

Perspectieven van precisiebemesting van organische mest in de biologische landbouw

Perspectieven van precisiebemesting van organische mest in de biologische landbouw

P. de Willigen
F.B.T. Assinck
J.A. de Vos

Alterra-rapport 694

Alterra, Research Instituut voor de Groene Ruimte, Wageningen, 2003

REFERAAT

Willigen, P. de, F.B.T. Assinck, J.A. de Vos, 2002. *Perspectieven van precisiebemesting van organische mest in de biologische landbouw*. Wageningen, Alterra, Research Instituut voor de Groene Ruimte. Alterra-rapport 694. 52 blz.; 14 fig.; 19 tab.; 16 ref.

Met behulp van het twee-dimensionale model FUSSIM2 zijn berekeningen gemaakt om de perspectieven van precisiebemesting voor de biologische landbouw te verkennen. De berekeningen richten zich op stikstof. Organische mest werd volvelds oppervlakkig (0-15 cm onder maaiveld), volvelds diep (15-30 cm onder maaiveld) en oppervlakkig dicht bij de plant geplaatst. De laatste behandeling bewerkstelligde een meeropname van 5-10 kg ha⁻¹, een gering maar relevant verschil. Precisiebemesting van organische mest is daarom ook voor de biologische landbouw aan te bevelen

Trefwoorden: runderdrijfmest, plaatsing, stikstofverliezen, wortelpatroon, opname efficiëntie

ISSN 1566-7197

Dit rapport kunt u bestellen door € 18,- over te maken op banknummer 36 70 54 612 ten name van Alterra, Wageningen, onder vermelding van Alterra-rapport 694. Dit bedrag is inclusief BTW en verzendkosten.

© 2003 Alterra, Research Instituut voor de Groene Ruimte,
Postbus 47, NL-6700 AA Wageningen.
Tel.: (0317) 474700; fax: (0317) 419000; e-mail: info@alterra.nl

Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, fotokopie, microfilm of op welke andere wijze ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van Alterra.

Alterra aanvaardt geen aansprakelijkheid voor eventuele schade voortvloeiend uit het gebruik van de resultaten van dit onderzoek of de toepassing van de adviezen.

Inhoud

Woord vooraf	7
Samenvatting	9
1 Inleiding	11
2 Een eenvoudig analytisch wiskundig model om beschikbaarheid van nutriënten te schatten.	13
3 Het numerieke model FUSSIM2	17
3.1 Algemeen	17
3.2 Basismodellen	17
3.2.1 Model voor organische stofafbraak MOTOR	17
3.2.2 Beschrijving plantengroei en N-opname.	19
4 Invoerparameters, functies en de initialisatie voor modelberekeningen	21
4.1 Algemeen	21
4.2 Afmetingen bodemdomein en profielopbouw	21
4.3 Plaatsing	21
4.4 Berekening	22
4.5 Gewas	23
4.5.1 Opname-eis en duur opname	23
Wortelgroei	24
4.6 Initiële toestand	25
4.6.1 Water	25
4.6.2 Anorganische stikstof	25
4.6.3 Organische stof	25
4.6.4 Wortelstelsel	25
5 Resultaten	27
5.1 Statistische beschrijving van de resultaten	27
5.2 Variantie-analyse van de resultaten	28
5.2.1 Opgenomen stikstof	28
5.2.2 Gemineraliseerde stikstof.	29
5.2.3 Potentieel verlies	29
5.3 Enkele speciale gevallen	30
5.3.1 Stikstofopname	30
5.3.1.1 Maximum effect van plaatsing	30
5.3.1.2 Maximum effect van bewortelingspatroon	32
5.3.1.3 Maximum effect van berekening	33
5.3.2 Potentieel verlies	35
5.3.2.1 Maximaal effect bij plaatsing	35
5.3.2.2 Maximum effect van bewortelingspatroon	37
5.3.2.3 Maximum effect van berekening	37
6 Discussie en conclusies	41
Referenties	43
<i>Aanhangsel</i>	
1 Afleiding analytisch model om beschikbaarheid van nutriënten te schatten	45

Woord vooraf

Dit rapport is een onderdeel van het project “Optimalisering nutriënten- en vochtvoorziening bij ecologische en geïntegreerde landbouw” als onderdeel van het DWK-programma 342 Ecologisering van plantaardige productiesystemen in de akkerbouw en vollegrondsgroenteteelt”. De gevulde werkwijze in het rapport, met name de keuze van bemestingsgiften, grondsoort, etc., is tot stand gekomen na overleg met R. Booij en J.J. Schröder van Plant Research International, waarvoor onze dank. Het rapport is gebaseerd op verkenningen door middel van modelberekeningen. Resultaten van modelberekeningen zijn erg afhankelijk van de gemaakte veronderstellingen en vereenvoudigingen. Het is wellicht goed om te noemen dat binnen hetzelfde project ook aandacht is besteed aan veldmetingen m.b.t. organische precisiebemesting. De experimenten vonden plaats op een zware zavelgrond en in dit rapport zijn berekeningen voor zandgronden uitgevoerd. Zodoende was het niet mogelijk om deze twee benaderingen te integreren. Over de resultaten van de veldmetingen op de zware zavelgrond op de Lovinkhoeve is apart gerapporteerd (de Vos en Heinen, 1999; Assinck, 2002).

Samenvatting

Biologische landbouw maakt vooral gebruik van organische meststoffen. De vraag rijst in hoeverre precisiebemesting van organische mest perspectieven biedt met betrekking tot vermindering van uitspoeling en efficiënter gebruik van nutriënten. Doel van de hier gerapporteerde studie was door middel van modelberekeningen na te gaan in hoeverre wijze van toediening van organische mest, bewortelingspatroon en al dan niet beregenen stikstofopname en uitspoeling beïnvloeden.

De berekeningen richtten zich op aardappel als voorbeeldgewas op zandgrond en de analyse is uitgevoerd voor het groeiseizoen van 30 verschillende weerjaren, 1970-1999. Er is gebruik gemaakt van het twee-dimensionale model FUSSIM2, uitgebreid met de organische stof routine MOTOR. Gewasgegevens – drogestofontwikkeling, bedekkingsgraad etc. – werden berekend met WOFOST¹ en als tabellen in FUSSIM2 ingevoerd.

De toegediende mest was runderdrijfmest in een gift van 20 ton ha⁻¹ op drie manieren toegediend: oppervlakkige (in de laag 0-15 cm onder maaierveld) volveldstoediening (P1), diepe (in de laag 15-30 cm) volveldstoediening (P2) en oppervlakkige plaatsing binnen een horizontale afstand van 10 cm van de planterij (P3). Berekening kende twee behandelingen, namelijk wel (B1) en niet beregenen (B0). In geval van beregening wordt water toegediend in afhankelijkheid van het weer volgens de gangbare beregeningsplanner. Ook het effect van bewortelingspatroon – diep en smal (W1) versus ondiep en breed (W2) – is onderzocht.

De onderzochte resultaten betroffen de opgenomen stikstof en de som van de in het profiel (tot een diepte van 1 m) achtergebleven minerale stikstof (potentieel verlies). Variantieanalyse van de berekeningsresultaten toonde aan dat de behandelingen significante effect hadden, interactie tussen de behandelingen trad evenwel niet op. De effecten waren klein maar niet onbetekenend: 5-15 kg ha⁻¹, de behandeling P3W1B1 leverde de maximale opname en het minimale potentieel verlies. De algemene conclusie is dat precisiebemesting van organische mest is daarom ook voor de biologische landbouw aan te bevelen.

1 Inleiding

De biologische landbouw is een van de vormen van landbouw die als perspectiefvol wordt beschouwd voor de toekomstige landbouw in Nederland. Het streven van het Nederlandse beleid is om in 2010 het biologische landbouwareaal 10% van het totale landbouwareaal te laten bedragen. De biologische landbouw heeft hierbij te maken met nationale en internationale ontwikkelingen betreffende het mestbeleid.

Het mestbeleid van de overheid is er op gericht de nutriëntenverliezen uit land- en tuinbouw drastisch te verminderen. Land- en tuinbouw moeten steeds zuiniger met nutriënten (en water) omspringen. Efficiënter benutten van nutriënten en water is nodig om maatschappelijke vraagstukken als vermesting, eutrofiëring, verzuring en verdroging mee te helpen oplossen. Productie van agro-grondstoffen is slechts een van de functies van het landelijk gebied. Andere functies als natuur, recreatie en wonen worden belangrijker en stellen toenemende eisen aan land- en tuinbouw. Vanaf 1986 is een reeks van maatregelen in de praktijk ingevoerd, gericht op vermindering van verliezen en verbetering van de benutting van nutriënten. Essentieel onderdeel van het huidige mestbeleid is de implementatie vanaf 1998 van het mineralenaangiftesysteem MINAS met bijbehorende verliesnormen. De verliesnormen geven de heffingsvrije stikstof- en fosfaatoverschot weer. Tussen 1998 en 2002 zijn de verliesnormen stapsgewijs verlaagd. De verliesnormen voor 2003 en daarna zijn nog niet vastgesteld.

De biologische landbouw maakt vooral gebruik van organische meststoffen. Het beschikbaar komen van voedingsstoffen voor het gewas, met name minerale stikstof, uit deze organische meststoffen is sterk afhankelijk van de bodemstructuur, bodemtemperatuur en het bodemwatergehalte. Een optimale gewasgroei en gewaskwaliteit wordt bereikt als de beschikbaarheid en opname van voedingsstoffen zo goed mogelijk overeenkomen met de gewasbehoefte. In het ideale geval zijn er precies voldoende voedingsstoffen in de bodem aanwezig op de juiste plaats en tijd. Door het aanbod van voedingsstoffen te optimaliseren worden de risico's op verliezen door uitspoeling verkleind en wordt zo zuinig mogelijk omgegaan met de beschikbare grondstoffen. Precisiebemesting kan worden toegepast om dit doel te bereiken. In de gangbare landbouw houdt dit in dat de kunstmestgift wordt aangepast aan het ontwikkelingsstadium van het gewas. Een gedeelde stikstofgift of een lage begingift met een bijmest-systeem zijn voorbeelden van precisiebemestingsystemen. De vraag is nu wat de mogelijkheden in de biologische landbouw zijn voor organische precisiebemesting. In dit rapport worden op basis van modelberekeningen de perspectieven gepresenteerd van precisiebemesting met organische mest.

Doel was na te gaan in hoeverre wijze van toediening van organische mest, bewortelingspatroon en al dan niet beregenen de stikstofopname en uitspoeling beïnvloeden. Onze verwachting was dat effecten het sterkst zouden zijn voor een droogtegevoelige zandgrond met een ondiep wortelend gewas dat een grote

nutriëntenbehoefte heeft. Daarom is gekozen voor aardappel als voorbeeldgewas, waarbij voor de bemesting wordt aangesloten op wat nu in de biologische landbouwpraktijk gebruik is: een gift van circa 20 ton ha⁻¹ runderdrijfmest. De analyse is vervolgens uitgevoerd voor 30 verschillende weerjaren.

2 Een eenvoudig analytisch wiskundig model om beschikbaarheid van nutriënten te schatten.

Gewassen die op een aanzienlijke rijafstand worden geteeld benutten, zeker in het begin van het groeiseizoen, een klein gedeelte van het uiteindelijk ter beschikking staande volume grond. Omdat de bemesting veelal oppervlakkig wordt toegediend en door de bouwvoor (de bovenste 20-30 cm van het bodemprofiel) wordt gemengd, zal de beperkte verticale uitgestrektheid van het wortelstelsel geen belemmering opleveren voor de opname. Als echter de bemesting volvelds wordt gegeven, zal vanwege de geringe horizontale verspreiding van het wortelstelsel slechts een gering deel van de toegediende bemesting binnen het directe bereik van de wortels vallen.

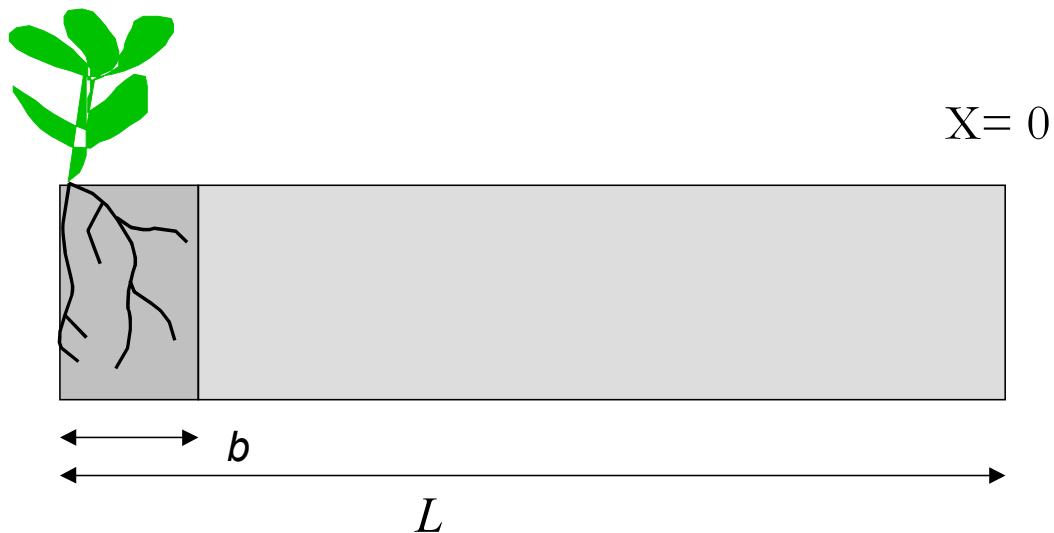
Een nutriënt als stikstof - zeker in de vorm van nitraat - kan in principe makkelijk in de bodem getransporteerd worden, meegevoerd door massastroming van water en/of door diffusie. De snelheid van beide processen wordt voor een groot deel bepaald door de vochttoestand van de bodem. Om te illustreren hoe de aanvulling door lateraal transport vanuit grond buiten de invloed van het wortelstelsel verloopt, is gekozen voor een vergaande vereenvoudiging (figuur 1).

