THEORETISCHE EN NUMERIEKE BEHANDELING VAN ONTWATERINGS- EN INFILTRATIE-STROMINGSPROBLEMEN

1841644

VERSLAGEN VAN LANDBOUWKUNDIGE ONDERZOEKINGEN

BIJDRAGEN TOT DE KENNIS VAN ENIGE NATUURKUNDIGE GROOTHEDEN VAN DE GROND

CONTRIBUTIONS TO THE KNOWLEDGE OF SOME PHYSICAL PROPERTIES OF THE SOIL

No. 11

THEORETISCHE EN NUMERIEKE BEHANDELING VAN ONTWATERINGS- EN INFILTRATIE-STROMINGSPROBLEMEN

LANDBOUWPROEFSTATION BODEMKUNDIG INSTITUUT T.N.O.

MINISTERIE VAN LANDBOUW, VISSERIJ EN VOEDSELVOORZIENING

LANDBOUWPROEFSTATION EN BODEMKUNDIG INSTITUUT T.N.O.
GRONINGEN

THEORETISCHE EN NUMERIEKE BEHANDELING VAN ONTWATERINGS- EN INFILTRATIE-STROMINGSPROBLEMEN

THEORETICAL AND NUMERICAL TREATMENT OF FLOW PROBLEMS CONNECTED WITH DRAINAGE AND IRRIGATION

Dr J. J. VAN DEEMTER

STAATSDRUKKERIJ UITGEVERIJBEDRIJF

VERSL. LANDBOUWK. ONDERZ. No. 56.7 - 'S-GRAVENHAGE - 1950

WOORD VOORAF

Uit vroegere publicaties over de stroming van water in de bodem in verband met overlast of een tekort aan water (zie de nummers 6, 7 en gedeeltelijk 8 van de serie „Bijdragen tot de kennis van enige natuurkundige grootheden van de grond") blijkt een voortgaande ontwikkeling van het onderzoek met betrekking tot dit vraagstuk. Was het eerst alleen mogelijk berekeningen uit te voeren, voor het geval de stroming tot een horizontale vereenvoudigd kon worden, later werd ook het geval beschouwd, waarbij de ondoorlatende laag zich op elke willekeurige diepte onder de ontwaterings- of infiltratiesystemen bevindt. Bij deze oplossing moesten vereenvoudigingen worden ingevoerd, waarvan de te maken fout niet altijd was te overzien. Soms zou deze fout wellicht zelfs belangrijk kunnen zijn (anisotrope gronden). Afgezien daarvan waren vele stromingsgevallen niet oplosbaar.

Bij het voorgaande komt nog, dat een verstarring dreigde, doordat de gevolgde methodiek geen verruiming meer toelaat en bovendien de toepassingsmogelijkheden beperkt blijven. Deze methode komt in wezen neer op een vereenvoudiging van de optredende stroombaanvorm, zoals de vervorming tot een combinatie van een radiale en een rechtlijnig horizontale stroming resp. tot een combinatie van een horizontale en een verticale stroming e.d. Hierdoor worden eenvoudige differentiaalvergelijkingen verkregen, dan wel zijn oplossingen mogelijk door toepassing van de z.g. spiegelmethode.

Het was dan ook enerzijds nodig naar strengere mathematische oplossingen te zoeken, waarbij het aantal vereenvoudigingen zo klein mogelijk moest worden gehouden. Anderzijds moest ook de ontwikkeling van modelproeven voor onze doeleinden ter hand worden genomen. Hiervoor was het nodig een mathematisch georiënteerde physicus aan te stellen. Drs J. J. VAN DEEMTER, die deze taak op zich nam, heeft zich voornamelijk met de theoretische ontwikkeling van het onderzoek beziggehouden. Hij is er in geslaagd oplossingen te vinden voor ontwaterings- en infiltratiegevallen, waarbij homogeen isotroop doorlatende gronden aanwezig zijn en waarbij de ondoorlatende laag zo diep ligt, dat deze ten opzichte van de stroming naar de ontwaterings- resp. uit de infiltratiesystemen verwaarloosd kan worden. Ook voor gecombineerde stromingen, zoals b.v. gelijktijdige afvoer van overtollige neerslag en van kwel resp. gelijktijdige infiltratie en inzijging, zijn oplossingen gevonden.

Van nog groter belang zijn de mogelijkheden van de relaxatiemethode van SOUTHWELL, welke voor de hier van belang zijnde vraagstukken werd gewijzigd. Hiermede kunnen nu alle twee-dimensionale ontwaterings-, infiltratie- e.d. problemen worden opgelost, waarbij vereenvoudigingen practisch niet behoeven te worden aangebracht. Met name zijn daardoor ook oplossingen bij anisotrope gronden (bodemlagen met verschillende doorlatendheid) te verkrijgen.

Is met het voorgaande dus, naar het mij voorkomt, wederom een belangrijke stap vooruit gezet, niettemin zal modelonderzoek noodzakelijk blijven. De wenselijkheid daarvan wordt ook in deze publicatie naar voren gebracht. Dit is niet zo zeer nodig voor een verdere contrôle van de gemaakte berekeningen; deze laatste zullen eerder kunnen dienen om het model te toetsen op nauwkeurigheid. Wel zal wellicht met modelonderzoek veel sneller dan via berekeningen volgens SOUTHWELL de oplossing der gestelde problemen kunnen worden verkregen. Dit geldt vooral voor

die gevallen, waarbij er naar de ligging van het phreatische vlak of de benodigde drainafstand gevraagd wordt, aangezien deze alleen door proberen via de methode van SOUTHWELL zijn te verkrijgen. Modelonderzoek blijft dan ook noodzakelijk, waarbij vooral ook het belang hiervan voor demonstratiedoeleinden niet moet worden vergeten.

Behalve dit modelonderzoek zal verder vooral nog een studie gewijd moeten worden aan het opstellen van eenvoudige formules voor de berekening van drainafstanden enz., voor het geval men bij ontwatering met anisotrope doorlatende gronden, resp. met infiltratie te maken heeft. Uit deze publicatie zal namelijk blijken, dat de door mij ontwikkelde formules, welke alle tot een eenvoudige vorm werden omgevormd, in bepaalde gevallen te grote fouten geven en dan ook gecorrigeerd moeten worden. Deze correcties kunnen via de methode SOUTHWELL als het ware empirisch verkregen worden.

Aan het bovenstaande kan worden toegevoegd, dat de methode SOUTHWELL uiteraard ook voor kwel- en inzijgingsonderzoek met voordeel kan worden gebruikt, mits de stroming twee-dimensionaal blijft of hiertoe vereenvoudigd kan worden. Blijft men dan ook binnen deze twee-dimensionale stromingsgevallen, dan kan worden geconstateerd, dat mathematische moeilijkheden, welke vroeger de oplossing van stromingsvraagstukken belemmerden, practisch niet meer bestaan. De toepassingsmogelijkheden worden nu veel meer bepaald door de nauwkeurigheid, waarmede het gelukt de doorlatendheid van de grond en de verandering daarin met toenemende diepte onder het maaiveld vast te leggen. Het zal dan ook van belang zijn de methoden voor de bepaling van de doorlatendheid opnieuw te bestuderen en vooral naar mogelijkheden te zoeken voor die gevallen, waarin de boorgatmethode (zie No. 4 in deze serie) of een laboratoriummethode (zie No. 2 in deze serie) niet toegepast kan worden.

Drs L. F. ERNST werd na het vertrek van Drs J. J. VAN DEEMTER aangesteld om het genoemde modelonderzoek verder uit te werken en de hiervoor genoemde eenvoudige formules met behoud van een voldoende nauwkeurigheid op te stellen resp. de bepalingsmogelijkheden van de doorlatendheid van de grond uit te breiden.

Het is onze overtuiging, dat de geschetste ontwikkeling van het agrohydrologische onderzoek aan ons instituut er belangrijk toe zal kunnen bijdragen, allerlei problemen, welke bij een regionale regeling van waterregimes hier te lande naar voren komen, tot een oplossing te brengen.

Tenslotte wil ik besluiten met op te merken, dat het mij verheugd heeft, dat het werk van Drs J. J. VAN DEEMTER geleid heeft tot de samenstelling van een dissertatie. Dit lijkt mij een wel verdiende beloning voor de verrichte arbeid.

S. B. HOOGHOUDT,

Hoofdscheikundige aan het Landbouwproefstation en Bodemkundig Instituut T.N.O.

INHOUD

BLZ.

WOORD VOORAF V

INLEIDING 1

1. PROBLEEMSTELLING 3

2. MATHEMATISCHE FORMULERING VAN DE STATIONNAIRE TWEEDIMENSIONALE STROMING IN HOMOGEEN ISOTROOP DOORLATENDE GROND 4

2.1. De wet van DARCY 4

2.2. De randvoorwaarden 5

3. DE HODOGRAAFMETHODE 7

4. DRAINAGE EN INFILTRATIE DOOR MIDDEL VAN DRAINS 10

4.1. Probleemstelling 10

4.2. Drainage 11

4.21. Stromingsgebied en hodograaf 11
4.22. Oplossing van het randwaardeprobleem in het hodograafvlak 12
4.23. Uitvoering van de integratie 14
4.24. Vorm en hoogte van het phreatisch oppervlak 16
4.25. Vergelijking met de uitkomsten van HOOGHOUDT en CHILDS 20
4.26. De plaats van het oppervlak dat beide stromingen scheidt . 21
4.27. Appendix 23

4.3. Infiltratie 23

4.31. Stromingsgebied en hodograaf 23
4.32. Oplossing van het randwaardeprobleem in het hodograafvlak 24
4.33. De integratie 26
4.34. Het phreatisch oppervlak 27

4.4. Overzicht van de formules, die bruikbaar zijn in de practijk, en toepassing op enkele voorbeelden 28

5. ONTWATERING DOOR MIDDEL VAN SLOTEN 32

5.1. Probleemstelling 32

5.2. De watervrij gehouden sloot 32

5.21. Stromingsgebied en hodograaf 32
5.22. Oplossing van het randwaardeprobleem in het hodograafvlak 33
5.23. Integratie voor het geval de slootbreedte nul is 35

BLZ.

5.24. Integratie in het algemene geval 37
5.25. Integratie voor het geval de slootbreedte oneindig groot is . 40
5.26. Overzicht en vergelijking met de uitkomsten van HOOGHOUDT 41
5.27. Appendix. 43

5.3. Stroming naar een sloot met ondoorlatende zijwand 44

6. DE RELAXATIEMETHODE VAN SOUTHWELL 47

6.1. De differentievergelijking van LAPLACE 47

6.2. Het relaxatieproces 48

6.3. De verwerkelijking van de randvoorwaarden 52

6.4. Lagen met verschillende doorlatendheid 55

6.5. Uitgewerkte voorbeelden 57

7. NABESCHOUWING 65

SUMMARY 66

LITERATUUR 67

1

INLEIDING

Het belangrijkste grondwaterstromingsprobleem, waar de landbouw mee te maken heeft, is wel de vraag hoe door middel van sloten of drains de grondwaterstand geregeld kan worden. Enerzijds bestaat er behoefte om overtollig water, dat van regenval of kwel afkomstig is, via het ontwateringssysteem te verwijderen, anderzijds kan het nodig zijn om, in geval van sterke verdamping of wegzijging naar grote diepte, water te infiltreren.

De mathematische moeilijkheden, die zich bij dergelijke stromingsproblemen voordoen, zijn in het algemeen van dien aard, dat exacte oplossingen alleen bij een sterk vereenvoudigde probleemstelling gegeven kunnen worden. Een overzicht van de eerste pogingen in die richting kan men vinden bij RUSSELL (1934) en meer uitvoerig bij GUSTAFSSON (1946, pp. 90—96). HOOGHOUDT (1937) leidt formules af voor een bodemprofiel, dat opgebouwd is uit lagen van verschillende doorlatendheid, onder de aanname dat de stroming in al deze lagen horizontaal is. Deze onderstelling is alleen maar bij benadering gerechtvaardigd, wanneer zich op geringe diepte een ondoorlatende laag bevindt. In een latere publicatie (1940) behandelt HOOGHOUDT dan ook stromingsproblemen, waarbij de ondoorlatende laag zich op grotere diepte bevindt, door het stromingsgebied op te bouwen uit een gebied in de buurt van de drains of sloten, waar een radiale stroming heerst, en een gebied tussen de drains, waar de stroming horizontaal ondersteld wordt. De radiale stroming overweegt des te meer naarmate de ondoorlatende laag dieper ligt. De resultaten van de berekeningen zijn in uitvoerige tabellen samengevat.

De grote moeilijkheid van deze stromingsvraagstukken schuilt in het feit, dat een gedeelte van de begrenzing van het stromingsgebied, namelijk het phreatisch oppervlak, niet bekend is, maar als onderdeel van de oplossing gevonden moet worden. KIRKHAM (1939, 1940, 1941, 1945) omzeilt deze klip door alleen gevallen te beschouwen waarbij het land onder water staat. WEDERNIKOW (1939) is de eerste, die het probleem van de afvoer van regenwater naar drains in homogeen isotroop doorlatende grond exact formuleert. De afleiding van de oplossing is echter zeer onvolledig en onduidelijk en zeer waarschijnlijk onjuist. GUSTAFSSON (1946) geeft een uitvoeriger afleiding voor een grensgeval van hetzelfde probleem (zie daartoe 4.24 en CHILDS, 1947).

In de laatste jaren is het onderzoek aan modellen in het laboratorium naar voren gekomen. HOOGHOUDT (1937) verrichtte waarnemingen aan een groot zandtankmodel. HARDING en WOOD (1942) en GUSTAFSSON (1946) gebruikten kleine zandtankmodellen, die van glaswanden voorzien waren om de stroombanen zichtbaar te maken. CHILDS (1943, 1945, 1946, 1947) komt tot quantitatieve resultaten met electrische modelproeven. Een andere veelbelovende modelproef berust op de analogie tussen een tweedimensionale grondwaterstroming en de stroming van een visceuze

vloeistof tussen planparallelle glasplaten (GÜNTHER, 1940 en GUSTAFSSON, 1946).

Ons onderzoek is gericht op het zoeken van exacte oplossingen in het geval van homogene isotrope doorlatendheid en op het toepassen van moderne numerieke methoden (SOUTHWELL, 1946) op die gevallen, die niet exact opgelost kunnen worden. Bovendien zullen we de uitkomsten vergelijken met de vereenvoudigde methode van HOOGHOUDT en met de resultaten van de modelexperimenten van CHILDS.

Bij het toepassen in de practijk dient men te bedenken, dat bij het bepalen van de doorlaatfactor fouten van 25 % en meer gemaakt kunnen worden, zodat een fout van hoogstens 10 % in de gebruikte formules of methode van oplossen in het algemeen geen rol speelt.

1. PROBLEEMSTELLING

Een typisch probleem is weergegeven in figuur 1. Het ontwateringssysteem bestaat uit een oneindige reeks oneindig lange evenwijdige aequidistante sloten, die rechthoekig gedacht zijn. De waterspiegels in de sloten liggen in één horizontaal vlak. Wanneer bovendien alle andere condities in de lengterichting van de sloten (dus loodrecht op het vlak van tekening) uniform gedacht worden, hebben we te maken met een tweedimensionaal stromingsprobleem. We zullen ons verder beperken tot stationnaire stromingen. Weliswaar treden deze in werkelijkheid niet op, maar daar staat tegenover dat de stationnaire toestand bij constante regenval, kwel enz. in betrekkelijk korte tijd dicht wordt benaderd [1]. Bovendien mogen we verwachten dat de gemiddelde grondwaterstand over een tijdsverloop met behoorlijk constant weertype weinig zal verschillen van de stationnaire toestand, die behoort bij een constante toe- of afvoer, die het gemiddelde is over datzelfde tijdsverloop. De regenval N en de kwel L in figuur 1 worden derhalve constant naar de tijd ondersteld.

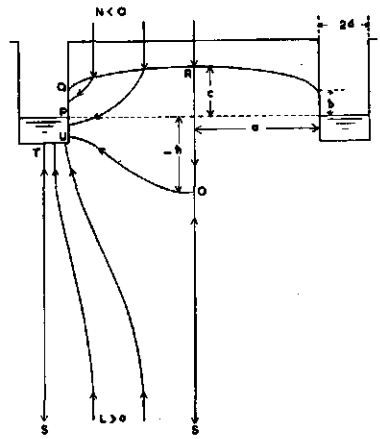

FIG. 1. Afvoer van overtollig water, afkomstig van regenval en kwel

Het is mathematisch een grote vereenvoudiging, wanneer we aannemen, dat de kwel van oneindig grote diepte afkomstig is, of, wanneer er geen kwel of wegzijging is, dat de ondoorlatende laag zich op oneindig grote diepte bevindt. Deze onderstelling houdt geen grote beperking in, want het zal blijken dat de invloed van de plaats van de ondoorlatende laag pas merkbaar wordt wanneer deze zich op geringe diepte bevindt.

De bodem wordt ondersteld homogeen en isotroop doorlatend te zijn. Meer algemeen zullen we gevallen beschouwen waarbij het bodemprofiel opgebouwd is uit horizontale lagen van verschillende doorlaatfactor, zoals in de practijk dikwijls zal voorkomen.

Uit symmetrie overwegingen kunnen we ons beperken tot het gebied PQRSTU. RO, SO en ST zijn dan stroomlijnen. Kwel en regen ontmoeten elkaar langs een gemeenschappelijke stroomlijn OU, die zich voor elk van deze stromingen gedraagt als een ondoorlatend oppervlak. De plaats daarvan zal natuurlijk afhankelijk zijn van de verhouding van neerslag en kwel.

Andere, maar soortgelijke, stromingsproblemen doen zich voor wanneer er andere combinaties van neerslag of verdamping, kwel of wegzijging optreden, of wanneer drains de plaats van sloten innemen.

[1] De orde van grootte is enkele uren tot enkele dagen volgens modelproeven van CHILDS (1947).

2. MATHEMATISCHE FORMULERING VAN DE STATIONNAIRE TWEEDIMENSIONALE STROMING IN HOMOGEEN ISOTROOP DOORLATENDE GROND

2.1. De wet van Darcy

De theorie van de grondwaterstroming berust op de bekende wet van Darcy, die leert dat de ondervonden wrijvingsweerstand evenredig is met de snelheid. Deze wet geldt, zolang de snelheden zó klein blijven, dat de traagheidskrachten ten opzichte van de wrijvingskrachten verwaarloosd kunnen worden. In de practijk is dit bijna altijd het geval. Bij de mathematische behandeling komen er echter in de buurt van singuliere punten zeer grote snelheden voor. Het zal achteraf blijken dat we deze singuliere punten in sommige gevallen uit het stromingsveld kunnen sluiten, en dat in andere gevallen zo'n singulier punt geen belangrijke rol kan spelen.

Bij een tweedimensionale stroming luidt de wet van Darcy (Dachler, 1936, p. 38; Muskat, 1937, § 4.1):

$$v_x = -K \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad v_y = -K \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{1}$$

$$\text{waarbij } K = \frac{k \varrho g}{\eta}$$

$$\text{en } \Phi = \frac{p}{\varrho g} + y \tag{2}$$

v_x en v_y zijn de componenten van de filtersnelheid in resp. de x-richting (horizontaal) en de y-richting (verticaal naar boven). De potentiaal Φ is slechts bepaald op een constante na. Dit biedt de mogelijkheid om de druk p te meten als overdruk boven de druk van de atmosfeer. De doorlatendheid of permeabiliteit k, met de dimensie [m²], hangt alleen af van de physische gesteldheid van de bodem. De doorlaatfactor K, met de dimensie [m/sec], hangt bovendien af van de dichtheid ϱ en de viscositeit η van het water. g is de versnelling van de zwaartekracht.

Bij de berekeningen zullen we de factor K opnemen in de potentiaal door een potentiaalfunctie

$$\varphi = K\Phi \tag{3}$$

in te voeren.

Uit de continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

die de onsamendrukbaarheid van het water tot uitdrukking brengt, volgt in verband met (1) dat de potentiaalfunctie voldoet aan de vergelijking van Laplace

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{4}$$

De krommen $\varphi\ (x, y) =$ constant worden aequipotentiaallijnen genoemd.

Ook de stroomfunctie $\psi(x, y)$, gedefinieerd door

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{5}$$

voldoet aan de vergelijking van LAPLACE

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \tag{6}$$

De stroomlijnen $\psi(x, y) =$ constant zijn orthogonale trajectoriën van de aequipotentiaallijnen.

φ en ψ kunnen als reëel en imaginair deel van een complexe functie, de complexe potentiaal, opgevat worden

$$\omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \qquad z = x + iy \tag{7}$$

Zo gezien is de potentiaaltheorie een onderdeel van de theorie der analytische functies (HURWITZ-COURANT, 1929, p. 335).

2.2. DE RANDVOORWAARDEN

Het oplossen van een potentiaaltheoretisch stromingsprobleem komt neer op het zoeken van een oplossing van de partiële differentiaalvergelijking (4) of (6), die voldoet aan de bijbehorende randvoorwaarden.

Bij grondwaterstromingsproblemen van de soort, die beschreven zijn onder 1, komen alleen de volgende vier randvoorwaarden in aanmerking:

1°. Langs een ondoorlatend gedeelte van de rand (of langs een stroomlijn) geldt

$$\psi = \text{constant} \qquad \text{of} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \tag{8}$$

$\left(\frac{\partial}{\partial n}\right.$ is de afgeleide in de richting loodrecht op de rand).

2°. Het stromingsveld wordt gedeeltelijk begrensd door stilstaand of slechts langzaam bewegend water (zoals bijv. langs de omtrek van een sloot). Wanneer h de hoogte van de waterspiegel boven de x-as voorstelt, is de druk in het water gelijk aan $p = \varrho g\,(h - y)$. Langs de begrenzing is derhalve volgens (2) en (3).

$$\varphi = Kh = \text{constant} \qquad \text{of} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \tag{9}$$

3°. Een kweloppervlak, d.w.z. een oppervlak waarlangs het grondwater van het stromingsveld rechtstreeks met de lucht van de atmosfeer in contact is en waardoor het naar buiten kan kwellen (bijv. het gedeelte PQ in figuur 1). Daarlangs is de druk $p = 0$ en derhalve

$$\varphi = Ky \tag{10}$$

Een hiermee aequivalente randvoorwaarde voor ψ kan in dit geval niet gegeven worden.

4°. Het phreatisch oppervlak. Ook daarlangs is $p = 0$ en

$$\varphi = Ky \tag{11}$$

Nu is wel degelijk een randvoorwaarde voor de stroomfunctie te geven, nl.

$$\psi = Nx + \text{constante} \tag{12}$$

Uit (5) volgt dat bij regenval N negatief is. — N is dan de regenval per tijdseenheid op een horizontale vlak, gemeten in m/sec (mm/etmaal)· In geval van verdamping is N positief. Wanneer $N = 0$ is het phreatisch oppervlak een stroomvlak.

De randvoorwaarden voor φ en ψ zijn in het vierde geval, in tegenstelling tot de drie andere gevallen, niet aequivalent. Dit houdt verband met het feit dat het phreatisch oppervlak als begrenzing niet vooraf gegeven is, maar als onderdeel van de oplossing gevonden moet worden.

Langs de grens tussen twee lagen van verschillende doorlatendheid tenslotte treden nog overgangsvoorwaarden op. Deze zullen later besproken worden.

3. DE HODOGRAAFMETHODE

In het algemeen falen de orthodoxe methoden van de potentiaaltheorie bij grondwaterstromingsproblemen met phreatisch oppervlak, omdat daarbij steeds uitgegaan wordt van vaste begrenzingen.

HELMHOLTZ (1868) is de eerste die de oplossing geeft van een tweedimensionaal stromingsprobleem, waarbij de rand gedeeltelijk uit vaste wanden bestaat en verder gevormd wordt door oppervlakken van constante druk (vrije vloeistofstralen). KIRCHHOFF (1869) heeft sindsdien een algemene methode uitgewerkt, die in enigszins gewijzigde vorm later door HAMEL (1933) voor het eerst op grondwaterstromingsvraagstukken is toegepast. Met deze z.g. hodograafmethode bleek het in vele gevallen mogelijk om analytische oplossingen te vinden (MUSKAT, 1937; DACHLER, 1936). Een overzicht van grafische methoden, die daarbij gebruikt kunnen worden, vindt men bij BREITENÖDER (1942). ROSSBACH (1941) geeft oplossingen voor twee problemen die enige overeenkomst met de door ons gestelde vertonen, nl. de stroming naar één drain of naar één sloot in een oneindig groot stromingsgebied met een phreatisch oppervlak; de aanvoer van water is daarbij niet afkomstig van neerslag of kwel maar van een in het oneindige gedachte bron. Na enige aanvullingen bleek dan ook de behandeling volgens ROSSBACH bij onze probleemstelling bruikbaar. GUSTAFSSON (1946) geeft een particuliere oplossing van het drainageprobleem met regenval (zie daartoe 4.24).

