Nederlandsch Boschbouw-Tijdschrift

OPRICHTER Dr J. R. BEVERSLUIS

Orgaan van de Nederlandsche Boschbouw Vereeniging

22e Jaargang | No. 4 | April 1950

Oorspronkelijke Bijdragen

DE HOOGTEKROMME EN DE GEMIDDELDE HOOGTE VAN EEN OPSTAND

(with summary in english)

door

A. STOFFELS

a. Inleiding.

In een opstand bestaat tussen de hoogte en de diameter op borsthoogte geen streng functioneel verband. Het is niet zo, dat een boom met een bepaalde diameter op borsthoogte ook een vaste hoogte heeft. De hoogten van een aantal bomen, behorende tot een bepaalde diameterklasse, zullen zich groeperen om een zeker gemiddelde. De daarbij optredende spreiding is slechts voor een klein gedeelte het gevolg van de aangenomen klassenwijdte.

Doch wanneer men de gemiddelden van de verschillende diameterklassen vergelijkt, dan ziet men, dat deze niet onafhankelijk zijn van de diameter op borsthoogte. Men moet daaruit besluiten, dat tussen hoogte en diameter op borsthoogte een stochastische betrekking bestaat.

LANGSAETER wenst, dat bij een hoogteanalyse van een opstand dit verband tussen hoogte en diameter nader wordt aangegeven door middel van de correlatiecoefficient. Ook BERKHOUT heeft zich met de berekening van een dergelijk cijfer reeds eerder bezig gehouden.

Het valt niet te ontkennen, dat deze correlatiecoefficient een belangrijk cijfer is, maar men mag niet vergeten, dat tussen de genoemde grootheden in een opstand wel nimmer een rechtlijnig verband zal bestaan. De scheve (d.i. niet rechtlijnige) correlatie is uitvoerig bestudeerd, zodat de berekening van de correlatiecoefficient eigenlijk geen moeilijkheden oplevert, maar ik ben van mening, dat deze berekening zoveel tijd in beslag neemt, dat men er in de meeste gevallen van zal moeten afzien.

We moeten trachten een regressielijn te vinden, die de betrekking tussen hoogte en diameter zo goed mogelijk aangeeft. In de meeste landen gebeurt dit door de diameters en de hoogten van een aantal proefbomen grafisch voor te stellen en door de puntenreeks op het oog een lijn te trekken.

b. Wiskundige vereffening van de hoogtekromme.

Enkele onderzoekers zoals TISCHENDORF en NÄSLUND wijzen op de betekenis van een wiskundige vereffening van de hoogtekromme. Zij stellen van te voren een bepaalde functie vast, die enige constanten bevat, welke uit het waarnemingsmateriaal moeten worden berekend. Ook GEHRHARDT doet in wezen hetzelfde, wanneer hij aanneemt, dat tussen het product van grondvlak en hoogte enerzijds en het grondvlak anderzijds een rechtlijnig verband bestaat.

In het algemeen kunnen we de vergelijking van de regressielijn tussen hoogte h en diameter op borsthootge d als volgt voorstellen:

$$h = f\ (d).$$

Er zijn natuurlijk geen vaste regels aan te geven voor de vorm van deze functie. We kunnen aan een algebraische vorm denken, maar met evenveel recht aan een logarithmische of exponentiële gedaante.

TISCHENDORF en NÄSLUND hebben naar voren gebracht dat een algebraische vorm van de tweede graad voldoende zou zijn om de hoogtekromme weer te geven:

$$h = c_0 + c_1 d + c_2 d^2,$$

waarin c_0, c_1 en c_2 drie constanten zijn, die voor elke opstand verschillen. Wanneer men van een aantal proefbomen de hoogten en diameters heeft bepaald, dan kan men met behulp van de methode van de kleinste kwadraten de beste waarden voor c_0, c_1 en c_2 vinden.

GERHARDT gaat van de onderstelling uit, dat tussen $d^2 h$ en d^2 een rechtlijnige regressie in een opstand bestaat:

$$d^2 h = md^2 + q,$$

waarbij m en q twee constanten voorstellen, die voor iedere opstand uit de waarnemingen berekend kunnen worden.

Uit deze betrekking volgt terstond

$$h = m + q \left(\frac{1}{d^2}\right),$$

welke functie voor een wiskundige vereffening kan worden gebruikt.

BERKHOUT heeft gemeend, dat tenminste voor de groveden in Nederland een exponentiële functie tussen inhoud v en diameter op borsthoogte kan worden gedacht:

$$v = rd^s,$$

waarin r en s twee constante waarden zijn.