Beschouw een wortelstelsel met effectieve breedte b . De parameter L stelt de halve rij-afstand voor en geeft in principe de hoeveelheid grond die ter beschikking staat van de plantenrij. Stel dat de hoeveelheid nitraat binnen het wortelstelsel uitgeput is, dan kan de concentratie op het grensvlak bewortelde/onbewortelde grond op 0 gesteld worden. Dan is de aanvulling vanuit de onbewortelde grond te berekenen met behulp van een analytisch wiskundige oplossing (zie Aanhangsel 1). Figuur 2 toont welke fractie van de hoeveelheid nutriënt in het onbewortelde stuk binnen een periode van 50 dagen naar het bewortelde gedeelte wordt getransporteerd als functie van de transpiratiesnelheid, de verhouding L/b en de adsorptie-constante K . De laatste heeft voor nitraat de waarde 0, voor ammonium en voor fosfaat bedraagt deze waarde circa 10 respectievelijk 100.

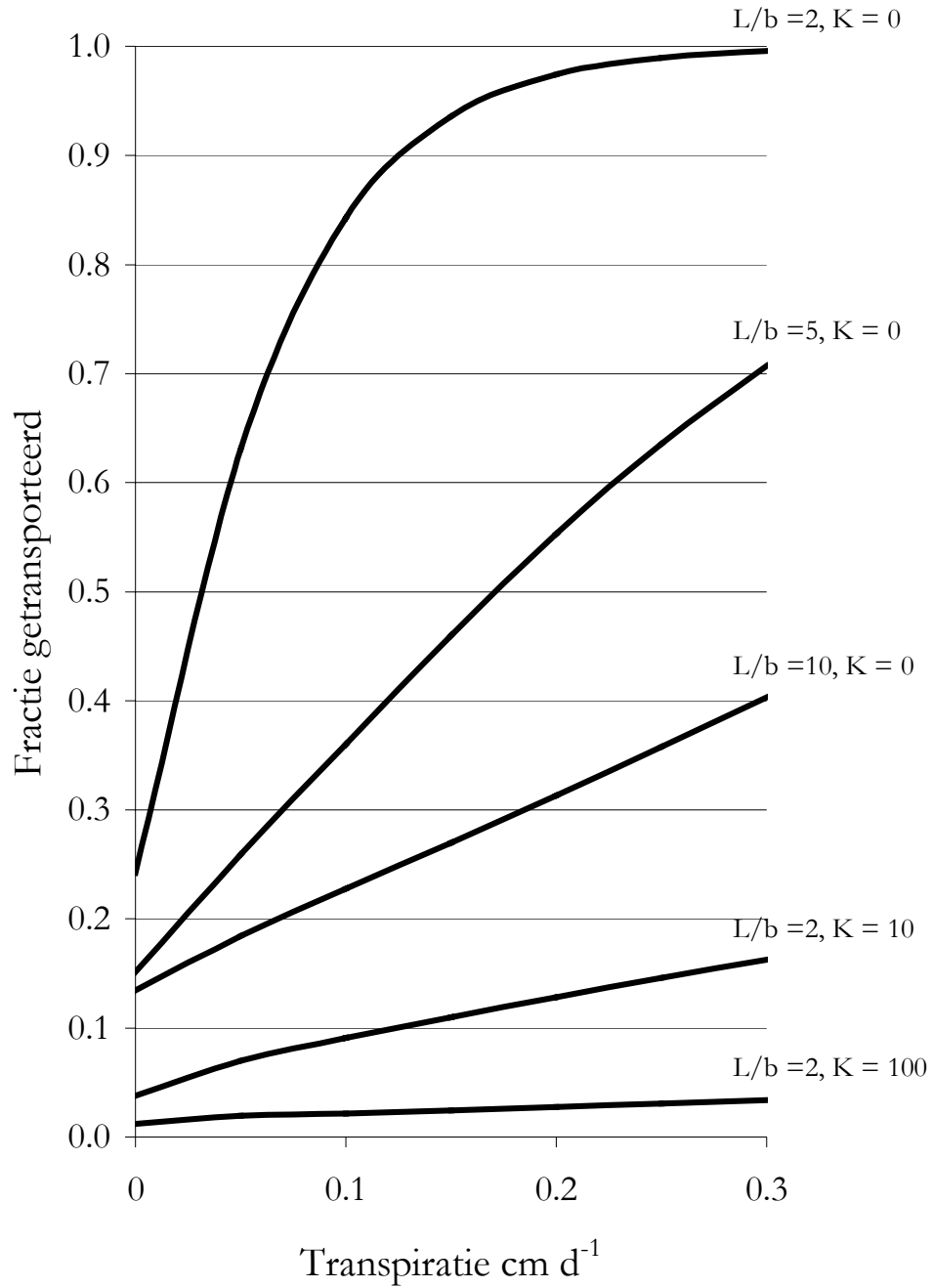
Duidelijk is dat zelfs bij bescheiden wateropname een groot deel van het nitraat binnen een relatief korte periode van het onbewortelde naar het bewortelde stuk getransporteerd kan worden. In het geval het transport voornamelijk plaats vindt d.m.v. diffusie is minder dan 30% van het nitraat beschikbaar. De curven slaan op een situatie waarin het volumetrisch vochtgehalte 0.25 bedraagt. Bij een lager vochtgehalte (0.20) (niet getoond in figuur 2) daalt bij een $L/b = 2$ de beschikbare fractie van 24% naar minder dan 15% als het transport alleen d.m.v. diffusie plaats vindt. Ook adsorptie betekent een aanzienlijke vermindering van de beschikbaarheid. Duidelijk is het belang van plaatsing van meststof, zeker waar het wortelstelsels betreft die in horizontale richting een beperkte omvang hebben en waar het sterk geadsorbeerde nutriënten betreft.

Met een dergelijk eenvoudig model kan dus de interactie tussen omvang van wortelstelsel, omstandigheden en adsorptie geïllustreerd worden. In werkelijkheid

groeit het wortelstelsel, wisselen de omstandigheden, worden nutriënten geproduceerd ten gevolge van mineralisatie, treden verliezen op door uitspoeling, irreversibele vastlegging enz. Om met althans een deel van deze complicerende factoren rekening te houden moeten modellen gebruikt worden, waarin de dynamiek van de processen in het bodem-plant systeem als functie van de (weers)omstandigheden berekend kan worden. Een dergelijk model is FUSSIM2 waarmee de rest van de hier te bespreken resultaten zijn berekend.



Figuur 1 De situatie beschouwd in het analytisch model. Een strook grond ter breedte L (de halve rijafstand), waarvan een stuk ter breedte b beworteld is. De opname door de plant is z_0 dat de concentratie op de grens tussen beworteld en onbeworteld ($x = L - b$) nul is. Er is geen transport over de grens $x = 0$



Figuur 2. De fractie van de hoeveelheid nutriënt in het onbewortelde stuk (figuur 1) die in een tijdsbestek van 50 dagen naar het bewortelde gedeelte getransporteerd wordt als functie van de transpiratie voor verschillende L/b verhoudingen, en waarden van de adsorptieconstante K .

3 Het numerieke model FUSSIM2

3.1 Algemeen

Dit model is oorspronkelijk opgezet om tweedimensionale waterstroming en stoftransport in de onverzadigde zone te beschrijven. In de loop der tijd zijn vele modules toegevoegd waaronder een module die organische stofafbraak en daarmee gepaard gaande mineralisatie van stikstof berekent, een module voor nitrificatie en denitrificatie, en een module die opname van nutriënten berekent. Het model is uitgebreid beschreven (Heinen en De Willigen, 1998; Heinen en de Willigen, 2001). Hier zullen alleen enkele belangrijke onderdelen besproken worden.

3.2 Basismodellen

3.2.1 Model voor organische stofafbraak MOTOR

De basis van MOTOR bestaat uit een module die de transformatie van organische stof beschrijft. De gebruiker kan uit een aantal mogelijkheden kiezen wat betreft fractionering van organische stof, de orde van de afbraakprocessen (eerste of tweede orde) en natuurlijk de waarden van de parameters. De hier gebruikte module is ontleend aan Verberne *et al.* (1995) en is schematisch weergegeven in figuur 3. De aan de bodem toegevoegde organische stof (gewasresten, organische mest) wordt verdeeld in drie fracties: makkelijk aantastbaar (DPM), structureel (SPM) en resistent materiaal (RPM). De organische stof in de bodem (“humus”) wordt verdeeld in een labiele (LOM) en een stabiele fractie (SOM). Alle fracties worden volgens een eerste-orde proces afgebroken. Uit DPM, SPM en RPM wordt met een zekere efficiëntie LOM gevormd, terwijl uit LOM SOM wordt gevormd en vice-versa. De betreffende vergelijkingen voor de afbraak van toegevoegde organische stof luiden dus als volgt:

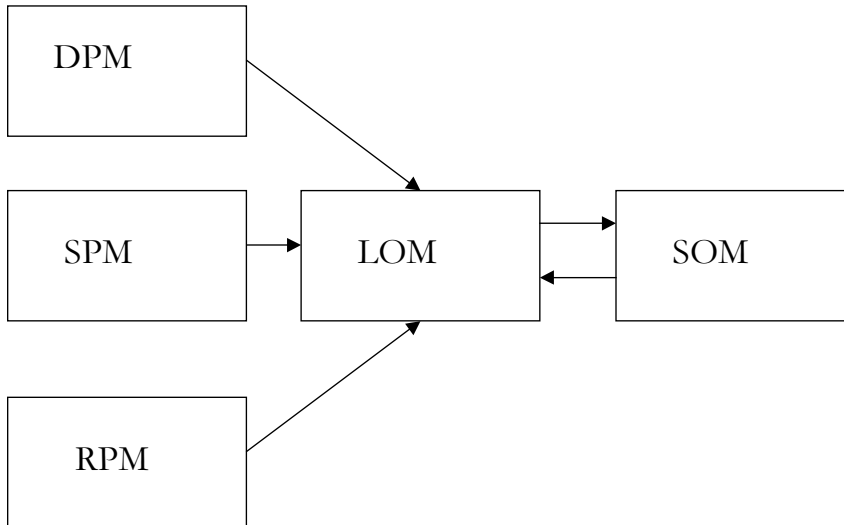
$$\frac{dx_i}{dt} = -k_i x_i \quad (1)$$

waarbij x_i staat voor een van de fracties DPM, SPM en RPM en k_i voor de afbraaksnelheid horende bij de betreffende fractie. Voor de humus geldt:

$$\frac{dx_l}{dt} = -k_l x_l + \varepsilon_s k_s x_s + \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i k_i x_i \quad (2)$$

$$\frac{dx_s}{dt} = -k_s x_s + \varepsilon_l k_l x_l \quad (3)$$

waarin x_l en x_s staan voor de fractie LOM resp. SOM en ε voor de efficiëntie van de omzetting.



Figuur 3. Gebruikt modelconcept voor organische stofverdeling. De verse organische stof bestaat uit fracties DPM, SPM en RPM, de organische stof in de bodem ("humus") bestaat uit een labiele (LOM), en een stabiele fractie (SOM)

Uit de afbraak en opbouw van de organische stofcomponenten is vrijkomen of vastleggen van minerale stikstof te berekenen m.b.v. het C/N-quotiënt van de fracties. Tabel 1 toont de waarden van de gebruikte parameters.

