

PRINCIPIËLE VRAAGSTUKKEN BIJ PROEFPERKEN

3. Hoogteregressie 1)

With a summary : Height regression

[522.31]

door

A. STOFFELS en J. VAN SOEST

Samenvatting.

Het is mogelijk, de bekende hoogtekromme van een opstand te vervangen door een rechte lijn, wanneer men de dikte of de hoogte, dan wel beide, vervangt door een functie daarvan. Bijvoorbeeld als men in plaats van d (de diameter) $\log d$ neemt. Omrekening is niet eens nodig, indien men in dit geval de punten uitzet op enkel logaritmisch papier. Zie afbeelding 2.

Aangezien het veel gemakkelijker is, zowel wat uitvoering als wat definitie betreft, een representerende rechte lijn door een puntenzwerm te trekken dan een kromme, betekent een dergelijke werkwijze: minder arbeid, dus geringere kosten. Dit geldt niet alleen voor wetenschappelijk werk, doch evenzeer voor de praktijk.

Bij het onderhavige onderzoek werd door berekening nagegaan, in hoeverre het gebruik van de in tabel 1 genoemde formules gerechtvaardigd is. De gegevens, waarop deze berekeningen steunen, zijn ontleend aan de in tabel 3 genoemde proefperken. In tabel 4 zijn de uitkomsten weergegeven als procentuele afwijkingen van de „ware” cylinderinhoud. Terwijl bij de vier formules de cylinderinhoud telkens werd berekend met behulp van de op grond van zo'n formule voor elke diameterwaarde afzonderlijk bepaalde, vereffende hoogte (regressiehoogte), liggen aan de becijfering van de ware cylinderinhoud de in werkelijkheid gemeten hoogten ten grondslag. De uit de „vrije” hand getrokken hoogtekromme werd tenslotte eveneens in de vergelijking betrokken.

Uit de resultaten blijkt, dat niet één van de onderzochte formules leidt tot afwijkingen van enige betekenis. Uit praktische overwegingen verdient de betrekking $h = a \log d + b$ de voorkeur, welke merkwaardigerwijs bovendien nog de geringste afwijkingen geeft. Men kan hiervoor het in de handel verkrijgbare enkel-logaritmische papier gebruiken.

1. Inleiding.

Dat er in een opstand een verband bestaat tussen de dikte en de hoogte van de bomen, is algemeen bekend. Bomen met een kleine diameter hebben een geringe hoogte, terwijl met stijgende dikte de hoogte eveneens toeneemt. In de praktijk pleegt men dit meestal grafisch weer te geven, waarbij men dan de diameter langs de horizontale as (abscis), de hoogte langs de vertikale as (ordinaat) afzet.

¹⁾ Overgedrukt uit : *Nederlandsch Boschbouw Tijdschrift* 25 (7- 8), 1953 (190-199).

Men krijgt dan een puntenzwerm van een min of meer langgerekte vorm. Deze punten maken de indruk, dat zij eigenlijk op een (kromme) lijn behoren te liggen, doch dat door een of andere oorzaak hun oorspronkelijke ligging is verstoord. Als men een aantal korrels (van een hagelpatroon bijvoorbeeld) volgens een rechte of kromme lijn op een blad papier legt en daarna aan de onderzijde een lichte tik tegen het papier geeft, krijgt men hetzelfde effect: de oorspronkelijke ligging wordt verstoord. Wanneer wij echter aannemen, dat deze verspreiding van de korrels geheel willekeurig geschiedde, zodanig, dat er even veel boven als onder de oorspronkelijke lijn terecht zijn gekomen en zich aan beide zijden gemiddeld ook even ver daarvan hebben verwijderd, kunnen we op grond van de nieuwe, verspreide ligging van de korrels opmaken, waar deze oorspronkelijk moeten hebben gelegen. Wij *schatten* daarmede de oorspronkelijke lijn, die nu de naam draagt van regressielijn.

Hetzelfde kunnen we doen met de grafiek van diameter en hoogte. Alleen hebben hier de punten oorspronkelijk niet op een lijn gelegen, want ook al zouden we in staat zijn de dikte en de hoogte van een boom met absolute nauwkeurigheid te meten, dan nog zou daarmede de spreiding niet komen te vervallen. Deze omstandigheid staat echter de constructie van zo'n diameter-hoogte regressielijn niet in de weg.

