DE INHOUDSBEPALING VAN OPSTANDEN DOOR METING VAN TWEE MODELBOMEN

door

A. STOFFELS.

In vroeger jaren heeft men bij de inhoudsbepaling van houtopstanden er steeds naar gestreefd om een boom te vinden, die representatief is voor de gehele opstand. Men zocht naar een stam, welks inhoud het gemiddelde bedraagt van de inhouden van alle stammen van de opstand.

Allereerst dacht men deze gevonden te hebben in de boom met het gemiddelde grondvlak. Reeds in 1824 ging Huber van deze gedachte uit en Heyer beval de methode zeer aan.

De inhoudsberekening is dan eigenlijk zeer eenvoudig. Noemen we de diameters der verschillende klassen, d_1, d_2, ..., d_n, de bijbehorende grondvlakken g_1, g_2, ..., g_n en de aantallen stammen in de klassen a_1, a_2, ..., a_n, dan wordt het gemiddelde grondvlak $\bar{g}$ als volgt berekend:

$$\bar{g} = \frac{a_1 g_1 + a_2 g_2 + \ldots\ldots + a_n g_n}{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n} = \frac{\Sigma\ ag}{\Sigma\ a} = \frac{\Sigma\ ag}{N},$$

waarbij we het aantal stammen van de gehele opstand gelijk aan $\Sigma\ a = N$ stellen.

We zoeken nu in de opstand naar een boom, die het gemiddelde grondvlak bezit en bepalen de inhoud van deze boom. Is deze inhoud $v_{\bar{g}}$, dan is de massa V van de gehele opstand gelijk aan:

$$V = N \times v_{\bar{g}}.$$

Zoals reeds eerder werd aangetoond, is deze methode theoretisch slechts juist, wanneer tussen inhoud en grondvlak van de stammen van de opstand de volgende betrekking bestaat:

$$v = c_0 + c_1 g.$$

Deze lineaire betrekking duiden we meestal aan met „Gehrhardt-Kopezky-rechte". Hierin zijn c_0 en c_1 twee constanten, die voor elke opstand verschillend zijn.

Tegen de methode van de boom met het gemiddelde grondvlak zijn vele bezwaren naar voren gebracht. Ook de Gehrhardt-Kopezky-rechte heeft men bestreden, hoewel dit in wezen hetzelfde is. Wiskundig bezien richten deze bezwaren zich tegen het rechtlijnige stochastische verband tussen inhoud en grondvlak.

Nieuwere onderzoekingen hebben aangetoond, dat we de stochastische betrekking tussen inhoud en grondvlak tenminste door een parabolische kromme

$$v = c_0 + c_1 g + c\, g^2$$

moeten weergeven.

Enkele onderzoekers trachten een beter resultaat te verkrijgen door het gebruik van een modelboom, die meer representief is voor de opstand. De belangrijkste van deze methoden is die van Neubauer. Andere onderzoekers menen het vraagstuk niet met één modelboom te kunnen oplossen.

Hohenadl acht het mogelijk met twee modelbomen tot een bevredigend resultaat te komen. Hij brengt twee methoden naar voren, die nogal uiteenlopen en die we misschien gemakshalve met de rekenkundige en de logarithmische mogen aanduiden. Hiervan is de eerste de belangrijkste.

Het is merkwaardig, dat de publicaties van Hohenadl, die op zo hoog peil staan, toch betrekkelijk weinig de aandacht hebben getrokken. Voor zover mij bekend is, wordt de rekenkundige methode weinig en de logaritmische nimmer toegepast.

Bij de rekenkundige methode worden allereerst de diameters van alle stammen van de opstand bepaald en daaruit de gemiddelde diameter $\overline{d}$ berekend:

$$\overline{d} = \frac{a_1 d_1 + a_2 d_2 + \ldots + a_n d_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{\Sigma\ ad}{N}.$$

Deze gemiddelde diameter is dus een andere, dan we gewoonlijk becijferen. In de praktijk noemt men de gemiddelde diameter meestal die diameter, welke behoort bij het gemiddelde grondvlak. In wezen is deze laatste dus het kwadratisch gemiddelde van de diameters.

Hohenadl bepaalt vervolgens de standaardafwijking ε_d van de diameterverdeling:

$$\varepsilon_d = \sqrt{\frac{\Sigma\ a\,(d - \overline{d})^2}{N}}.$$

Deze standaardafwijking is één van de belangrijkste kenmerken van de verdeling van de stammen over de verschillende diameterklassen. Is de standaardafwijking relatief groot, dan betekent dit, dat de diameters ver uiteenliggen. Is zij daarentegen relatief klein, dan zijn ook de verschillen van de diameters gering.