De verdeling van de toegevoegde organische stof over DPM, SPM en RPM volgt uit het C/N-quotiënt van het toegevoegde materiaal. Hier is de aanpak gevolgd van Verberne (1992), die aanneemt dat het volgende verband bestaat tussen het C/N quotiënt van het materiaal (β) en de fractie RPM:

$$f_{RPM} = \frac{f_{RPM,max} \beta^2}{R^2 + \beta^2} \quad (4)$$

waarin $f_{RPM,max}$ de maximale fractie voorstelt en R een parameter is. Omdat de som van de fracties 1 is, en de verdeling zo moet zijn dat deze resulteert in een C/N-quotiënt β kunnen de fracties f_{SPM} en f_{DPM} berekend worden als:

$$f_{SPM} = \frac{\beta \frac{1 - f_{RPM}}{\alpha_{RPM}} - \frac{1 - f_{RPM}}{\alpha_{DPM}}}{\frac{1}{\alpha_{SPM}} - \frac{1}{\alpha_{DPM}}} \quad (5)$$

en

$$f_{DPM} = 1 - f_{SPM} - f_{RPM} \quad (6)$$

waarin α het C/N-quotiënt van de betreffende fractie is.

Tabel 1. Parameterwaarden gebruikt in de organische stof module.

Bron	k (d ⁻¹)	ϵ (-)	C/N (-)	Product
DPM	1.15E-3	0.4	6	LOM
SPM	4.93E-4	0.3	150	LOM
RPM	1.64E-5	1.0	100	LOM
LOM	2.70E-4	0.25	15	SOM
SOM	1.40-E-5	0.2	11.5	LOM

3.2.2 Beschrijving plantengroei en N-opname.

In FUSSIM2 bestaat de mogelijkheid de gewasgroei te beschrijven met een zogenaamde expolineaire functie (Goudriaan en Monteith, 1990):

$$y = \frac{c_m}{r_m} \ln(1 + \exp(r_m(t - t_b))) \quad (7)$$

waarin y de drogestofproduktie (kg ha^{-1}) is, c_m de lineaire groeisnelheid ($\text{kg ha}^{-1}\text{d}^{-1}$), r_m de relatieve groeisnelheid (d^{-1}), t de tijd (d), en t_b (d) een parameter. Met een vergelijking, die is ontleend aan Greenwood & Draycott (1995) en het optimum N-gehalte geeft als functie van geproduceerd droge stof, kan dan de opname-eis voor elke dag in het groeiseizoen berekend worden. De vergelijking voor het optimum N-gehalte luidt:

$$N_o = A + B * \exp(-C * y) \quad (8)$$

Waarin N_o het optimumgehalte is en A , B en C parameters. Bij optimale omstandigheden is dus de hoeveelheid stikstof in de plant :

$$P_N = yN_o \quad (9)$$

De vereiste opname wordt dus gegeven door:

$$\frac{dP_N}{dt} = y \frac{dN_o}{dt} + N_o \frac{dy}{dt} = y \frac{dN_o}{dy} \frac{dy}{dt} + N_o \frac{dy}{dt} = \left(y \frac{dN_o}{dy} + N_o \right) \frac{dy}{dt} \quad (10)$$

Verondersteld is dat de spruit/wortelverhouding constant is. Het wortelstelsel groeit dus in massa evenredig met de bovengrondse massagroei. Uit de massagroei van de wortels kan de lengtegroei worden berekend. De verspreiding van de wortels over het bodemprofiel wordt beschreven als een diffusieproces:

$$\frac{\partial L_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial L_m}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial L_m}{\partial z} - \lambda L_m + Q(x, z, t) \quad (11)$$

waarin L_m de wortellengtedichtheid is (cm cm^{-3}), D_x en D_z diffusiecoëfficiënten in de x en de z richting zijn ($\text{cm}^2 \text{d}^{-1}$), λ een afstervingsfactor is (d^{-1}) en Q de toename is van de wortellengte.

4 Invoerparameters, functies en de initialisatie voor modelberekeningen

4.1 Algemeen

De berekeningen richten zich op het nutriënt stikstof. De resultaten waar in de rapportage de meest aandacht aan zal worden besteed, zijn het verloop van de actuele opname, de hoeveelheid minerale stikstof die in het profiel achterblijft aan het eind van de groeiperiode, en de uitspoeling tijdens de groeiperiode. Voor iedere behandeling zal een periode van 30 afzonderlijke jaren doorgerekend worden. Het betreft de periode 1970-1999, met weersgegevens van Wageningen (locatie Haarweg). Er zijn in totaal 12 behandelingen nl. 3 wijzen van toediening van mest, 2 beregeningsvarianten, en 2 wortelpatronen. Schematisch zijn de verschillende behandelingen weergegeven in tabel 2.

Tabel 2. Schema van de verschillende behandelingen P (toedieningswijze plaatsing zie 4.3), W (bewortelingspatroon, zie 4.5.2) en B (al dan niet beregening zie 4.4)

P1				P2				P3			
W1		W2		W1		W2		W1		W2	
B0	B1	B0	B1	B0	B1	B0	B1	B0	B1	B0	B1

4.2 Afmetingen bodemdomein en profielopbouw

De berekeningen hebben betrekking op een gewas dat in rijen wordt geteeld met een rij-afstand van 80 cm. Het beschouwde bodemdomein is dan ook een rechthoek waarvan de breedte 40 cm en de diepte 100 cm bedraagt. Voor de berekeningen is het profiel opgedeeld in 8 kolommen met een breedte van 5 cm, en 4 lagen met een dikte van 5 cm en 8 lagen met een dikte van 10 cm, in totaal dus 96 control-volumes (cv).

Het profiel bestaat uit een 40 cm dikke toplaag van een zandgrond (Zandb1 uit de Staringreeks; Wösten *et al.*, 1987) met een volumegewicht van 1.3 g cm^{-3} en een 60 cm dikke ondergrond (Zando1 uit de Staringreeks) met een volumegewicht van 1.5 g m^{-3} . De bovenste 20 cm heeft een organisch stofgehalte van 3%. Daaronder is het gehalte 1%. De drukhoogte aan de onderrand van het profiel is in evenwicht met een vaste grondwaterstand op 200 cm en bedraagt dus -100 cm .

4.3 Plaatsing

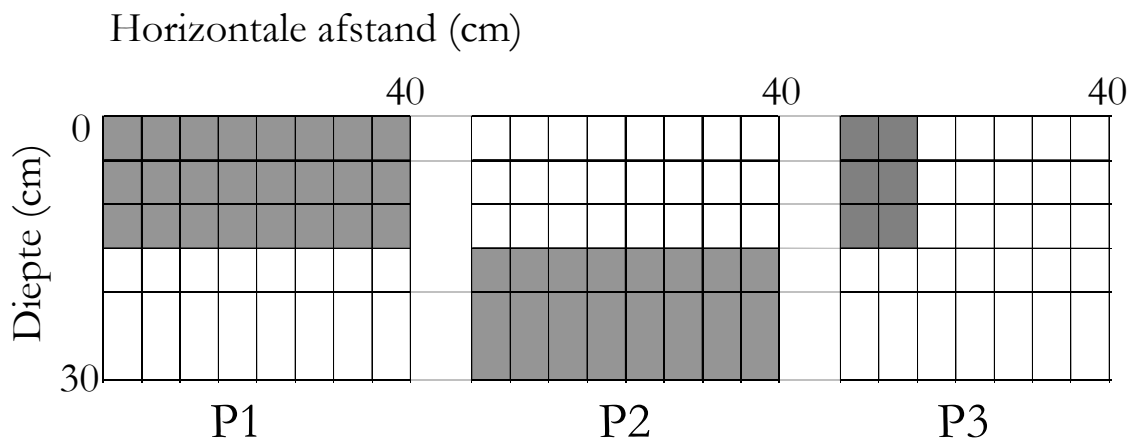
Er wordt 20.4 ton ha^{-1} runderdrijfmest toegediend overeenkomend met 100 kg ha^{-1} stikstof. De samenstelling van de mest is zoals beschreven in van Dijk (1999) en vermeld in tabel 3. Hierbij is aangenomen dat het C-gehalte van de droge stof 40%

Tabel 3. Samenstelling van runderdrijfmest (van Dijk 1990), en de verdeling van C over de fractie RPM, SPM en DPM.

Droge stof	90	kg/1000 kg
Org. stof	66	kg/1000 kg
C (40%)	26.4	kg/1000 kg
N _{tot}	4.9	kg/1000 kg
N _{min}	2.6	kg/1000 kg
N _{org}	2.3	kg/1000 kg
C/N _{org}	11.5	-
RPM	0.045	-
SPM	0.454	-
DPM	0.502	-

bedraagt. De verdeling over de fracties RPM, SPM en DPM is berekend uit het C/N quotient zoals uitgelegd in paragraaf 3.2.1. In navolging van Verberne (1992) zijn de waarden voor $f_{RPM,max}$ en R^2 respectievelijk 0.45 en 1200.

De mest wordt verondersteld toegediend te zijn vlak voor opkomst van het gewas. De mest wordt volvelds en geplaatst in de rij toegediend. Volveds op twee dieptes 0-15 en 15-30 en plaatsing op 10 cm van de rij over een diepte van 15 cm. Figuur 4 geeft aan hoe de mest is verdeeld.



Figuur 4 Schematische weergave van de drie toegepaste wijzen van mesttoediening: P1 volvelds op 0-15 cm, P2 volvelds op 15-30 cm, en P3 plaatsing binnen 10 cm horizontale afstand van de planrij (op 0,0) op een diepte van 0-15 cm.

4.4 Berekening

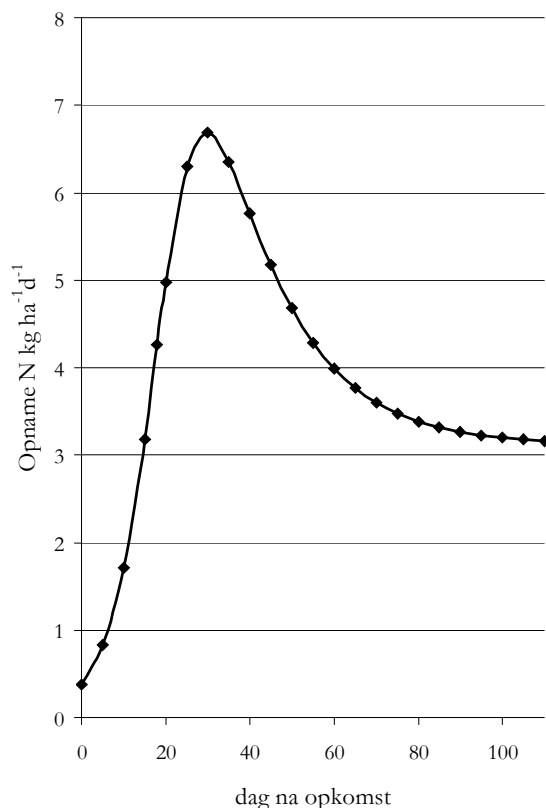
Berekening kent twee behandelingen, namelijk wel en niet beregenen. In geval van beregening wordt water toegediend in afhankelijkheid van het weer volgens de gangbare beregeningsplanner (Van Loon *et al.*, 1993). Dit houdt in dat de drukhoogte op 35 cm diepte wordt afgelezen met behulp van tensiometers, en dat met beregenen wordt begonnen zodra deze kleiner wordt dan -350 cm. Dan wordt een gift van 25 mm toegepast over een periode van 1 dag.

4.5 Gewas

4.5.1 Opname-eis en duur opname

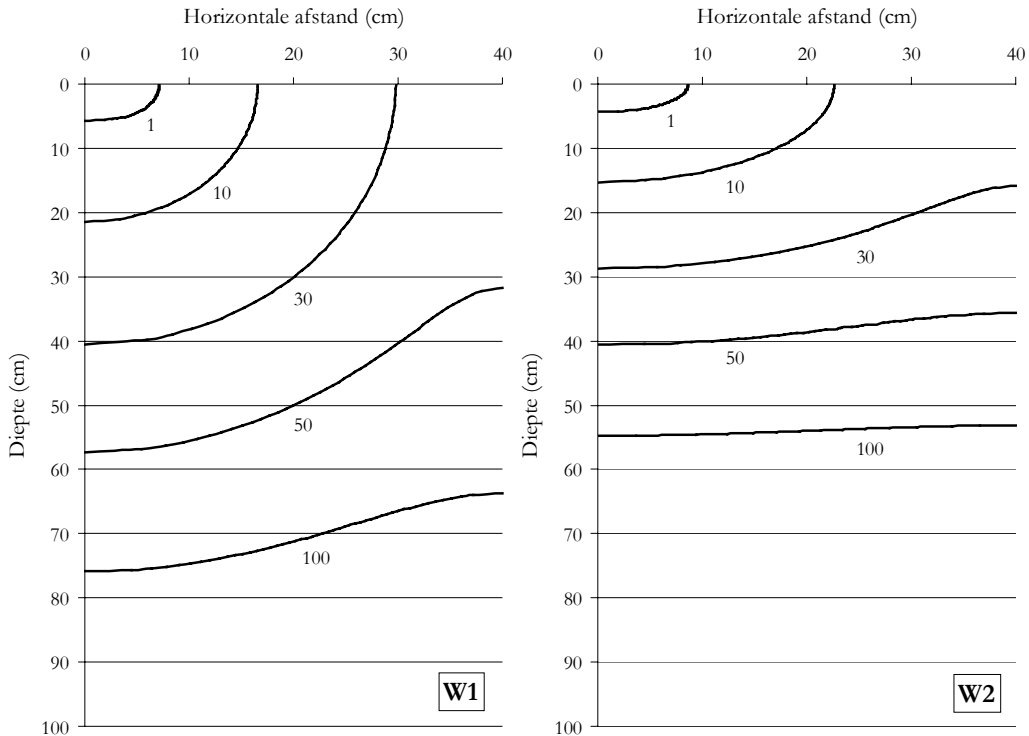
Het gewas heeft een opname-eis die overeenkomt met die van de aardappel. Met behulp van WOFOST (Boogaard *et al.*, 1998) is uitgerekend hoe de drogestofontwikkeling over het groeiseizoen van een gemiddeld jaar (1979) verloopt. De verkregen resultaten zijn vereffend op de expolineaire vergelijking gegeven in vergelijking (7). Verkregen parameters zijn $c_m = 231 \text{ kg ha}^{-1} \text{ d}^{-1}$, $r_m = 0.168 \text{ d}^{-1}$, $t_b = 20 \text{ d}$. De parameters voor vergelijking (8) zijn ontleend aan Greenwood & Draycott (1995), de waarden bedragen $A = 1.25 (-)$, $B = 4.03 (-)$ en $C = 2.6 \cdot 10^{-4} \text{ ha kg}^{-1}$. De opname-eis van het gewas zoals berekend met bovenstaande parameters en vergelijking (8) wordt getoond in figuur 5. De opname stopt half augustus omdat dan aardappelloof wordt geklapt.