Hebben wij deze regressielijn eenmaal verkregen; dan zijn wij in staat voor elke gewenste diameter de gemiddeld bij die diameter voorkomende hoogte af te lezen. Daarmede kan de inhoud van de gehele opstand worden berekend, welke berekening op zichzelf een *schatting* is voor de werkelijke inhoud, omdat daarbij immers gebruik wordt gemaakt van een geschatte betrekking tussen diameter en hoogte.

Het trekken van een „tamelijk eenvoudige” kromme lijn door een aantal punten is echter geen eenvoudige zaak, indien men als eis stelt, dat de kromme zo goed mogelijk de puntenzwerm representeert, en op de aangegeven wijze een goede schatting voor de inhoud zal geven. Als wij dit aanvankelijk niet zouden eisen en dus zouden beginnen met een volkomen willekeurige lijn— willekeurig naar vorm, ligging en richting, — dan kunnen we de verticale afstanden van de punten tot die lijn meten. We tellen de afstanden van alle punten die boven de lijn liggen bij elkaar en doen hetzelfde met de onder de lijn gelegen punten. Als het eerste bedrag groter is dan het tweede, ligt de lijn te laag; andersom is er sprake van een te hoge ligging. Zijn beide sommen van afwijkingen gelijk, dan is de ligging juist.

Nu kunnen we trachten, door een lijn van een andere vorm te kiezen, de afwijkingen van de punten kleiner te maken, waardoor ook hun som kleiner wordt. Evenzeer kan een verandering van richting tot verbetering leiden. Op deze wijze kan men experimenteel, door telkens weer lijnen van andere vorm en richting te kiezen, bepalen welke lijn het verband tussen hoogte en diameter het beste weergeeft.

Het spreekt vanzelf, dat dit proefondervindelijk zoeken naar de beste lijn een tijdrovende bezigheid is. Stelt men geen hoge nauwkeurigheidseisen, dan kan men bijvoorbeeld volstaan met te tellen, hoeveel punten er onder en boven de lijn liggen en zijn taak als geëindigd beschouwen, wanneer men een lijn heeft gevonden, die de puntenzwerm in tweeën deelt. Bij wetenschappelijk werk kan men echter met deze enkelvoudige voorwaarde geen genoegen nemen en dient men ook aandacht aan vorm en richting te schenken.

Aangezien de vorm van de lijn een van de moeilijkst te bepalen factoren is, zou het, zowel voor het wetenschappelijk onderzoek alsook voor het wat grovere practijkwerk, een zeer welkome vereenvoudiging — en dien-tengevolge arbeidsbesparing! — betekenen, indien men het verband tussen dikte en hoogte — wiskundig gesproken: verwachtingswaarde van hoogte — als een rechte lijn zou kunnen weergeven.

De formule voor een rechte lijn is de eenvoudigste en kan worden geschreven als $y = ax + b$, waarin x en y veranderlijken, a en b constanten zijn. Omdat de gewone grafiek een rechte lijn is, heet de functie $y = ax + b$ een *lineaire functie*. Wil men het oorspronkelijke kromlijnige verband tussen hoogte en dikte in rechtlijnige vorm weergeven, dan moet men in de plaats van x en y niet d en h , maar een daarvan afgeleide functie nemen. Bij voorbeeld de logaritmische: $\log h = a \log d + b$.

In dit tijdschrift noemt Stoffels (7) enkele uit de literatuur bekende betrekkingen tussen h en d (3, 6), alsook een door hemzelf ontwikkelde formule. Ook Henriksen (4) vermeldt een dergelijke betrekking.

2. Werkwijze.

Wij hebben een vergelijkend onderzoek ingesteld naar de uitkomsten van de volgende vier formules.