BÄHLER en BOSMAN hebben naar voren gebracht, dat eveneens een exponentiële betrekking tussen vormgetal f, hoogte en diameter bestaat:

$$f = uh^w d^y,$$

in welke vergelijkingen u, w en y constanten voorstellen.

Uit de betrekking van BERKHOUT enerzijds en die van BÄHLER en

Bosman anderzijds kan men door eliminatie ook een functie voor de hoogtekromme vinden:

$$h = \alpha d^{\beta},$$

wanneer men

$$\sqrt[w+1]{\frac{4r}{u\pi}} = \alpha \text{ en } \frac{s-y-2}{w+1} = \beta \text{ stelt.}$$

Tenslotte heeft Näslund in latere jaren een andere algebraische functie ontworpen:

$$h = 1.3 + \frac{d^2}{(a + bd)^2},$$

waarin a en b twee constanten zijn, die voor elke opstand berekend kunnen worden.

Het is moeilijk te zeggen aan welke van de hier genoemde vereffeningsfuncties we de voorkeur moeten geven. Voor een dergelijk onderzoek zou men voor een groot aantal opstanden deze vereffeningen moeten toepassen en dan b.v. met de χ^2-test de aanpassing moeten beoordelen. Mijn beperkte ervaring heeft mij tot op heden geleerd, dat voor jonge opstanden de resultaten met de functies van Tischendorf-Näslund en die van Berkhout-Bähler/Bosman en Näslund elkander weinig ontlopen. De vereffeningsfunctie van Gehrhardt geeft slechtere resultaten. Bij oudere opstanden neemt de bruikbaarheid van de functie van Tischendorf-Näslund en die van Berkhout-Bähler/Bosman af en de geschiktheid van die van Gehrhardt toe. De tweede functie van Näslund blijft goede resultaten geven.

c. Grafische vereffening van de hoogtekromme.

De hierboven genoemde werkwijzen hebben het nadeel, dat de wiskundige vereffening met de methode van de kleinste kwadraten veel tijd in beslag neemt. Daarom kan ook aan een andere methode worden gedacht, waarbij het rekenwerk minder omvangrijk is.

We denken hierbij aan de grafische vereffening, welke nog steeds veel gebruikt wordt. We stellen daarbij elke proefboom door een punt voor in een coördinatenstelsel, waarbij h en d de coördinaten zijn. Door de puntenreeks leggen we op het oog zo goed mogelijk een kromme. We gaan nu van de onderstelling uit, dat de vorm van de zo getrokken kromme juist is, doch dat men door een verschuiving in de richting van de h-as verbetering kan aanbrengen. Deze verbetering moet natuurlijk gezien worden in verband met de methode van de kleinste kwadraten.

Laten we veronderstellen, dat we voor ons onderzoek k proefbomen kozen met diameters $d_{p1}, d_{p2}, \ldots, d_{pk}$ en die de hoogten $h_{p1}, h_{p2}, \ldots, h_{pk}$ bleken te bezitten. Uit de hoogtekromme kunnen we nu bij de genoemde diameters de hoogten $\bar{h}_{p1}, \bar{h}_{p2}, \ldots, \bar{h}_{pk}$ aflezen.

De verschillen tussen de gemeten hoogten en die van de getrokken hoogtekromme kunnen we aanduiden door $V_1, V_2, \ldots, V_k$, dus:

$$V_1 = h_{p1} - \bar{h}_{p1},\ V_2 = h_{p2} - \bar{h}_{p2},\ \ldots,\ V_k = h_{pk} - \bar{h}_{pk}.$$

Wanneer we de vorm van de getrokken lijn als vast beschouwen, dan zouden we deze gaarne zo verplaatsen, dat de som van de kwadraten van de afwijkingen [VV] zo klein mogelijk was. Stellen we ons voor, dat we de kromme daartoe over een afstand a in de richting van de positieve h-as evenwijdig aan zich zelf moesten verplaatsen. Dan zouden we uit de hoogtekromme niet de waarden $\overline{h}_{p1}$, $\overline{h}_{p2}$, enz. aflezen, maar de waarden $\overline{h}_{p1} + a$, $\overline{h}_{p2} + a$, enz. We vonden dan niet de afwijkingen V_1, V_2, enz. maar afwijkingen U_1, U_2, enz., waarbij b.v.: $U_1 = h_{p1} - (\overline{h}_{p1} + a) = (h_{p1} - \overline{h}_{p1}) - a = V_1 - a$.