Stikstof wordt alleen in anorganische vorm opgenomen. Er is aangenomen dat het gewas voorkeur heeft voor nitraat. Het gewas neemt het minimum van vraag en maximaal door de omstandigheden toegelaten transportsnelheid naar de wortel toe op. Als er voldoende nitraat aanwezig is om aan de vraag te voldoen, dan wordt alleen nitraat opgenomen. Anders wordt ook ammonium opgenomen weer als minimum van vraag en maximaal door de omstandigheden toegelaten transportsnelheid naar de wortel toe.



Figuur 5 De opname-eis van een maximaal groeiend aardappelgewas.

Wortelgroei



Figuur 6. Ontwikkeling van twee wortelstelsels zoals berekend met vergelijking 11. De curven geven lijnen aan van gelijke worteldichtheid (0.1 cm cm^3) op verschillende tijdstippen. De linkerfiguur is berekend met $D_x = 5.6 \text{ cm}^2 \text{ d}^{-1}$, en $D_z = 11.2 \text{ cm}^2 \text{ d}^{-1}$ (wortelpatroon W1), de rechter figuur met $D_x = 5.6 \text{ cm}^2 \text{ d}^{-1}$, en $D_z = 2.8 \text{ cm}^2 \text{ d}^{-1}$ (wortelpatroon W2).

De wortelgroei wordt bepaald door de hoeveelheid droge stof die aan het wortelstelsel wordt toegekend. Er is uitgegaan van een wortel/(spruit + wortel)-verhouding van 0.1. Deze groei wordt omgerekend naar lengtegroei door vermenigvuldiging met de specifieke wortellengte die hier op 230 m g^{-1} is gesteld. De verdeling van de wortels over het profiel gebeurt d.m.v. een diffusieproces. Voor de berekeningen is het van belang hoe de verhouding diffusiecoëfficiënt in de diepte (z-richting)/ diffusiecoëfficiënt in de breedte (x-richting) is. Figuur 6 geeft een illustratie van de wortelontwikkeling in de tijd als functie van deze verhouding.

4.6 Initiële toestand

4.6.1 Water

In evenwicht met een drukhoogte van -100 cm aan onderrand.

4.6.2 Anorganische stikstof

Initieel is anorganisch stikstof alleen aanwezig in de vorm van nitraat: in de laag 0-20 cm 20 kg ha^{-1} , in de laag 20 – 40 cm 15 kg ha^{-1} , en van 40 cm tot aan 1 m diepte nog eens 10 kg ha^{-1} , zie tabel 4.

Tabel 4. Hoeveelheid initiële stikstof als functie van diepte.

Laag cm	Volumegewicht grond (g cm^{-3})	Hoeveelheid N (kg ha^{-1})	Hoeveelheid N (mg kg^{-1})
0-20	1.3	20	7.70
20-40	1.3	15	5.77
40-100	1.5	10	1.11

4.6.3 Organische stof

Bij de verdeling van organische stof over de labiele (LOM) en stabiele (SOM) fractie is uitgegaan van evenwicht. Uit (3) volgt dat bij evenwicht :

$$\frac{\text{SOM}}{\text{LOM}} = \frac{\varepsilon_l k_l}{k_s} \quad (12)$$

Bij de hier gebruikte parameters wordt dus $\text{SOM/LOM} = 4.82$. Op basis van deze verhouding is de organische stof in de verschillende lagen over de twee fracties verdeeld.

4.6.4 Wortelstelsel

De berekeningen starten vlak voor de dag van opkomst. In FUSIM2 moet opgegeven worden hoeveel wortels er bij opkomst zijn en hoe deze zijn verdeeld. Stel de initiële droge stof van het gewas bedraagt Y (kg ha^{-1}), de verhouding massa wortels/totaal massa is a , en de specifieke wortellengte is s (m g^{-1}), dan is de totale wortellengte initieel dus: $T_L = aYs \cdot 10^5 \text{ cm ha}^{-1}$. Deze wortels zijn i.h.a. niet uniform verdeeld. Als het volume van de cv's die initieel wortels bevatten totaal $V \text{ cm}^3$ bedraagt, dan is de gemiddelde worteldichtheid in die cv's $T_L/V \text{ cm cm}^{-3}$.

Bij opkomst bedraagt volgens WOFOST de droge stof 43 kg ha^{-1} , a is voor akkerbouwgewassen ca. 0.1, en s is in geval van aardappel 230 m g^{-1} . De totale wortellengte is dus: $0.1 \cdot 43 \cdot 230 \cdot 10^5 = 9.89 \cdot 10^7 \text{ cm}$, en de worteldichtheid in het eerste cv (25 cm^2 in de linker bovenhoek) dus: $9.89 \cdot 10^7 / (0.625 \cdot 10^8) = 1.58 \text{ cm cm}^{-3}$.

5 Resultaten

5.1 Statistische beschrijving van de resultaten

De berekeningen zijn gedaan voor het groeiseizoen (15 april-15 augustus) van 30 weerjaren, namelijk 1970 tot en met 1999. Een statistische beschrijving van de resultaten ten aanzien van respectievelijk de anorganische N in het profiel tot 1 m diepte op de laatste dag (NP), de totale hoeveelheid opgenomen N (NO), de N-mineralisatie (NM), en de N uitspoeling (NU) vindt men in tabel 5. De tabel toont dat voor drie van de vier variabelen de verdeling ongeveer normaal is. De verdeling van de uitspoeling is erg scheef, wat blijkt uit het verschil tussen gemiddelde en mediaan, en de hoge waarde van de scheefheidparameter.

De weers- en behandelingsverschillen hebben vooral in het geval van NP en NO geleid tot een behoorlijk verschil tussen laagste en hoogste waarde. In het geval van NO bijvoorbeeld een verschil van 77 kg ha⁻¹, wat met een stikstof gehalte van 2% een verschil van ca 3800 kg ha⁻¹ droge stof oplevert. De uitspoeling NU is in 14 van de 30 jaren minder dan 1 kg ha⁻¹. En maar in vijf jaren groter dan 10 kg ha⁻¹, met als uitschieters 1987, behandeling P2W1B1, 42 kg ha⁻¹ en 1979, behandeling P2W2B1, 38 kg ha⁻¹. De mineralisatie is de meest constante van de vier met een gemiddelde van 105 kg ha⁻¹ en een klein traject van 30 kg ha⁻¹.

Vanwege het grote aantal runs (360) is het ondoenlijk om in detail het jaarlijks verloop van de variabelen te beschouwen. Het is bovendien onnodig. In het kader van de doelstelling van dit rapport is het voldoende de aan het eind van de 111-daagse groeiperiode bereikte verdeling van de variabelen voor de 12 behandelingen met elkaar te vergelijken. In de statistische beschrijving van tabel 5 zijn weers- en behandelingsverschillen verstrengeld. Om de verschillen ten gevolge van behandeling nader te analyseren is een variantie-analyse uitgevoerd waarin de jaren zijn opgevat als herhalingen. Alleen enkele markante resultaten zullen in detail behandeld worden. De aandacht zal vooral geconcentreerd zijn op NO en de som van NP en NU, aangeduid met de term potentieel verlies (PV). Onder potentieel verlies wordt dus verstaan de som van uitspoeling tijdens de groeiperiode en de hoeveelheid minerale N achtergebleven na doodspuiten gewas.

Tabel 5. Statistische kentallen van de verdeling van de resultaten van een berekening voor de periode 1970-1999, De getoonde resultaten geven de situatie na een periode van 111 dagen gewasgroei en -opname. De eenheid is kg ha⁻¹.

	Totaal N in profiel (NP)	N-opname (NO)	Mineralisatie (NM)	Uitspoeling (NU)
Gemiddelde	38	160	105	6.9
Standaard fout	0.48	0.69	0.28	0.50
Mediaan	38	161	105	2.9
Standaard Deviatie	9.1	13	5.4	9.5
Scheefheid	0.16	-0.80	-0.01	1.8
Minimum	10	107	89	0.00
Maximum	67	184	119	42

5.2 Variantie-analyse van de resultaten

5.2.1 Opgenomen stikstof

In tabel 6 staan de resultaten van de stikstofopname. Er zijn zeer significante effecten van plaatsing, beregening en beworteling. Opvallend en enigzins teleurstellend is het ontbreken van interactie tussen plaatsing en beworteling. De gemiddelden worden gegeven in tabel 7. Oppervlakkige plaatsing bij de plant (P3) heeft het grootste effect een meeropname van 11 kg ha⁻¹ ten opzichte van de diepe volveldsbemesting (P2). Beregening resulteert in een meeropname van 5 kg ha⁻¹ en een diepere beworteling (W1) leidt tot een extra opname van 8 kg ha⁻¹.

Tabel 6. Variantie-analyse van de resultaten van opgenomen stikstof (NO) over een periode van 30 jaar

Variantie bron	v.g.*)	ks.*)	gk.*)	F*)	p*)
Plaatsing (P)	2	8518.1	4259	33.43	<.0
Beregening (B)	1	2656.9	2656.9	20.85	<.0
Wortelgroei (W)	1	6300.1	6300.1	49.44	<.0
P*B	2	85.1	42.6	0.33	0.7
P*W	2	168.4	84.2	0.66	0.5
B.*W	1	127.2	127.2	1	0.3
P*B*W	2	34.3	17.2	0.13	0.8
Residual	360	44342.3	127.4		

*) v.g. = aantal vrijheidsgraden, ks = kwadraatsom, gk= gemiddelde kwadraat, F = waarde F-toets, p = overschrijdingskans

Tabel 7. Gemiddelden van NO in kg ha⁻¹ over de hoofdeffecten.

P	1	2	3
Gemiddelde	160	154	165
B	0	1	
Gemiddelde	157	162	
W	1	2	
Gemiddelde	164	156	

5.2.2 Gemineraliseerde stikstof.

Tabel 8. Variantie-analyse van de resultaten van gemineraliseerde stikstof (NM) over een periode van 30 jaar

Variantie bron	v.g.*)	ks.*)	gk.*)	F*)	p*)
Plaatsing (P)	2	28.71	14.35	0.57	0.56
Irrigatie (B)	1	1619.26	1619.26	63.76	<.00
Wortelgroei (W)	1	61.75	61.75	2.43	0.12
P*B	2	1.72	0.86	0.03	0.96
P*W	2	0.11	0.06	0	0.99
B*W	1	0.28	0.28	0.01	0.91
P*B*W	2	0.23	0.11	0	0.99
Residual	360	8838.1	25.4		

*) v.g. = aantal vrijheidsgraden, ks = kwadraatsom, gk= gemiddelde kwadraat, F = waarde F-toets, p = overschrijdingskans

Tabel 9. Gemiddelden van NM in kg ha⁻¹ over het hoofdeffect.

B	0	1
gemiddelde	103	107

Het enige hoofdeffect dat invloed heeft op de mineralisatie is de berekening (tabel 8). Tabel 9 toont de grootte van het berekeningseffect, een geringe toename van 4 kg ha⁻¹.

5.2.3 Potentieel verlies

Resultaten staan in tabel 10 en 11. Plaatsing en beworteling hebben significante invloed op het potentieel verlies. Bij oppervlakkige plaatsing dichtbij de plant (P3) is het potentiële verlies 11 kg ha⁻¹ minder dan bij de volvelds diepe bemesting (P2). Een diepe beworteling (W1) resulteert in afname van het potentieel verlies van 7 kg ha⁻¹.