Tabel 1

Table 1

De in het onderzoek betrokken formules

The tested formulae

$$(1) h = a \frac{1}{d^2} + b \text{ (Gehrhardt)}$$

$$(2) h = a \log d + b \text{ (Henriksen)}$$

$$(3) h = b d^a \text{ (Stoffels) } ^1)$$

$$(4) h = 1,3 + \frac{d^2}{(a + bd)^2} \text{ (Näslund)}$$

Ook in deze formules zijn a en b (telkens weer andere) constanten. In (1) is h een lineaire functie van $\frac{1}{d^2}$ in (2) is h een lineaire functie van $\log d$. In (3) is $\log h$ een lineaire functie van $\log d$, terwijl in (4) $\frac{1}{\sqrt{h-1,3}}$ een lineaire functie is van $\frac{1}{d}$. Dit blijkt, als wij laatste beide formules in een andere vorm schrijven:

Tabel 2

Table 2

Getransformeerde formules (3) en (4)

Transformed formulae (3) and (4)

$$(3) \log h = a \log d + b$$

$$(4) \frac{1}{\sqrt{h-1,3}} = a \frac{1}{d} + b$$

¹⁾ Stoffels beschrijft in meergenoemd artikel (7) deze betrekking als de formule van Berkhout-Bähler-Bosman. Deze auteurs gaven evenwel een exponentiële betrekking voor onderscheidenlijk de inhoud en het vormgetal (1, 2). Aangezien Stoffels hieruit de formule (3) heeft afgeleid, wil het mij juist voorkomen, daaraan zijn naam te verbinden. Van Soest.

Een voordeel van deze lineaire functies is, dat men de lineaire regressielijnen ook op vrij eenvoudige wijze exact kan berekenen. Aangezien daarbij geen persoonlijke invloeden een rol kunnen spelen, hetgeen bij een grafische vereffening wel het geval is, is deze werkwijze vooral aan te bevelen, indien zelfs subtiele verschillen van belang zijn, zoals bij vergelijkende proeven.

In beginsel staan er verschillende wegen open om de met de vier formules verkregen uitkomsten te vergelijken. Zoals in de inleiding reeds is uiteengezet, zal bij een goed aangepaste lijn de spreiding van de punten om die lijn kleiner zijn dan bij een minder goed aangepaste rechte of kromme. Er zou dus kunnen worden nagegaan, hoeveel bij elk van de vier onderzochte werkwijzen deze spreiding bedraagt, waarbij dan de laagste te vinden som van de afwijkingen zou overeenstemmen met de beste formule. In plaats van de som van de afwijkingen kan men ook de som van de kwadraten van de afwijkingen bepalen, hetgeen bij rekenkundige bewerkingen meer gebruikelijk is.

Een andere mogelijkheid bestaat daaruit, dat men voor elk geval afzonderlijk de correlatie-coëfficiënt berekent. De best aangepaste lijn zou dan de hoogste correlatie-coëfficiënt moeten opleveren.

Er deed zich in het onderhavige geval nog een andere mogelijkheid voor, welke meer op de practijk is gericht en waaraan daarom tenslotte de voorkeur is gegeven. In de opstanden, die voor dit onderzoek hebben gediend, werd van *alle* bomen zowel de dikte als de hoogte bepaald. Daardoor was het mogelijk, van iedere boom de inhoud — gemakshalve hebben wij deze als cylinderinhoud berekend — te berekenen uit de werkelijk gemeten hoogte (en de uiteraard steeds gemeten diameter), zodat ook de cylinderinhoud van de gehele opstand op deze uiterst nauwkeurige wijze kon worden bepaald. Dit nu hebben wij als uitgangspunt gekozen voor onze vergelijking, door de op de regressiehoogten gebaseerde inhoudsberekeningen als percentage hiervan uit te drukken.

Nog kan worden opgemerkt dat eveneens een berekening werd gemaakt met hoogten, welke zijn afgeleid uit een uit de vrije hand getrokken kromme regressielijn. Aan het construeren daarvan werd geen bijzondere zorg besteed voor wat betreft vorm en richting; uitsluitend de ligging werd gecontroleerd en zo nodig verbeterd.