We zullen nu de hodograafmethode mathematisch formuleren. Laat de stroming plaats vinden in het complexe z-vlak ($z = x + iy$). Naast de complexe potentiaal $\omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ voeren we in de complexe snelheid

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y) = -\frac{d\omega}{dz} \tag{13}$$

nu is wegens (5) en (7)

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -v_x + iv_y$$

zodat

$$u = v_x \quad \text{en} \quad v = -v_y \tag{14}$$

Het reële en het imaginaire deel van de complexe snelheid zijn derhalve resp. gelijk aan de x-component van de snelheid en het tegengestelde van de y-component.

De functie $\omega(z)$ is, op eventuele singuliere punten na, analytisch in het stromingsgebied van het z-vlak. $w(z) = -d\omega/dz$ is derhalve ook analytisch in dat gebied. De functie $w(z)$ beeldt het stromingsgebied conform af op een gebied dat over het w-vlak ligt uitgespreid en dat wegens (14) samenvalt met het spiegelbeeld van de hodograaf t.o.v. de v_y-as [1].

We gaan nu na wat we weten van de vorm van het gebied bestaande uit de gespiegelde hodograaf. Daartoe moeten we weten hoe de rand van het stromingsgebied afgebeeld wordt.

[1] De hodograaf is nl. de verzameling van de eindpunten van de snelheidsvectoren (v_x, v_y), wanneer deze uitgezet worden van de oorsprong.

1°. Een stroomlijn. De coördinaat langs de stroomlijn zij s; de hoek tussen stroomlijn en x-as zij $\alpha(s)$. Dan geldt

$$v_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial s} \cos \alpha$$

$$v_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial s} \sin \alpha$$

hieruit volgt in verband met (14)

$$\frac{v}{u} = -\operatorname{tg} \alpha$$

Wanneer derhalve α constant is naar s, is de hodograaf van de stroomlijn een rechte lijn door de oorsprong evenwijdig aan die stroomlijn.

2°. Een aequipotentiaallijn. Op analoge wijze vinden we hier

$$\frac{v}{u} = \operatorname{cotg} \alpha$$

Bij constante α is de afbeelding dus een rechte lijn door de oorsprong loodrecht op de aequipotentiaallijn.

3°. Een kweloppervlak. Zij weer s de coordinaat langs de rand en α de hoek met de x-as. Differentiëren van de randvoorwaarde (10) naar s geeft

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = K\frac{dy}{ds}$$

of

$$-u \cos \alpha + v \sin \alpha = K \sin \alpha$$

Bij constante α is dit de vergelijking van een rechte lijn door het punt $u = 0$, $v = K$ loodrecht op de kwellijn.

4°. Het phreatisch oppervlak. Differentiëren naar s van de randvoorwaarden (11) en (12) levert de vergelijkingen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = K\frac{dy}{ds}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = N\frac{dx}{ds}$$

of

$$-u \cos \alpha + v \sin \alpha = K \sin \alpha$$

$$-v \cos \alpha - u \sin \alpha = N \cos \alpha$$

dus

(15) $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{u}{K - v} = \frac{N + v}{u}$$

en

(16) $$u^2 + [v - \tfrac{1}{2}(K - N)]^2 = \tfrac{1}{4}(K + N)^2$$

Dit is de vergelijking van een cirkel met straal $= \frac{1}{2}(K + N)$ en middelpunt $u = 0$, $v = \frac{1}{2}(K - N)$. De hodograaf [1] van het phreatisch oppervlak moet op deze cirkel liggen.

Uit het bovenstaande volgt dat de hodograaf van de rand van het stromingsgebied bekend is, wanneer de begrenzende stroom-, aequipotentiaal- en kwellijnen rechtlijning zijn. Bij het zoeken naar analytische oplossingen zullen we ons dan ook tot dergelijke problemen beperken.

De hodograaf van het stromingsgebied PQRSTU van figuur 1 vindt men in figuur 2. Het is noodzakelijk om in de punten P en U de snelheid oneindig groot te onderstellen, omdat anders de begrenzing van de hodograaf niet gesloten zou zijn. Op oneindige diepte is de snelheid rechtlijnig verticaal en gelijk aan de kwel L. CHILDS (1945, p. 322) toont aan dat de slootwand PQ in Q raakvlak is aan het phreatisch oppervlak. Daaruit kan men afleiden (zie 4.24 en 5.21) dat het phreatisch oppervlak in dit geval afgebeeld wordt op een halve cirkel.

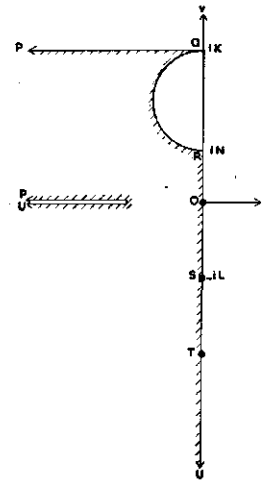

FIG. 2.
Hodograaf van het gebied PQRSTUP in fig. 1

Het probleem is opgelost wanneer we de complexe potentiaal ω kennen als functie van z. Nu is echter tengevolge van de substitutie $w = w(z)$ ω ook een analytische functie van w. Aangezien in het w-vlak de begrenzing bekend is, kunnen we proberen het randwaardeprobleem voor ω in het w-vlak met bekende functietheoretische hulpmiddelen op te lossen. Wanneer dit lukt, vinden we ω als functie van w en daarmee ω als functie van $d\omega/dz$, d.w.z. het probleem is gereduceerd tot een differentiaalvergelijking voor ω als functie van z.

Voor negatieve waarden van N (bij regenval) kan de straal van de cirkel (16) nul worden, nl. wanneer $N = -K$. Dit zou betekenen dat het phreatisch oppervlak tot één enkel punt gereduceerd wordt. De physische betekenis hiervan is blijkbaar dat bij een toenemende hoeveelheid neerslag het phreatisch oppervlak gaat stijgen tot het maaiveld en dat bij verder toenemende regenval een steeds groter gedeelte het maaiveld bereikt en daarbij overgaat in een aequipotentiaalvlak. In het grensgeval $N = -K$ heeft tenslotte het punt Q (fig. 1) het maaiveld bereikt, d.w.z. het gehele maaiveld is aequipotentiaalvlak geworden. Dit verschijnsel is onafhankelijk van de plaats van het maaiveld t.o.v. de drains. Voor waarden $K + N \leqq 0$ bestaat het phreatische oppervlak niet meer. Meer exact volgt deze conclusie uit de formules (36) en (38) die in 4.24 afgeleid worden. We zullen derhalve onderstellen dat

$$K + N > 0 \tag{17}$$

[1] I.p.v. de „gespiegelde hodograaf" spreken we in het vervolg kortweg van de „hodograaf".

4. DRAINAGE EN INFILTRATIE DOOR MIDDEL VAN DRAINS

4.1. Probleemstelling

Beschouwen we alle mogelijke combinaties van regenval ($N < 0$), verdamping ($N > 0$), kwel ($L > 0$) en wegzijging ($L < 0$) en maken we bovendien nog onderscheid tussen drainage en infiltratie, dan blijken er niet meer dan zes gevallen mogelijk te zijn. Deze zijn schematisch weergegeven in figuur 3. We zien dat de drainage zich van de infiltratie onderscheidt door het teken van de grootheid $L—N$. In figuur 3^{I}, 3^{II} en 3^{III} is nl. $L—N > 0$ en in figuur 3^{IV}, 3^{V} en 3^{VI} is $L—N < 0$. Verder zal bij drainage het laagste punt van het phreatisch oppervlak zich recht boven de drains bevinden, terwijl dit punt bij infiltratie midden tussen de drains te vinden zal zijn.

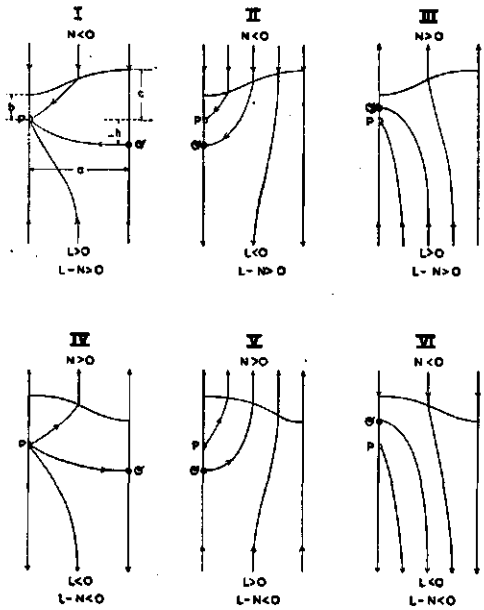

Fig. 3. Drainage I, II, III en infiltratie IV, V, VI

De zes gevallen kunnen ook paarsgewijs onderscheiden worden naar de plaats van punt O, waar twee stromingen van tegengestelde richting elkaar ontmoeten of zich van elkaar verwijderen. In O is de snelheid nul. In de hodograaf zal O dus steeds met de oorsprong samenvallen.

We zullen onderstellen dat we de drains mogen vervangen door lijnvormige putten of bronnen. Dit houdt in dat de randvoorwaarden langs de drainomtrek identiek moeten zijn met de condities langs eenzelfde kromme in het vervangingsstromingsveld. Hieraan is bijv. nagenoeg voldaan wanneer de relatieve draindiameter klein is en de drains geheel met water gevuld zijn, zodat de drainomtrek een aequipotentiaallijn is. Echter ook wanneer de drains niet geheel met water gevuld zijn, zullen we aan deze eis bij benadering kunnen voldoen door de put of bron niet precies in het middelpunt van de drain te plaatsen, maar bijv. een kleine afstand lager. Het zal derhalve ook mogelijk zijn om de stroming naar- en van relatief kleine sloten op deze manier te beschrijven. Bij relatief grote drains (en sloten) kunnen de fouten, die een dergelijke middeling over de randvoorwaarden langs de omtrek geeft, te groot worden. Alleen een meer uitvoerige specificatie van deze randvoorwaarden kan dan betere oplossingen geven. Problemen van deze soort zijn behandeld in 5.2 en 5.3. Wanneer de drains geplaatst zijn in sleuven van grote doorlatendheid kunnen we ze beschouwen als sloten.

De grond wordt homogeen en isotroop doorlatend ondersteld.

4.2. Drainage

4.21. *Stromingsgebied en hodograaf*

De gevallen I, II en III kunnen, zoals uit het vervolg zal blijken, in één keer behandeld worden. Om de gedachte te bepalen zullen we ons, wat de figuren betreft, beperken tot geval I.

Het stromingsgebied is nog eens weergegeven in figuur 4. De oorsprong van het coördinatenstelsel plaatsen we in de puntvormige put die de drain vervangt. De afstand van de drainmiddelpunten zij $2a$. b is de hoogte van het phreatisch oppervlak loodrecht boven de drains, c is de hoogte midden tussen de drains, zodat $z_Q = ib$ en $z_R = a + ic$.

Wat het verloop van het phreatisch oppervlak betreft zullen we onderstellen dat de kromme QR hoogstens één buigpunt Q′ bezit. Dat dit geen beperking is wordt in 4.27 aangetoond.

De randvoorwaarden kunnen in verband met 2.2 nu gemakkelijk aangegeven worden

langs PQ: $\psi = 0$

langs QR: $\begin{cases} \varphi = Ky \\ \psi = Nx \end{cases}$

langs RS: $\psi = Na$

langs SP: $\psi = (N-L)a$

Omdat op oneindige diepte de snelheid gelijk is aan L, moet φ daar asymptotisch gelijk zijn aan $-Ly$. In P tenslotte is $\varphi = -\infty$.

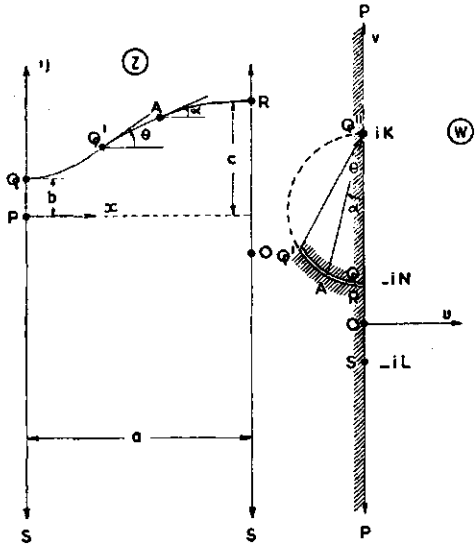

Fig. 4. Het stromingsgebied

Fig. 5. De hodograaf

De afbeelding $w = -d\omega/dz$ geeft de hodograaf (fig. 5). Uit (15) volgt dat we de hoek α tussen de raaklijn aan het phreatische oppervlak en de x-as terugvinden in de hodograaf als de hoek tussen Q″A en de v-as. De raaklijnen aan het phreatisch oppervlak bij Q en R moeten derhalve horizontaal zijn. Alleen wanneer het buigpunt Q′ samenvalt met Q is de raaklijn in Q niet horizontaal, maar zelfs verticaal, omdat in de hodograaf dan noodzakelijk Q en Q′ met Q″ moeten samenvallen (zie fig. 11 en 12).

Wanneer θ de hoek bij het buigpunt is, dan is θ dus gelijk aan de hoek tussen Q″Q′ en de v-as. Daaruit volgt

$$w_{Q'} = -\frac{K+N}{2}\sin 2\,\theta - i\,\frac{K+N}{2}\cos 2\,\theta + i\,\frac{K-N}{2}$$

verder is $\qquad w_Q = w_R = -iN;\ w_{Q''} = iK;\ w_S = -iL$

We merken nog op dat in de gevallen II en III het punt O resp. beneden S en tussen Q en Q″ ligt.

Voor alle drie gevallen geldt

(18) $\qquad L-N > 0$

4.22. *Oplossing van het randwaardeprobleem in het hodograafvlak*

De stroomfunctie ψ is gegeven langs de gehele rand van de hodograaf. Echter langs QQ'R alleen in de vorm $\psi = Nx$ en niet expliciet als functie van u en v. We voeren daarom in de functie

$$\Omega = \omega - iNz = \varphi + Ny + i(\psi - Nx) \tag{19}$$

Deze functie heeft de randvoorwaarden

$$\begin{aligned} &\text{langs PQ:} \quad \Omega = \varphi + Ny \\ &\text{langs QR:} \quad \Omega = (K + N)y \\ &\text{langs RS:} \quad \Omega = \varphi + Ny \\ &\text{langs SP:} \quad \Omega = \varphi + Ny + i(N - L)a \end{aligned}$$

Het imaginaire deel van Ω neemt dus alleen constante waarden aan langs de rand. Het randwaardeprobleem in het w-vlak voor de functie Ω zouden we dus nu kunnen oplossen door eerst de hodograaf op het binnengebied van een cirkel af te beelden (dit is altijd mogelijk; HURWITZ-COURANT, 1929, p. 390) en vervolgens de stelling van POISSON te gebruiken (ibidem, p. 326). Het probleem is echter ook opgelost wanneer we de functie Ω (w) gevonden hebben die het gebied in het Ω-vlak, dat bij het stromingsgebied hoort, afbeeldt op de hodograaf. Deze weg is in ons geval eenvoudig omdat uit de randwaarden van Ω volgt dat $\Omega(z)$ het stromingsgebied afbeeldt op een oneindig lange strook tussen $\Omega = 0$ en $\Omega = -ia\,(L-N)$. In P (fig. 6) is $\Omega_P = -\infty$ en $-\infty - i\,(L-N)a$; in S is $\varphi = -Ly$, dus $\Omega_S = +\infty$ en $+\infty - i\,(L-N)a$; verder is $\Omega_Q = (K + N)b$ en $\Omega_R = (K + N)c$.

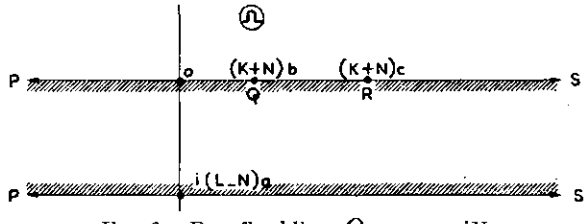

FIG. 6. De afbeelding $\Omega = \omega - iNz$

De afbeelding van deze strook op hodograaf geschiedt in vier stappen:

1°. Afbeelding van de strook in het Ω-vlak op de bovenhelft van het η-vlak door

$$\eta = \exp \frac{-\pi\,\Omega}{a\,(L-N)} \tag{20}$$

Bedenkend dat $L-N > 0$ zien we dat $\eta_S = 0$ en $\eta_P = \pm\infty$. Verder is (fig. 7)

$$\eta_Q = \exp\left(-\pi \frac{b}{a}\gamma\right) \qquad \text{en} \qquad \eta_R = \exp\left(-\pi\,\frac{c}{a}\gamma\right)$$

waarbij volgens (17) en (18)

$$\gamma = \frac{K + N}{L - N} > 0 \tag{21}$$

2°. De hodograaf kunnen we afbeelden op een gebied, dat uitsluitend door rechte lijnen begrensd is, door

$$\zeta = \frac{K+N}{-N+iw} \tag{22}$$

Het blijkt dat $\zeta_P = 0$;
$\zeta_Q = -\infty, +i\infty$;
$\zeta_R = +i\infty, +\infty$;
$\zeta_{Q'} = -1 + i \cot\theta$;
$\zeta_{Q''} = -1$; $\zeta_S = \gamma$;
$\zeta_O = \dfrac{K+N}{-N}$ (fig. 8).

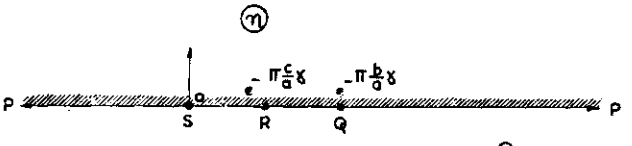

FIG. 7. De afbeelding $\eta = \exp \dfrac{-\pi\Omega}{a(L-N)}$

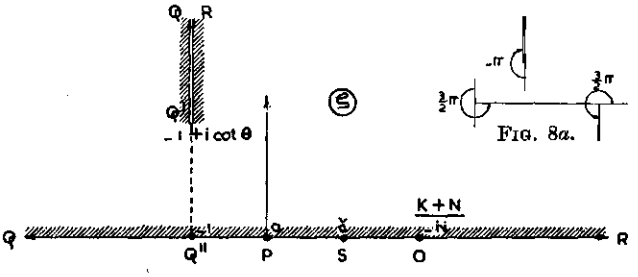

FIG. 8a.

FIG. 8. De afbeelding $\zeta = \dfrac{K+N}{-N+iw}$

3°. Met behulp van een transformatie van SCHWARZ-CHRISTOFFEL (HURWITZ-COURANT, 1929, p. 423) van de vorm (fig. 8a)

$$\zeta = \text{constante.} \int \frac{d\sigma}{(\sigma-\sigma_Q)^{3/2}(\sigma-\sigma_{Q'})^{-1}(\sigma-\sigma_R)^{3/2}}$$

wordt deze veelhoek afgebeeld op de bovenhelft van het σ-vlak (fig. 9). We kiezen $\sigma_Q = 0$; $\sigma_{Q'} = -1$; $\sigma_R = \pm\infty$; de factor waarin σ_R voorkomt moet dan in de integrand worden weggelaten. Dan wordt

$$\zeta = A \int \frac{\sigma+1}{\sigma\sqrt{\sigma}}\, d\sigma = 2A\frac{\sigma-1}{\sqrt{\sigma}} + B$$

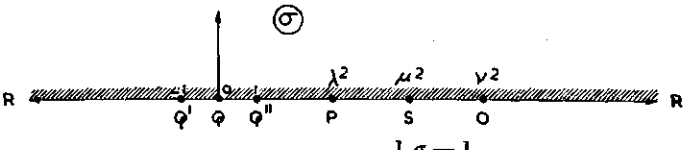

FIG. 9. De afbeelding $\zeta = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sigma-1}{\sqrt{\sigma}} \cot\theta - 1$

We kiezen die tak van $\sqrt{\sigma}$ waarvoor $\sqrt{\sigma} > 0$ als $\sigma > 0$ is. Uit de keuze van σ_Q, $\sigma_{Q'}$ en σ_R volgt dat de reële as in het ζ-vlak wordt afgebeeld op de positieve reële as van het σ-vlak. Daaruit volgt dat voor $d\sigma > 0$ en $\sigma > 0$ ook $d\zeta > 0$ is. A moet derhalve reëel zijn. Verder is voor $\sigma = 1$ $B = \zeta$. B is dus ook reëel. Nu is

$$\zeta_{Q'} = -1 + i \cot\theta = 4Ai + B$$

daarom $\quad A = \frac{1}{4}\cot\theta \quad$ en $\quad B = -1$

De afbeeldende functie is dus

$$\zeta = \tfrac{1}{2}\frac{\sigma-1}{\sqrt{\sigma}} \cot\theta - 1 \tag{23}$$

We zien direct dat $\sigma_{Q''} = 1$. Zij nu $\sigma_P = \lambda^2$; $\sigma_S = \mu^2$ en $\sigma_O = \nu^2$ dan volgt uit (23) dat

$$\frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} = \operatorname{tg}\theta \tag{24}$$

$$\frac{\mu^2 - 1}{2\mu} = (1 + \gamma)\operatorname{tg}\theta = \frac{K + L}{L - N}\operatorname{tg}\theta \tag{25}$$

$$\frac{\nu^2 - 1}{2\nu} = -\frac{K}{N}\operatorname{tg}\theta \tag{26}$$

Omdat $\gamma > 0$ is $\mu > \lambda$.

4°. De laatste stap is de afbeelding van de bovenhelft van het η-vlak op de bovenhelft van het σ-vlak. Dit moet noodzakelijk gebeuren door een gebroken lineaire transformatie die we direct kunnen geven

$$\eta = \frac{\sigma - \mu^2}{\sigma - \lambda^2}\exp\left(-\pi\gamma\frac{c}{a}\right) \tag{27}$$

Hieruit volgt nog dat

$$\frac{\mu^2}{\lambda^2}\exp\left(-\pi\gamma\frac{c}{a}\right) = \exp\left(-\pi\gamma\frac{b}{a}\right)$$

of

$$1 + \beta = \frac{\mu}{\lambda} = \exp\pi\gamma\frac{c - b}{2a} > 1 \tag{28}$$

zodat $c > b$ overeenkomstig de verwachting.

Door (20), (22), (23) en (27) is Ω gegeven als functie van w en daarmee volgens (19) ω als functie van z en $w = d\omega/dz$, d.w.z. de differentiaalvergelijking voor $\omega(z)$ is nu gevonden.

4.23. *Uitvoering van de integratie*

Als integratieparameter voeren we in

$$t = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\sigma} \tag{29}$$

Door (29) wordt de bovenhelft van het σ-vlak afgebeeld op het eerste kwadrant van het t-vlak en wel zó, dat $t_R = \infty$, $i\infty$; $t_{Q'} = i/\lambda$; $t_Q = 0$; $t_{Q''} = 1/\lambda$; $t_P = 1$; $t_S = \mu/\lambda = 1 + \beta$; $t_O = \nu/\lambda$ (fig. 10). We zien dat het phreatisch oppervlak is afgebeeld op de positieve imaginaire as terwijl de rest van de begrenzing van het stromingsveld afgebeeld is op de positieve reële as.

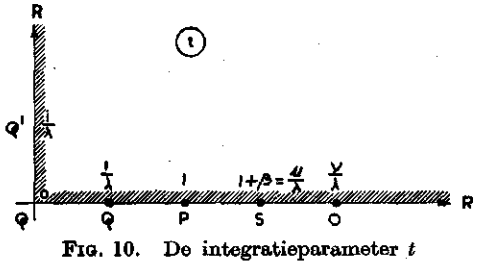

FIG. 10. De integratieparameter t

Uit (20), (21) en (27) volgt dat

(30) $$\Omega = (K + N)c - \frac{a}{\pi}(L - N) \ln \frac{t^2 - \frac{\mu^2}{\lambda^2}}{t^2 - 1}$$

en

(31) $$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{2a}{\pi}(L - N)(\beta^2 - 1) \frac{t}{\left(t^2 - \frac{\mu^2}{\lambda^2}\right)(t^2 - 1)}$$

Uit (13), (19) en (22) volgt

$$d\Omega = d\omega - iNdz = i\frac{K + N}{\zeta} dz$$

of, in verband met (23)

$$i\ (K + N)\ dz = \left(\frac{\lambda^2 t^2 - 1}{2\lambda t} \cot\theta - 1\right) d\Omega$$

zodat we wegens (31) voor z als functie van t de volgende differentiaalvergelijking vinden

(32) $$i\,(K + N)dz = -d\Omega - \frac{a \cot\theta}{\pi\lambda}(L - N)\left(\frac{\mu^2}{\lambda^2} - 1\right) \frac{\lambda^2\ t^2 - 1}{\left(t^2 - \frac{\mu^2}{\lambda^2}\right)(t^2 - 1)}\ dt$$

Deze vergelijking kan elementair geintegreerd worden. Gebruik makend van (24), (25) en (30) vinden we

$$i\,(K + N)z = -(K + N)\,c + \frac{a}{\pi}(L - N)\left(\ln \frac{t^2 - \frac{\mu^2}{\lambda^2}}{t^2 - 1} + \ln \frac{t - 1}{t + 1}\right) +$$

$$+ \frac{a}{\pi}(K + L) \ln \frac{t + \frac{\mu}{\lambda}}{t - \frac{\mu}{\lambda}} + \text{constante}$$

Nu moet voor $t = t_R = \infty$ $z_R = a + ic$ zijn. Daaruit volgt dat de integratieconstante gelijk is aan $i\,(K + N)a$. Na enige herleidingen krijgen we zo

(33) $$z = a + ic + i\frac{a}{\pi}\left(\ln \frac{t - 1 - \beta}{t + 1 + \beta} + \frac{2}{\gamma} \ln \frac{t + 1}{t + 1 + \beta}\right)$$

waarbij volgens (21)

$$\gamma = \frac{K + N}{L - N} > 0$$

en volgens (28)

$$1 + \beta = \frac{\mu}{\lambda} > 1$$

Ter controle kunnen we $t = t_Q = 0$ en $t = t_S = 1 + \beta$ substitueren. Dit geeft overeenkomstig de onderstellingen resp. $z = ib$ en $z = -i\infty$, $a - i\,\infty$.