Tabel 10. Variantie-analyse van de resultaten van het potentiële verlies aan stikstof (PV) over een periode van 30 jaar

Variantie bron	v.g.*)	ks.*)	gk.*)	F*)	p*)
P	2	8182.2	4091.1	39.51	<.001
B	1	147.7	147.7	1.43	0.233
W	1	5127.2	5127.2	49.51	<.001
P.B	2	83.6	41.8	0.4	0.668
P.W	2	178.9	89.4	0.80	0.422
B.W	1	130.8	130.8	1.20	0.262
P.B.W	2	49.6	24.8	0.24	0.787
Residual	348	36036.5	103.6		

*) v.g. = aantal vrijheidsgraden, ks = kwadraatsom, gk= gemiddelde kwadraat, F = waarde F-toets, p = overschrijdingskans.

Tabel 11. Gemiddelden van PV in kg ha⁻¹ over de hoofdeffecten.

P	1	2	3
gemiddelde	45	51	40
W	1	2	
gemiddelde	42	49	

5.3 Enkele speciale gevallen

Naast een overzicht van alle resultaten zoals gegeven in sectie 5.2, is het interessant om voor sommige jaren gedetailleerd effecten van bemestingstoediening, beregening en beworteling te laten zien. Daarvoor is nagegaan in welke jaren de – in absolute zin – grootste verschillen optraden in N-opname en potentiële uitspoeling voor overeenkomstige behandelingen.

5.3.1 Stikstofopname

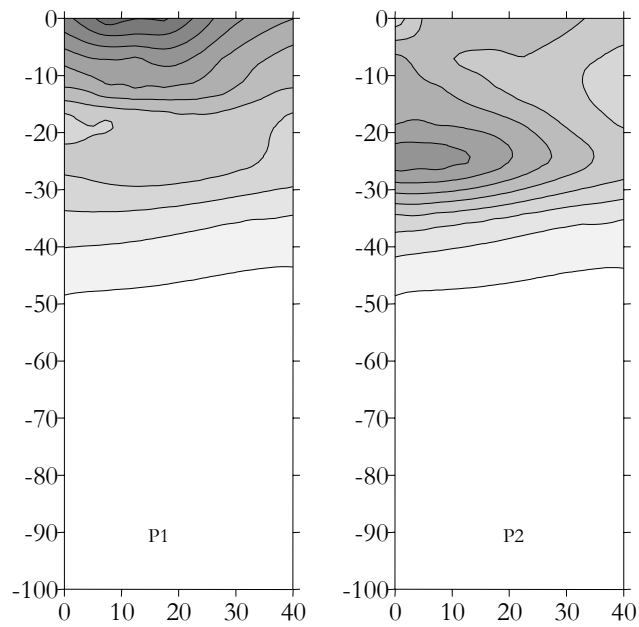
5.3.1.1 Maximum effect van plaatsing

Tussen de behandelingen P1 en P2 bleek het grootste verschil op te treden in 1996 als niet was beregend (B0) en bij een ondiep breed wortelpatroon zoals gegeven in figuur 6b. Het verschil bedraagt 15 kg ha⁻¹ in het voordeel van P1, de gewone volveldsbemesting (zie tabel 12). Met een meer in verticale richting uitgestrekt wortelstelsel (wortelpatroon W1) verdwijnen de verschillen grotendeels.

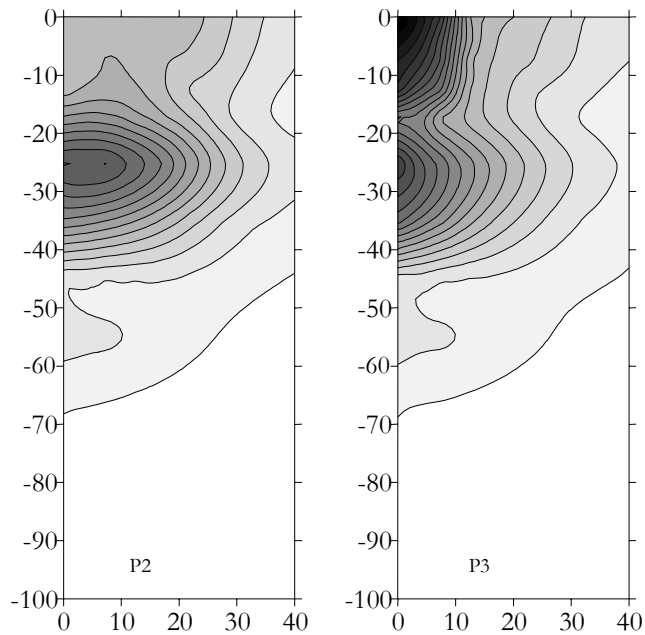
Figuur 8 toont contourlijnen van de cumulatieve opname in het bodemprofiel voor de bemestingswijzen P1 en P2. De grootste opname vindt plaats daar waar de mest is toegediend. Omdat de groeiperiode in 1996 tamelijk droog was – het neerslagoverschot is vrijwel vanaf het begin van de groeiperiode negatief en daalt tot uiteindelijk -445 mm - heeft weinig transport naar beneden toe plaats gevonden.

Tabel 12. Verschillen in N-opname tussen oppervlakkige volveldsbemesting (P1 in 0-15 cm) en volveldsbemesting dieper ondergewerkt (P2 in 15-30 cm) in 1996.

Beregening	Beworteling	N-opname kg ha ⁻¹		
		P1	P2	P1 – P2
B0	W1	147	142	4.7
B0	W2	150	135	15.1
B1	W1	172	168	3.8
B1	W2	169	156	13.3



Figuur 8 Verdeling van de cumulatieve opname over het bodemprofiel in 1996 voor de volvelds oppervlakkige toediening (P1 in laag 10-15 cm) en volvelds dieper toegediend (P2 in 15-30 cm). Geen beregening (B0) en een ondiep breed wortelstelsel (W2). Hoe donkerder, des te groter de opname.



Figuur 9 Verdeling van de cumulatieve opname over het bodemprofiel in 1992 voor de volvelds dieper toegediend (P2 in 15-30 cm) en oppervlakkige plaatsing van mest in de rij (P3 op 10 cm van de plant op een diepte van 0-15 cm). Geen beregening (B0) en een ondiep breed wortelstelsel (W2). Hoe donkerder, des te groter de opname.

Tabel 13 Verschillen in N-opname tussen volveldsbemesting dieper ondergewerkt (P2 in 15-30 cm) en oppervlakkige plaatsing van mest (P3 op 10 cm van de plant op een diepte van 0-15 cm) in 1992.

Beregening	Beworteling	N-opname kg ha ⁻¹		
		P2	P3	P2 – P3
B0	W1	154	172	-17.8
B0	W2	141	155	-14.2
B1	W1	173	183	-10.7
B1	W2	161	172	-11.3

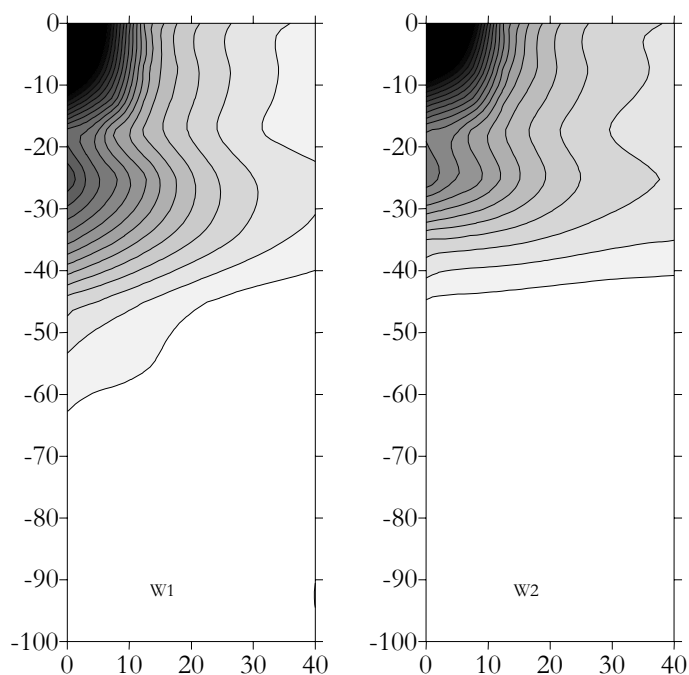
Het grootste verschil tussen de behandelingen P2 en P3 treedt op in 1992 bij afwezigheid van beregening en een smalle diepe beworteling (W1) (zie tabel 13). De verschillen werden nauwelijks beïnvloed door beregening. Figuur 9 toont weer de contourlijnen van de cumulatieve opname. In 1992 is er een positief neerslagoverschot in de eerste 60 dagen van de groeiperiode wat heeft geleid tot inspoeling van nitraat. De opname vindt dan ook uit diepere lagen plaats, ook waar de mest oppervlakkig was toegediend.

5.3.1.2 Maximum effect van bewortelingspatroon

Het grootste verschil trad op in 1995. Een dieper en smaller wortelstelsel leidt in geval van plaatsing tot een opname verschil van 20 kg ha⁻¹ (tabel 14). Voor beide bewortelingspatronen geeft plaatsing van mest gecombineerd met beregening de hoogste opname. De verdeling van de opname over het profiel vindt men in figuur 10, die duidelijk toont dat bewortelingspatroon W1 leidt tot opname uit diepere lagen.

Tabel 14 Verschillen in N-opname tussen bewortelingspatronen in 1995.

Plaatsing	Beregening	N-opname kg ha ⁻¹		
		W1	W2	W1 – W2
P1	B0	163	147	15.2
P1	B1	173	165	8.2
P2	B0	156	137	18.6
P2	B1	170	159	10.9
P3	B0	170	151	19.8
P3	B1	178	169	9.1



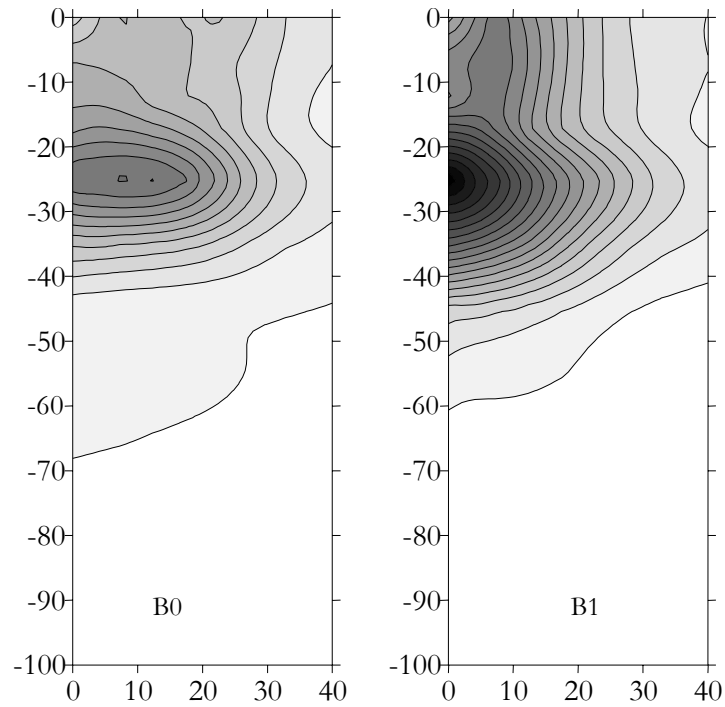
Figuur 10 Verdeling van de cumulatieve opname over het bodemprofiel voor een smal en diep wortelstelsel (W1) en een ondiep breder wortelstelsel (W2), geen beregening (B0) en mest geplaatst in de rij (P3). Hoe donkerder, des te groter de opname.