3. *Materiaal.*

Voor het onderzoek werden proefperken gebruikt van het Bosbouwproefstation T.N.O., in hoofdzaak in Japanse lariks, daar hiervan — in verband met andere proefnemingen — het materiaal reeds voorhanden was. Eén van deze opstanden was echter gemengd met douglas, zodat ter controle tevens van deze boomsoort de betrekking tussen *h* en *d* aan één geval kon worden getoetst. De bijzonderheden zijn vermeld in tabel 3, waarbij met de totale „werkelijke” cylinderinhoud wordt bedoeld de cylinderinhoud, die men vindt door alle bomen afzonderlijk te cuberen en welke als uitgangspunt voor het vergelijkend onderzoek heeft gediend.

4. *Uitkomsten.*

Nadat de regressiehoogten volgens de 4 genoemde formules, alsmede voor de uit de vrije hand getrokken hoogtekromme waren berekend, kon voor iedere diametertrap de cylinderinhoud worden bepaald met elk van

Tabel 3
Table 3Gegevens van de in het onderzoek betrokken proefperken
Data of the sample plots, which have been used

Proefperk Sample plot	leeftijd age	gemiddelde, laagste en hoogste d en h mean, minimum and maximum d and h						aantal bomen number of trees	totale werkelijke cilinderinhoud total true cylinder volume
		\bar{d}	d min.	d max.	\bar{h}	h min.	h max.		
Japanse lariks (<i>Japanese larch</i>)									
JL 42	12	7,5	2,7	10,9	8,11	4,3	9,4	209	6.21242
JL 39	23	8,4	3,9	13,7	10,02	6,4	12,4	4532	215.81133
JL 41	29	21,2	9,9	30,0	18,13	12,9	19,9	357	213.69049
JL 7	41	25,5	18,7	31,5	24,40	19,5	26,0	30	37.30479
JL 1	47	36,0	26,3	42,2	24,99	23,7	26,4	36	81.29568
Douglas (<i>Douglas fir</i>)									
JL 17	41	27,5	16,2	39,9	25,69	21,0	27,8	74	113.08989

deze regressiehoogten. Na optelling vindt men dan de totale cilinderinhoud, gebaseerd op de regressielijnen volgens onderscheidenlijk Gehrhardt, Henriksen, Stoffels, Näslund en de vereffening uit de vrije hand. Deze uitkomsten worden dan tenslotte vergelijkbaar gemaakt met de ware cilinderinhoud door ze in een percentage daarvan uit te drukken, zie tabel 4.

Tabel 4
Table 4

Uitkomsten van de cilinderinhouden, berekend met verschillende regressiehoogten en uitgedrukt als een afwijkingspercentage van de ware cilinderinhoud.

Results of the cylinder volumes, calculated with different regression heights and expressed as a deviation percentage of the true cylinder volume. The last column („vrije hand”) denotes the results, based on an ordinary height curve, drawn by hand.

Proefperk Sample plot	leeftijd age	Gehrhardt	Henriksen	Stoffels	Näslund	vrije hand
Japanse lariks (<i>Japanese larch</i>)						
JL 42	12	- 0,46	- 0,09	- 0,17	- 0,24	+ 0,09
JL 39	23	- 0,30	0,00	- 0,09	- 0,30	+ 0,05
JL 41	29	- 0,20	- 0,11	- 0,09	- 0,07	- 0,13
JL 17	41	+ 0,01	+ 0,05	- 0,02	+ 0,01	+ 0,03
JL 1	47	- 0,10	- 0,04	- 0,03	- 0,08	+ 0,03
Douglas (<i>Douglas fir</i>)						
JL 17	41	- 0,07	+ 0,03	- 0,06	+ 0,01	- 0,03

Wat ons allereerst van deze uitkomsten opvalt, zijn de zeer geringe onderlinge verschillen. Aangezien de gemiddelde afwijkingen van de

zelfde grootte zijn als de middelbare fouten daarin, is het duidelijk, dat er op grond hiervan nauwelijks enige voorkeur voor een bepaalde vereffeningswijze gerechtvaardigd is.

Een nadere beschouwing leert ons echter, dat er nog wel enig onderscheid mogelijk is. Zo heeft Gehrhardt gemiddeld de grootste afwijking en tevens de grootste middelbare fout in die afwijking. Bovendien blijkt, dat bij deze werkwijze de uitkomst beter is, naarmate men met oudere opstanden heeft te doen. Stoffels (6) heeft op dit verschijnsel reeds eerder de aandacht gevestigd.