Door (19), (30) en (33) is nu ook de complexe potentiaal ω gegeven als functie van t en daarmee als functie van z. We vinden

$$\omega = Kc + iNa + \frac{a}{\pi}\Big\{(L-N)\ln(t-1) - L\ln(t-1-\beta) + N\ln(t+1+\beta) + \tag{34}$$
$$+ (L-N)\frac{K-N}{K+N}\ln\frac{t+1}{t+1+\beta}\Big\}$$

als $t = t_P = 1$ dan is $\varphi = -\infty$;
als $t = t_Q = 0$ dan is $\varphi = Kb$ en $\psi = 0$;
als $t = t_R = \infty$ dan is $\varphi = Kc$ en $\psi = Na$.

Dit is in overeenstemming met de randvoorwaarden.

In de oplossing (33), (34) treedt nog de onbepaalde constante β op. Alleen de grenzen waartussen β moet liggen zijn bekend. Uit (24), (25) en (28) volgt nl. dat

$$0 < \beta \leqq \gamma \tag{35}$$

Physisch hangt dit onbepaald zijn samen met het feit, dat we nog geen rekening gehouden hebben met de condities in de drain. Mathematisch is het blijkbaar voldoende dat in één punt van het stromingsveld (niet op het phreatisch oppervlak gelegen) de complexe potentiaal ω gegeven is. Met (33) en (34) kan dan immers β berekend worden. We komen hierop in 4.24 terug.

4.24. *Vorm en hoogte van het phreatisch oppervlak*

We hebben gezien dat langs het phreatisch oppervlak t zuiver imaginair is. Om de vergelijking van het phreatisch oppervlak te vinden stellen we derhalve in (33) $t = is$ (s reëel)

$$z = a + ic + i\frac{a}{\pi}\left(\ln\frac{is-1-\beta}{is+1+\beta} + \frac{2}{\gamma}\ln\frac{is+1}{is+1+\beta}\right)$$

nu is

$$\ln(is-1-\beta) = \tfrac{1}{2}\ln[s^2+(1+\beta)^2] + \pi i - i\,\mathrm{arctg}\,\frac{s}{1+\beta}$$

$$\ln(is+1+\beta) = \tfrac{1}{2}\ln[s^2+(1+\beta)^2] + i\,\mathrm{arctg}\,\frac{s}{1+\beta}$$

$$\ln(is+1) = \tfrac{1}{2}\ln(s^2+1) + i\,\mathrm{arctg}\,s$$

zodat

$$z = x + iy = \frac{2a}{\pi}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\,\mathrm{arctg}\,\frac{s}{1+\beta} - \frac{1}{\gamma}\,\mathrm{arctg}\,s\right) + ic + \frac{ia}{\pi\gamma}\ln\frac{s^2+1}{s^2+(1+\beta)^2}$$

en

$$\frac{x}{a} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1+\gamma}{\gamma}\,\mathrm{arctg}\,\frac{s}{1+\beta} - \frac{1}{\gamma}\,\mathrm{arctg}\,s\right) \tag{35}$$

$$\frac{y}{a} = \frac{c}{a} + \frac{1}{\pi\gamma}\ln\frac{s^2+1}{s^2+(1+\beta)^2}$$

s doorloopt de waarden 0 tot ∞. $s = 0$ geeft $x = 0$, $y = b$ en $s = \infty$ geeft $x = a$, $y = c$.

Om een formule af te leiden voor de hoogte c van het phreatisch oppervlak midden tussen de drains substitueren we $t = t_P = 1$ in (33). De bijbehorende waarde van z is gelijk aan nul, zodat we krijgen

$$\pi \frac{c}{a} = \ln\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) + \frac{2}{\gamma} \ln\left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \tag{36}$$

hieruit volgt wegens (28)

$$\pi \frac{b}{a} = \ln\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) + \frac{2}{\gamma} \ln \frac{1 + \frac{1}{2}\beta}{1 + \beta} \tag{37}$$

Om een eerste idee te krijgen over de rol, die de nog onbepaalde grootheid β speelt, is tabel 1 opgenomen. Daarin vindt men tevens tg θ, die blijkens (24), (25) en (28) een eenwaardige functie van β is. We zien dat lage waarden van β overeenkomen met hoge waterstanden en omgekeerd (onder overigens gelijkblijvende omstandigheden).

TABEL 1. De invloed van de grootheid β

$1 + \gamma$	tg θ	$1 + \beta$	c/a	b/a
100	∞	100,0	0,0316	0,0020
100	10	99,7	0,0316	0,0020
100	1	82,8	0,0317	0,0033
100	0,5	61,8	0,0325	0,0060
100	0,2	32,8	0,0376	0,0152
100	0,1	18,14	0,0496	0,0310
100	0,05	9,61	0,0772	0,0627
10	∞	10,00	0,1845	0,0116
10	10	9,97	0,1845	0,0118
10	1	8,30	0,1858	0,0361
10	0,5	6,24	0,1939	0,0644
10	0,2	3,47	0,246	0,158
10	0,1	2,18	0,348	0,293
10	0,05	1,54	0,504	0,474

Een lagere waterstand dan die, welke overeenkomt met $\beta = \gamma$, is blijkbaar niet mogelijk. Wanneer we echter β tot 0 laten naderen worden blijkens (36) en (37) b en c beide $+\infty$. Het volgende voorbeeld zal toelichten hoe we, althans in principe, de waarde van β kunnen berekenen uit de druk in de drain. Stel dat de drainomtrek samenvalt met de aequipotentiaallijn $\varphi = \varphi_0$ en dat het punt $z_0 = -ir_0$ op de drainomtrek ligt (voor niet te grote r_0 zal r_0 dan nagenoeg gelijk zijn aan de straal van de drain). Bij het punt z_0 van het stromingsveld hoort een punt $t_0 = 1 + \delta < 1 + \beta$ op PS (fig. 10). Het verband tussen r_0 en δ kunnen we vinden met behulp van (33)

$$\pi \frac{r_0}{a} = \ln \frac{\beta}{\beta - \delta} + \frac{2 + \gamma}{\gamma} \ln \frac{2 + \beta + \delta}{2 + \beta} - \frac{2}{\gamma} \ln\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)$$

Uit (34) volgt

$$\varphi_0 = Kc + \frac{a}{\pi}\left[(L-N)\ln\delta - L\ln(\beta-\delta) + N\ln(2+\beta+\delta) + \right.$$
$$\left. + (L-N)\frac{K-N}{K+N}\ln\frac{2+\delta}{2+\beta+\delta}\right]$$

Als nu p_0 de druk en $h_0 = p_0/\varrho g$ de drukhoogte in de drain is dan volgt uit (2) en (3)

$$\varphi_0 = K\left(\frac{p_0}{\varrho g} - r_0\right) = K(h_0 - r_0)$$

We kiezen $L = 0$ en $\gamma = \frac{K+N}{-N} = 9$. Met behulp van bovenstaande drie formules en (36) kan dan onderstaand tabelletje berekend worden

$\pi\frac{r_0}{a}$	β	$\frac{h_0}{a}$	δ
0,0128	9	—0,019 [1]	0,10
0,0128	4	0,031	0,028

We kunnen derhalve concluderen dat β (onder overigens dezelfde condities) een maat is voor de druk in de drain. Op soortgelijke manier kan men laten zien

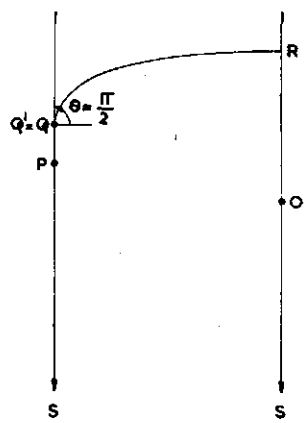

Fig. 11. Stromingsgebied in het grensgeval $\beta = \gamma$

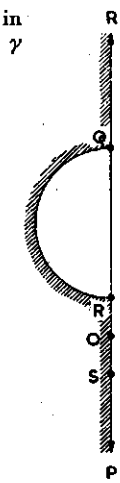

Fig. 12. Hodograaf in het grensgeval $\beta = \gamma$

dat bij een constante drukhoogte in de drain β kleiner wordt bij kleiner wordende draindiameter. In β zijn dus de draindiameter en de physische gesteldheid in de

[1] Het optreden van een onderdruk heeft alleen formele betekenis. Het is het gevolg van de singulariteit in punt P waar de potentiaal $\varphi = -\infty$ en derhalve ook de druk $p = -\infty$ gesteld is.

drain verdisconteerd, m.a.w. β is een maat voor de randvoorwaarden langs de drainomtrek (vgl. 4.1).

Volgens (35) is de maximale waarde van β gelijk aan γ. Uit (24) en (25) volgt dat de hoek θ dan gelijk is aan $\pi/2$, zodat in de hodograaf RQ'Q overgaat in een halve cirkel (fig. 12) en in het stromingsbeeld het phreatisch oppervlak in Q raakt aan de y-as (het buigpunt Q' valt samen met Q). Uitgaande van deze speciale onderstelling heeft GUSTAFSSON (1946) het drainageprobleem voor het geval $L = O$ opgelost. Zijn formules (110) en (104) zijn identiek met (33) en (35) wanneer we daarin $L = 0$ en $\beta = \gamma$ stellen, zoals men na enige berekening kan controleren. GUSTAFSSON geeft echter geen formules voor de hoogte van het phreatisch oppervlak.

Met $\beta = \gamma$ gaan (36) en (37) over in

$$\pi \frac{c_{\min}}{a} = \ln\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right) + \frac{2}{\gamma} \ln\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right) \tag{38}$$

$$\pi \frac{b_{\min}}{a} = \ln\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right) + \frac{2}{\gamma} \ln \frac{1 + \frac{1}{2}\gamma}{1 + \gamma} \tag{39}$$

Deze vergelijkingen kan men ook direct afleiden door figuur 11 op figuur 12 af te beelden met behulp van de functies

$$\Omega = \omega - iNz$$

$$\zeta = -\left(\frac{K + N}{w + iN} + i\right)^2$$

$$\eta = \exp \frac{-\pi\,\Omega}{a\,(L - N)}$$

$$\eta = \frac{\zeta - (1 + \gamma)^2}{\zeta - 1} \exp\left(-\pi\gamma \frac{c}{a}\right)$$

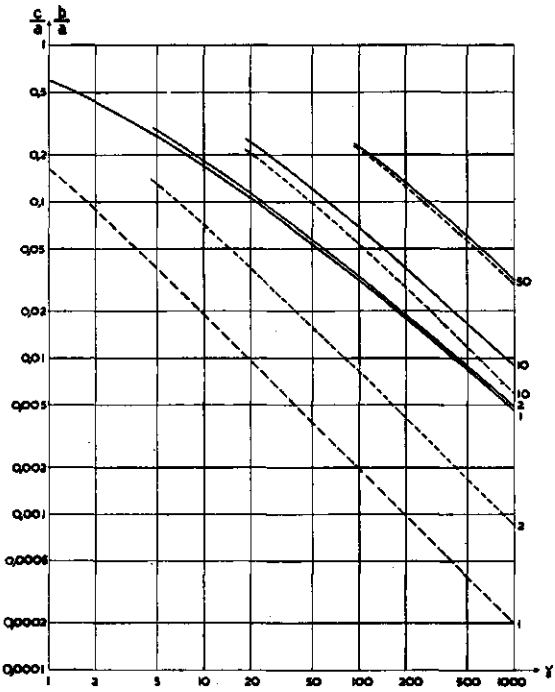

FIG. 13. c/a en b/a (stippellijn) als functie van γ voor $\gamma/\beta = 1$; 2; 10; 50

Een overzicht van (36), (37), (38) en (39) geven de krommen van figuur 13 en wel voor $\beta = \gamma$, $\beta = \gamma/2$, $\beta = \gamma/10$ en $\beta = \gamma/50$. We zien dat voor $\frac{1}{2}\gamma \leqq \beta \leqq \gamma$ het verschil tussen c en $c_{\min}$ hoogstens 10 % bedraagt. We zien echter ook dat voor $\beta = \frac{1}{2}\gamma$ b ongeveer een factor 4 groter is dan $b_{\min}$ en reeds vergelijkbaar wordt met c. Aangezien nu in de practijk een drainage meestal zo uitgevoerd kan worden dat het phreatisch oppervlak de drains bereikt of dat de hoogte b zeer klein is ten opzichte van c, kunnen we concluderen dat we zonder voorbehoud de formules (38) en (39) mogen gebruiken. Wanneer de hoogte b vergelijkbaar wordt met de hoogte c is het echter

nodig een schatting van β te maken, hetzij op de omslachtige manier van p. 23, hetzij door b als gegeven aan te nemen.

4.25. *Vergelijking met de uitkomsten van* HOOGHOUDT *en* CHILDS

In figuur 14 is het verloop gegeven van (38) en (39) voor het geval $L = 0$ (geen kwel of wegzijging) en $N < 0$ (neerslag). Ter vergelijking zijn daarbij twee krommen opgenomen, die berekend zijn uit de tabellen van HOOGHOUDT (1940) en wel voor $r_0/a = 0{,}0002$ en $r_0/a = 0{,}01$ (r_0 is de straal van de drain), ongeveer de uiterste waarden die voorkomen. Hierbij dient opgemerkt te worden, dat HOOGHOUDT aanneemt dat de drains half gevuld zijn met water, en verder dat voor de berekening van c/a bij gegeven K en N de kennis van b/a nodig is. Daarvoor hebben we de waarde volgens (39) genomen. We zien dat de overeenstemming goed is. Voor grote waarden van $-K/N$ geven de tabellen van HOOGHOUDT een iets te gunstig beeld.

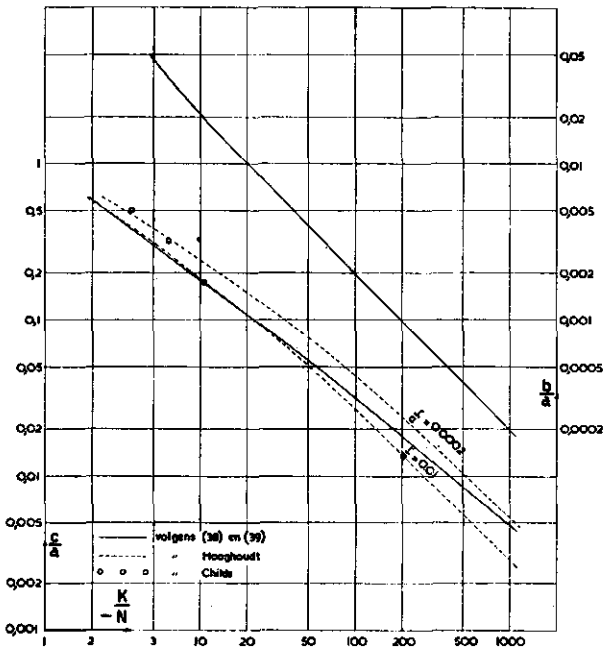

FIG. 14. Vergelijking met de uitkomsten van HOOGHOUDT en CHILDS

We wenden ons nu tot de electrische modelproeven van CHILDS (1943) en we beschouwen eerst zijn figuren 3, 4 en 5. De drains zijn juist geheel met water gevuld. In tabel 2 worden zijn resultaten vergeleken met de overeenkomstige uitkomsten van (36), (37) en (38). De eerste vier kolommen geven de waarden van CHILDS. Het zijn typische gevallen waarbij de hoogte b vergelijkbaar is met de hoogte c en waarbij (38) dus te lage waarden zou moeten geven. We zien dit in de vijfde kolom. Berekenen we echter c/a met (36), nadat we β met (37) bepaald hebben, gebruik makend van γ uit de tweede kolom en b/a uit de vierde kolom, dan vinden we de juiste waarden (laatste kolom).

TABEL 2. Vergelijking van de uitkomsten van CHILDS met die van (36), (37) en (38)

Fig.	r_0/a	$\gamma = \frac{K+N}{-N}$	c/a	b/a	$\frac{c_{min}}{a}$	β	c/a
3	0,0052	3,9	0,50	0,42	0,31	0,63	0,50
4	0,022	4,0	0,38	0,25	0,30	1,24	0,38
5	0,042	5,1	0,29	0,10	0,26	3,0	0,28

Vervolgens bepaalt CHILDS de invloed van de hoeveelheid neerslag bij een vaste draindiameter (zie zijn figuren 6, 7 en 8). De resultaten daarvan vindt men in figuur 14. Bij de twee meetpunten, die boven de theoretische krommen liggen, was de hoogte b niet klein ten opzichte van de hoogte c zodat daarvoor niet aan (38) voldaan kon zijn.

Tussen theorie en experiment is dus zeer goede overeenstemming. Het uitvoeren van meer metingen, zowel te velde als met modelexperimenten, is echter zeer gewenst.

4.26. *De plaats van het oppervlak dat beide stromingen scheidt*

De plaats van het punt O (fig. 3 en 4) kunnen we berekenen door in (33) te substitueren $t = t_0 = \nu/\lambda$. We krijgen dan

$$z_0 = a + ic + i\frac{a}{\pi}\left(\ln\frac{\frac{\nu}{\lambda} - 1 - \beta}{\frac{\nu}{\lambda} + 1 + \beta} + \frac{2}{\gamma}\ln\frac{\frac{\nu}{\lambda} + 1}{\frac{\nu}{\lambda} + 1 + \beta}\right)$$

Als β bekend is kunnen we met behulp van (24), (25), (26) en (28) λ en ν en daarna z_0 berekenen. Deze berekening wordt in het grensgeval $\beta = \gamma$ veel eenvoudiger. De gevallen I, II en III van figuur 3 zullen we afzonderlijk behandelen.

In geval I is $-K/N > 0$, dus wegens (26) $\nu > 1$. Echter tg $\theta = \infty$. Uit (24) en (26) volgt derhalve $\nu/\lambda = -K/N$. Zij $z_0 = a + ih$, dan volgt uit (33) met $\beta = \gamma$ en $t = -K/N > 1 + \gamma$

$$\pi\frac{c_{\min} - h}{a} = \ln\frac{1 + \gamma - \frac{K}{N}}{-1 - \gamma - \frac{K}{N}} + \frac{2}{\gamma}\ln\frac{1 + \gamma - \frac{K}{N}}{1 - \frac{K}{N}} \tag{40}$$

In geval II is weer $-\frac{K}{N} > 0$ en $\frac{\nu}{\lambda} = -\frac{K}{N}$. Nu is echter $z_0 = ih$ $(h < 0)$ en $1 < -\frac{K}{N} < 1 + \gamma$ zodat

$$\pi\frac{c_{\min} - h}{a} = \ln\frac{1 + \gamma - \frac{K}{N}}{1 + \gamma + \frac{K}{N}} + \frac{2}{\gamma}\ln\frac{1 + \gamma - \frac{K}{N}}{1 - \frac{K}{N}} \tag{41}$$

In geval III tenslotte is $-\frac{K}{N} < 0$, dus $\nu = 0$; met $z_0 = ih$ $(h > 0)$, $t = 0$ en $\beta = \gamma$ geeft (33)

$$\pi\frac{c_{\min} - h}{a} = \frac{2}{\gamma}\ln\,(1 + \gamma)$$

of, wegens (38) en (39)

$$h = b_{\min} \tag{42}$$

Punt O ligt hier dus op het phreatisch oppervlak.

Formule (40) is voor de practijk het belangrijkst, omdat daarmee de diepte van zout kwelwater berekend kan worden. In figuur 15 vindt men een schaar van krom-

men berekend met (38) en (40). We zien dat overeenkomstig de verwachting het punt O hoger komt te liggen naarmate de kwel toeneemt.

We kunnen de lijn PO (fig. 3[I]) beschouwen als een ondoorlatende laag. Dit biedt de mogelijkheid om te schatten op welke diepte een werkelijk aanwezige

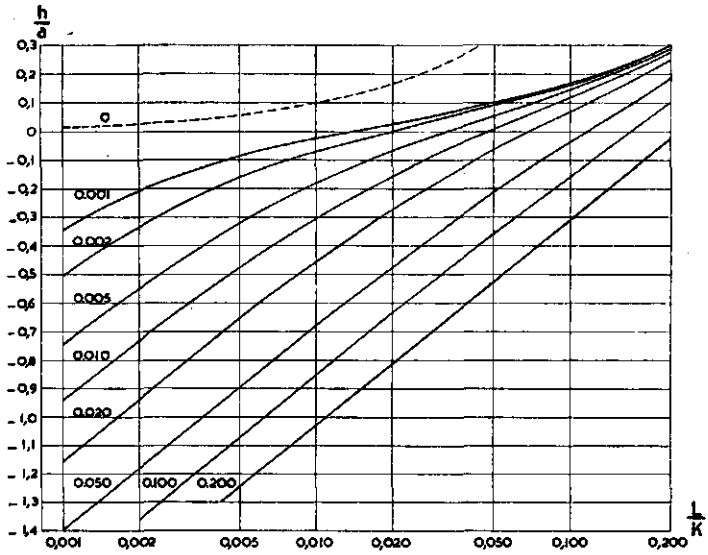

FIG. 15. h/a als functie van L/K bij verschillende waarden van $-N/K$

ondoorlatende laag zijn invloed op de hoogte van de grondwaterstand doet gelden. Met behulp van (38) en (40) is daartoe tabel 3 samengesteld. We zien daaruit dat bij constante regenval de grondwaterstand pas merkbaar hoger wordt wanneer de diepte $-h$ van punt O kleiner wordt dan de halve drainafstand a. Aangezien de

TABEL 3. De invloed van de pseudo-ondoorlatende laag PO op de grondwaterstand

$-N/K$	h/a	L/K	γ	$\frac{c_{min}}{a}$
0,10	$-\infty$	0	9,0	0,18
0,10	— 1,0	0,0063	8,5	0,19
0,10	— 0,5	0,031	6,9	0,22
0,02	$-\infty$	0	47	0,056
0,02	— 1,0	0,0016	45	0,058
0,02	— 0,5	0,0086	34	0,072

pseudo-ondoorlatende laag PO ongeveer zal overeenkomen met een echte horizontale ondoorlatende laag halverwege tussen P en O, kunnen we concluderen dat de invloed daarvan pas merkbaar wordt als deze zich op geringer diepte bevindt dan een vierde

deel van de drainafstand. Tot precies hetzelfde resultaat komt HOOGHOUDT (1940, p. 582).

4.27. *Appendix*

We hadden tot dusver ondersteld dat er niet meer dan één buigpunt op de kromme QR van figuur 4 zou liggen. Stel nu eens dat er meer, bijv. drie, buigpunten waren. De hodograaf zou dan wegens (15) noodzakelijk de vorm van figuur 16 moeten hebben. Beschouw nu de afbeelding van het z-vlak op de hodograaf. Wanneer men langs de rand van het gebied G in het z-vlak naar links rondloopt, loopt het overeenkomstige punt in het w-vlak eveneens één keer naar links rond. Dat een deel van de rand meerdere malen heen en weer doorlopen wordt, doet hieraan niets af: het omloopsgetal om een punt w binnen de kromme is precies 1. Hieruit volgt nu dat elke waarde w_0 binnen de kromme precies éénmaal aangenomen wordt, immers het aantal nulpunten van de functie $w—w_0$ in G is volgens een bekende stelling gelijk aan het aantal malen dat het beeld van de randkromme om het punt w_0 loopt. Om dezelfde reden wordt een waarde w_0 buiten de kromme niet aangenomen. De afbeelding van het gebied G op het gebied binnen de kromme in het w-vlak is dus eeneenduidig. Bijgevolg beeldt de functie $w(z)$ ook de rand van het gebied G eeneenduidig af (HURWITZ-COURANT, 1929, p. 400). Dit leidt tot een tegenspraak. Er zijn dus geen oplossingen waarbij meer dan één buigpunt in het phreatisch oppervlak optreedt.