5.3.1.3 Maximum effect van beregening

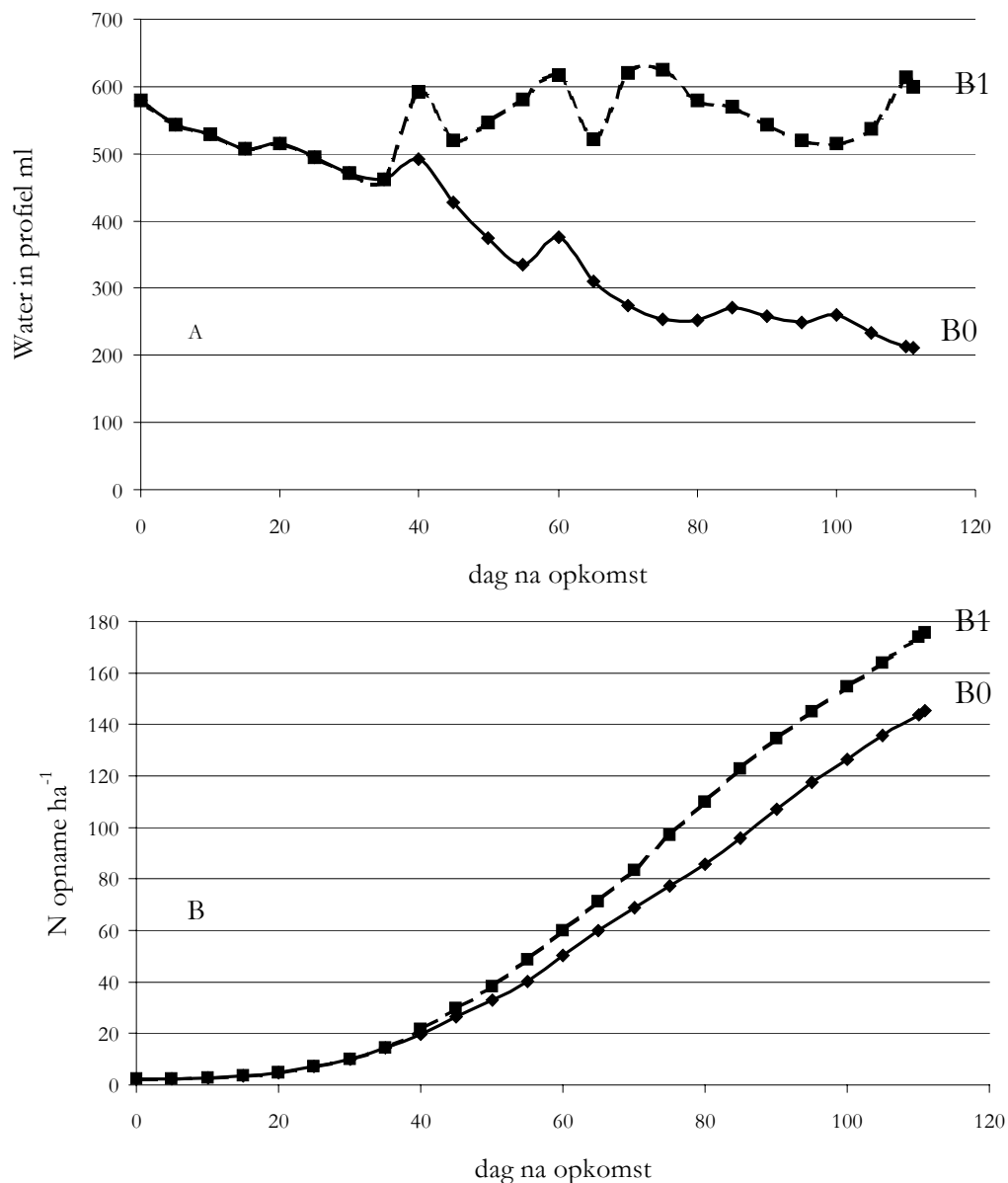
De zomer van het jaar 1976 was uitzonderlijk droog – een neerslagoverschot van minus 630 mm in de beschouwde periode - en het ligt voor de hand dat in een dergelijk jaar de effecten van beregening het grootst zijn. De combinatie volvelds dieper ondergewerkte mest (P2) met een dieper bewortelingspatroon (W1) heeft tot het grootste verschil geleid (tabel 15). De contourlijnen van de opname worden gegeven in figuur 11. Zoals eerder vermeld is de beregening afgestemd op de drukhoogte op 35 cm diepte en wordt beregend als deze een waarde ≤ -350 cm (pF 2.55) bereikt. In 1976 is op deze wijze in totaal 200 mm toegediend in 8 keer. In figuur 12a wordt het verloop van de hoeveelheid water in het profiel gegeven. De beregening heeft er toe geleid dat deze hoeveelheid op peil is gebleven. Figuur 12b laat zien dat de beregening heeft geleid tot grotere opname. Bovendien is ook een 13 kg ha⁻¹ meer gemineraliseerd bij beregenen, terwijl de uitspoeling in absolute zin nauwelijks is toegenomen van 0 to 0.5 kg ha⁻¹.

Tabel 15 Verschillen in N-opname tussen wel en niet beregenen in 1976.

Plaatsing	Beworteling	N-opname kg ha ⁻¹		
		B0	B1	B0 - B1
P1	W1	150	179	-29.8
P1	W2	152	168	-15.6
P2	W1	145	176	-30.3
P2	W2	137	161	-23.9
P3	W1	162	184	-22.5
P3	W2	150	172	-21.6



Figuur 11 Verdeling van de cumulatieve opname over het bodemprofiel bij wel (B1) en niet (B0) beregenen bij volheids dieper ondergewerkt (P2) en een smal en diep wortelstelsel (W1) Hoe donkerder, des te groter de opname.

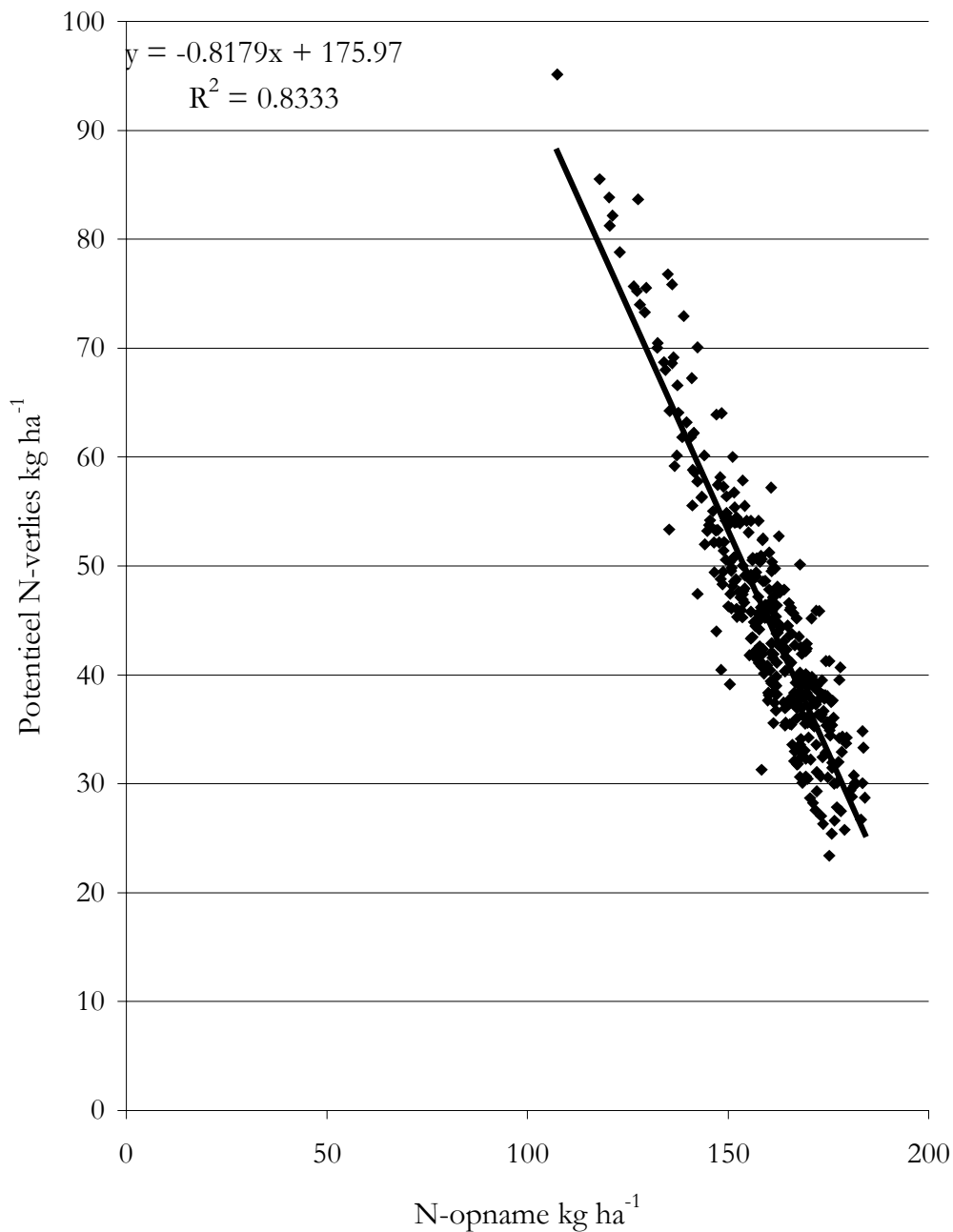


Figuur 12A. Verloop van de hoeveelheid water in het profiel (0-100 cm) over het groeiseizoen in 1976 bij wel (B1) en niet (B0) beregenen. B. Verloop van de N-opname in 1976 bij wel (B1) en niet (B0) beregenen

5.3.2 Potentieel verlies

5.3.2.1 Maximaal effect bij plaatsing

De potentiële uitspoeling – stikstof die na de oogst in het profiel achterblijft plus stikstof uitgespoeld in de groeiperiode - is min of meer het complement van de opgenomen stikstof. Figuur 13 laat het verband tussen beide grootheden zien.



Figuur 13 Verband tussen N-opname en potentiële verlies voor alle 30 meerjaren en alle 12 behandelingen.

Men kan dan ook verwachten dat de jaren en behandelingen met de grootste verschillen in N-opname ook de grootste verschillen in potentieel verlies zullen opleveren. Dat blijkt in elk geval bij plaatsing van mest het geval te zijn. Het grootste verschil in potentieel verlies tussen P1 en P2 trad net als dat in N-opname op in 1996 bij afwezigheid van beregenen en een bewortelingspatroon W2 (tabel 12 en tabel 16).

Tabel 16 Verschillen in potentieel verlies tussen oppervlakkige volveldsbemesting (P1 in 0-15 cm) en volveldsbemesting dieper ondergewerkt (P2 in 15-30 cm) in 1996.

Berekening	Beworteling	Potentieel verlies (kg ha ⁻¹)		
		P1	P2	P1 – P2
B0	W1	44	47	-3.45
B0	W2	39	53	-14.21
B1	W1	29	32	-3.18
B1	W2	31	43	-12.81

Tabel 17 Verschillen in potentiële verlies tussen volveldsbemesting dieper ondergewerkt (P2 in 15-30 cm) en oppervlakkige plaatsing van mest (P3 op 10 cm van de plant op een diepte van 0-15 cm) in 1992.

Berekening	Beworteling	Potentiele uitspoeling (kg ha ⁻¹)		
		P2	P3	P2 – P3
B0	W1	56	37	18.2
B0	W2	67	53	14.1
B1	W1	46	35	11.0
B1	W2	57	46	11.3

Ook het grootste verschil in potentieel verlies tussen P2 en P3 trad op in het zelfde jaar (1992) en bij dezelfde behandelingen als in het geval van N-opname (tabel 13 en tabel 17)

5.3.2.2 Maximum effect van bewortelingspatroon

Ook hier is het potentieel verlies het spiegelbeeld van de N-opname. Vergelijk tabel 18 met tabel 14.

Tabel 18 Verschil in potentiële uitspoeling tussen bewortelingspatronen in 1995.

Plaatsingswijze	Berekening	Potentieel verlies (kg ha ⁻¹)		
		W1	W2	W1 – W2
P1	B0	45	57	-12.8
P1	B1	40	47	-7.1
P2	B0	51	67	-16.1
P2	B1	43	53	-9.7
P3	B0	36	54	-17.6
P3	B1	34	42	-7.8

5.3.2.3 Maximum effect van beregening

Er zijn hier twee jaren met een groot verschil in potentieel verlies. In 1978 (tabel 19) met oppervlakkige volveldsbemesting (P1) en een breed ondiep bewortelingspatroon (W2) is het potentieel verlies groter in geval van beregening (75 mm in drie keer), dit omdat de uitspoeling hier is toegenomen. Uitspoeling gedurende de groeiperiode bedraagt zonder beregening 0.7 kg ha⁻¹, en met beregening 15 kg ha⁻¹, de achtergebleven stikstof verschilt niet zoveel, in beide gevallen omstreeks 40 kg ha⁻¹.

In 1982 (tabel 20) is het potentiële verlies zonder beregening, bij volveldsbemesting dieper geplaatst (P2) en breed ondiep bewortelingspatroon (W2) groter. Hier heeft

beregening (125 mm in vijf keer) geleid tot betere opname van stikstof (139 kg ha⁻¹ zonder en 165 kg ha⁻¹ met beregening) wat heeft geleid tot een behoorlijk verschil in achtergebleven stikstof (62 kg ha⁻¹ zonder en 44 kg ha⁻¹ met beregening). De totale uitspoeling over de groeiperiode is vrijwel hetzelfde: minder dan 0.2 kg ha⁻¹.

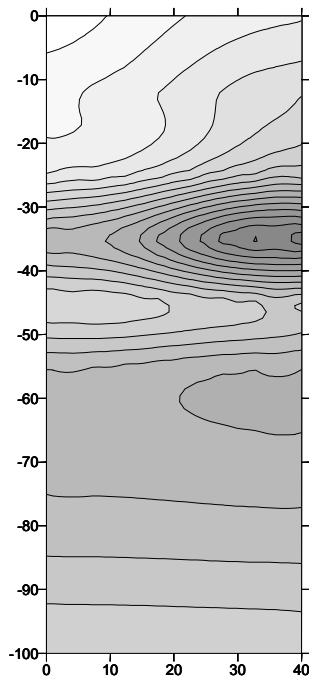
De contouren van de achtergebleven stikstof zijn weergegeven in figuur 14 en 15. Uit figuur 14 blijkt dat met beregening in de diepere lagen de hoogste concentraties aangetroffen worden. Zonder beregening is er een ophoping in de laag 30-40 cm. Uit figuur 15 wordt duidelijk dat tengevolge van de beregening uit de bovenste 20-30 cm meer stikstof is opgenomen. De grootste concentratie van nitraat worden in beide behandelingen op ongeveer dezelfde diepte gevonden 30-40 cm.