De som van de kwadraten [UU] is nu als volgt te herleiden:

$$[UU] = (V_1 - a)^2 + (V_2 - a)^2 + \dots + (V_k - a)^2$$
$$= [VV] - 2a[V] + ka^2.$$

Wij wensen aan a diè waarde te geven, die [UU] minimaal maakt, d.w.z. dat het eerste differentiaalquotient = O moet zijn:

$$-2[V] + 2ka = O \qquad a = \frac{[V]}{k}.$$

We kunnen dit misschien met een zeer eenvoudig voorbeeld verduidelijken. Bij een opmeting van een proefvlak in een jonge grovedennenopstand bleken de diameters op borsthoogte te wisselen tussen 3 en 14 cm. De diameters werden gemeten met een interval van 1 cm en in elke klasse werd van een boom de hoogte bepaald. Vervolgens werden de hoogten en de diameters van de proefbomen grafisch voorgesteld en door de daarbij ontstane punten werd een kromme getrokken. De hoogten, die deze kromme bij de verschillende diameters aangeeft, kunnen we nu aflezen en daaruit de afwijkingen V bepalen.

diameter	aantal stammen	hoogte proefboom	hoogte uit hoogtekromme	V
3	16	5.0	5.0	± 0.0
4	21	6.4	6.0	+ 0.4
5	20	6.5	6.8	− 0.3
6	43	7.7	7.5	+ 0.2
7	35	7.6	8.2	− 0.6
8	20	9.2	8.8	+ 0.4
9	22	9.5	9.3	+ 0.2
10	14	9.7	9.7	± 0.0
11	5	10.3	10.0	+ 0.3
12	4	10.4	10.3	+ 0.1
13	1	10.3	10.4	− 0.1
14	1	10.6	10.6	± 0.0
	202			+ 0.6

Uit het positief zijn van de som van de afwijkingen blijkt, dat de kromme naar boven moet worden verschoven en wel over een afstand:

$$a = \frac{+0.6}{12} = +0.05.$$

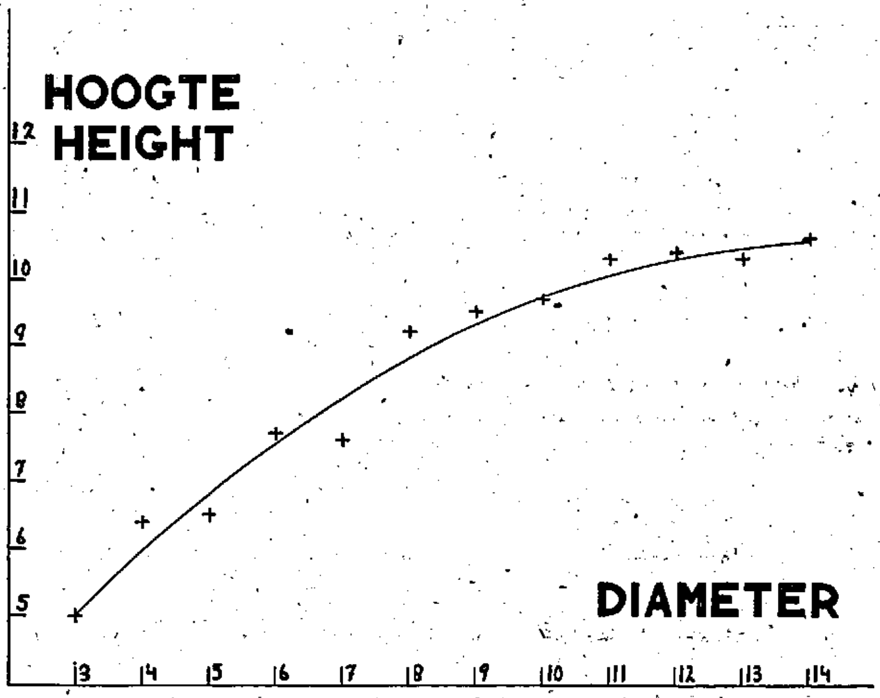
d. Gemiddelde hoogte.