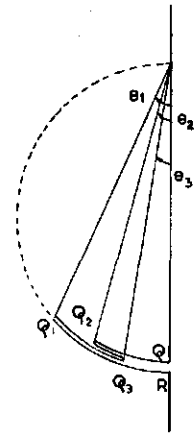

FIG. 16.
Hodograaf bij de aanwezigheid van drie buigpunten Q1, Q2, Q3 op het phreatisch oppervlak

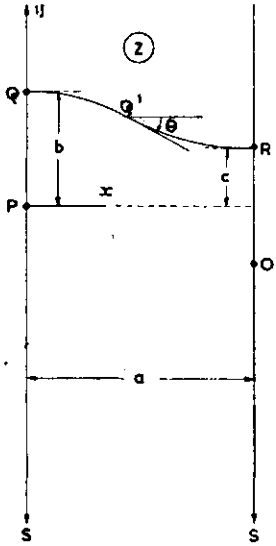

FIG. 17.
Het stromingsgebied

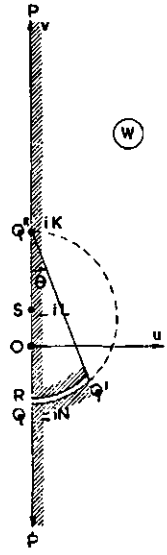

FIG. 18.
De hodograaf

4.3. INFILTRATIE

4.31. *Stromingsgebied en hodograaf*

De behandeling van de infiltratie verloopt nagenoeg analoog aan de berekeningswijze die bij de drainage toegepast is. Wat de figuren betreft zullen we ons bepalen tot geval IV van figuur 4.

Het stromingsgebied en de hodograaf vindt men in figuur 17 en 18. b is de hoogte van het phreatisch oppervlak loodrecht boven de drains, c is de hoogte midden tussen de drains (c kan negatief zijn). Dus $z_Q = ib$ en $z_R = a + ic$ (a is de halve drainafstand).

We mogen ook hier weer onderstellen dat er niet meer dan één buigpunt op de krommen QR ligt. De hoek tussen de raaklijn in Q' en de x-as zij θ. Om in de formules aan te sluiten bij de drainage rekenen we $\theta < 0$.

De randvoorwaarden luiden

$$\begin{array}{ll} \text{langs PQ:} & \psi = 0 \\ \text{langs QR:} & \left\{ \begin{array}{l} \varphi = Ky \\ \psi = Nx \end{array} \right. \\ \text{langs RS:} & \psi = Na \\ \text{langs SP:} & \psi = (N-L)\ a \end{array}$$

Verder is in P $\varphi = \infty$ en op oneindige diepte is φ asymptotisch gelijk aan $-Ly$.

In de hodograaf is $w_Q = w_R = -iN$; $w_{Q''} = iK$; $w_S = -iL$; $w_{Q'} =$
$= -\dfrac{K+N}{2} \sin 2\,\theta - i\dfrac{K+N}{2} \cos 2\,\theta + i\dfrac{K-N}{2}$.

Voor alle drie gevallen IV, V en VI geldt

(43) $$L-N < 0$$

4.32. *Oplossing van het randwaardeprobleem in het hodograafvlak*

We voeren weer in

(44) $$\Omega = \omega - iNz$$

met de randwaarden

$$\begin{array}{ll} \text{langs PQ:} & \Omega = \varphi + Ny \\ \text{langs QR:} & \Omega = (K+N)y \\ \text{langs } RS\text{:} & \Omega = \varphi + Ny \\ \text{langs SP:} & \Omega = \varphi + Ny + i(N-L)\ a \end{array}$$

$\Omega(z)$ beeldt het stromingsgebied af op de strook tussen $\Omega = 0$ en $\Omega = ia\,(N-L)$. $\Omega_P = +\infty$ en $+\infty + ia\,(N-L)$; $\Omega_Q = (K+N)\,b$; $\Omega_R = (K+N)\,c$; $\Omega_S = -\infty$ en $-\infty + ia\,(N-L)$. (fig. 19).

Deze strook wordt in vier stappen op de hodograaf afgebeeld.

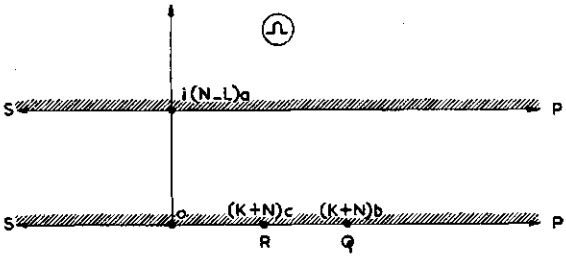

FIG. 19. De afbeelding $\Omega = w - iNz$

1°. (figuur 20)

(45) $$\eta = \exp \frac{\pi\,\Omega}{a\,(N-L)}$$

$$\eta_P = \pm\infty;\ \eta_Q = \exp\left(-\pi\frac{b}{a}\gamma\right);$$

$$\eta_R = \exp\left(-\pi\frac{c}{a}\gamma\right);\ \eta_S = 0$$

waarbij volgens (17) en (43)

(46) $$\gamma = \frac{K+N}{L-N} < 0$$

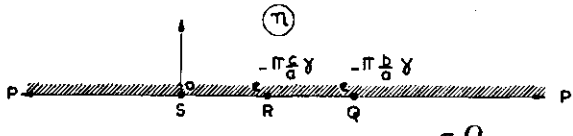

FIG. 20. De afbeelding $\eta = \exp \dfrac{\pi\,\Omega}{a\,(N-L)}$

2°. (figuur 21)

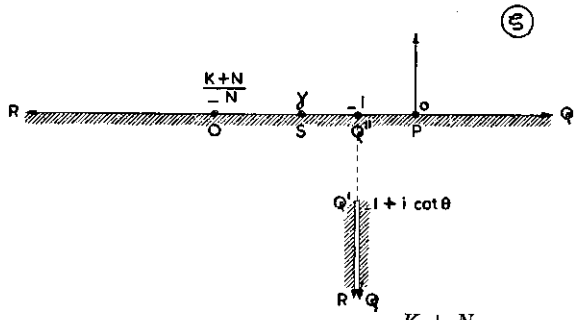

FIG. 21. De afbeelding $\zeta = \dfrac{K+N}{-N+iw}$

(47) $$\zeta = \frac{K+N}{-N+iw}$$

$\zeta_P = 0$; $\zeta_Q = +\infty$ en $-i\infty$; $\zeta_R = -\infty$ en $-i\infty$; $\zeta_O = \dfrac{K+N}{-N}$; $\zeta_S = \gamma$; $\zeta_{Q''} = -1$; $\zeta_{Q'} = -1 + i \cot \theta$

3°. (figuur 22)

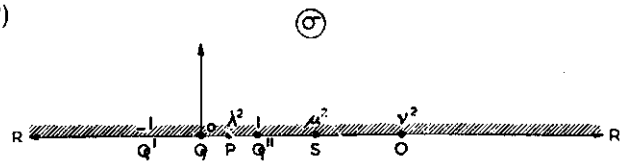

FIG. 22. De afbeelding $\zeta = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sigma-1}{\sqrt{\sigma}} \cot \theta - 1$

(48) $$\zeta = \tfrac{1}{2}\frac{\sigma-1}{\sqrt{\sigma}} \cot \theta - 1$$

$\sigma_R = \pm\infty$; $\sigma_Q = 0$; $\sigma_{Q'} = -1$; $\sigma_{Q''} = 1$; $\sigma_P = \lambda^2$; $\sigma_S = \mu^2$; $\sigma_O = \nu^2$; daarbij zijn λ, μ en λ gegeven door

(49) $$\frac{\lambda^2-1}{2\lambda} = \operatorname{tg} \theta$$

(50) $$\frac{\mu^2-1}{2\mu} = (1+\gamma) \operatorname{tg} \theta = \frac{K+L}{L-N} \operatorname{tg} \theta$$

(51) $$\frac{\nu^2-1}{2\nu} = -\frac{K}{N} \operatorname{tg} \theta$$

$\lambda < 1$ omdat $\operatorname{tg} \theta < 0$.
$\mu > 1$ als $\gamma < -1$.
$\mu < 1$ als $-1 < \gamma < 0$.
$\mu = 1$ als $\gamma = -1$.
altijd is echter $\mu > \lambda$

4°.

(52) $$\eta = \frac{\sigma - \mu^2}{\sigma - \lambda^2} \exp\left(-\pi\gamma\frac{c}{a}\right)$$

zodat

(53) $$1 + \beta = \frac{\mu}{\lambda} = \exp \pi\gamma\frac{c-b}{2a} > 1$$

derhalve is $b > c$.

4.33. *De integratie*

Omdat we precies dezelfde differentiaalvergelijking gevonden hebben als in 4.22 levert de integratie ook dezelfde formules als in 4.23. (33) en (34) gelden dus ook voor infiltratie. Het enige verschil bestaat hierin dat $\gamma < 0$ is en dat β nu tussen andere grenzen ligt dan volgens (35). Uit (49), (50) en (53) volgt nl. dat

(54) $$0 < \beta < \infty \text{ als } \gamma \leqq -1$$

(55) $$0 < \beta < \frac{-\gamma}{1+\gamma} \text{ als } -1 \leqq \gamma < 0$$

Het is nu gemakkelijk aan te tonen dat in werkelijkheid altijd de wegzijging $-L < K$ is, zodat

(56) $$K + L > 0$$

We berekenen daartoe met (3), (33) en (34) de druk op grote diepte. Grote diepte komt overeen met een punt $t = 1 + \beta + \delta$ dicht bij het punt S (fig. 10). Uit (33) volgt voor $\delta << \beta$

$$\varphi = Kc - \frac{aL}{\pi} \ln \delta$$

en uit (34)

$$y = c + \frac{a}{\pi} \ln \delta$$

zodat

$$\varphi = (K + L)\, c - Ly$$

De bijbehorende druk is gegeven door (2) en (3)

$$\varphi = K\,\Phi = K\left(\frac{p}{\varrho g} + y\right)$$

dus

$$K\frac{p}{\varrho g} = (K + L)\,(c - y)$$

Hoewel het theoretisch denkbaar is dat op grote diepte een onderdruk heerst, kunnen we voor de practijk rustig onderstellen dat de druk daar zeker hoger is dan de druk aan de oppervlakte, m.a.w. $p > 0$, dus moet $K + L > 0$ zijn.

Daaruit volgt nog dat

$$1 + \gamma = \frac{K + L}{L - N} < 0$$

of

(57) $$\gamma < -1$$

4.34. *Het phreatisch oppervlak*

De formules (35), (36) en (37) gelden ook bij infiltratie omdat ze berusten op (33). Daarentegen mogen we (38) en (39) hier niet gebruiken omdat de grenzen voor β anders liggen.

We kunnen op dezelfde manier als in 4.24 laten zien dat ook hier β in verband gebracht kan worden met de randvoorwaarden langs de drainomtrek. Kleine drains en lage druk in de drain komen overeen met grote waarden van β en lage waterstand, grote drains en hoge druk daarentegen met een kleine β en hoge waterstand. Zo geeft $\beta \to 0$ volgens (36) en (37) $b \to +\infty$ en $c \to +\infty$; de druk in de drain moet dan oneindig groot zijn. Substitutie van $\beta = \infty$ daarentegen levert op $c = -\infty$ en $\frac{b}{a} = -\frac{2 \ln 2}{\pi\gamma}$. Dit is blijkbaar de minimumwaarde van $\frac{b}{a}$, zodat

(58) $$b \geqq b_{\min} = \frac{2\, a \ln 2}{-\pi\gamma} = 0{,}4413 \frac{a}{-\gamma}$$

Wanneer we bedenken dat de drukhoogte $h_0 = \frac{p_0}{\varrho g}$ in de drain altijd groter moet zijn dan de hoogte b, zien we in dat

(59) $$h_0 > b \geqq 0{,}4413 \frac{a}{-\gamma}$$

Wanneer de drukhoogte in de drain beneden deze minimale waarde ligt kan het phreatisch oppervlak nooit de drains bereiken.

In figuur 23 vindt men een grafisch overzicht van (37) voor $\gamma < -1$.

Bij infiltratie kunnen we c/a pas uitrekenen wanneer we b/a of β kennen. Nu is het, zoals we in 4.24 gezien hebben, zeer omslachtig om β af te leiden uit de diameter en de druk in de drain. We kunnen echter proberen met behulp van (59) een schatting van b te maken. We dienen daarbij te bedenken dat in de buurt van $b_{\min}$ β en ook c/a zeer sterk met b/a zal variëren. In dat geval zal echter in het algemeen de infiltratiecapaciteit onvoldoende zijn.

Door (36) en (37) is c/a gegeven als functie van b/a en γ. Het verloop van deze functie

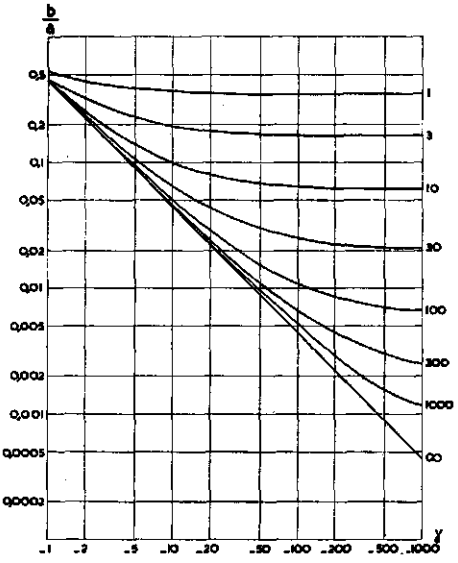

FIG. 23. b/a als functie van γ (< -1) bij verschillende waarden van β

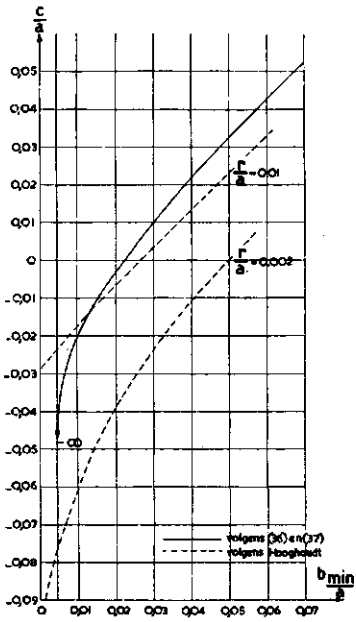

FIG. 24. Vergelijking met de uitkomsten van HOOGHOUDT bij $\gamma = -100$

bij $\gamma = -100$ vindt men in figuur 24, waarin tevens de bijbehorende krommen, berekend volgens HOOGHOUDT (1940, p. 606), zijn opgenomen. De verschillen blijken veel groter te zijn dan bij drainage waar de beide methodes nagenoeg dezelfde uitkomsten gaven. De reden hiervan is dat HOOGHOUDT bij infiltratie dezelfde formules gebruikt als bij drainage, waar hij van de veronderstelling uitgaat dat de drains voor de helft met water gevuld zijn.

Tenslotte zij opgemerkt dat we voor de berekening van de plaats van punt O (fig. 3) aangewezen zijn op de methode vermeld in het begin van 4.26.

4.4. OVERZICHT VAN DE FORMULES DIE BRUIKBAAR ZIJN IN DE PRACTIJK. TOEPASSING OP ENKELE VOORBEELDEN

NOTATIE (zie ook fig. 3, 4 en 17):

a = halve drainafstand.

b = hoogte van het phreatisch oppervlak loodrecht boven de drains.

b_{min} = laagste waarde van b.

c = hoogte ($c > 0$) of diepte ($c < 0$) van het phreatisch oppervlak midden tussen de drains.

c_{min} = laagste waarde van c (bij drainage).

h = hoogte ($h > 0$) of diepte ($h < 0$) van het punt O (fig. 3).

h_0 = drukhoogte in de drain in m water.

K = doorlaatfactor, dimensie [m/sec].

L = kwel ($L > 0$) of wegzijging ($L < 0$), dimensie [m/sec].

N = verdamping ($N > 0$) of neerslag ($N < 0$), dimensie [m/sec].

r_0 = straal van de drain.

β = dimensieloze parameter.

$\gamma = \dfrac{K + N}{L - N}$

Hoogtes en dieptes zijn gemeten t.o.v. het vlak door de drainassen.

FORMULES

(17) $$K + N > 0$$

Een neerslag $-N \geqq K$ doet nl. het phreatisch oppervlak stijgen tot oneindige hoogte.

(56) $$K + L > 0$$

Een wegzijging $-L \geqq K$ houdt nl. in dat op grote diepte de druk gelijk aan of kleiner is dan de druk in de atmosfeer.

Uit (17) en (56) volgt dat bij drainage (fig. 3; $L - N > 0$)

(21) $$\gamma = \frac{K + N}{L - N} > 0$$

en bij infiltratie (fig. 3; $L - N < 0$)

(57) $$\gamma = \frac{K + N}{L - N} < -1$$

Voor alle zes gevallen van figuur 3 gelden de formules

(36) $$\pi \frac{c}{a} = \ln\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) + \frac{2}{\gamma} \ln\left(1 + \frac{\beta}{2}\right)$$

(37) $$\pi \frac{b}{a} = \ln\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) + \frac{2}{\gamma} \ln \frac{1 + \frac{1}{2}\beta}{1 + \beta}$$

waarbij

(35) $$0 < \beta \lesseqgtr \gamma \quad \text{als } \gamma > 0 \qquad \text{(drainage)}$$

(54) $$0 < \beta < \infty \text{ als } \gamma < -1 \quad \text{(infiltratie)}$$

β hangt af van de relatieve draindiameter r_0/a en de druk in de drains. Qualitatief: β wordt kleiner als de druk toeneemt of als de relatieve draindiameter groter wordt.

De laagste waterstaand, die bij drainage mogelijk, is wordt verkregen als $\beta = \gamma$. (36) en (37) gaan dan over in

(38) $$\pi \frac{c_{\min}}{a} = \ln\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right) + \frac{2}{\gamma} \ln\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)$$

(39) $$\pi \frac{b_{\min}}{a} = \ln\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right) + \frac{2}{\gamma} \ln \frac{1 + \frac{1}{2}\gamma}{1 + \gamma}$$

Het verschil tussen c en $c_{\min}$ is hoogstens 10 % zolang b kleiner is dan ongeveer 1/5 c. Dit is in de practijk meestal het geval.

De laagste waterstand bij infiltratie is gegeven door $\beta = \infty$. Dan is $c = -\infty$ en

(58) $$b_{\min} = \frac{2a \ln 2}{-\pi \gamma} = 0{,}4413 \frac{a}{-\gamma}$$

We kunnen een schatting van b en β maken met behulp van de relatie

(59) $$h_0 > b \gtrsim 0{,}4413 \frac{a}{-y}$$

Eenvoudige formules voor de plaats van punt O (fig. 3) kunnen alleen gegeven worden in het grensgeval $\beta = \gamma > 0$. Als $N < 0$ en $L > 0$ (fig. 3[I])

$$\pi \frac{c_{\min} - h}{a} = \ln \frac{1 + \gamma - \frac{K}{N}}{-1 - \gamma - \frac{K}{N}} + \frac{2}{\gamma} \ln \frac{1 + \gamma - \frac{K}{N}}{1 - \frac{K}{N}} \tag{40}$$

Als $N < 0$ en $L < 0$ (fig. 3[II])

$$\pi \frac{c_{\min} - h}{a} = \ln \frac{1 + \gamma - \frac{K}{N}}{1 + \gamma + \frac{K}{N}} + \frac{2}{\gamma} \ln \frac{1 + \gamma - \frac{K}{N}}{1 - \frac{K}{N}} \tag{41}$$

Als $N > 0$ en $L > 0$

$$h = b_{\min} \tag{42}$$

N.B. Al deze formules gelden bij benadering ook voor niet te grote sloten (zie ook 4.1).

VOORBEELD 1

Gegeven is: de doorlaatfactor $K = 100$ mm/etmaal,
de regenval $-N = 5$ mm/etmaal,
de kwel $L = 10$ mm/etmaal,

zodat $\gamma = \frac{100 - 5}{10 + 5} = 6{,}33$.

Welke drainafstand moet gekozen worden, wanneer de hoogte c niet groter mag zijn dan 1 m?

Volgens (38) is $\frac{c_{\min}}{a} = 0{,}231$ zodat $2a$ hoogstens $\frac{2}{0{,}231} = 8{,}7$ m is.

Midden tussen de drains ontmoeten kwel- en regenwater elkaar op een diepte $-h$ gegeven door (40): $\frac{c_{\min} - h}{a} = 0{,}271$. Hieruit volgt $h = -0{,}2$ m.

VOORBEELD 2

Gegeven is: de doorlaatfactor $K = 200$ mm/etmaal,
de verdamping $N = 1$ mm/etmaal,
de wegzijging $-L = 9$ mm/etmaal,
de drainafstand $2a = 10$ m.

Wat moet minstens de druk in de drains zijn wanneer de waterstand niet beneden de drains mag komen?

De eis is dus $c \geq 0$. Hier is $\gamma = \frac{200 + 1}{-9 - 1} = -20{,}1$. Uit (36) volgt dan dat $\beta \leq 32$ en uit (37) dat $b \geq 0{,}20$ m. Volgens (59) moet de drukhoogte in de drain dan zeker groter zijn dan 0,20 m. Hoeveel groter kan met deze formules niet uitgemaakt worden (zie daartoe 4.24. en 4.34).

VOORBEELD 3

Gegeven is: de drainafstand $2a = 20$ m,
de regenval $-N = 6$ mm/etmaal,
er is geen kwel of wegzijging ($L = 0$),
de hoogtes b en c zijn resp. 0,20 en 0,40 m.

Wat is de doorlaatfactor?

(36) en (37) geven ons twee vergelijkingen met twee onbekenden β en γ; de oplossing is $\beta = 26$ en $\gamma = 105$. (21) geeft dan $K = 640$ mm/etmaal. (38) geeft hier niet de goede uitkomst omdat b te groot is t.o.v. c. We zouden vinden $\gamma = 73$ en $K = 440$ mm/etmaal.

5. ONTWATERING DOOR MIDDEL VAN SLOTEN

5.1. Probleemstelling

Ter vereenvoudiging onderstellen we dat er geen kwel of wegzijging optreedt, m.a.w. op oneindige diepte bevindt zich een ondoorlatende laag. In 4.26 hebben we echter gezien dat bij drains de invloed van de plaats van de ondoorlatende laag pas merkbaar wordt, wanneer deze dichter bij de drains ligt dan ongeveer $\frac{1}{4}$ van de drainafstand. Dit zullen we ongetwijfeld ook op sloten kunnen overdragen.

We willen verder de randvoorwaarden langs de sloot gedetailleerd in rekening brengen, maar we zullen ons daarbij beperken tot twee gevallen: de rechthoekige watervrij gehouden sloot en de rechthoekige sloot met ondoorlatende zijwand. Andere gevallen blijken voor alsnog onoplosbaar te zijn.

We zullen alleen de ontwatering ($N < 0$) beschouwen. Verder onderstellen we weer dat de grond homogeen en isotroop doorlatend is.

5.2. De watervrij gehouden sloot

5.21. *Stromingsveld en hodograaf*

Het stromingsveld vindt men in figuur 25. De sloot is rechthoekig van vorm en wordt watervrij gehouden. PQ is een kweloppervlak. Volgens Childs (1945, p. 322) raakt het phreatisch oppervlak in Q aan de slootwand. De afstand tussen de sloten zij $2a$, de hoogte van het kweloppervlak b en de hoogte van het phreatisch oppervlak midden tussen de sloten c, zodat $z_Q = ib$ en $z_S = a + ic$. Volgens 4.27 kan de kromme QR hier geen enkel buigpunt bezitten. De slootbreedte zij $2d$, zodat $z_T = -d$.

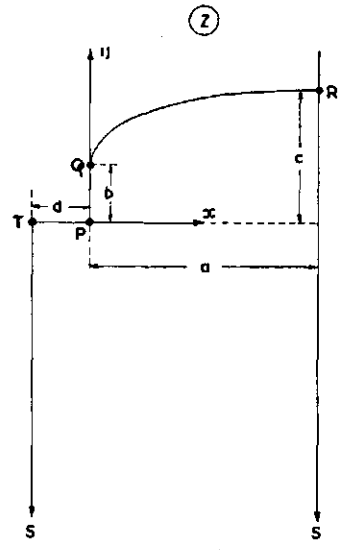

Fig. 25. Het stromingsgebied

De randvoorwaarden zijn volgens 2.2

langs PQ:	$\varphi = Ky$
langs QR:	$\varphi = Ky$, $\psi = N(x-a)$
langs RS:	$\psi = 0$
langs ST:	$\psi = 0$
langs PT:	$\psi = 0$

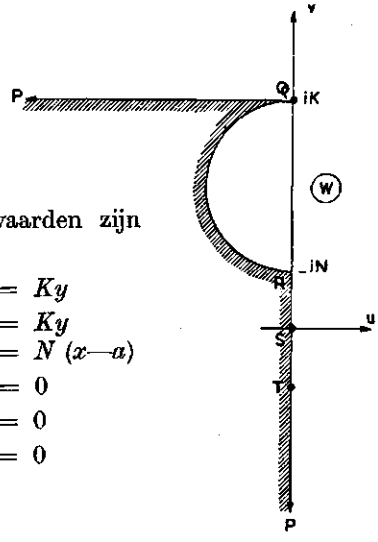

Fig. 26. De hodograaf

Figuur 26 stelt de hodograaf voor, gegeven door $w = -d\omega/dz$. Evenals in figuur 12 wordt de afbeelding van het phreatisch oppervlak een halve cirkel. In P is de snelheid oneindig groot zoals in 3 is aangetoond. Verder is $w_Q = iK$ en $w_R = -iN$.