Tabel 19 Verschil in potentieel verlies tussen wel en niet beregenen in 1978.

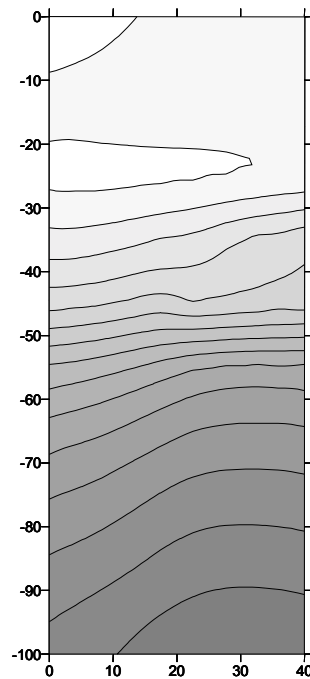
Plaatsingswijze	Beworteling	Potentieel verlies kg ha ⁻¹		
		B0	B1	B0 - B1
P1	W1	36	40	-4.2
P1	W2	41	55	-13.93
P2	W1	41	45	-3.7
P2	W2	49	53	-3.8
P3	W1	29	34	-4.9
P3	W2	38	40	-2.2

Tabel 20 Verschil in potentieel verlies tussen wel en niet beregenen in 1982.

Plaatsing	Beworteling	Potentieel verlies kg ha ⁻¹		
		B0	B1	B0 - B1
P1	W1	45.1	35.4	9.7
P1	W2	48.8	37.6	11.1
P2	W1	52.2	39.4	12.8
P2	W2	61.8	44.5	17.3
P3	W1	35.5	29.8	5.7
P3	W2	47.1	36.4	10.8

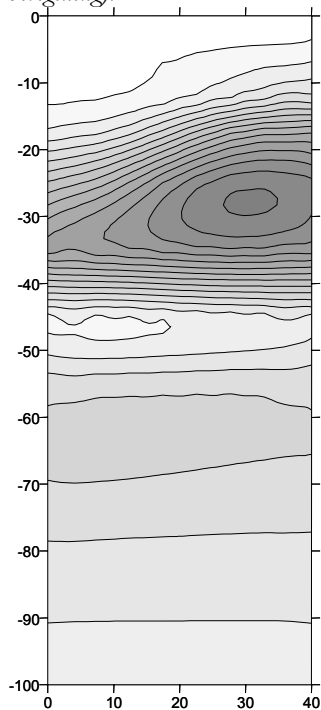


A

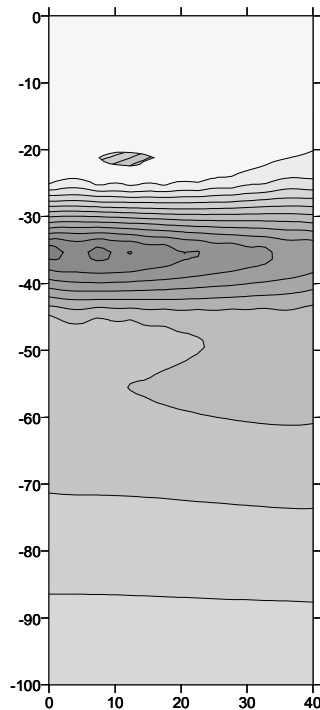


B

Figuur 14. Contourlijnen van nitraat in het profiel aan het einde van de teelt. Naarmate de opvulling donkerder is, is de hoeveelheid nitraat hoger. Behandeling P1W2 in 1978. Figuur A zonder berekening en figuur B met berekening).



A



B

Figuur 15. Contourlijnen van nitraat in het profiel aan het einde van de teelt. Naarmate de opvulling donkerder is, is de hoeveelheid nitraat hoger. Behandeling P2W2 in 1982. Figuur A zonder berekening en figuur B met berekening).

6 Discussie en conclusies

Bij onderzoek naar de geldigheid van een model (validatie) door modeluitkomsten te vergelijken met experimentele resultaten, is het zaak om de procesbeschrijving, en met name de terugkoppeling tussen de processen, naar beste weten op te zetten. Bij berekeningen zoals hier besproken is het voor het begrip beter uit te gaan van het principe het effect van afzonderlijke factoren te beschouwen, zonder terugkoppeling met andere factoren. De wortelgroei is in onze berekeningen verondersteld onafhankelijk te zijn van het weer, met elk jaar hetzelfde patroon W1 dan wel W2. Daarom kon het als factor opgenomen worden in de variantie-analyse. Ook de vereiste stikstofopname was ieder jaar hetzelfde, maar omdat het stikstofaanbod vrij laag was is de vereiste opname nooit gerealiseerd. De actuele opname is wel afhankelijk van de omstandigheden en daarom elk jaar anders, en kon dus als variabele gebruikt worden.

De over de 30-jarige periode gemiddelde absolute effecten van de verschillende factoren zijn vrij klein, vrijwel altijd minder dan 10 kg ha^{-1} (tabel 7, 9 en 11). Relatief betekent dit 4% (N-opname) tot 10 % (potentieel verlies). De N-opname werd significant beïnvloed door de drie behandelingen (tabel 6 en 7). Plaatsing in de rij (P3) leverde een winst op van 5 kg ha^{-1} ten opzichte van volvelds oppervlakkig en 11 kg ha^{-1} ten opzichte van volvelds diep. Berekening heeft geleid tot een toename van 5 kg ha^{-1} en een dieper wortelstelsel tot een winst van 8 kg ha^{-1} . Mineralisatie werd alleen door berekening beïnvloed (tabel 8 en 9) met een weliswaar significant maar klein effect $< 5 \text{ kg ha}^{-1}$. Potentieel verlies tenslotte hangt significant samen bemestingswijze en bewortelingspatroon. Hier leverde P3 een 5 kg ha^{-1} minder verlies dan P1, en 11 kg ha^{-1} minder dan P2. Het diepe wortelstelsel W1 leidde tot een afname van het potentieel verlies van 7 kg ha^{-1} . Omdat interacties afwezig waren, wat inhoudt dat de verschillen tussen de klassen van een bepaalde behandeling niet afhangen van de klassen van een andere behandeling, kan men concluderen dat voor maximale N-opname en minimaal potentieel verlies de behandeling P3W1B1 het meeste oplevert.

Levende wezens dus ook planten reageren op de omgeving. Men kan verwachten dat een andere verdeling van stikstof in de bodem gevolgen heeft voor het bewortelingspatroon, zoals experimenteel gevonden is bij mais (De Willigen *et al.*, 2001; Schröder, 1996; Schröder *et al.*, 1997). De spreiding van het wortelstelsel in het geval van rijenbemesting bleek in verticale richting groter dan in horizontale, de wortels blijven dus dicht bij de plant. Bij volveldsbemesting was de spreiding in horizontale richting (iets) groter dan in verticale richting. Dit houdt in dat na verloop van tijd de wortels van de volveldsbehandeling stikstof onttrekken van grotere horizontale afstand dan de wortels bij rijenbemesting. De wortels zoeken als het ware de nutriënten op. Zoals hierboven is gesteld is in onze berekeningen bewortelingspatroon onafhankelijk van de verdeling van stikstof. Op grond hiervan zou men kunnen verwachten dat in werkelijkheid de verschillen tussen wel en niet plaatsen geringer zullen zijn dan hier berekend. Dat blijkt niet het geval. Schröder *et*

al. (1997) vermelden een afname van het N-overschot (= N-bemesting – N-ontrekking) van 7 kg ha⁻¹ ten gevolge van rijenbemesting, bij een gift van 30 m³ ha⁻¹ runderdrijfmest. Van der Schoot & van Dijk (2001) hebben het N-overschot vastgesteld bij volvelds- en rijenbemesting als functie van grootte van de mestgift (0, 15, 30, 50 m³ ha⁻¹ runderdrijfmest). Uit hun resultaten kan geschat worden dat de afname van het N-overschot bij de in de berekeningen toegediende hoeveelheid (ca 20 m³ ha⁻¹) 16 kg ha⁻¹ bedraagt. Volgens de berekeningen (tabel 7) is deze afname gemiddeld 6 kg ha⁻¹ en maximaal (cijfers niet getoond) 14 kg ha⁻¹, dus van de orde die gemeten is maar in elk geval niet groter.

Over alle resultaten gerekend is het maximale verschil veel groter dan per behandeling (tabel 5). In geval van N-opname 77 kg ha⁻¹ en van potentieel verlies 72 kg ha⁻¹, dit wijst erop dat het weer een veel groter effect heeft gehad dan de behandelingen.

Als voornaamste conclusie kan dus gelden dat volgens de berekeningsresultaten ingrepen als plaatsing, beregening, en gebruikmaking van verschillend wortelpatroon niet heeft geleid tot spectaculaire verschillen in stikstofopname en potentieel verlies. Het weer lijkt hierop een veel grotere invloed te hebben. Een klein verschil hoeft overigens niet onbetekenend te zijn, een afname van het potentieel verlies van 10 kg ha⁻¹ is wel degelijk relevant. Men mag verwachten dat dit voor een nutriënt als fosfaat nog veel sterker geldt (figuur 2). Precisiebemesting van organische mest is daarom ook voor de biologische landbouw aan te bevelen.

Referenties

- Boogaard H.L., C.A. van Diepen, R.P.Rötter, J.M.C.A. Cabrera & H.H. van Laar, 1998. WOFOST 7.1 User's guide for the WOFOST 7.1 crop growth simulation model and WOFOST Control Center 1.5. Technical document 52. DLO Winand Staring Centre, Wageningen, 143 p.
- Carslaw H.S. and J.C. Jaeger, 1959. Conduction of heat in solids, 2nd ed. Macmillan, New York.
- De Willigen, P., W. van Dijk, J.A. de Vos en M. Heinen, 2001. Timing en plaatsing van organische meststoffen in de biologische akkerbouw
- Goudriaan J. and J.L. Monteith. 1990. A mathematical function for crop growth based on light interception and leaf area expansion. *Annals of botany* 66: 695-701.
- Greenwood D.J. and A. Draycott, 1995. Modelling uptake of nitrogen, phosphate and potassium in relation to crop growth. In: P. Kabat, B. Marshall, B.J. van den Broek, J. Vos and H. van Keulen, Modelling and Parameterization of the Soil-Plant-Atmosphere System. A Comparison of Potato Growth Models. Wageningen Pers, Wageningen, The Netherlands, pp. 155-175.
- Heinen, M., & P. de Willigen. 1998. FUSSIM2 A two-dimensional simulation model for water flow, solute transport and root uptake of water and nutrients in partly unsaturated porous media, Quantitative Approaches in Systems Analysis No. 20, DLO Research Institute for Agrobiological and Soil Fertility and the C.T. de Wit Graduate School for Production Ecology, Wageningen, The Netherlands, 140 p.
- Heinen, M., & P. de Willigen 2001. FUSSIM2 version 5. New features and updated user's guide. *Alterra-rapportv* 363, ISSN 1566-7197, 164 p.
- Schröder J.J., J. Groenwold & T. Zaharieva. 1996. Soil mineral nitrogen availability to young maize plants as related to root length density distribution and fertilizer application method. *Netherlands Journal of Agricultural Science* 44: 209-225.
- Schröder, J.J., L. ten Holte & G. Brouwer. 1997. Response of silage maize to placement of cattle slurry. *Netherlands Journal of Agricultural Science* 45: 249-261.
- Van der Schoot, J.R. & W. van Dijk (2001). Rijenbemesting met dierlijke mest in maïs maakt kunstmest overbodig. *PPO-Bulletin Akkerbouw* 2001/2, p. 13-17.
- Van Dijk W., 1999. Adviesbasis voor de bemesting van akkerbouw- en vollegrondsgroentegewassen. Publicatie nr 95, PAV.
- Van Loon C.D., A. Veerman & C.B. Bus, 1993. Teelt van consumptie-aardappelen. Teelthandleiding n. 57, Proefstation voor de Akkerbouw en Groenteteelt in de Vollegrand, Lelystad., 142 pp.
- Verberne E., 1992. Simulation of the nitrogen and water balance in a system of grassland and soil. *Nota* 258, DLO-Instituut voor Bodemvruchtbaarheid Haren 56 p.
- Verberne E., G. Dijksterhuis, R. Jongschaap, H. Bazi, A. Sanou & M. Bonzi, 1995. Simulation des cultures pluviales au Burkina Faso (CP-BKF3): sorgho, mil et maïs. . *Nota* 18, DLO-Instituut voor Bodemvruchtbaarheid Haren 53 p.
- Wösten J.H.M., 1987. Beschrijving van de waterretentie- en doorlatendheidskarakteristieken uit de Staringreeks met analytische functies. *Stiboka rapport* 2019, Stiboka Wageningen, 53 pp.