Uit de hoogtekromme kan men ook op eenvoudige wijze de gemiddelde hoogte $\overline{h}$ berekenen. Noemt men de klassenmiddelpunten $d_1, d_2, \ldots, d_n$, de aantallen stammen in die klassen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ en de uit de hoogtekromme bij deze middelpunten afgelezen hoogten $\overline{h}_1, \overline{h}_2, \ldots, \overline{h}_n$, dan is de gemiddelde hoogte:

$$\overline{h} = \frac{y_1 \overline{h}_1 + y_2 \overline{h}_2 + \ldots + y_n \overline{h}_n}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}.$$

In ons voorbeeld vinden we zo:

$$\overline{h} = \frac{1584.6}{202} = 7.84.$$



Bij de correctie van de hoogtekromme, zoals we die hierboven hebben uitgevoerd, is ook de correctie van de gemiddelde hoogte zeer eenvoudig:

$$\overline{h}_{corr.} = \frac{y_1(\overline{h}_1 + a) + y_2(\overline{h}_2 + a) + \ldots + y_n(\overline{h}_n + a)}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}$$

$$\overline{h}_{corr.} = \overline{h} + a.$$

In ons voorbeeld vinden we de gecorrigeerde hoogte dus eenvoudig door de berekende hoogte met 0.05 m te vermeerderen. De gecorrigeerde hoogte is dus 7.89 m.

Op de hier aangegeven wijze van correctie van de grafische vereffening van de hoogtekromme is het mogelijk met aanzienlijk minder rekenwerk, dan bij de zuiver wiskundige vereffening, tot een bevredigend resultaat te komen.

Literatuur

1. BÄHLER, A. H. L. en BOSMAN, K.: „Het spilvormgetal van grovedennen in Nederland." Mededelingen van de Landbouwhogeschool 1923, verh. 4.
2. BERKHOUT, A. H.: „Het meten van boomen in verband met hun aanwas (mit deutscher Zusammenfassung)." Mededeelingen van de Landbouwhoogeschool 1920, blz. 109—225.
3. GEHRHARDT, E.: „Die theoretische und praktische Bedeutung des arithmetischen Mittelstammes." Meiningen 1901.
4. LANGSAETER, A.: „Høideanalyse av forsøksfelter ved hjelp av stående prøvetraer." Meddelelser fra det norske skogforsøksvesen 1928—30, blz. 463—471.
5. ——— „Höhenanalyse von Versuchsflächen mittels stehender Probestämme." Actes du congrès international des stations de recherches forestières, Stockholm 1929, blz. 222—228.
6. NÄSLUND, M.: „Antalet provträd och höjdkurvans noggranhet (Zusammenfassung: Die Anzahl der Probestamme und die Genauigkeit der Höhenkurve)." Meddelanden från statens skogsförsöksanstalt 1929, blz. 93—170.
7. ——— „Die Genauigkeit der Höhenkurve." Actes du congrès international des stations de recherches forestières, Stockholm 1929, blz. 240—241.
8. ——— „Skogsförsöksanstaltens gallringsförsök i tallskog (Zusammenfassung: Die Durchforstungsversuche der forstlichen Versuchsanstalt Schwedens in Kiefernwald)." Meddelanden från statens skogsförsöksanstalt 1936, Häfte 29 N:r 1.
9. TISCHENDORF, W.: „Lehrbuch der Holzmassenermittlung." Berlin 1927.

THE HEIGHTCURVE AND THE MEAN HEIGHT OF A STAND
(summary)

We know that in a stand between the height and the diameter at breast height a stochastic relation exists. For the mathematical adjustment of the heightcurve the following functions can be used:

TISCHENDORF-NÄSLUND : $h = c_o + c_1 d + c_2 d^2$

GEHRHARDT : $h = m + \frac{q}{d^2}$

BERKHOUT-BÄHLER/BOSMAN : $h = \alpha d^{\beta}$

NÄSLUND : $h = 1.3 + \frac{d^2}{(a + bd)^2}$

In those formulas the symbol h represents the height and d the diameter at breast height; the other symbols are constants.

These mathematical adjustments require an abundance of time and this is the reason why mostly a graphical adjustment is used.

Denominating the differences between the heights of the k measured sample trees and the adjusted heights of the heightcurve $V_1, V_2, \ldots, V_k$ we want that sum of squares [VV] will be a minimum.

We can remove the height curve over a distance a, so that the new differences $U_1, U_2, \ldots, U_k$ are

$$U_1 = V_1 - a, \; U_2 = V_2 - a, \; \ldots, \; U_k = V_k - a.$$

The sum of squares of the difference will be a minimum for

$$a = \frac{[V]}{k}.$$

Denominating the means of the classes $d_1, d_2, \ldots, d_n$, the number of stems in those classes $y_1, y_2, \ldots, y_n$, and the corresponding heights of the height curve $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \ldots, \bar{h}_n$, the mean height $\bar{h}$ can be calculated by using the formula:

$$\bar{h} = \frac{y_1 \bar{h}_1 + y_2 \bar{h}_2 + \ldots + y_n \bar{h}_n}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}.$$

After the correction of the height curve the mean height $\bar{h}_{corr.}$ is calculable according to:

$$\bar{h}_{corr.} = \bar{h} + a.$$