5.22. *Oplossing van het randwaardeprobleem in het hodograafvlak*

De oplossing van het randwaardeprobleem in het w-vlak vinden we op soortgelijke manier als bij drains. We voeren echter hier een enigszins andere hulpfunctie Ω in, nl.:

(60) $$\Omega = \omega + iKz = \varphi - Ky + i(\psi + Kx)$$

Uit de randvoorwaarden volgt dat

langs PQ: $\Omega = i\psi$
langs QR: $\Omega = i(K + N)\,x - iNa$
langs RS: $\Omega = \varphi - Ky + iKa$
langs ST: $\Omega = \varphi - Ky - iKd$
langs TP: $\Omega = i(\psi + Kx)$

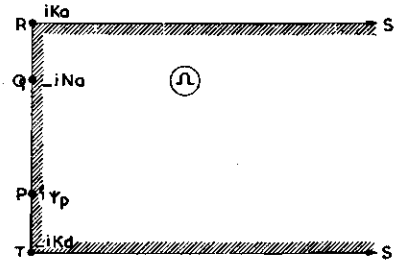

FIG. 27. De afbeelding $\Omega = \omega + iKz$

en dat $\Omega_P = i\psi_P$; $\Omega_Q = -iNa$; $\Omega_R = iKa$; $\Omega_S = \infty + iKa$ en $\infty - iKd$; $\Omega_T = -iKd$ (fig. 27).

De afbeelding van deze halve strook op de hodograaf geschiedt in vier stappen.

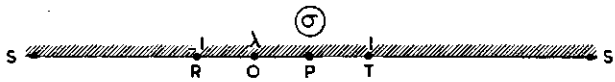

FIG. 28. De afbeelding $\sigma = \cosh \pi \dfrac{\Omega + iKd}{K(a + d)}$

1°. Afbeelding van deze halve strook op de bovenhelft van het σ-vlak met een transformatie van SCHWARZ-CHRISTOFFEL (fig. 28). We kiezen $\sigma_S = \pm\infty$, $\sigma_R = -1$ en $\sigma_T = 1$. Dan is

$$\Omega = A \int \frac{d\sigma}{(\sigma^2 - 1)^{1/2}} = A \operatorname{arcosh} \sigma + B$$

Nu is

$$\Omega_S = iKa = A\pi i + B \quad \text{en} \quad \Omega_Q = -iKd = B$$

dus

$$B = -iKd \quad \text{en} \quad A = \frac{a + d}{\pi} K$$

zodat

$$\Omega = -iKd + \frac{a + d}{\pi} K \operatorname{arcosh} \sigma$$

(61) $$\sigma = \cosh \pi \frac{\Omega + iKd}{K(a + d)}$$

(62) $$\sigma_Q = \cos \pi \frac{Kd - Na}{K(a + d)} = \lambda$$

2°. De hodograaf beelden we af op een halve strook in het ζ-vlak (fig. 29) door

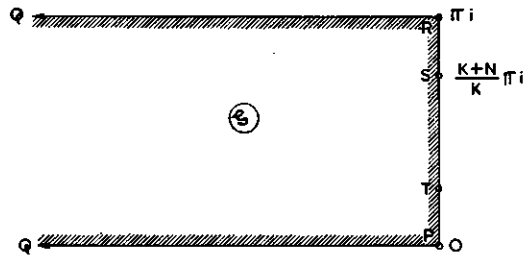

FIG. 29. De afbeelding $\zeta = \pi \dfrac{K+N}{w-iK}$

$$\zeta = \pi \frac{K+N}{w-iK} \tag{63}$$

$$\zeta_Q = -\infty \text{ en } -\infty + \pi i;\ \zeta_R = \pi i;\ \zeta_S = \frac{K+N}{K}\pi i.$$

3°. Afbeelding van deze halfstrook op de bovenhelft van het η-vlak (fig. 30) door

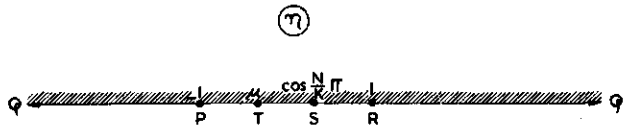

FIG. 30. De afbeelding $\eta = -\cosh \zeta$

$$\eta = -\cosh \zeta \tag{64}$$

$$\eta_Q = \pm\infty;\ \eta_R = 1;\ \eta_P = -1;\ \eta_S = -\cosh \frac{K+N}{K}\pi\, i = \cos\frac{N}{K}\pi.$$

4°. Om de keten te sluiten moeten nog de bovenhelften van het σ- en η-vlak op elkaar afgebeeld worden. In verband met (62) vinden we

$$(\sigma - \lambda)\left(\eta - \cos\frac{N}{K}\pi\right) = -(1+\lambda)\left(1 - \cos\frac{N}{K}\pi\right) \tag{65}$$

Uit (65) volgt dat

$$\sigma_P = -1 + 2\,\frac{1+\lambda}{1+\cos\frac{N}{K}\pi} \tag{66}$$

en

$$\eta_T = 1 - 2\,\frac{1-\cos\frac{N}{K}\pi}{1-\lambda} = \mu \tag{67}$$

Door (60), (61), (63), (64) en (65) is ω gegeven als functie van z en $w = d\omega/dz$, d.w.z. de differentiaal vergelijking voor ω als functie van z is gevonden.

5.23. *Integratie voor het geval de slootbreedte nul is*

Wanneer de slootbreedte $2d = 0$ gaan (61), (62), (65), (66) en (67) over in

(61*a*) $$\Omega = \frac{aK}{\pi} \operatorname{arcosh} \sigma \qquad \sigma = \cosh \pi \frac{\Omega}{aK}$$

(62*a*) $$\sigma_Q = \lambda = \cos \frac{N}{K} \pi$$

(65*a*) $$\left(\sigma - \cos \frac{N}{K} \pi\right)\left(\eta - \cos \frac{N}{K} \pi\right) = -1 + \cos^2 \frac{N}{K} \pi$$

(66*a*) $$\sigma_P = 1$$

(67*a*) $$\eta_T = \mu = -1$$

Uit (60) en (63) volgt

$$\frac{d\Omega}{dz} = -w + iK = -\frac{K+N}{\zeta} \pi$$

of

$$\pi\,(K+N)\,dz = -\zeta\,d\Omega$$

Uit (61*a*), (65*a*) en (64) volgt

$$d\Omega = -\frac{aK}{\pi} \frac{i \sin \frac{-N}{K} \pi}{\cosh \zeta + \cos \frac{N}{K} \pi} d\zeta$$

Derhalve is

$$\pi\,(K+N)\,dz = i \frac{Ka}{\pi} \sin \frac{-N}{K} \pi \frac{\zeta\,d\,\zeta}{\cosh \zeta + \cos \frac{N}{K} \pi}$$

en

$$z = \frac{ia}{\pi^2} \frac{K}{K+N} \sin \frac{-N}{K} \pi \int \frac{\zeta\,d\,\zeta}{\cosh \zeta + \cos \frac{N}{K} \pi}$$

Deze uitdrukking kan niet elementair geïntegreerd worden. We gaan daarom over tot het berekenen van de bepaalde integralen

$$ib = \int_P^Q dz = \frac{ia}{\pi^2} \frac{K}{K+N} \sin \frac{-N}{K} \pi \int_0^{-\infty} \frac{\zeta\,d\,\zeta}{\cosh \zeta + \cos \frac{N}{K} \pi}$$

en

$$a + i\,(c-b) = \int_Q^R dz = \frac{ia}{\pi^2} \frac{K}{K+N} \sin \frac{-N}{K} \pi \int_{\pi i - \infty}^{\pi i} \frac{\zeta\,d\,\zeta}{\cosh \zeta + \cos \frac{N}{K} \pi}$$

Na enige herleiding volgen hieruit de volgende drie relaties

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\pi^2} \frac{K}{K+N} \sin \frac{-N}{K} \pi \int_0^\infty \frac{\xi \, d\xi}{\cosh \xi + \cos \frac{N}{K} \pi}$$

$$\frac{c-b}{a} = \frac{1}{\pi^2} \frac{K}{K+N} \sin \frac{-N}{K} \pi \int_0^\infty \frac{\xi \, d\xi}{\cosh \xi - \cos \frac{N}{N} \pi}$$

$$1 = \frac{1}{\pi} \frac{K}{K+N} \sin \frac{-N}{K} \pi \int_0^\infty \frac{d\xi}{\cosh \xi - \cos \frac{N}{K} \pi}$$

De laatste relatie is identiek vervuld (Bierens de Haan, 1939, 88—5). Voor de eerste twee relaties kunnen we volgens Bierens de Haan (1939, 88—5) schrijven

(68) $$\frac{b}{a} = \frac{2}{\pi^2} \frac{K}{K+N} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n \frac{-N}{K} \pi}{n^2}$$

$$\frac{c-b}{a} = \frac{2}{\pi^2} \frac{K}{K+N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{-N}{K} \pi}{n^2}$$

Daaruit volgt

(69) $$\frac{c}{a} = \frac{4}{\pi^2} \frac{K}{K+N} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin (2n+1) \frac{-N}{K} \pi}{(2n+1)^2}$$

Wanneer $-N/K = \frac{1}{2}$ krijgen we

$$\frac{c}{a} = 2 \frac{b}{a} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = \frac{8}{\pi^2} C$$

waarbij $C = 0{,}91596\ldots$ de constante van Catalan is (Jahnke-Emde, 1945, p. 80). Voor andere waarden van $-N/K$ zijn geen numerieke waarden voor de som van deze reeksen bekend. Voor niet te kleine waarden van $-N/K$ kunnen we vrij snel een behoorlijke schatting voor de som vinden door gebruik te maken van het feit, dat afwisselend een zeker aantal negatieve termen volgen op eenzelfde aantal positieve termen. Door af te breken na de negatieve termen vinden we een ondergrens voor de som, door af te breken na de positieve termen een bovengrens. Voor waarden $-N/K << 1$ kunnen we gebruik maken van een in 5.27 gegeven ontwikkeling. We vinden dan

(70) $$\frac{b}{a} \approx \frac{2}{\pi} \frac{-N}{K+N} \ln 2$$

$$\frac{c}{a} \approx \frac{2}{\pi} \frac{-N}{K+N} \left(1 - \ln \tfrac{1}{2}\pi + \ln \frac{K}{-N}\right) \tag{71}$$

Het is interessant om (70) en (71) te vergelijken met de analoge benaderingen van (38) en (39). Daarvoor kunnen we nl. in het geval $L = 0$ en $-N/K << 1$ schrijven

$$\frac{b}{a} \approx \frac{2}{\pi} \frac{-N}{K+N} (1 - \ln 2)$$

$$\frac{c}{a} \approx \frac{2}{\pi} \frac{-N}{K+N} \left(1 - \ln 2 + \ln \frac{K}{-N}\right)$$

De overeenkomstige waarden van c/a naderen blijkbaar tot elkaar, van b/a echter niet.

In tabel 4 worden enkele waarden van b/a en c/a, berekend volgens (68), (69), (70) en (71), vergeleken met de overeenkomstige waarden bij drains, berekend

TABEL 4. De smalle sloot vergeleken met drains

$-N/K$	Sloot met breedte nul		Drains	
	b/a	c/a	b/a	c/a
0,001	0,00044	0,00475	0,00020	0,00460
0,002	0,00088	0,00863	0,00039	0,00832
0,005	0,0022	0,0187	0,0010	0,0179
0,01	0,0045	0,0331	0,0020	0,0316
0,02	0,0087	0,0583	0,0039	0,0548
0,05	0,023	0,119	0,010	0,111
0,1	0,049	0,202	0,021	0,184
0,2	0,107	0,341	0,048	0,304
0,5	0,371	0,742	0,166	0,608

volgens (38) en (39). We zien dat de waarden c/a elkaar niet veel ontlopen, maar dat de waarden b/a ongeveer een factor twee verschillen. Dit laatste behoeft ons niet te verbazen omdat het stromingsbeeld in de buurt van de drain een sterk verschil zal vertonen met dat in de buurt van de sloot.

5.24. *Integratie in het algemene geval*

Uit (60) en (63) volgt

$$\frac{d\Omega}{dz} = -w + iK = -\frac{K+N}{\zeta}\pi$$

of

$$\pi\,(K+N)\,dz = -\zeta\,d\,\Omega$$

Uit (61) en (65) volgt

$$d\Omega = \frac{K}{\pi}(a+d)\left(1 - \cos\frac{N}{K}\pi\right)\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^{1/2} \frac{d\eta}{\left(\eta - \cos\frac{N}{K}\pi\right)(\eta-1)^{1/2}(\eta-\mu)^{1/2}}$$

waarbij λ en μ gegeven zijn door (62) en (67). In verband met (64) is dus

$$z = \frac{a+d}{\pi^2}\,\frac{K}{K+N}\left(\cos\frac{N}{K}\pi - 1\right)\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^{1/2}\int\frac{\operatorname{arcosh}(-\eta)\,d\eta}{\left(\eta-\cos\frac{N}{K}\pi\right)(\eta-1)^{1/2}(\eta-\mu)^{1/2}}$$

We beperken ons tot het berekenen van de bepaalde integralen

$$ib = \int_P^Q \qquad \text{en} \qquad a + i\,(c-b) = \int_Q^R$$

Deze geven ons een uitdrukking voor a, die evenals in 5.23 identiek vervuld is, en de volgende betrekkingen voor b en $c-b$

$$\frac{b}{a} = G\int_1^\infty \frac{\operatorname{arcosh}\xi\,d\xi}{\left(\xi+\cos\frac{N}{K}\pi\right)(\xi+1)^{1/2}(\xi+\mu)^{1/2}} \tag{72}$$

$$\frac{c-b}{a} = G\int_1^\infty \frac{\operatorname{arcosh}\eta\,d\eta}{\left(\eta-\cos\frac{N}{K}\pi\right)(\eta-1)^{1/2}(\eta-\mu)^{1/2}} \tag{73}$$

waarbij

$$G = \frac{1}{\pi^2}\,\frac{a+d}{a}\,\frac{K}{K+N}\left(1-\cos\frac{N}{K}\pi\right)\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^{1/2} \tag{74}$$

De integralen (72) en (73) zijn numeriek berekend voor de relatieve slootbreedtes $d/a = 0{,}002$ en $d/a = 0{,}1$ bij enkele waarden van $-N/K$. De bijbehorende waarden

TABEL 5. Berekende waarden van $\cos N\pi/K$, λ, μ en G

d/a	$-N/K$	$1-\cos\frac{N}{K}\pi$	$1-\lambda$	$1-\mu$	G
0,002	0,01	0,000493	0,000707	1,396	0,002690
0,002	0,02	0,001973	0,002380	1,658	0,00593
0,002	0,05	0,01231	0,01327	1,856	0,01611
0,002	0,1	0,0489	0,0507	1,932	0,0343
0,002	0,2	0,1910	0,1945	1,964	0,0739
0,1	0,01	0,000493	0,0489	0,02016	0,000351
0,1	0,02	0,001973	0,0582	0,0678	0,001298
0,1	0,05	0,01231	0,0904	0,2724	0,00664
0,1	0,1	0,0489	0,1587	0,616	0,02066
0,1	0,2	0,1910	0,346	1,104	0,0583

van $\cos\frac{N}{K}\pi$, λ, μ en G vindt men in tabel 5. Bij de uitvoering van de numerieke berekening kunnen we gebruik maken van de asymptotische relatie

$$\operatorname{arcosh}\xi \sim \ln 2\,\xi$$

en van de reeksontwikkeling

$$\operatorname{arcosh} \eta = \sqrt{2(\eta - 1)} - \frac{\eta - 1}{6}\sqrt{\frac{\eta - 1}{2}} + \ldots\ldots\ldots$$

Daartoe splitsen we de integralen van (72) en (73) in resp. twee en drie gedeelten

$$\int_1^\infty (\xi) = \int_1^{\xi_0} (\xi) + \int_{\xi_0}^\infty (\xi)$$

$$\int_1^\infty (\eta) = \int_1^{1+\delta} (\eta) + \int_{1+\delta}^{\eta_0} (\eta) + \int_{\eta_0}^\infty (\eta)$$

$\int_1^{\xi_0} (\xi)$ wordt numeriek berekend.

$$\int_{\xi_0}^\infty (\xi) \approx \int_{\xi_0}^\infty \frac{\ln 2\,\xi}{\xi^2}\, d\xi = \frac{1 + \ln 2\,\xi_0}{\xi_0}$$

$\int_1^{1+\delta}$ kan elementair geïntegreerd worden na substitutie van de reeksontwikkeling. Het alternerend karakter van de reeks biedt de mogelijkheid om de fout binnen bepaalde grenzen te houden.

$\int_{1+\delta}^{\eta_0} (\eta)$ wordt numeriek berekend

$$\int_{\eta_0}^\infty (\eta) \approx \int_{\eta_0}^\infty \frac{\ln 2\,\eta}{\eta^2}\, d\eta = \frac{1 + \ln 2\,\eta_0}{\eta_0}$$

TABEL 6. Resultaten van de integratie

d/a	$-N/K$	$\int_1^\infty (\xi)$	b/a	$\int_1^2 (\eta)$	$\int_1^\infty (\eta)$	$\frac{c-b}{a}$	c/a
0,002	0,01	1,16	0,0031	8,88	10,55	0,0284	0,0315
0,002	0,02	1,22	0,0072	6,65	8,26	0,0482	0,0554
0,002	0,05	1,32	0,0213	4,43	6,02	0,0970	0,1183
0,002	0,1	1,34	0,046	2,290	4,54	0,156	0,202
0,002	0,2	1,39	0,101	1,770	3,22	0,237	0,338
0,1	0,01	0,99	0,00035	60,1	62,1	0,0218	0,0221
0,1	0,02	1,01	0,00131	29,13	31,1	0,0404	0,0417
0,1	0,05	1,03	0,0068	10,84	12,74	0,0846	0,0914
0,1	0,1	1,06	0,022	5,17	6,95	0,143	0,165
0,1	0,2	1,13	0,066	2,364	3,95	0,230	0,296

$\delta = 2$, $\xi_0 = 20$ en $\eta_0 = 20$ bleken bruikbare waarden te zijn bij de splitsing van de integralen. De resultaten van deze berekening vindt men in tabel 6. De fout in de einduitkomsten is altijd kleiner dan 1 %.

5.25. *Integratie voor het geval de „slootbreedte" oneindig groot is*

In het stromingsgebied komt T in het oneindige te liggen wanneer de slootbreedte voortdurend groter wordt (fig. 25). In de hodograaf (fig. 26) vallen S en T dan samen in de oorsprong. In het Ω-vlak (fig. 27) wordt $\Omega_T = -i\infty$. We vervangen daarom (61) door

$$\chi = -\left(\frac{iKa - \Omega}{K + N}\right)^2 \tag{75}$$

$\chi_T = \chi_S = \pm\infty$; $\chi_Q = a^2$; $\chi_R = 0$ (fig. 31). In figuur 30 wordt $\eta_T = \eta_S = \cos\frac{N}{K}\pi$.

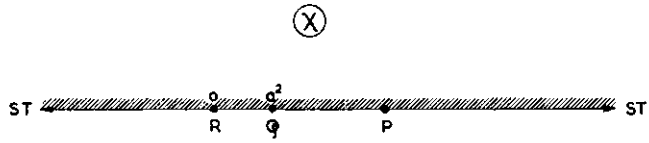

FIG. 31. De afbeelding $\chi = -\left(\frac{iKa - \Omega}{K + N}\right)^2$

De afbeelding van de bovenhelft van het η-vlak op de bovenhelft van het χ-vlak geschiedt door

$$\chi = a^2 \frac{\eta - 1}{\eta - \cos\frac{N}{K}\pi} \tag{76}$$

Uit (60) en (63) volgt

$$\pi\,(K + N)\,dz = -\zeta\,d\,\Omega$$

Uit (75) en (76) volgt

$$d\,\Omega = -\frac{ia}{2}(K + N)\left(1 - \cos\frac{N}{K}\pi\right)\frac{d\eta}{\left(\eta - \cos\frac{N}{K}\pi\right)^{3/2}(\eta - 1)^{1/2}}$$

zodat

$$z = \frac{ia}{2\pi}\left(1 - \cos\frac{N}{K}\pi\right)\int\frac{\operatorname{arcosh}(-\eta)\,d\eta}{\left(\eta - \cos\frac{N}{K}\pi\right)^{3/2}(\eta - 1)^{1/2}} \tag{77}$$

Hieruit volgt weer

$$\frac{b}{a} = \frac{1 - \cos\frac{N}{K}\pi}{2\pi}\int_1^\infty\frac{\operatorname{arcosh}\xi\,d\xi}{\left(\xi + \cos\frac{N}{K}\pi\right)^{3/2}(\xi + 1)^{1/2}} \tag{78}$$

en

$$\frac{c - b}{a} = \frac{1 - \cos\frac{N}{K}\pi}{2\pi}\int_1^\infty\frac{\operatorname{arcosh}\eta\,d\eta}{\left(\eta - \cos\frac{N}{K}\pi\right)^{3/2}(\eta - 1)^{1/2}} \tag{79}$$

Deze uitdrukkingen hadden we niet door de grensovergang $d = \infty$ uit (72) en (73) kunnen verkrijgen omdat (72) en (73) berusten op de transformatie (61), die voor $d = \infty$ ontaardt in $\sigma = -1$.

De numerieke berekening van (72) en (73) geschiedt op dezelfde manier als van de overeenkomstige integralen in 5.24. Tabel 7 geeft de resultaten. De daarin gebruikte afkortingen hebben soortgelijke betekenis als die in tabel 6. Uit deze tabel

TABEL 7. Resultaten van de integratie voor slootbreedte $= \infty$

$-N/K$	$\int_1^\infty (\xi)$	b/a	$\int_1^2 (\eta)$	$\int_1^\infty (\eta)$	$\frac{c-b}{a}$	c/a
0,001	1,38	0,0000011	1270	1271	0,000999	0,001000
0,002	1,38	0,0000043	633	634	0,001993	0,00200
0,005	1,38	0,000027	251	252	0,00496	0,00499
0,01	1,38	0,00011	124,0	125,3	0,00984	0,00995
0,02	1,37	0,00043	60,6	61,9	0,01943	0,0199
0,05	1,36	0,0027	22,6	23,9	0,0468	0,0495
0,1	1,35	0,010	9,89	11,25	0,0877	0,0982
0,2	1,28	0,039	3,81	5,22	0,1587	0,198

blijkt dat voor kleine waarden van $-N/K$ c/a grotendeels bepaald wordt door de integraal

$$\int_1^2 \frac{\operatorname{arcosh} \eta \, d\eta}{\left(\eta - \cos \frac{N}{K} \pi\right)^{3/2} (\eta - 1)^{1/2}}$$

Wanneer we arcosh η vervangen door de eerste term $\sqrt{2(\eta - 1)}$ van de reeksontwikkeling, zien we dat deze integraal bij benadering gelijk is aan

$$\sqrt{2} \int_1^2 \frac{d\eta}{\left(\eta - \cos \frac{N}{K} \pi\right)^{3/2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\left(1 - \cos \frac{N}{K} \pi\right)^{1/2}}$$

zodat

$$\frac{c}{a} \approx \frac{1}{\pi} \sqrt{2\left(1 - \cos \frac{N}{K} \pi\right)} = \frac{2}{\pi} \sin \frac{-N}{K} \frac{\pi}{2} \approx \frac{-N}{K}$$

Tabel 7 laat zien hoe verrassend nauwkeurig voldaan is aan de relatie

$$\frac{c}{a} \approx \frac{-N}{K} \tag{80}$$

Dit moet echter als toeval beschouwd worden.

5.26. *Overzicht en vergelijking met de uitkomsten van* HOOGHOUDT

In tabel 8 vindt men alle berekende waarden c/a. Ter vergelijking zijn daarin ook de bijbehorende waarden voor drains opgenomen, berekend volgens (38).

