, die van slechts één parameter afhangt, te weten de diepte waarop de doorwerking 50% is. Deze hyperbolische doorwerkcurve impliceert dat de drainageweerstand lineair toeneemt met de grondwaterdiepte en dat de grondwaterdiepte-afvoerrelatie logaritmisch verloopt, wat niet overeen hoeft te stemmen met de werkelijkheid, zoals aangetoond met een numeriek voorbeeld.

In plaats van de doorwerkcurve kunnen we de empirische relatie tussen grondwaterdiepte en gebiedsafvoer als uitgangspunt nemen en deze wiskundig benaderen met een hyperbolisch verloop. Vervolgens kunnen hieruit de doorwerkcurve en het verband tussen drainageweerstand en grondwaterdiepte mathematisch worden afgeleid.
De drainageweerstand neemt bij een hyperbolische grondwaterstand-afvoerrelatie nagenoeg kwadratisch toe met de grondwaterdiepte. Dit verloop blijkt goed te passen bij de grondwaterdiepte-afvoerrelatie die numeriek is bepaald uit een doorsnede met zes verschillende drainageniveaus.

Door toevoeging van een macht als extra vrijheidsgraad blijkt het mathematisch hyperbolische verloop een stuk beter op de empirische grondwaterstand-afvoerrelatie van Ernst (1971) te passen dan elk van de voorgaande twee alternatieven. Deze mathematische functie zou daarom een algemenere toepassing kunnen krijgen om grondwaterstand-afvoerrelaties te beschrijven en daaruit rechtstreeks doorwerkcurves te berekenen ter bepaling van de verlaging van de freatische grondwaterstand als gevolg van onttrekkingen aan regionale semi-gespannen aquifers. Uitgangspunt is altijd de fit met het empirische verloop tussen grondwaterstand en afvoer.

In elk geval is de doorwerkcurve afhankelijk van de weerstand van de scheidende laag, waardoor deze er altijd toe doet, zoals bijvoorbeeld het geval is bij het wel of niet plaatselijk voorkomen van potklei in een gebied waarvoor de verlaging van de freatische grondwaterstand moet worden berekend.

Tegelijkertijd moeten we kritisch blijven op de vraag of een stationaire analyse geldig is voor de gegeven situatie. Een voorwaarde is dat het gebied water afvoert. Zonder afvoer is het grondwater in een vrij afwaterend gebied geheel los van het drainagesysteem en daarom inherent niet-stationair.

Aangezien de doorwerking van diepe onttrekking naar het freatisch pakket in alle tegenwoordige modellen wordt meegenomen, kan niet worden gesteld dat door verkeerde modellering teveel of te weinig landbouwschade wordt uitgekeerd. Dat er bij vrij-afwaterende gebieden een hoge mate van niet-lineariteit van de doorwerking en feitelijk ook niet-stationariteit een belangrijke rol speelt moge wel duidelijk zijn, en dat de modellering daarvan adequaat moet zijn spreekt vanzelf. Met name regionale modellen erkennen impliciet de eveneens de gesommeerde regionale implicaties van het simultaan onttrekken van vele individuele pompstations op het freatische grondwater.

Achtergrondverlaging heeft hier niets mee te maken, die is namelijk het gevolg van ingrepen en processen die bij gebrek aan informatie daarover niet expliciet in rekening kunnen worden gebracht, ook wanneer zij op zichzelf prima te modelleren zouden zijn. Doorwerking wordt in rekening gebracht door grondwatermodellen die met verschillende drainageniveaus werken en geen aanvoer naar gebieden toelaten waar die in de praktijk onmogelijk is.

Literatuurverwijzingen

Van den Akker, C. (2014) Een fysische onderbouwing van de overdrachtsfactor; *Stromingen*, Vol. 20, Nr. 1, 5-13

Van den Akker, C. (2013) Tussen Dupuit en De Glee: Het ontstaan van de Toegevoegde Stijghoogteverlaging; *Stromingen*, Vol. 19, Nr. 2, 5-23

Van Bakel, J. (2007) In memoriam, dr.L.F. Ernst; *Stromingen*, Vol. 13, Nr.2, 62

Ernst, L.F. (1971) Analysis of groundwater flow to deep wells in areas with a non-linear function for the subsurface drainage; *Journal of Hydrology,* Vol. 14, 158-180

Maas, C. (2012) Het geval Terwisscha; *Stromingen*, Vol. 18, Nr. 2, 43-76

Olsthoorn, T.N. (2014a) Tussen De Glee en Dupuit, revisited; *Stromingen*, Vol. 20, Nr. 1, 35-55

Olsthoorn, T.N. (2014b) De dynamiek van de verlaging van Terwisscha of in vergelijkbare situaties; *Stromingen*, Vol. 20, Nr. 1, 15-33