Vervolgens wordt gezocht naar twee modelbomen met diameters $\overline{d} - \varepsilon_{\overline{d}}$ en $\overline{d} + \varepsilon_{\overline{d}}$. Noemen we de inhoud van deze bomen v_{-} en v_{+}, dan berekent men de inhoud van de gehele opstand als:

$$V = N \times \frac{v_{-} + v_{+}}{2}.$$

Alvorens we de grondslagen van deze methode wiskundig beschouwen, kunnen we misschien een en ander met een eenvoudig voorbeeld toelichten. Van een jonge berkenproefvlakte in de boswachterij „Kolleberga" van de houtvesterij „Kolleberga Skolrevir" te Ljungbyhed (Zweden) ter grootte van 0.1 ha werden de 252 stammen geklemd en de diameters ingedeeld in klassen met een wijdte van 1 cm. Nemen we als vergelijkingswaarde aan 8.0 cm en noemen we de afwijkingen van deze waarde w_1, w_2, ..., w_n, dan vinden we de waarde $\overline{d}$ als volgt:

$$\overline{d} = 8.0 + \delta \quad \text{en} \quad \delta = \frac{\Sigma\, aw}{N}:$$

d	a	w	aw	aww
2	5	—6	—30	180
3	4	—5	—20	100
4	9	—4	—36	144
5	15	—3	—45	135
6	31	—2	—62	124
7	27	—1	—27	27
8	44	0	0	0
9	28	+1	+28	28
10	34	+2	+68	136
11	29	+3	+81	241
12	9	+4	+36	144
13	8	+5	+40	200
14	6	+6	+36	216
15	3	+7	+21	147
	252		+96	1822

$$\delta = \frac{+96}{252} = +0.38$$

$$\overline{d} = 8.0+0.38 = 8.38$$

$$\Sigma\; a\,(d-\overline{d})^2 = \Sigma\, aww - N\delta^2$$

$$= 1822 - \frac{96^2}{252} = 1785$$

$$\varepsilon_{\overline{d}} = \sqrt{\frac{1785}{252}} = \pm 2.65$$

De twee diameters van de modelbomen moeten dus zijn :

$$\overline{d} - \varepsilon_{\overline{d}} = 8.38 - 2.65 = 5.73 \text{ en}$$

$$\overline{d} - \varepsilon_{\overline{d}} = 8.38 + 2.65 = 11.03.$$

In de opstand werden twee bomen gevonden met diameters 5.7 en 11.0 en de opmeting gaf de volgende resultaten :

d = 5.7 cm   g = 0.00255 m²   v = 0.0108 m³
d = 11.0 cm   g = 0.00950 m²   v = 0.0586 m³

De inhoud van de opstand kunnen we thans vinden als :

$$V = 252 \times \frac{0.0108+0.0586}{2} = 8.744 \text{ m}^3 .$$

Rekent men de inhouden van de modelbomen om met de grondvlakken, dan vindt men :

$$V = 252 \times \frac{1}{2}\left(\frac{0.00257}{0.00255} \times 0.0108 + \frac{0.00959}{0.00950} \times 0.0586\right) = 8.833 \text{ m}^3$$

aangezien bij een diameter van 5.73 cm een cirkelvlak van 0.00257 m² behoort en bij een diameter van 11.03 cm een cirkelvlak 0.00959 m².

We zullen de methode wiskundig nader beschouwen en allereerst aantonen, dat de grondvlakken g_- en g_+, die behoren bij de diameters $\overline{d} - \varepsilon_{\overline{d}}$ en $\overline{d} + \varepsilon_{\overline{d}}$ evenver verwijderd zijn van het gemiddelde grondvlak $\overline{g}$. Immers :

$$g_- = \frac{1}{4}\pi \left(\overline{d} - \sqrt{\frac{\Sigma\, a(d-\overline{d})^2}{N}}\right)^2$$

$$g_+ = \frac{1}{4}\pi \left(\overline{d} + \sqrt{\frac{\Sigma\, a(d-\overline{d})^2}{N}}\right)^2$$

$$g_- + g_+ = \frac{1}{4}\pi \left\{ 2\,\bar{d}^2 + 2\sqrt{\frac{\Sigma\, a(d-\bar{d})^2}{N}} \right\}$$

Hierin is verder:

$$\Sigma\, a\,(d - \bar{d})^2 = \Sigma\, ad^2 - 2\,\bar{d}\,\Sigma\, ad + N\,\bar{d}^2 = N\,\overline{d^2} - N\,\bar{d}^2$$

en derhalve is de som van de grondvlakken g_- en g_+ gelijk aan:

$$g_- + g_+ = \frac{2}{4}\pi \left\{ \bar{d}^2 + \overline{d^2} - \bar{d}^2 \right\} = 2 \times \frac{1}{4}\pi\,\overline{d^2} = 2\,\bar{g}\ .$$

Dit betekent, dat de grondvlakken g_- en g_+ evenver verwijderd zijn van het gemiddelde grondvlak $\bar{g}$.