De opvolgend kleinere fout, zowel in gemiddelde afwijking als in de middelbare fout, blijkt bij de formule van Näslund te behoren.

Evenwel moet in dit geval de oorzaak van minder goede uitkomsten niet in de keus van de formule worden gezocht, doch in een geheel ander verschijnsel, waarop allereerst Dr E. F. Drion van de Afdeling Bewerking Waarnemingsuitkomsten T.N.O. — onder wiens leiding de berekeningen voor het grootste van de onderzochte objecten, JL 39 met 4532 bomen, werd uitgevoerd — ons opmerkzaam maakte: Nadat deze formule in de rechtlijnige vorm is overgebracht, komt de hoogte niet meer in de eerste macht voor. Door deze herleiding ondergaan de waarnemingen een verandering in hun gewicht.

Zou men de werkwijze van Näslund geheel juist willen toepassen, dan dient derhalve aan elk punt een zodanige correctie te worden gegeven, dat hiermede de door het transponeren in rechtlijnig verband veroorzaakte gewichtsverstoring wordt teniet gedaan. Elk punt herkrijgt aldus zijn oorspronkelijke gewicht = 1.

Prof. Dr N. H. Kuiper, die zo bereidwillig was, over dit verschijnsel met ons van gedachten te wisselen, geeft hiervoor de volgende verklaring.

„In een woud (= universum) vormen de hoogten h van bomen met bepaalde diameter d een kansverdeling (die van d afhangt) met waarschijnlijkheidsdichtheid $f(h, d)$.

$$\text{Er geldt } E(h) = h = \int_0^{\infty} h \cdot f(h, d) \cdot dh \tag{1}$$

$$\sigma^2(h) = E(h - \hat{h})^2 = \int_0^{\infty} (h - \hat{h})^2 f(h, d) \cdot dh \tag{2}$$

Het vermoeden kan bestaan dat voor diverse diameters geldt:

De functie $\varphi(d) \rightarrow \psi(h) = \psi \{ E(h) \}$ kan benaderd worden door een lineaire functie, voor vele wouden, bij één keus van de functie φ en ψ : $\psi = \alpha \varphi + \beta$. (3)

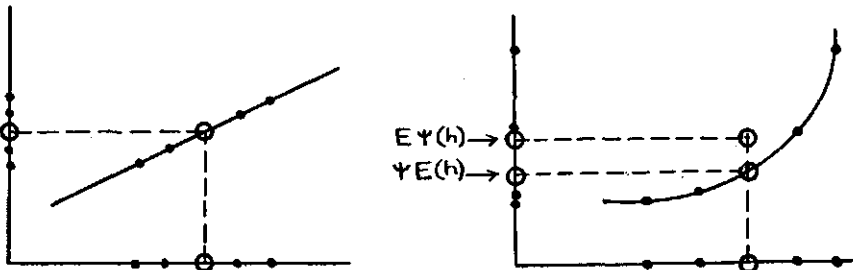
B.v. Näslund: $\frac{1}{d} \rightarrow \frac{1}{|E(h) - 1,3|}$ (4)

Een tweede vermoeden, dat bij toepassing van (φ, ψ) -papier (bij voorbeeld Näslund-papier) van meer belang is, luidt:

$\varphi(d) \rightarrow E \{ \psi(h) \}$ kan (voor elke opstand) door een (andere) lineaire functie benaderd worden. Op dit vermoeden ga ik thans in. (5)

Indien $\psi(h)$ een lineaire functie van h is, dan ligt het zwaartepunt van de kansmassa, uitgesmeerd op de grafiek van $h \rightarrow \psi(h)$, op deze grafiek, en er geldt $E \psi(h) = \psi E(h)$. Dit geldt niet indien $\psi(h)$ geen lineaire functie is. Het geldt bij benadering indien het voornaamste deel van de kansmassa op een vrijwel recht stuk van de grafiek is uitgesmeerd. Zie aff. 1.

Veronderstel: $\psi(h)$ kan in een omgeving van $\hat{h} = E(h)$ goed benaderd worden door enige termen van de machtreeksontwikkeling.