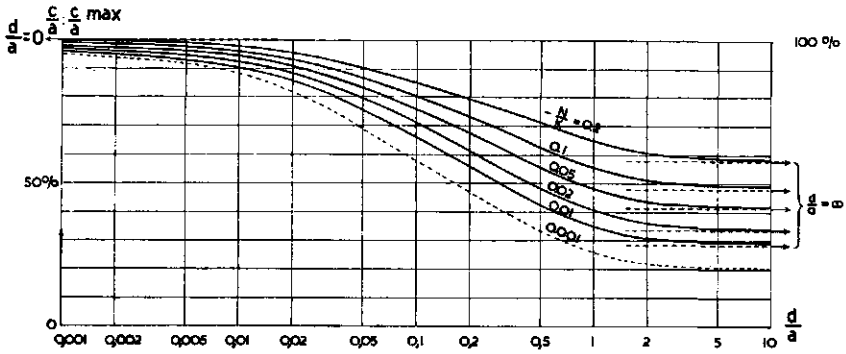

FIG. 32. De procentuele invloed van de slootbreedte

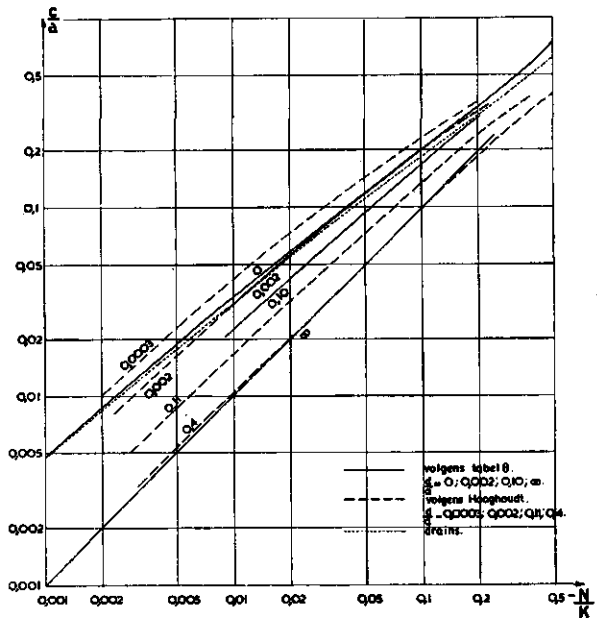

FIG. 33. Vergelijking met de uitkomsten van HOOGHOUDT en met de formule voor drains

TABEL 8. Overzicht van alle berekende waarden van c/a voor sloten

$-N/K$	$d/a = 0$	$d/a = 0{,}002$	$d/a = 0{,}1$	$d/a = \infty$	Drains
0,001	0,00475			0,00100	0,00460
0,002	0,00863			0,00200	0,00832
0,005	0,0187			0,00499	0,0179
0,01	0,0331	0,0315	0,0221	0,00995	0,0316
0,02	0,0583	0,0554	0,0417	0,0199	0,0548
0,05	0,119	0,118	0,0914	0,0495	0,111
0,1	0,202	0,202	0,165	0,0982	0,184
0,2	0,341	0,338	0,296	0,198	0,304
0,5	0,742				0,608

We merken op dat de invloed van de slootbreedte groter wordt bij afnemende waarden van $-N/K$. Procentueel vindt men dit weergegeven in figuur 32, waar de verhouding van c/a bij slootbreedte d/a en c/a bij slootbreedte nul is uitgezet tegen d/a.

In figuur 33 worden de uitkomsten van tabel 8 vergeleken met krommen berekend uit de tabellen van HOOGHOUDT (1940) voor $d/a = 0{,}4$; 0,11; 0,002 en 0,0003. Voor $d/a = 0{,}002$ vallen de overeenkomstige krommen nagenoeg samen. Voor $d/a < 0{,}002$ geven de tabellen van HOOGHOUDT te grote waarden van c/a, voor $d/a > 0{,}002$ daarentegen te kleine waarden, m.a.w. de methode van HOOGHOUDT geeft een iets te sterke afhankelijkheid van de slootbreedte.

Verder zien we dat de formule voor drains een goede benadering is bij niet te brede sloten.

5.27. *Appendix*

We zullen nu de ontwikkelingen voor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} \qquad \text{en} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^2}$$

afleiden, waar we in (70) en (71) gebruik van gemaakt hebben. Zij

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

dan is

$$\frac{df}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = \mathrm{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n} = \mathrm{Re}\,(1 - e^{ix}) = -\tfrac{1}{2} \ln \{(1 - \cos x)^2 + \sin^2 x\} =$$

$$= -\ln (2 \sin \tfrac{1}{2} x) = -\ln 2 - \ln (\sin \tfrac{1}{2} x)$$

nu is

$$\frac{d}{du} \{\ln (\sin u)\} = \cot u = \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} u^{2n}$$

waarbij B_{2n} de getallen van BERNOUILLI zijn.

Hieruit volgt door integratie

$$\ln(\sin \tfrac{1}{2}x) = \ln \tfrac{1}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n+1)} x^{2n}$$

en

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = x(1 - \ln x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}\, x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

Voor kleine x geldt dus bij benadering

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} \approx x(1 - \ln x)$$

Op soortgelijke manier kunnen we afleiden dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^2} = x \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} - 1}{2n(2n+1)!} B_{2n}\, x^{2n+1}$$

dus voor kleine x

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^2} \approx x \ln 2$$

Door optellen blijkt nog dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2} \approx \tfrac{1}{2}x(1 - \ln \tfrac{1}{2}x)$$

5.3. Stroming naar een sloot met ondoorlatende zijwand

In figuur 34 vindt men het stromingsgebied. De sloot is rechthoekig van vorm en bezit een ondoorlatende zijwand PQ. In de sloot staat water ter hoogte h_0. De afstand tussen de sloten zij $2a$, de hoogte van het phreatisch oppervlak bij de sloot en midden tussen de sloten resp. b en c, zodat $z_Q = ib$ en $z_R = a + ic$. De slootbreedte zij weer $2d$, zodat $z_P = -ih_0$ en $z_T = -d - ih_0$. Bij dit stromingsprobleem moet weer met de mogelijkheid rekening gehouden worden dat het phreatisch opppervlak een buigpunt Q′ bezit. De hoek tussen de raaklijn in Q′ en de x-as zij θ. De randvoorwaarden luiden

$$\begin{array}{ll}
\text{langs PQ:} & \psi = -Na \\
\text{langs QR:} & \left\{ \begin{array}{l} \varphi = Ky \\ \psi = N(x-a) \end{array} \right. \\
\text{langs RS:} & \psi = 0 \\
\text{langs ST:} & \psi = 0 \\
\text{langs TP:} & \varphi = 0
\end{array}$$

De hodograaf (fig. 35) heeft dezelfde vorm als bij drains (fig. 5). De snelheid in P is oneindig groot (vgl. Hfdst. 3). $w_Q = w_R = -iN$; $w_{Q''} = iK$.

De afbeeldingsfuncties leveren geen moeilijkheden. We geven dan ook de afleiding van de differentiaalvergelijking in verkorte vorm.

Het stromingsgebied beelden we op de bovenhelft van het σ-vlak af met behulp van

$$\Omega = \omega - iNz$$

$$\sigma = \cosh \frac{\Omega + Nh_0 - iNd}{-N(a+d)}$$

We vinden daarbij $\sigma_P = -1$;
$\sigma_T = 1$; $\sigma_S = \pm\infty$;

$$\sigma_R = -\cosh \frac{(K+N)\,b + Nh_0}{-N(a+d)};$$

$$\sigma_Q = -\cosh \frac{(K+N)\,c + Nh_0}{-N(a+d)}$$

De hodograaf beelden we af op de bovenhelft van het η-vlak met de functies

$$\zeta = \frac{K+N}{-N+iw}$$

$$\zeta = \frac{\eta - 1}{2\sqrt{\eta}} \cot\theta - 1$$

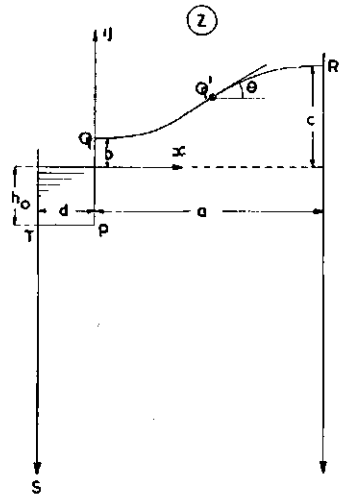

FIG. 34. Het stromingsgebied

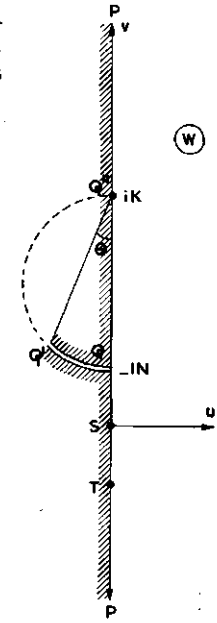

FIG. 35. De Hodograaf

en we vinden $\eta_R = \pm\infty$; $\eta_{Q'} = -1$; $\eta_Q = 0$; $\eta_{Q''} = 1$; $\eta_P = \lambda^2$ waarbij $\frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} = 2 \operatorname{tg} \theta$; $\eta_S = \mu^2$ waarbij $\frac{\mu^2 - 1}{2\mu} = 2\frac{K}{-N} \operatorname{tg} \theta$.

De bovenhelften van het σ-vlak en het η-vlak worden tenslotte op elkaar afgebeeld door

$$\eta = \mu^2 \frac{\sigma - \sigma_R}{\sigma - \sigma_Q}$$

Daaruit volgt nog

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\sinh \dfrac{(K+N)\,b + Nh_0}{-N(a+d)}}{\sinh \dfrac{(K+N)\,c + Nh_0}{-N(a+d)}}$$

Het afleiden van de integratieformule volgt ook de bekende paden

$$\frac{d\Omega}{dz} = -w - iN = i\frac{K+N}{\zeta}$$

$$i(K+N)\,dz = -d\Omega + \frac{\eta - 1}{2\eta} \cot\theta\, d\Omega$$

Gebruik maken van

$$\frac{d\Omega}{d\sigma} = \frac{-N}{\pi}(a+d)\frac{1}{(\sigma^2-1)^{1/2}}$$

volgt na enige herleiding

$$(K+N)\,dz = id\,\Omega - \frac{iK\,(a+d)}{\pi}\frac{(\sigma-q)\,d\sigma}{\{(\sigma-\sigma_R)\,(\sigma-\sigma_Q)\,(\sigma^2-1)\}^{1/2}}$$

waarbij

$$q = \frac{\mu^2\,\sigma_Q + \sigma_R}{\mu^2+1}$$

Dit is een elliptische integraal. De herleiding tot normaal-integralen leidt echter tot zeer omslachtige formules. Van een numerieke berekening is dan ook afgezien.

6. DE RELAXATIEMETHODE VAN SOUTHWELL

De relaxatiemethode van SOUTHWELL (1938, 1946) is speciaal geschikt om numerieke oplossingen te vinden van een klasse partiële differentiaalvergelijkingen, waarvan de vorm van de rand en de aard van de randvoorwaarden geen exacte analytische oplossing toelaten.

Door SOUTHWELL en SHAW (1941) is deze methode gebruikt om de stroming door- en onder aarden dammen te berekenen. Daarbij werd uitgegaan van de vergelijking

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

waaraan volgens (2) en (4) door de druk p voldaan moet zijn.

In het geval van onze probleemstelling ligt het voor de hand om uit te gaan van (6), daar immers de stroomfunctie ψ langs het grootste deel van de rand bekend is.

We zullen nu allereerst een uiteenzetting geven van de methode van SOUTHWELL in het algemeen, voor zover deze voor onze probleemstelling van belang is, en vervolgens zullen we laten zien hoe in het bijzonder met de verschillende randvoorwaarden rekening gehouden kan worden.

6.1. DE DIFFERENTIEVERGELIJKING VAN LAPLACE

We brengen in het gebied, waar aan de differentiaalvergelijking (6) moet worden voldaan een netwerk van vierkanten met zijde δ aan en we beschouwen de vijf roosterpunten (x, y), $(x + \delta, y)$, $(x, y + \delta)$, $(x - \delta, y)$, $(x, y - \delta)$. Laat $\psi(x, y)$ in deze punten resp. de waarden ψ_0, ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 hebben (fig. 36). De eenvoudigste differentie-benaderingen voor de tweede afgeleiden in (6) zijn

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\delta}\left(\frac{\psi_1 - \psi_0}{\delta} - \frac{\psi_0 - \psi_3}{\delta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \approx \frac{1}{\delta}\left(\frac{\psi_2 - \psi_0}{\delta} - \frac{\psi_0 - \psi_4}{\delta}\right)$$

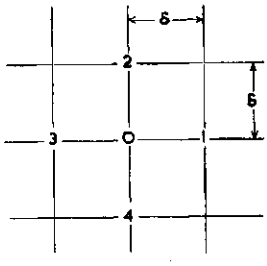

FIG. 36.
Netwerk van vierkanten

We kunnen derhalve (6) opvatten als grensgeval van de differentievergelijking

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = 4\psi_0 \tag{81}$$

Het oplossen van deze differentievergelijking wil niets anders zeggen dan: zoek in de roosterpunten getallen zodanig dat elk getal het rekenkundig gemiddelde is van de vier getallen in de direct omliggende punten. Een methode om door successieve benadering een oplossing van (81) te vinden werd reeds door LIEBMANN (1918) gegeven. Deze methode is echter veel minder snel dan die van SOUTHWELL.

Evenals voor (6) zal voor (81) gelden dat de oplossing pas eenduidig vastgelegd is door de randvoorwaarden. In 6.3 wordt behandeld hoe aan de randvoorwaarden voldaan kan worden.

Een oplossing van (81) zal in het algemeen een des te betere benadering van de oplossing van (6) in de roosterpunten zijn, naarmate de roosterconstante kleiner is (een bewijs vindt men bij LE ROUX, 1914). Het is dus zaak om, vooral op die plaatsen waar ψ sterk varieert, de roosterconstante voldoende klein te kiezen.

SOUTHWELL maakt gebruik van een mechanische interpretatie van de vergelijkingen (6) en (81). Beschouwen we nl. een uniform gespannen membraan, waarvan het gewicht verwaarloosd kan worden, ter grootte van het gebied waar aan (6) moet worden voldaan, dan stelt ψ (x, y) de transversale uitwijking van het membraan uit de oorspronkelijk vlakke toestand voor, wanneer aan het membraan de overeenkomstige randvoorwaarden worden opgelegd. De differentievergelijking beschrijft dan de transversale verplaatsing in de knooppunten van een netwerk van gewichtsloze snaren met dezelfde spanning (SOUTHWELL, 1946, par. 36—41 en SOUTHWELL-CHRISTOPHERSON, 1938).

6.2. HET RELAXATIEPROCES

De aard van het probleem en de kennis van de randvoorwaarden maken het mogelijk om aan ψ in de roosterpunten enigszins plausibele waarden toe te kennen. In het algemeen is dan natuurlijk nog niet voldaan aan (81), zodat

$$F_0 = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0 \neq 0 \tag{82}$$

In de taal van de snaaranalogie wil dat zeggen, dat er in de knooppunten van de snaren nog uitwendige transversale krachten werkzaam zijn. Als maat voor deze krachten neemt SOUTHWELL de waarde F_0 en noemt dan ook F_0 de „residukracht" Wij zullen in het vervolg spreken van het „residu". We moeten derhalve proberen om de residuen gelijk aan nul te maken door de gekozen waarden ψ op een geschikte manier te veranderen. Uit (81) volgt dat door een verandering $\Delta\ \psi_0$ van ψ_0 het residu F_0 verandert met een bedrag $\Delta\ F_0 = -4\ \Delta\ \psi_0$. Tengevolge van de verandering $\Delta\ \psi_0$ veranderen echter ook de residuen van de vier onmiddellijk omliggende roosterpunten en wel elk met een bedrag $+\ \Delta\ \psi_0$. In figuur 37 is dit schematisch weergegeven voor een eenheidsverandering $\Delta\ \psi_0 = 1$. Dergelijke schema's noemt SOUTHWELL „relaxatiepatronen". Men kan daarin direct zien wat de consequenties zijn van een eenheidsverandering. Door een reeks van dergelijke operaties kunnen we de residuen zo klein maken als we willen. De convergentie van dit proces volgt direct uit het convergentiebewijs voor het LIEBMANNproces (zie 6.1), dat o.a. door COURANT (1926) is gegeven.

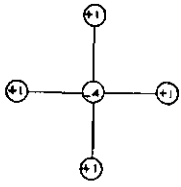

FIG. 37. Relaxatie patroon bij een regelmatig netwerk

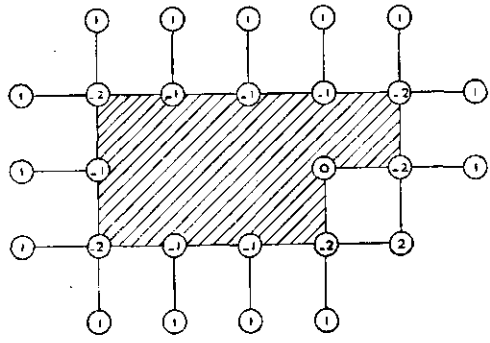

FIG. 38. Blokrelaxatie

Vaak kan men met voordeel gebruik maken van z.g. „blokrelaxatie". Daarbij geven we een groep aaneensluitende roosterpunten in zijn geheel dezelfde verplaat-

sing. Binnen het „blok" veranderen de residuen niet. De verandering in de residuen langs de rand kan men met behulp van (81) gemakkelijk afleiden. Figuur 38 geeft het relaxatiepatroon van een voorbeeld van blokrelaxatie. De verandering van het blok in zijn geheel kan men het handigste zodanig kiezen dat de algebraische som van de residuen van het blok nul wordt. De overgebleven residuen kunnen dan sneller geliquideerd worden (SOUTHWELL, 1946, par. 54 en 55).

Wanneer men op deze manier de residuen voldoende klein gemaakt heeft, kan men zo nodig tot een fijner verdeeld netwerk overgaan, waarbij van de reeds gevonden waarden van ψ gebruik gemaakt kan worden om in de nieuwe roosterpunten plausibele waarden te vinden.

In veel gevallen zal het veel tijd en moeite besparen wanneer men alleen op die plaatsen, waar de functiewaarde sterk varieert, tot een fijner netwerk overgaat. De enige complicatie, die zich bij een gegradueerd netwerk voordoet, is een gewijzigd relaxatiepatroon in het overgangsgebied van het grove- naar het fijne rooster. Zo hangt in figuur 39 het residu in A af van de functiewaarde in B, C, D en E. Een verandering van de functiewaarde in F heeft dus geen invloed op het residu in A. Omgekeerd geeft een verandering van de functiewaarde in A wel een verandering van het residu in F. In de figuur

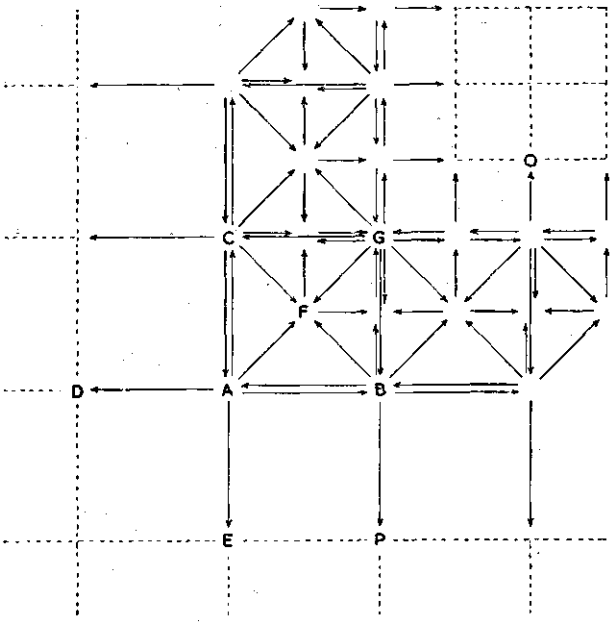

FIG. 39. Overgang naar een fijner netwerk

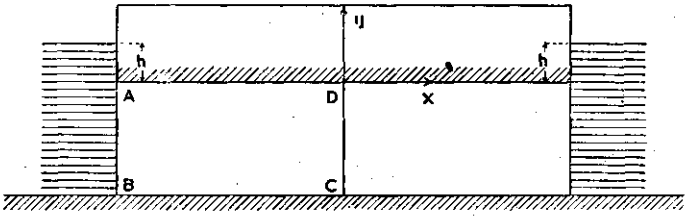

FIG. 40. Stromingsproblemen ter verduidelijking van het relaxatieproces

is dit door pijlen weergegeven. We zien dat door een verandering van de functiewaarde in A de residuen van vijf omliggende punten beïnvloed worden, in F twee, in G zes enz. In P en Q zijn het weer normaal vier punten. Na enige ervaring

met de relaxatietechniek heeft men dergelijke patronen echter niet nodig, maar zal men gemakkelijk direct de gevolgen van een verandering in functiewaarde op de residuen van de omliggende punten in het overgangsgebied kunnen zien (SOUTHWELL, 1946, par. 93).

Ter verduidelijking van het relaxatieproces kiezen we een hypothetisch stromingsprobleem, waarbij de randvoorwaarden geen speciale moeilijkheden opleveren Een watervoerende laag, boven en beneden begrensd door ondoorlatende lagen, wordt links en rechts gevoed door kanalen, die tot de tweede ondoorlatende laag reiken (fig. 40). In het midden bevindt zich een drain D. Uit symmetrie-overwegingen besluiten we, dat DC een stroomlijn is, zodat we ons kunnen beperken tot het gebied ABCD. Langs BC, CD en AD heeft ψ dan een vaste waarde. Langs AB varieert ψ lineair (aangenomen dat AB zover van D verwijderd is, dat in de buurt van AB de stroming rechtlijnig horizontaal is).

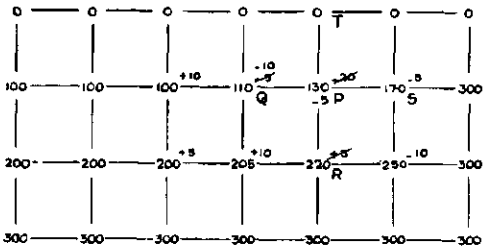

FIG. 41. Uitvoering van het relaxatieproces

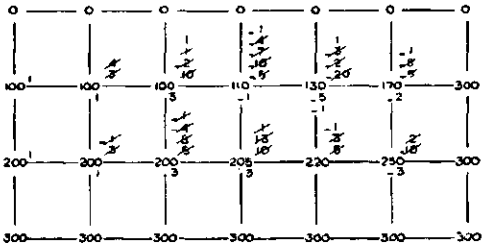

FIG. 42. Het relaxatieproces voltooid

Nu is $v_x = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial y}$; langs AB is v_x positief; daaruit volgt dat langs AB ψ van boven naar beneden toeneemt. Langs AD stellen we derhalve $\psi = 0$ en langs BCD $\psi = 300$ (in de keuze van deze waarden zijn we vrij, omdat het stromingsbeeld reeds bepaald is door de relatieve ψ-waarden; de absolute ψ-waarden kunnen we op een constante na bepalen zodra we de werkelijke dimensies van het probleem in aanmerking nemen). In figuur 41 vindt men de als plausibel aangenomen ψ-waarden en direct rechts daarvan de residuen. In P is bijv. het residu $110 + 220 + 170 - 4 \times 130 = -20$. Door een verandering -5 in de ψ-waarde van P $\left(\text{aangegeven door } \begin{matrix}130\\-5\end{matrix}\right)$ verandert het residu in P met 20 en wordt 0 $\left(\text{aangegeven door } \begin{matrix}130^{-20}\\-5\end{matrix}\right)$ en van Q, R en S elk met -5 (op soortgelijke wijze aangegeven). T heeft de vaste randwaarde 0; het residu mag daar elke waarde hebben en behoeft dus niet aangegeven te worden. Figuur 42 geeft het verdere verloop van het relaxatieproces, dat doorgevoerd is totdat de residuen hoogstens 2 waren. Wil men de residuen nog kleiner maken, dan kan men beter eerst alle getallen met een factor 10 vermenigvuldigen om breuken te vermijden. In ons geval heeft dit echter geen zin wegens de fouten, die tengevolge van het grove netwerk al aanwezig zijn.

In figuur 43 vindt men het resultaat met enkele stroom- en aequipotentiaallijnen. Het is bekend dat men bij een potentiaalstroming het gehele stromingsgebied door de stroom- en aequipotentiaallijnen in kromlijnige vierkanten kan verdelen. Voor

gebieden met vaste begrenzing wordt deze eigenschap wel gebruikt om door proberen het stromingsbeeld te tekenen (de z.g. „vierkantjes methode", zie DACHLER, 1936, p. 125). Daar we in ons geval het stroomlijnenbeeld berekend hebben, kan met weinig moeite en fouten het aequipotentiaallijnenbeeld zodanig getekend worden dat het gebied in kromlijnige vierkanten verdeeld is. Dit geeft ons niet alleen een eenvoudige contrôle op de gemaakte berekening [1], maar biedt tevens de mogelijkheid om snel het verloop van de potentiaal af te leiden. De verschillen $\Delta\ \varphi$ en $\Delta\ \psi$ van opeenvolgende aequipotentiaal- en stroomlijnen zijn namelijk gelijk (DACHLER, 1936, p. 48).

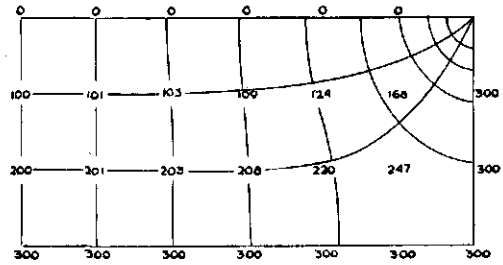

FIG. 43. Stroomlijnen en aequipotentiaallijnen

Het is ook mogelijk om in de roosterpunten de potentiaal te berekenen (SOUTHWELL, 1946, par. 109 en GILLES, 1948). Het is nauwkeuriger, maar veel omslachtiger. Het tekenen van de aequipotentiaallijnen blijkt echter voldoende nauwkeurig te zijn voor de practische gevallen.