Aanhangsel 1 Afleiding analytisch model om beschikbaarheid van nutriënten te schatten

De beschouwde situatie is zoals weergegeven in figuur 1 in de hoofdtekst. Eerst zal begonnen worden met de afleiding in geval transport plaats vindt door diffusie. Dan is de transportvergelijking:

$$(K + \theta) \frac{\partial C}{\partial T} = D \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} \quad (1)$$

waarin K de adsorptieconstante is (-), θ het volumetrisch vochtgehalte (-), C de concentratie (mg ml^{-1}), T de tijd (d), D de diffusiecoëfficiënt in de grond, en X de afstand van het midden van de rij (zie figuur 1 in de hoofdtekst). De randvoorwaarden zijn geen transport over $X = 0$:

$$X = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial X} = 0 \quad (2)$$

en concentratie gelijk aan nul op $L - b$:

$$X = L - b, \quad C = 0 \quad (3)$$

Initieel is de concentratie overal hetzelfde:

$$T = 0, \quad C = C_i \quad (4)$$

Om notatie gemakkelijk en onderlinge samenhang van parameters inzichtelijk te maken definiëren we de volgende dimensieloze parameters en variabelen:

$$x = \frac{X}{L - b}, \quad t = \frac{DT}{(K + \theta)(L - b)^2}, \quad c = \frac{C}{C_i} \quad (5)$$

dan wordt het stelsel (1)-(4) getransformeerd in:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (6)$$

$$x = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

$$x = 1, \quad c = 0 \quad (8)$$

$$t = 0, \quad c = 1 \quad (9)$$

Om het stelsel (6)-(9) op te lossen wordt de Laplace transformatie gebruikt (Churchill, 1972). Als de Laplace-transformatie over t met parameter s wordt toegepast op (6)-(9) dan resulteert dat in:

$$su - 1 = \frac{d^2 u}{dx^2} \quad (10)$$

$$x = 0, \quad \frac{du}{dx} = 0 \quad (11)$$

$$x = 1, \quad u = 0 \quad (12)$$

Met als oplossing:

$$u = \frac{1}{s} - \frac{\cosh(x\sqrt{s})}{s \cosh(\sqrt{s})} \quad (13)$$

De inverse van de eerste term aan de rechterkant van (13) is 1, van de tweede term: (Spiegel, Laplace transforms, blz 252, 129):

$$1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4}\right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)$$

zodat de oplossing voor c gevonden wordt als:

$$c = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4}\right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) \quad (14)$$

De totale hoeveelheid in het onbewortelde stuk aanwezig op gegeven tijdstip T wordt gegeven door

$$\int_0^{L-b} (K + \theta) C dX = -\frac{4}{\pi} (K + \theta)(L - b) C_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4}\right) \int_0^1 \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) dx$$

De integraal aan de rechterhand van bovenstaande uitdrukking levert op:

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) dx = -\frac{2 \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)}{\pi(2n-1)} = \frac{-(-1)^n}{\pi(2n-1)}$$

zodat de totale overgebleven hoeveelheid is:

$$\int_0^{L-b} (K + \theta) C dX = \frac{8}{\pi^2} (K + \theta)(L - b) C_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4}\right) \quad (15)$$

De initieel aanwezige hoeveelheid is $(K + \theta)(L - b)C_i$, en fractie die na een tijd t de bewortelde zone is binnengestroomd bedraagt dus:

$$F = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4}\right) \quad (16)$$

Als transport ook wordt verzorgd door massastroming t.g.v. de water opname van de plant dan is de transportvergelijking:

$$(K + \theta) \frac{\partial C}{\partial T} = D \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} - v \frac{\partial C}{\partial X} \quad (17)$$

De coefficient D is nu de som van de dispersiecoefficient en de diffusiecoefficient:

$$D = D_{disp} + D_{dif}$$

en de dispersiecoefficient is verondersteld evenredig te zijn met v :

$$D_{disp} = v d_l$$

Randvoorwaarden weer: geen transport over $X=0$:

$$X = 0, \quad vC - D \frac{\partial C}{\partial X} = 0 \quad (18)$$

De andere randvoorwaarde en de initiele voorwaarden zijn identiek aan (3) en (4). Met dezelfde transformaties als gegeven in (5) en bovendien de definitie:

$$p = \frac{v(L-b)}{D} \quad (19)$$

wordt (17):

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -p \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (20)$$

en (18):

$$x = 0, \quad p c - \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (21)$$

de andere voorwaarden worden gegeven door (8) en (9). Om gebruik te maken van een bekende oplossing zoals gegeven door Carslaw & Jaeger wordt nog een transformatie toegepast:

$$c = u \exp(-v^2 t) \exp(v x) \quad (22)$$

met $v = p/2$.

Dit verandert (20), (21) en (9) in:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (23)$$

$$x = 0, \quad v u - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (24)$$

$$t = 0, \quad u = e^{-v x} \quad (25)$$

Verder wordt de redenatie van C&J gevolgd. Een oplossing van (23) is $\exp(-\alpha^2 t)(A \cos \alpha x + B \sin \alpha x)$, deze uitdrukking voldoet ook aan de voorwaarde (24) als geldt: $vA - \alpha B = 0$, zodat $A/B = \alpha/v$ en aan die van (8) als $A \cos \alpha + B \sin \alpha = 0$, waaruit volgt dat a een oplossing moet zijn van:

$$\alpha \cot \alpha + v = 0. \quad (26)$$

Dus de uitdrukking $A \left(\cos \alpha x + \frac{v}{\alpha} \sin \alpha x \right) \exp(-\alpha^2 t)$ voldoet aan (23), (24) en (8).

We nemen aan dat de beginvoorwaarde i.h.a. als $t = 0, u = f(x)$ geschreven kan worden en dat $f(x)$ ontwikkeld kan worden in een reeks:

$$f[x] = A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + \dots \quad (27)$$

$$\text{met } X_n = \cos(\alpha_n x) + \frac{v}{\alpha} \sin(\alpha_n x) \quad (28)$$

dan is de oplossing van het probleem:

$$u = \sum_1^{\infty} A_n X_n \exp(-\alpha_n^2 t) \quad (29)$$

Als beide zijden van (27) worden vermenigvuldigd met X_n en vervolgens geïntegreerd van 0 tot 1 dan vindt men:

$$\int_0^1 f(x)X_n dx = A_n \int_0^1 X_n^2 dx$$

omdat bewezen kan worden Carslaw & Jaeger (1959 blz 116) dat:

$$\int_0^1 X_m X_n dx = 0, \text{ voor } m \neq n$$

De coëfficiënten A in (27) en (29) kunnen dus worden gevonden als:

$$A_n = \frac{\int_0^1 f(x)X_n dx}{\int_0^1 X_n^2 dx} \quad (30)$$

De waarde van de noemer in (30) moet gevonden worden. Dat gaat als volgt, omdat:

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2} = -\alpha_n^2 X_n,$$

is

$$\alpha_n^2 \int_0^1 X_n^2 dx = - \int_0^1 X_n \frac{d^2 X_n}{dx^2} dx = - \left[X_n \frac{dX_n}{dx} \right]_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{dX_n}{dx} \right)^2 dx \quad (31)$$

Bij de overgang van het tweede naar het derde lid is gebruik gemaakt van partiële integratie. Nu geldt (cf. de definitie in (28)):

$$\alpha_n X_n = \alpha_n \cos(\alpha_n x) + \nu \sin(\alpha_n x) \quad (32)$$

en

$$\frac{dX_n}{dx} = -\alpha_n \sin \alpha_n x + \nu \cos \alpha_n x \quad (33)$$

na kwadrateren en optellen van (32) en (33) volgt:

$$\alpha_n^2 X_n^2 + \left(\frac{dX_n}{dx} \right)^2 = \alpha_n^2 + \nu^2 \quad (34)$$

en dus ook:

$$\alpha_n^2 \int_0^1 X_n^2 + \int_0^1 \left(\frac{dX_n}{dx} \right)^2 dx = \int_0^1 \alpha_n^2 + \nu^2 dx = \alpha_n^2 + \nu^2 \quad (35)$$

Uit (31) volgt:

$$\alpha_n^2 \int_0^1 X_n^2 dx - \int_0^1 \left(\frac{dX_n}{dx} \right)^2 dx = - \left[X_n \frac{dX_n}{dx} \right]_0^1 \quad (36)$$

Optellen van (35) en (36) levert:

$$2\alpha_n^2 \int_0^1 X_n^2 dx = \alpha_n^2 + \nu^2 - \left[X_n \frac{dX_n}{dx} \right]_0^1$$

Omdat X_n aan de randvoorwaarden voldoet geldt (cf (24)):

$$x = 0, \quad \frac{dX_n}{dx} = \nu X_n, \quad \text{of} : X_n \frac{dX_n}{dx} = \nu X_n^2 \quad (37)$$

en

$$x = 1, \quad X_n = 0, \quad \text{of} X_n \frac{dX_n}{dx} = 0 \quad (38)$$

Uit (28) volgt dat voor $x = 0$, $X_n = 1$, en dientengevolge:

$$\left[X_n \frac{dX_n}{dx} \right]_0^1 = -\nu$$

en dus:

$$\int_0^1 X_n^2 dx = \frac{\alpha_n^2 + \nu^2 + \nu}{2\alpha_n^2}$$

Volgens (30) wordt de coëfficiënt dus gegeven door:

$$A_n = \frac{\int_0^1 f(x)X_n dx}{\int_0^1 X_n^2 dx} = \frac{2\alpha_n^2}{\alpha_n^2 + \nu^2 + \nu} \int_0^1 f(x)X_n dx$$

In ons geval is: $f(x) = e^{-\nu x}$ en dus:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)X_n dx &= \frac{2\alpha\nu - 2\alpha\nu e^{-\nu} \cos \alpha + (\alpha^2 - \nu^2)e^{-\nu} \sin \alpha}{\alpha(\alpha^2 + \nu^2)} = \\ &= \frac{2\alpha\nu + e^{-\nu} \sin \alpha (-2\alpha\nu \cot \alpha + (\alpha^2 - \nu^2))}{\alpha(\alpha^2 + \nu^2)} = \\ &= \frac{2\alpha\nu + e^{-\nu} \sin \alpha (2\nu^2 + (\alpha^2 - \nu^2))}{\alpha(\alpha^2 + \nu^2)} = \frac{2\nu}{(\alpha^2 + \nu^2)} + \frac{e^{-\nu} \sin \alpha}{\alpha} \end{aligned}$$

hierbij is gebruik gemaakt van (zie (26)): $\cot \alpha = -\nu / \alpha$. Dus uiteindelijk vindt men

$$A_n = \frac{2\alpha_n^2}{\alpha_n^2 + \nu^2 + \nu} \left(\frac{2\nu}{\alpha^2 + \nu^2} + \frac{e^{-\nu} \sin \alpha}{\alpha} \right) \quad (39)$$

en de gezochte oplossing wordt verkregen m.b.v. (22) en (29) als:

$$c = \exp(-\nu^2 t) \exp(\nu x) \sum_1^{\infty} A_n X_n \exp(-\alpha^2 t) \quad (40)$$

De totale hoeveelheid in het onbewortelde stuk aanwezig op gegeven tijdstip T wordt weer gegeven door

$$\begin{aligned} \int_0^{L-b} (K + \theta) C dX &= (K + \theta)(L - b) C_i \int_0^1 dx = (K + \theta)(L - b) C_i \exp(-\nu^2 t) \sum_1^{\infty} A_n \exp(-\alpha^2 t) \int_0^1 \exp(\nu x) X_n dx = \\ &= (K + \theta)(L - b) C_i \exp(-\nu^2 t) \exp(\nu) \sum_1^{\infty} A_n \exp(-\alpha^2 t) \frac{\sin \alpha}{\alpha} \end{aligned}$$

De fractie die in tijd t is binnengestroomd kan dus als in (16) gegeven worden door:

$$F = 1 - \exp(-\nu^2 t) \exp(\nu) \sum_1^{\infty} A_n \exp(-\alpha^2 t) \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (41)$$

Een noodzakelijke voorwaarde voor de juistheid van (41) is de eis dat deze moet overgaan in (16) voor $\nu = 0$, dat is het geval. Namelijk als $\nu = 0$, dan $X_n = \cos \alpha_n x$, waarbij a_n de n -de wortel is van $\cos \alpha_n = 0, n = 1, 2, 3, \dots$, d.w.z. $\alpha_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}$. De coëfficiënt A_n (zie (39)) wordt:

$$A_n = \frac{2 \sin \alpha}{\alpha}, \text{ nu is } \sin(2n-1)\frac{\pi}{2} = (-1)^{n+1} = -(-1)^n, \text{ zodat uiteindelijk}$$

$$A_n = \frac{-4}{\pi} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \text{ en dus inderdaad (16) wordt verkregen.}$$