Bijna is: $\psi(h) = \psi + \psi'(h - \hat{h}) + \frac{\psi''(h - \hat{h})^2}{2!}$ ($\psi = \psi(\hat{h})$ enz.) (6)

Nu kan het zijn dat ook vrijwel waar is:

$$E \left\{ \psi(h) \right\} = \int_0^d \psi(h) \cdot f(h, d) \cdot dh = \psi E(1) + \psi' E(h - \hat{h}) + \frac{\psi''}{2} \cdot E(h - \hat{h})^2$$

$$(E(h - \hat{h}) = 0) \quad (7)$$

$$E \left\{ \psi(h) \right\} = \psi(\hat{h}) + \frac{\psi''}{2} \sigma_h^2(d). \quad (8)$$

Indien het eerste lid bekend is, kan \hat{h} opgelost worden.

Op het (φ, ψ) papier kan men bij elke waarde van d , dus van $\varphi(d)$, een schatting van $E \left\{ \psi(h) \right\}$ bepalen. De coördinaat die men hierbij *afleest* is het getal k dat voldoet aan $E \psi(h) = \psi(k)$. Men vindt dus het getal k en niet de gewenste h . Om deze laatste te bepalen moet men in plaats van de afstand $E \left\{ \psi(h) \right\}$, de afstand $E \left\{ \psi(h) \right\} - \frac{\psi''}{2} \sigma_h^2(d)$ in de richting van de ψ -as afzetten. Het daarbij af te lezen getal is een betere schatting voor $E(h)$ bij de betreffende diameter d .

Uit (8) en (3) volgt, dat de correctie kan worden berekend als: $\frac{\psi''}{2} \sigma_h^2(d)$.

Hierbij kan worden opgemerkt, dat de correctievorm in (8) een verticale *afstand* op het (φ, ψ)-papier is, en niet een getal. Men moet het eerst gevonden getal voor \hat{h} vervangen door het getal dat op de verticale schaal staat bij een punt dat $\frac{\psi''}{2} \sigma_h^2(d)$ lager ligt.

Wil men de correctie als een getal, dan krijgt men dat getal als volgt:

$$\psi(\hat{h}) = E \left\{ \psi(h) \right\} - \frac{\psi''}{2} \sigma_h^2(d).$$

$$\hat{h} = \psi^{-1} \left\{ E \psi(h) - \frac{\psi''}{2} \sigma_h^2(d) \right\}$$

$$\approx \psi^{-1} \left\{ E \psi(h) \right\} - \frac{1}{\psi'} \cdot \frac{\psi''}{2} \sigma_h^2(d)$$

(ψ^{-1} is inverse functie van ψ).

Het *getal* dat met de genoemde afstand overeenkomt is de correctie die volgt uit:

$$(\text{verbeterde } \hat{h}) = (\text{eerst gevonden getal voor } \hat{h}) - \frac{\sigma_h^2(d) \psi''}{2 \cdot \psi'} \quad (\psi' \text{ en } \psi'' \text{ uitgerekend})$$

voor $h =$ eerst gevonden getal voor \hat{h} .

N.B. Het „eerst gevonden getal voor \hat{h} “ is het getal dat men verkrijgt door argeloos op de verticale schaalindeling of te lezen.“ Tot zover Prof. Kuiper.

De Afdeling Bewerking Waarnemingsuitkomsten T.N.O. heeft hierop de berekening uitgevoerd. Hoe gering deze correctie tenslotte is, blijkt uit tabel 5.

Tabel 5

Table 5

Ongecorrigeerde en gecorrigeerde hoogten van proefperk JL 39 voor de formule van Näslund.

Uncorrected and corrected heights of sample plot JL 39 for Näslund's formula.

h (m)	
ongecorrigeerd <i>uncorrected</i>	gecorrigeerd <i>corrected</i>
6	6,04
7,5	7,53
9	9,02
10,5	10,52
12	12,02
13	13,02

Nadat voor het proefperk JL 39 op de regressiehoogte volgens Näslund de gewichtscorrectie was toegepast, werd de cylinderinhoud nogmaals berekend. De afwijking van de ware cylinderinhoud bleek nu $-0,09\%$ te bedragen, tegenover $-0,30\%$ zonder gewichtscorrectie. Gezien de hieraan verbonden werkzaamheden enerzijds en de geringe maat van de fout, welke men bij veronachtzaming daarvan maakt, anderzijds, bleef het berekenen van een gewichtscorrectie tot dit ene geval beperkt.