In figuur 44 zijn we in de buurt van de drain tot een fijner netwerk overgegaan. Stel dat de drainomtrek samenvalt met de negentiende aequipotentiaallijn, geteld van het kanaal, en dat de drain half met water gevuld is, dan is langs de drainomtrek $\varphi = 0$. Langs AB (fig. 40) is $\varphi = Kh$, wanneer h de hoogte van het kanaalpeil

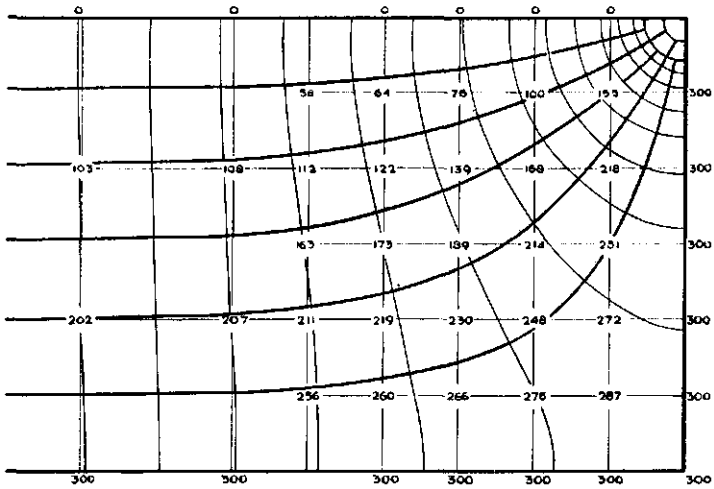

FIG. 44. Overgang naar een fijner netwerk

boven AD is. Het functiewaardeverschil tussen opeenvolgende aequipotentiaallijnen en stroomlijnen is dan $\Delta\ \varphi = \Delta\ \psi = Kh/19$. Het totale debiet van de zes stroombuizen is dus $6\ \Delta\ \psi = 6Kh/19$. Valt meer algemeen de drainomtrek samen met de

[1] Een nog verder doorgevoerde contrôle, ook op de getekende aequipotentiaallijnen, verkrijgt men door de diagonalen van de vierkantjes te tekenen; deze moeten op hun beurt weer een stelsel van kromlijnige vierkanten geven.

n^e aequipotentiaallijn en is de potentiaal daarlangs gelijk aan Kh', dan wordt het totale debiet $6K(h-h')/n$.

Opgemerkt dient nog te worden dat de benaderingsoplossing, die we zo vinden, niet eenduidig bepaald is, maar afhangt van de uiteindelijke residuen. De oplossing met allemaal positieve residuen kan aanmerkelijk afwijken van de oplossing met allemaal negatieve residuen, zoals door WOLF (1926) is aangetoond. Om belangrijke fouten te vermijden is het dus nodig om een voldoend aantal decimalen mee te nemen. Ook verdient het aanbeveling om de positieve en negatieve residuen zoveel mogelijk gelijkmatig over het gebied te verdelen.

6.3. DE VERWERKELIJKING VAN DE RANDVOORWAARDEN

Allereerst zullen we een algemene complicatie behandelen, die zich bij elke rand kan voordoen. Het zal immers lang niet altijd mogelijk zijn om de roosterpunten overal precies op de rand te plaatsen. (66) en (67) kunnen dan niet gebruikt worden, maar moeten gegeneraliseerd worden. We onderstellen daarom dat de afstanden van de omliggende punten tot het beschouwde punt resp. gelijk zijn aan $\theta_1\delta$, $\theta_2\delta$, $\theta_3\delta$, $\theta_4\delta$ (fig. 45) en we maken gebruik van de snaaranalogie (SOUTHWELL, 1946, par. 62). De transversale kracht, die een snaar op een knooppunt uitoefent, is evenredig met de helling van de snaar en dus omgekeerd evenredig met zijn lengte. Bij een eenheidsverplaatsing van het knooppunt verandert derhalve het residu in het knooppunt niet met —4, maar met $-\left(\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_2}+\frac{1}{\theta_3}+\frac{1}{\theta_4}\right)$ en de residuen in de omliggende knooppunten met $\frac{1}{\theta_1}, \frac{1}{\theta_2}, \frac{1}{\theta_3}, \frac{1}{\theta_4}$. In plaats van (68) krijgen we dienovereenkomstig

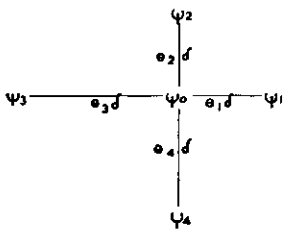

FIG. 45.
Onregelmatig netwerk

$$F_0 = \frac{\psi_1}{\theta_1}+\frac{\psi_2}{\theta_2}+\frac{\psi_3}{\theta_3}+\frac{\psi_4}{\theta_4}-\psi_0\left(\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_2}+\frac{1}{\theta_3}+\frac{1}{\theta_4}\right) \tag{83}$$

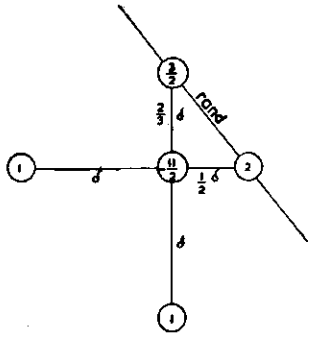

FIG. 46.
Onregelmatig network in de buurt van de rand

In de practisch voorkomende gevallen zijn hoogstens twee van de getallen θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 kleiner dan 1. Figuur 46 geeft het relaxatiepatroon voor het geval $\theta_1 = 1/2$, $\theta_2 = 2/3$.

Wanneer langs de als vast onderstelde rand òf de potentiaalfunctie φ òf de stroomfunctie ψ gegeven is, levert de integratie geen moeilijkheden. Dit wordt echter anders in het geval van gemengde randvoorwaarden, waarbij langs een gedeelte van de rand φ en langs een ander gedeelte ψ gegeven is. In figuur 47 zij bijv. ψ gegeven langs ABC en φ langs CDA. We kunnen er voor zorgen dat op de rechte AC roosterpunten komen te liggen. In het gehele gebied zijn φ en ψ als ortho-

gonaal toegevoegde functies door deze randvoorwaarden vastgelegd, zodat overal, dus ook langs AC, geldt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{5}$$

De met (5) overeenkomende differentievergelijkingen luiden

$$\varphi_1 - \varphi_3 = \psi_2 - \psi_4 \quad , \quad \varphi_2 - \varphi_4 = -(\psi_1 - \psi_3)$$

bovendien is

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 4\,\varphi_0$$

en

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = 4\,\psi_0$$

hieruit volgt

$$2\,\psi_1 + \psi_2 + \psi_4 = 4\,\psi_0 + \varphi_4 - \varphi_2 \tag{84}$$

$$2\,\varphi_3 + \varphi_2 + \varphi_4 = 4\,\varphi_0 + \psi_4 - \psi_2 \tag{85}$$

We kunnen nu met de relaxatiemethode in het gebied ABC de functie ψ en in het gebied CDA de functie φ zodanig bepalen dat langs AC voldaan is aan (84) en (85). De bijbehorende residuen zijn

$$F_0 = 2\,\psi_1 + \psi_2 + \psi_4 - 4\,\psi_0 - \varphi_4 + \varphi_2 \tag{86}$$

$$F_0 = 2\,\varphi_3 + \varphi_2 + \varphi_4 - 4\,\varphi_0 - \psi_4 + \psi_2 \tag{87}$$

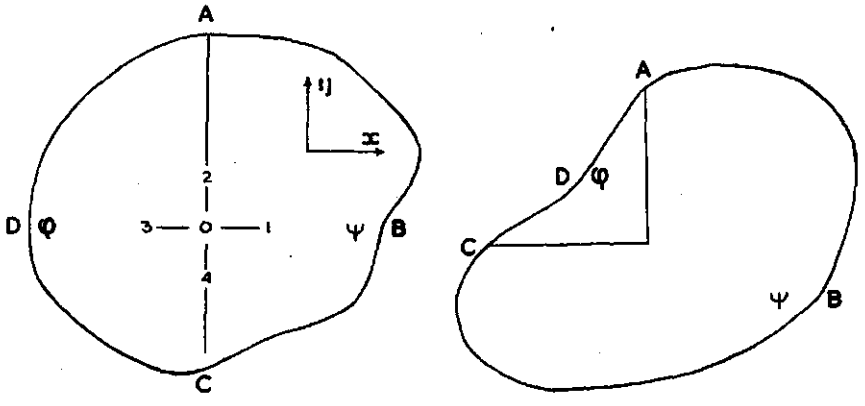

FIG. 47 en 48. Gemengde randvoorwaarden

Langs AC moeten dus in elk roosterpunt zowel φ als ψ berekend worden. Soms is het noodzakelijk (of aanbevelenswaardig) om AC te vervangen door een rechthoekig gebroken lijn, bijv. zoals in figuur 48 is aangegeven. Nieuwe moeilijkheden doen zich daarbij echter niet voor (SOUTHWELL, 1946, par. 126). In de buurt van AC treden afwijkende relaxatie patronen op; men vindt deze weergegeven in figuur 49.

De formulering wordt vereenvoudigd wanneer ADC langs de rechte AC valt. (85) en (87) vervallen dan. Is bovendien nog φ constant langs AC, dan gaan (84) en (86) over in

$$2\,\psi_1 + \psi_2 + \psi_4 = 4\,\psi_0 \tag{88}$$

$$F_0 = 2\,\psi_1 + \psi_2 + \psi_4 - 4\,\psi_0 \tag{89}$$

en de relaxatiepatronen van figuur 49 in die van figuur 50.

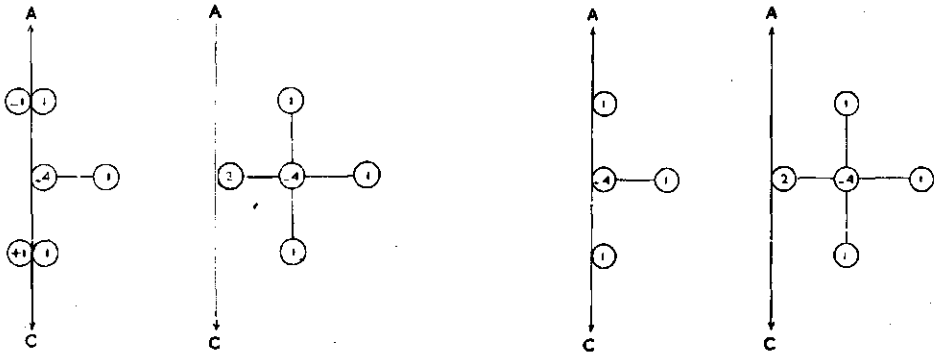

FIG. 49 en 50. Relaxatiepatronen bij gemengde randvoorwaarden

Langs het phreatisch oppervlak moeten we aan twee niet aequivalente randvoorwaarden voldoen, terwijl bovendien de vorm van het oppervlak als onderdeel van de oplossing te voorschijn moet komen. In algemene trekken gaan we daarbij als volgt te werk. We nemen een plausibel verloop van het phreatisch oppervlak aan en berekenen voor dat verloop het stromingsbeeld zodanig, dat aan één van de beide randvoorwaarden voldaan is. Aan de tweede randvoorwaarde zal alleen dan voldaan zijn, wanneer we toevallig het verloop goed gekozen hadden. In het algemeen is dat natuurlijk niet het geval. We wijzigen daarom het verloop van het phreatisch oppervlak zodanig, dat aan de tweede randvoorwaarde voldaan is. Het berekende stromingsgebied is dan echter niet meer juist. Dit wordt nu opnieuw berekend onder aanhouden van de eerste randvoorwaarde, waarna opnieuw de tweede randvoorwaarde wordt gecontroleerd enz., totdat we door successieve approximatie het juiste verloop gevonden hebben. De convergentie van het proces kan men soms bespoedigen door, bij het wijzigen van het phreatisch oppervlak, al naar de omstandigheden verder of minder ver te gaan dan vereist wordt door de tweede randvoorwaarde. Op deze manier berekenden SOUTHWELL en SHAW (1941; 1946, par. 195) de stroming door aarden dammen.

Stel nu dat de plaats van punt R (fig. 1) gegeven is. Langs QR luidt de randvoorwaarde $\psi = Nx + \text{const}$. Daar we ψ slechts op een constante factor na behoeven te kennen, kunnen we aan deze randvoorwaarde gemakkelijk voldoen, wanneer we voor QR een plausibel verloop aangenomen hebben. Langs de sloot bestaat de rand uit aequipotentiaal- en kwellijnen. Dit gedeelte is echter in het algemeen, bij een niet te fijn verdeeld netwerk, zo klein dat we niet van de methode der gemengde randvoorwaarden gebruik hoeven te maken. Langs de rest van de

rand is ψ gegeven. We kunnen nu in het gehele gebied de stroomfunctie in de roosterpunten berekenen en de stroom- en aequipotentiaallijnen tekenen. Langs QR moet nu tevens aan de tweede randvoorwaarde $\varphi = Ky$ voldaan zijn. We controleren derhalve of tussen elke twee aequipotentiaallijnen, die op het phreatisch oppervlak uitmonden, steeds eenzelfde hoogteverschil van het phreatisch oppervlak bestaat. Is dat niet het geval, dan wijzigen we dienoverkomstig het verloop van QR en beginnen opnieuw. Na ongeveer drie stappen heeft men meestal het juiste verloop gevonden. De verhouding N/K kan men dan berekenen door langs het phreatisch oppervlak het aantal stroom- en aequipotentiaallijnen per lengteeenheid in resp. de x- en y-richting te tellen en daarvan de verhouding te nemen. Om gekeerd kan men bij gegeven N/K de plaats van punt R en het verdere verloop van het phreatisch oppervlak vinden.

6.4. Lagen met verschillende doorlatendheid

Beschouw de stroomlijnen in het grensgebied van twee horizontale lagen met doorlaatfactoren K_{I} en K_{II} (fig. 51). In de grenslaag wordt een stroomlijn gebroken volgens de brekingswet

(90) $$K_{\mathrm{II}} \operatorname{tg} \alpha_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}} \operatorname{tg} \alpha_{\mathrm{II}}$$

(Dachler, 1936, p. 129 en Muskat, 1937, par. 7.1)

nu is

$$\operatorname{tg} \alpha_{\mathrm{I}} = \frac{v_{x\mathrm{I}}}{v_{y\mathrm{I}}} \quad \text{en} \quad \operatorname{tg} \alpha_{\mathrm{II}} = \frac{v_{x\mathrm{II}}}{v_{y\mathrm{II}}}$$

Uit continuiteitsoverwegingen volgt dat langs de grenslaag

$$v_{y\mathrm{I}} = v_{y\mathrm{I}}$$

zodat

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_{\mathrm{I}}}{\operatorname{tg} \alpha_{\mathrm{II}}} = \frac{v_{x\mathrm{I}}}{v_{x\mathrm{II}}}$$

aangezien

$$v_{x\mathrm{I}} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{\mathrm{I}} \quad \text{en} \quad v_{x\mathrm{II}} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{\mathrm{II}}$$

moet derhalve

(91) $$K_{\mathrm{II}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{\mathrm{II}}$$

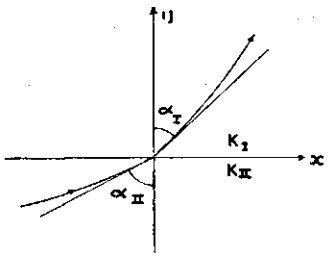

Fig. 51.
Breking van stroomlijnen

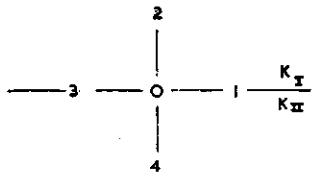

Fig. 52.
Roosterpunten langs de grens van twee verschillend doorlatende lagen

De met (91) overeenkomende differentievergelijking luidt (langs de grens denken we roosterpunten, figuur 52)

$$K_{II}\,(\psi_2 - \psi_4') = K_I\,(\psi_2' - \psi_4) \tag{92}$$

ψ_2' en ψ_4' zijn fictieve waarden die zouden gelden in de punten 2 en 4, wanneer het gebied met doorlaatfactor K_{II} voortgezet gedacht wordt tot punt 2 en het gebied met doorlaatfactor K_I tot punt 4. In het gebied K_I is

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4' = 4\,\psi_0$$

in het gebied K_{II} is

$$\psi_1 + \psi_2' + \psi_3 + \psi_4 = 4\,\psi_0$$

Elimineren we ψ_2' en ψ_4' uit de laatste drie vergelijkingen, dan vinden we als differentievergelijking voor de rand

$$\psi_1 + \frac{2K_{II}}{K_I + K_{II}}\,\psi_2 + \psi_3 + \frac{2K_I}{K_I + K_{II}}\,\psi_4 = 4\,\psi_0 \tag{93}$$

het residu is

$$F_0 = \psi_1 + \frac{2K_{II}}{K_I + K_{II}}\,\psi_2 + \psi_3 + \frac{2K_I}{K_I + K_{II}}\,\psi_4 - 4\psi_0 \tag{94}$$

De daarbij optredende relaxatiepatronen voor het geval $K_I/K_{II} = {}^1/_5$ vindt men in figuur 53.

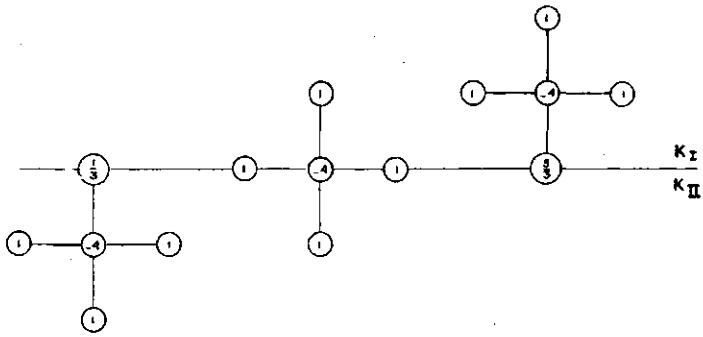

FIG. 53. Relaxatiepatronen langs de grens van twee verschillend doorlatende lagen

Op plaatsen waar de grens in de buurt van de rand komt kan het gebeuren dat we (93) en (94) moeten generaliseren. We zullen als voorbeeld het geval behandelen waarbij punt 2 (fig. 52) niet de afstand δ, maar een kleinere afstand $\theta\,\delta$ tot het punt 0 bezit. Vergelijking (92) blijft ongewijzigd. De volgende twee gaan echter over in

$$\psi_1 + \frac{1}{\theta}\,\psi_2 + \psi_3 + \psi_4' = \left(3 + \frac{1}{\theta}\right)\psi_0$$

$$\psi_1 + \frac{1}{\theta}\,\psi_2' + \psi_3 + \psi_4 = \left(3 + \frac{1}{\theta}\right)\psi_0$$

eliminatie van ψ_2' en ψ_4' levert nu

$$\psi_1 + \frac{1+\theta}{\theta}\,\frac{K_{II}}{\theta\,K_I + K_{II}}\,\psi_2 + \psi_3 + (1+\theta)\,\frac{K_I}{\theta\,K_I + K_{II}}\,\psi_4 = \left(3 + \frac{1}{\theta}\right)\psi_0$$

Voor de potentiaalfunctie kunnen we soortgelijke formules afleiden door uit te gaan van de brekingswet voor aequipotentiaallijnen (DACHLER, 1936, p. 130). Zo blijkt het bijv. dat we in (93) en (94) ψ door φ mogen vervangen, wanneer we K_{I} en K_{II} verwisselen.

De formules voor de druk p zijn door SOUTHWELL en SHAW (1941) afgeleid.

6.5. UITGEWERKTE VOORBEELDEN [1]

De eerste vier voorbeelden zijn berekend om de uitkomsten van de relaxatiemethode te vergelijken met de formules, die gevonden zijn met behulp van de hodograafmethode.

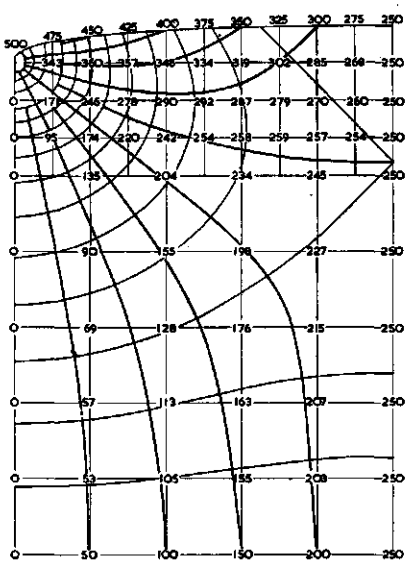

FIG. 54.
Drainage. Regenval gecombineerd met kwel

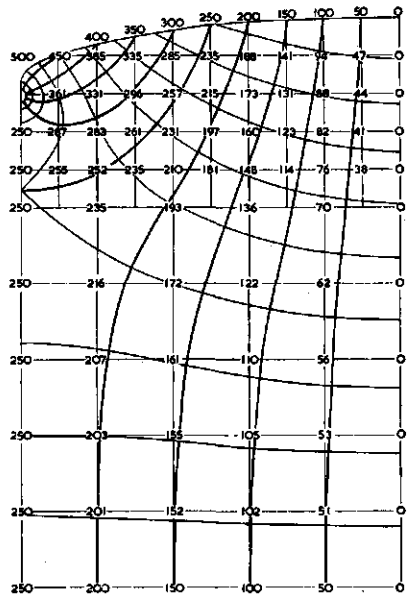

FIG. 55.
Drainage. Regenval gecombineerd met wegzijging

In figuur 54 is de neerslag — N gelijk aan de kwel. De verhouding van N en de doorlaatfactor K kunnen we volgens 6.3 berekenen door tellen van het aantal stroom- en aequipotentiaallijnen langs het phreatisch oppervlak. Over éénzelfde afstand in verticale- en in horizontale richting tellen we resp. 40 aequipotentiaallijnen en 1 stroomlijn, zodat $K/-N = 40$. De fout die we hierbij maken hangt, wanneer de relaxatieberekening goed uitgevoerd is, practisch alleen af van het tekenen van de aequipotentiaallijnen. De hoogte van het phreatisch oppervlak van punt tot punt wordt immers eveneens uit de potentiaal afgeleid. De orde van grootte van deze fout kan men schatten door een paar maal in verschillende figuren het

[1] De uitwerking is grotendeels uitgevoerd door de Heer A. J. ALTING.

aequipotentiaallijnenbeeld te tekenen. Bij een fijner netwerk en een figuur op grotere schaal wordt de fout natuurlijk kleiner. Hier is de fout ongeveer 5 % zodat $K/-N = 40 \pm 2$. Voor de grootheid $\gamma = \frac{K+N}{L-N}$ vinden we dan $\frac{40-1}{1+1} = 19{,}5 \pm 1{,}0$. Met formule (38) kunnen we nu de hoogte c/a van het phreatisch oppervlak midden tussen de drains berekenen. We vinden $c/a = 0{,}109 \pm 0{,}005$. In de figuur is $c/a = 0{,}100$. Vervolgens berekenen we de diepte $-h/a$ van het diepste punt waar kwel en regenval elkaar ontmoeten met behulp van (40). Dit geeft $-h/a = 0{,}29 \pm 0{,}01$ terwijl in de figuur $-h/a = 0{,}26$.

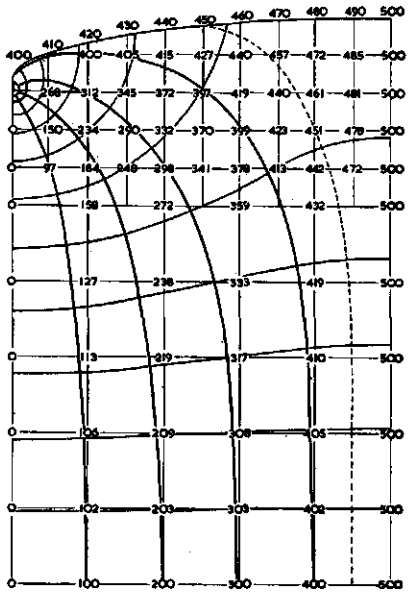

FIG. 56.
Drainage. Verdamping gecombineerd met kwel

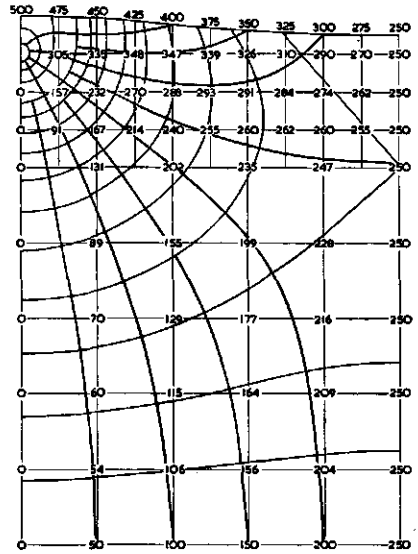

FIG. 57.
Infiltratie. Verdamping gecombineerd met wegzijging

In figuur 55 is de neerslag $-N$ gelijk aan tweemaal de wegzijging $-L$. De verhouding $K/-N = 5{,}0$ zodat $\gamma = \frac{5{,}0-1{,}0}{-0{,}5+1{,}0} = 8{,}0$. Met behulp van (38) en (41) vinden we dan $c/a = 0{,}20$ en $-h/a = 0{,}26$. In de figuur is $c/a = 0{,}20$ en $-h/a = 0{,}25$.