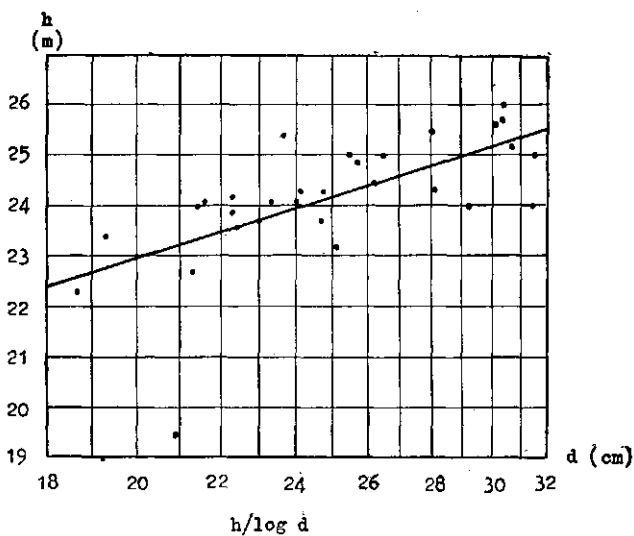
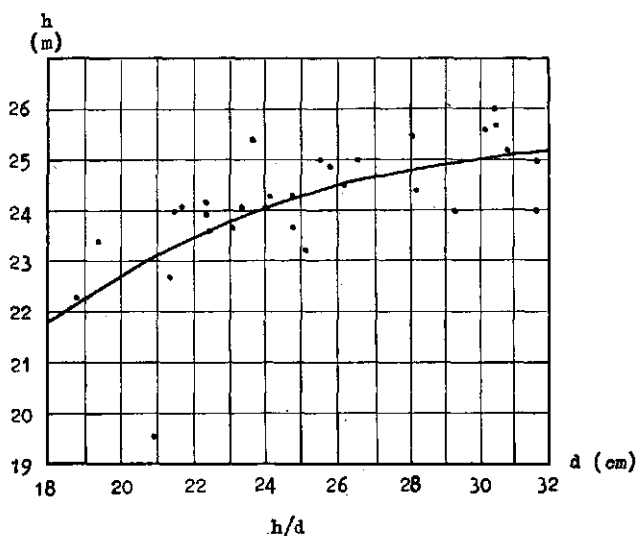
In beginsel geldt dezelfde gedachtengang echter evenzeer voor de formule van Stoffels, waarin h na transformatie ook niet meer in de eerste macht voorkomt. De uitkomsten zijn hierbij evenwel zonder correctie ook alleszins aanvaardbaar, waardoor het vermoeden wordt gewekt dat de gewichtsverstoring ditmaal van nog geringere afmetingen is dan in het vorige geval.

De vergelijking van Henriksen geeft tenslotte, in vergelijking met de ongecorrigeerde overige werkwijzen, de beste uitkomsten. Doch ook de uit de vrije hand getrokken kromme — welke „vrije” hand zich overigens wel gebonden voelde aan de belangrijkste regels betreffende grafische vereffening, die Ir W. C. Visser in een cursus over de polyfactoranalyse heeft bekend gemaakt — voldoet goed in alle onderzochte gevallen.

Dit laatste wekt tevens de verwachting, dat ook een *grafisch* uitgevoerde rechtlijnige vereffening, welke uiteraard veel gemakkelijker is, tot volkomen aanvaardbare uitkomsten zal leiden. Gezien de geringe verschillen tussen de verschillende rechtlijnige betrekkingen, misschien uitgezonderd die van Gehrhardt voor jonge opstanden, kan men zich bij zijn keus gevoelig uitsluitend door praktische overwegingen laten leiden.

In verband met het laatste verdienen de werkwijzen van Henriksen en van Stoffels de voorkeur boven de beide andere. Immers, eerstgenoemde kan men toepassen met enkel-logaritmisch papier, laatstgenoemde met dubbel-logaritmisch papier. Merkwaardigerwijs doet zich dus de gelukkige omstandigheid voor, dat de methoden met de gunstigste uitkomsten zich in de praktijk tevens het gemakkelijkst laten hanteren. Daarvan benadert die van Henriksen als de meest eenvoudige bovendien de werkelijkheid nog het beste, vermoedelijk omdat bij de methode-Stoffels de gewichtsverstoring een, weliswaar zeer ondergeschikte, doch toch niet geheel onmerkbare rol speelt. Vandaar dat deze enkel-logaritmische vereffening inmiddels reeds als vaste werkwijze aan het Bosbouwproefstation T.N.O. is ingevoerd.

Doch niet alleen bij het wetenschappelijk onderzoek verdient de grafische hoogtevereffening op enkel-logaritmisch papier alle aandacht: evenzeer kan de praktijk hiermede haar voordeel doen. Het is niet alleen gemakkelijker, een hoogte-rechte dan een hoogte-kromme te trekken (zie afb. 2), doch daarnaast biedt een rechte nog een ander voordeel. Immers, voor het trekken van een hoogte-kromme dient men ter bepaling van het beloop te beschikken over voldoende, over het gehele traject verspreide, waarnemingen. Bij een rechte lijn kan men het beloop reeds afleiden uit een klein aantal waarnemingen nabij het beginpunt en nabij het eindpunt, mits daarbij geen uitbijters zijn. De middenwaarden verhogen uiteraard wel de nauwkeurigheid van de lijn, doch zij zijn niet onmisbaar.



Afbeelding 2

Figure 2

Hoogte-kromme en logaritmische hoogtelijn voor JL 42, Japanse lariks. ¹⁷
 Height curve and logarithmic height line for JL 42, Japanese larch.

Summary. ¹⁷

The well-known regression curve for diameter and height can be transformed into a straight line by means of the formulas, denoted in table 1. Since a straight regression line has several advantages over a curve, the authors investigated the accuracy of these linear functions by means of the data, mentioned in table 3. For comparison purposes, the total cylin-

der volume of the stand was calculated, firstly by using the „true”, really measured height of each individual tree, secondly by means of the regression heights according to the 4 different formulae, and thirdly with the aid of a height curve, drawn by hand.

As table 4 shows, the deviations from the „true” cylinder volume are unimportant in all cases. It seems to be that Gehrhardt's formula is somewhat less accurate if applied to very young stands. Näslund's and Stoffels' formulae constantly give results which are slightly low. This is due to the fact that in these cases a previous transformation of the formula is necessary to obtain a linear function, see table 2. And by this transformation the weight of the individual observations is disturbed. Prof. Dr N. H. Kuiper has developed a method to calculate a correction in order to eliminate this weight disturbance. The correction factor is $= \frac{\psi''}{2} \sigma_h^2$ (d).

However, Henriksen's method, formula (2), for which a weight correction is not necessary, gives such good results, that it could hardly be surpassed by a corrected Näslund's or Stoffels'. Thus, this method, for which single logarithmic paper is the only necessary aid, can be strongly recommended, for research as well as for practical purposes. For example see figure 2.

Literatuur.

1. Bähler, A. H. L. en Bosman, K. Het spilhoutvormgetal van grovedennen in Nederland. Med. L. H. 25 (4), 1923 (1-16).
2. Berkhout, A. H. Het meten van boomen in verband met hun aanwas. (Mit deutscher Zusammenfassung). Med. L.H. 17 (3), 1920 (109-225).
3. Gehrhardt, E. Die theoretische und praktische Bedeutung des arithmetischen Mittelstammes. Meiningen, 1901.
4. Henriksen, H. A. Højde-diameter diagram med logaritnisk diameter. Dansk Skovf. T. 35 (4), 1950 (193-202).
5. Kuiper, N. H. Over grafische voorstellingen. Med. Ver. Stat. Med.-Biol. 5, 3 (6), 1951 (57-61).
6. Näslund, M. Skogsförsöksanstaltens gallringsförsök i tallskog. Medd. fr. St. Skogsf. 29 (1), 1936.
7. Stoffels, A. Hoogtekromme en gemiddelde hoogte van een opstand N.B.T. 22 (4), 1950 (97-103).