In figuur 56 is de verdamping N het vijfde deel van de kwel L. Hier is $K/N = 33$ en $\gamma = 8{,}5$. Formule (38) geeft $c/a = 0{,}19$ terwijl in de figuur $c/a = 0{,}20$.

In figuur 57 is de verdamping N gelijk aan de wegzijging $-L$. De verhouding $K/N = 48$ en $\gamma = -24{,}5$. In dit voorbeeld moeten we eerst met behulp van (37) β berekenen uit de gegeven waarde $b/a = 0{,}100$. We vinden $\beta = 6{,}6$. Uit (36) volgt dan $c/a = 0{,}047$. In de figuur is $c/a = 0{,}050$ gekozen.

Uit deze vier gevallen blijkt dat een vrij eenvoudige berekening met de relaxatiemethode reeds zeer behoorlijke uitkomsten geeft.

In het volgende voorbeeld (fig. 58) bevindt zich een ondoorlatende laag op een diepte beneden de drains, die het vijfde deel is van de drainafstand. Volgens de uiteenzettingen in 4.26 mag deze ondoorlatende laag slechts een geringe invloe0 hebben op de hoogte van het phreatisch oppervlak, d.w.z. de hoogte $c/a = 0{,}20$p

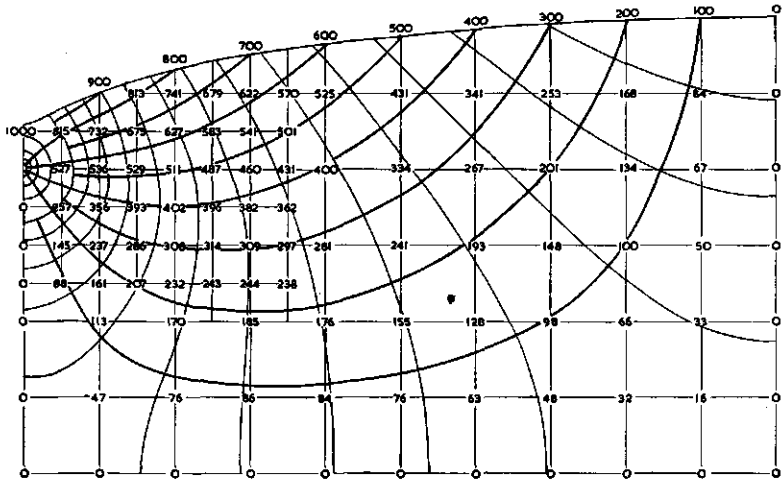

FIG. 58. Afvoer van regenwater naar een drain bij aanwezigheid van een ondoorlatende laag

mag slechts weinig meer zijn dan de hoogte berekend met formule (38). Hier is $K/\!-\!N = 10$ en $\gamma = 9$. Volgens (38) is $c/a = 0{,}185$. Gebruiken we (36) en (37), omdat b/a niet zeer klein is vergeleken met c/a, dan vinden we $c/a = 0{,}193$. Voor de straal van de drain kunnen we verschillende waarden nemen. Stel bijv. dat de drainomtrek samenvalt met de aequipotentiaallijn $\varphi = -1500$[1]; dan is volgens de figuur $r_0/a = 0{,}035$. De druk in de drain kunnen we dan berekenen met behulp van de relatie $\varphi = K\,(p/\varrho\, g + y) + \text{const.}$ We zien dat tussen $\varphi = 0$ en $\varphi = -970$ een hoogteverschil $\Delta y/a = 0{,}100$ langs het phreatisch oppervlak hoort. Bij $\Delta\varphi = 100$ hoort dus een hoogteverschil 0,100/9,7. Op gelijke hoogte y moet het drukhoogteverschil bij een afstand $\Delta\,\varphi = 100$ dus ook gelijk zijn aan 0,100/9,7. Ter hoogte van de drainas ($y = 0$) hoort bij $\varphi = -970$ een drukhoogte $p/a\,\varrho\, g = h/a = 0{,}100$. Op de drainomtrek $\varphi = -1500$ heerst bij $y = 0$ dus een druk $h_0/a = 0{,}100 + \frac{1500-970}{100}\,\frac{0{,}100}{9{,}7} = 0{,}045$. Wanneer de drainomtrek samenvalt met $\varphi = -1700$ is $r_0/a = 0{,}015$ en $h_0/a = 0{,}025$. De drainstraal, die bij $\varphi = -2000$ hoort kunnen we in de figuur niet meer aflezen. We kunnen deze echter berekenen met de formule $\varphi = A \ln r + B$, die berust op de onderstelling dat in de buurt van kleine drains de potentiaal logarithmisch is. De constanten A en B moeten uit de figuur bepaald worden. Zo vinden we dat bij $\varphi = -2000$ de drainstraal $r_0/a = 0{,}005$ en de druk $h_0/a = -0{,}004$ hoort. De tabellen van HOOGHOUDT (1940) geven in het laatste geval met $K/\!-\!N = 10$ $c/a = 0{,}227$.

[1] $\varphi = 0$ in het hoogste punt van het phreatisch oppervlak.

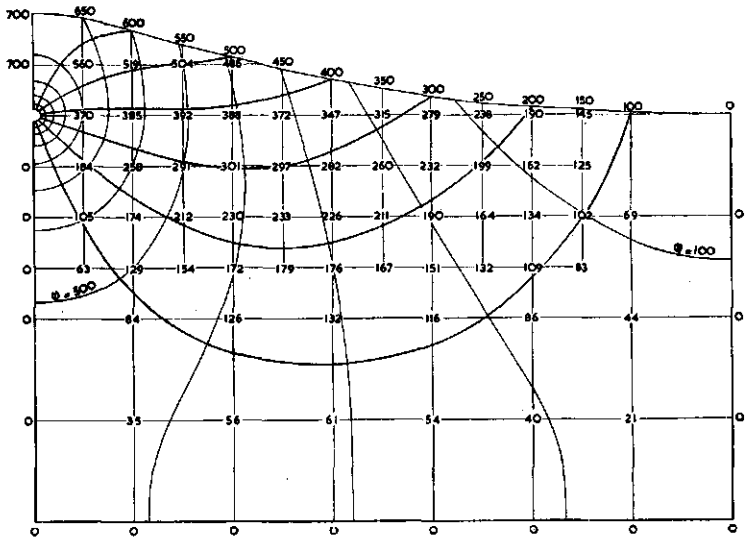

FIG. 59. Infiltratie bij aanwezigheid van een ondoorlatende laag op matige diepte

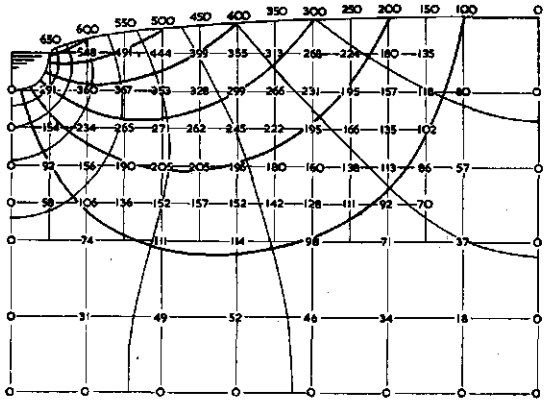

FIG. 60. Ontwatering door een sloot met halfcirkelvormig profiel

Figuur 59 geeft het resultaat van een infiltratieberekening bij aanwezigheid van een ondoorlatende laag op vrij grote diepte (2/7 van de drainafstand). De invloed hiervan zal dus te verwaarlozen zijn. We zien dat $K/N = 7{,}2$ zodat $\gamma = -8{,}2$. Uit (37) volgt dat $\beta = 5{,}4$ en uit (36) $c/a = -0{,}001$. In de figuur is $c/a = 0$. De druk in de drain kunnen we op dezelfde manier als in het vorige voorbeeld berekenen. Onderstaand tabelletje geeft enkele waarden

Drainomtrek	Drainstraal r_0/a	Drukhoogte h_0/a
φ = 800	0,075	0,159
900	0,046	0,179
1000	0,029	0,199
1100	0,016	0,219
1200	0,012	0,239

De methode van HOOGHOUDT geeft hier uitkomsten die afhangen van de drainstraal, namelijk bij $r_0/a = 0{,}07$; 0,05; 0,03 resp. $c/a = -0{,}025$; $-0{,}054$; $-0{,}111$. Bij $r_0/a = 0{,}02$ en nog lagere waarden geven de formules van HOOGHOUDT geen oplossing.

Het stromingsbeeld bij ontwatering door een sloot met halfcirkelvormig profiel vindt men in figuur 60. $K/-N = 18{,}3$. Met $\gamma = 17{,}3$ geeft (38) $c/a = 0{,}117$. In de figuur zien we dat de hoogte boven de waterspiegel in de sloten is $1/14 = 0{,}071$. Wanneer we in dit geval de sloten in gedachten door drains vervangen om formule (38) te kunnen gebruiken, dan zullen we deze dus ongeveer op de helft van de sloot-diepte moeten plaatsen. Volgens HOOGHOUDT is $c/a = 0{,}069$. Dat is juist de hoogte boven de waterspiegel in de sloten. Dit voorbeeld is echter ook in overeenstemming met de onderstellingen waar HOOGHOUDT van uitgaat, namelijk dat de drains half gevuld zijn met water.

In het volgende voorbeeld (fig. 61) reikt de bodem van de sloot op een ondoorlatende laag. $c/a = 0{,}125$ en $K/-N = 53$. HOOGHOUDT (1940, p. 584) gebruikt voor die gevallen, waar de ondoorlatende laag op geringe diepte ligt, de benaderingsformule

$$\frac{-N}{K} = \frac{2Hc + c^2}{a^2}$$

waarbij H de diepte van de ondoorlatende laag beneden de waterspiegel in de sloten is. Deze formule geeft $c/a = 0{,}121$.

In figuur 62 is het bodemprofiel opgebouwd uit twee lagen, waarvan het scheidingsvlak juist samenvalt met het vlak door de waterspiegel in de sloten. De doorlaatfactor K_{I} van de laag boven is het vijfde deel van K_{II}, de doorlaatfactor van de tweede laag. $c/a = 0{,}091$ en $K_{\mathrm{I}}/N = 5{,}8$. Volgens HOOGHOUDT zou $c/a = 0{,}33$ zijn.

Een probleem met drie lagen vindt men in figuur 63, waar zich een slecht doorlatende laag bevindt tussen twee beter doorlatende. We zien dat een groot gedeelte van het water (ongeveer de helft) via de onderste laag de sloot bereikt. Dit is blijkbaar het gevolg van de goede doorlatendheid in die laag. Hier is $c/a = 0{,}0714$ en $K_{\mathrm{I}}/-N = 32$. In een geval als dit berekent HOOGHOUDT een gemiddelde doorlaatfactor voor het gebied beneden de waterspiegel in de sloten (1940, p. 589) en vindt zo $c/a = 0{,}051$.

Uit de laatste twee voorbeelden blijkt derhalve dat de methode van HOOGHOUDT bij heterogeen doorlatende grond niet zeer betrouwbaar is.

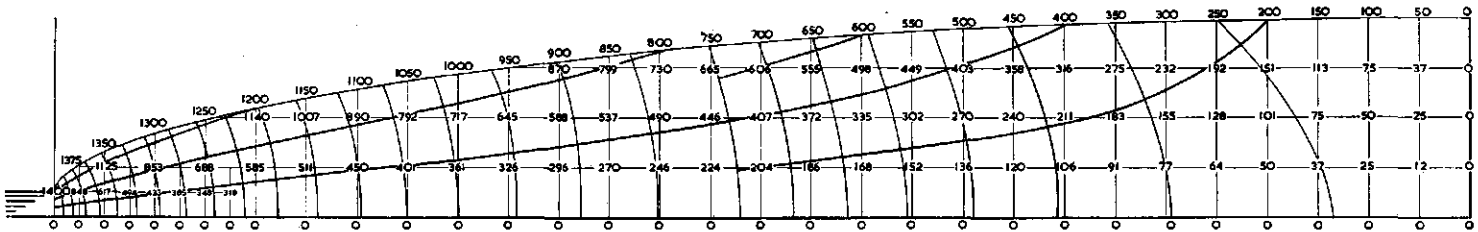

FIG. 61. Ontwatering door een sloot rustend op een ondoorlatende laag

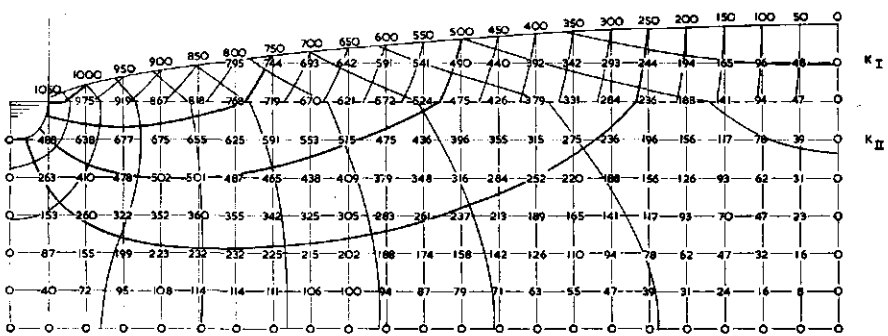

FIG. 62. Het bodemprofiel is opgebouw uit twee lagen, waarvoor geldt $K_I : K_{II} = 1 : 5$

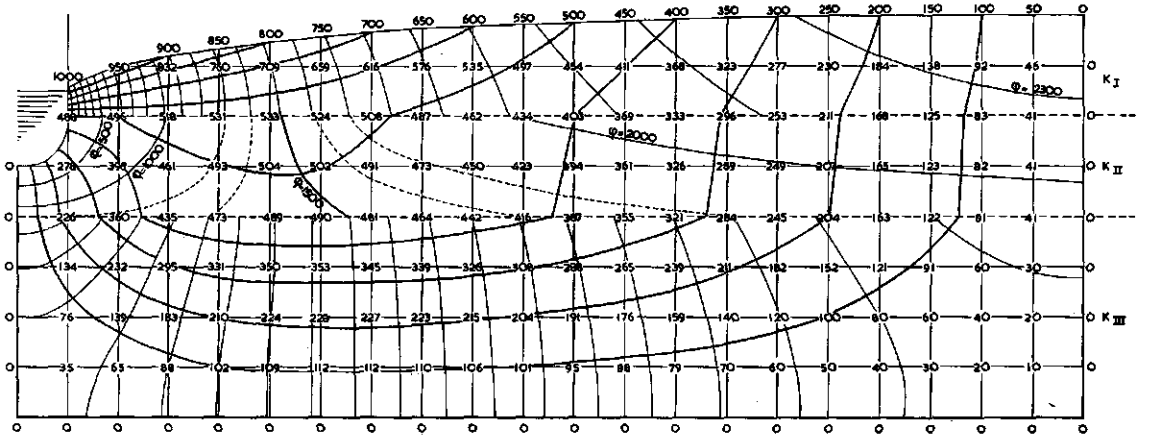

FIG. 63. Het bodemprofiel is opgebouwd uit drie lagen; $K_I : K_{II} : K_{III} = 5 : 1 : 20$

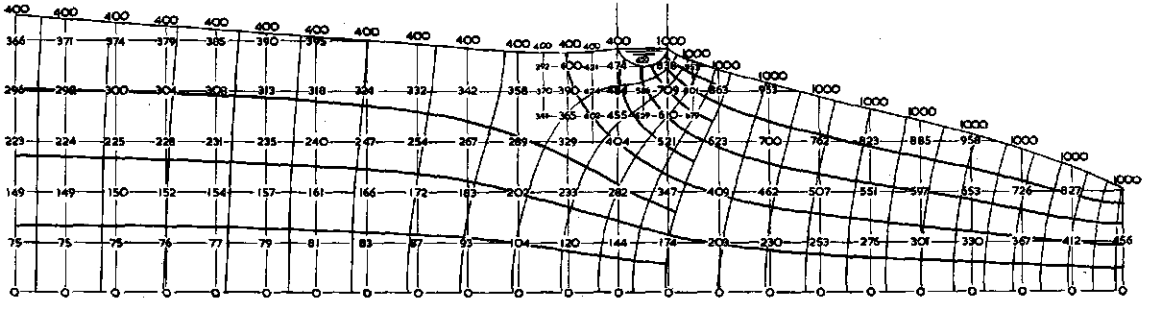

FIG. 64. Waterverlies uit een kanaal

Het laatste voorbeeld (fig. 64) is een probleem van geheel andere aard. In een hellend terrein, waar het grondwater van het hoog gelegen naar het laag gelegen gedeelte stroomt, is een kanaal gegraven loodrecht op de stromingsrichting. De vraag is, hoeveel water verliest het kanaal in de grond en hoe is het verloop van het phreatisch oppervlak. We gaan daarbij als volgt te werk. We kiezen een plausibele waarde voor de verhouding van de totale hoeveelheden stromend grondwater aan weerszijden van het kanaal en berekenen voor die verhouding de stroomfunctie (het phreatisch oppervlak kunnen we bijv. voorlopig rechtlijnig onderstellen). We tekenen daarna de aequipotentiaallijnen en controleren of we het juiste potentiaalverval krijgen. In het algemeen zal dat nog niet het geval zijn, zodat we een betere waarde voor de debietverhouding moeten kiezen. Bij die verhouding berekenen we het stromingsveld opnieuw, enz. Door successieve benadering vinden we op deze manier de juiste verhouding. Ondertussen kan op de bekende manier het phreatisch oppervlak gevonden worden.

7. NABESCHOUWING

De resultaten van ons onderzoek geven aanleiding tot de volgende conclusies:

1°. In het geval van ontwatering of infiltratie door drains in tot voldoende diepte homogeen doorlatende grond kunnen eenvoudige formules gegeven worden, die het verband tussen de hoogte van het phreatisch oppervlak, de drainafstand, de doorlatendheid van de grond en de toe- of afvoer van water (tengevolge van neerslag of verdamping, kwel of wegzijging) geven. Deze formules zijn in overeenstemming met modelexperimenten van CHILDS (1943) en berekeningen met behulp van de relaxatiemethode van SOUTHWELL.

2°. Uit deze formules volgt dat, in het geval van ontwatering, de hoogte van het phreatisch oppervlak, bij gegeven drainafstand, doorlatendheid en watertoevoer, niet beneden een bepaalde grenswaarde gebracht kan worden. Deze grenswaarde wordt dicht benaderd, wanneer, zoals in de practijk veelal het geval is, de hoogte van het phreatisch oppervlak (gemeten t.o.v. het vlak door de drainassen) loodrecht boven de drains veel kleiner is dan midden tussen de drains. Het heeft derhalve geen zin om in dat geval een gunstiger drainconstructie na te streven met het doel een lagere grondwaterstand te verkrijgen. Naarmate echter de relatieve draindiameter kleiner of de druk in de drains groter is zal de hoogte van het phreatisch oppervlak steeds meer van deze grenswaarde verwijderd zijn.

3°. De plaats van een ondoorlatende laag heeft pas invloed op de hoogte van de grondwaterstand in het geval van drainage, wanneer deze laag zich op een diepte beneden de drains bevindt die kleiner is dan $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{5}$ van de drainafstand.

4°. Bij ontwatering door middel van sloten is de hoogte van het phreatisch oppervlak van dezelfde orde van grootte als bij ontwatering door drains en hangt slechts weinig af van de slootbreedte. De invloed van de slootbreedte neemt echter toe bij groter wordende verhouding van doorlaatfactor en neerslag.

5°. Met behulp van de relaxatiemethode van SOUTHWELL kunnen alle tweedimensionale drainage en infiltratieproblemen opgelost worden. Het vereenvoudigen van de onderstellingen kan daarbij tot een minimum beperkt worden. Het toepassen van deze methode wordt slechts beperkt door de tijd, die men voor een bepaald probleem beschikbaar heeft. De voorbeelden van Hfdst. 6 bijv. kunnen door een rekenaar met niet meer dan middelbare opleiding en enige maanden rekenroutine met de relaxatiemethode in een tijd variërend van één tot zes dagen opgelost worden.

6°. De benaderingsmethode van HOOGHOUDT (1940) is, in het geval van ontwatering in homogeen doorlatende grond en van infiltratie door sloten in homogeen doorlatende grond, in goede overeenstemming met de meer exacte methoden. Bij sterk heterogeen doorlatende gronden kunnen afwijkingen optreden, die niet verwaarloosd mogen worden. Ook in het geval van infiltratie door drains is voorzichtigheid geboden.

7°. Het is zeer gewenst dat de tot dusver gevonden theoretische resultaten getoetst worden aan modelexperimenten en aan waarnemingen te velde.

SUMMARY[1]

This investigation is concerned with the mathematical treatment of groundwater flow problems occurring in drainage and irrigation.

It is shown that some simplified steady state flow problems can be solved by hodographic transformation. The simplifying assumptions are

1. The flow problem is one of two dimensions.
2. Drains or ditches are equidistant.
3. The capillary fringe is ignored.
4. The soil permeability is homogeneous and isotropic.
5. The rate of rainfall (or evaporation) to (from) the free surface is uniform in a horizontal plane.
6. The rate of emanation of artesian water or the rate of seepage to a deep aquifer is uniform at great depth.

Simple formulas are given for the height of the water table controled by pipe drains under different circumstances of rainfall or evaporation, emanation of artesian water or seepage to great depth.

Some numerical values are given in the case of drainage by rectangular ditches which are kept dry.

It is shown that SOUTHWELL's relaxation method is able to solve numerically much less simple problems of drainage and irrigation, particularly where the permeability is not homogeneous. Several numerical exemples are given.

The results of this investigation are compared with the results of the approximate method of HOOGHOUDT (1940) and the outcome of model experiments by CHILDS (1943).

[1] The reader is also referred to an account in English by the author (1949).

LITERATUUR

BIERENS DE HAAN, Nouvelles tables d'intégrales définies.

BREITENÖDER, M., Ebene Grundwasserströmungen mit freier Oberfläche, Berlin, 1942.

CHILDS, E. C., *Soil Sci.*, **56** (1943), 317.
ibid., **59** (1945), 313, 405.
ibid., **62** (1946), 183.
ibid., **63** (1947), 361.
Acta Agr. Suecana, **1** (1947), 353.

COURANT, R., *Z. ang. Math. Mech.*, **6** (1926), 322.

DEEMTER, J, J. VAN, *Appl. Sci. Res.*, **A 2** (1949), 33.

DACHLER, R., Grundwasserströmung, Wien, 1936.

GILLES, D. C., *Proc. Roy. Soc.*, **A 193** (1948), 407.

GÜNTHER, E., *Forsch. Geb. Ingenieurswesen*, **11** (1940), 76, 147.

GUSTAFSSON, Y., *Acta Agr. Suecana*, **2** (1946), 1.

HAMEL, G., *Z. ang. Math. Mech.*, **14** (1933), 129.

HARDING, S. W. and J. K. WOOD, *Proc. Soil Sci. Soc. Am.*, **6** (1942) 117.

HELMHOLTZ, H. v., *Berl. Monatsber.*, April, (1868), 23.

HOOGHOUDT, S. B., *Versl. Landbouwk. Onderz.*, **43** (13) B (1937).
ibid., **46** (14) B (1940).

HURWITZ, A. und R. COURANT, Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 3. Aufl., Berlin, 1929.

JAHNKE, E. and F. EMDE, Tables of functions with formulae and curves, New York, 1945.

KIRCHHOFF, G., *Crelles J.*, **70** (1869).

KIRKHAM, D., *Trans. Am. Geoph. Un.*, **20** (1939), 677.
ibid., **21** (1940). 587.
Proc. Soil Sci. Soc. Am., **5** (1941), 64.
Trans. Am. Geoph. Un., **26** (1945), 393.

LE ROUX, J., *J. Math. pur appl.*, **6** (1914), 10, 89.

LIEBMANN, H., *Munch. Sitz. Ber.* (1918), 385.

MUSKAT, M., The flow of homogeneous fluids through porous media, New York, 1937.

ROSSBACH, F., *Ing. Arch.*, **12** (1941), 221.

RUSSELL, J. L., *J. Agr. Sci.*, **24** (1934), 544.

SOUTHWELL, R. V., Relaxation methods in theoretical physics, Oxford, 1946.

SOUTHWELL, R. V. and D. G. CHRISTOPHERSON, *Proc. Roy. Soc.* **A 168** (1938), 317.

SOUTHWELL, R. V. and F. S. SHAW, *Proc. Roy. Soc.*, **A 178** (1941), 1.

VEDERNIKOV, V. V., *C. R. Acad. Sci. URSS*, **23** (1939), 335.

WOLF, F., *Z. ang. Math. Mech.*, **6** (1926), 118.