P e s c h e l heeft er terecht op gewezen, dat men ook andere paren grondvlakken kan kiezen, die evenver van $\bar{g}$ gelegen zijn en zo tot een inhoudsbepaling kan komen. De keuze, die H o h a n a d l doet, is niet gedaan uit een bepaalde overweging. Weliswaar heeft de standaardafwijking $\varepsilon_{\bar{d}}$ betekenis, omdat zij kenmerkend is voor de diameterverdeling, doch het is niet duidelijk, dat de modelbomen daarom moeten worden gekozen bij de diameters $\bar{d} \pm \varepsilon_{\bar{d}}$.

Wij zullen uitgaan van de stochastische betrekking tussen inhoud v en grondvlak g:

$$v = c_0 + c_1 g + c_2 g^2 + c_3 g^3 + \ldots..$$

waarin c_0, c_1, c_2, ... constante waarden voorstellen.

De inhoud van de gehele opstand is nu gelijk aan:

$$\begin{aligned} V &= \Sigma\, av \\ &= \Sigma\, a(c_0 + c_1 g + c_2 g^2 + c_3 g^3 + \ldots..) \\ &= Nc_0 + c_1\,\Sigma\, ag + c_2\,\Sigma\, ag^2 + c_3\,\Sigma\, ag^3 + \ldots.. \end{aligned}$$

De gemiddelde inhoud $\bar{v}$ van een boom vindt men door de totale inhoud te delen door het aantal stammen N:

$$\begin{aligned} \bar{v} = \frac{V}{N} &= c_0 + \frac{c_1}{N}\Sigma\, ag + \frac{c_2}{N}\Sigma\, ag^2 + \frac{c_3}{N}\Sigma\, ag^3 + \ldots.. \\ &= c_0 + c_1\,\bar{g} + c_2\,\overline{g^2} + c_3\,\overline{g^3} + \ldots.. \end{aligned}$$

Beschouwen we twee modelbomen met grondvlakken $\bar{g} - \gamma$ en $\bar{g} + \gamma$, welke dus evenver van het gemiddelde grondvlak $\bar{g}$ zijn gelegen, dan kunnen we de inhouden voorstellen door:

$$\begin{aligned} v_{\bar{g}-\gamma} &= c_0 + c_1\,(\bar{g}-\gamma) + c_2\,(\bar{g}-\gamma)^2 + c_3\,(\bar{g}-\gamma)^3 + \ldots.. \\ v_{\bar{g}+\gamma} &= c_0 + c_1\,(\bar{g}+\gamma) + c_2\,(\bar{g}+\gamma)^2 + c_3\,(\bar{g}+\gamma)^3 + \ldots.. \end{aligned}$$

Door sommering van de overeenkomstige leden van deze betrekkingen vinden we:

$$v_{\bar{g}-\gamma} + v_{\bar{g}+\gamma} = 2c_0 + 2\,c_1\bar{g} + 2c_2\,(\bar{g}^2 + \gamma^2) + 2c_3\,(\bar{g}^3 + 2\bar{g}\gamma^2) + \ldots..$$

De gemiddelde inhoud van deze twee modelbomen met grondvlakken $\overline{g} \pm \gamma$ is gelijk aan:

$$c_0 + c_1 \overline{g} + c_2 (\overline{g}^2 + \gamma^2) + c_3 (\overline{g}^3 + 2\overline{g} \gamma^2) + \ldots$$

Deze inhoud is identiek met die van de gemiddelde inhoud, indien de betrekking tussen inhoud en grondvlak kan worden weergegeven door:

$$v = c_0 + c_1 g \quad .$$

Dit betekent, dat dus de Gehrhardt—Kopezky-rechte de betrekking goed moet weergeven.

Er is echter een waarde van γ, waarvoor:

$$\overline{g}^2 + \gamma^2 = \overline{g^2} \quad .$$

Het tweede lid van deze vergelijking kunnen we als volgt herleiden:

$$\begin{aligned}
\overline{g^2} &= \frac{1}{N} \Sigma\, a g^2 \\
&= \frac{1}{N} \Sigma\, a \left\{ \overline{g} + (g - \overline{g}) \right\}^2 \\
&= \overline{g}^2 + 2\overline{g} \frac{\Sigma\, a(g-\overline{g})}{N} + \frac{\Sigma\, a(g-\overline{g})^2}{N} \\
&= \overline{g}^2 + \frac{\Sigma\, a(g-\overline{g})^2}{N}
\end{aligned}$$

Nu is dus:

$$\overline{g}^2 + \gamma^2 = \overline{g}^2 + \frac{\Sigma\, a(g-\overline{g})^2}{N}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{\Sigma\, a(g-\overline{g})^2}{N}} \quad .$$

Dit houdt in, dat indien we γ gelijk nemen aan de standaardafwijking van de grondvlakverdeling een juiste uitkomst wordt verkregen, indien tussen inhoud en grondvlak de volgende betrekking bestaat:

$$v = c_0 + c_1 g + c_2 g^2 \quad .$$

Het vraagstuk komt thans neer op het berekenen van de standaardafwijking van de grondvlaksverdeling. Deze becijfering kost inderdaad veel tijd, zodat de vraag rijst of deze niet op eenvoudiger wijze kan worden benaderd. Dit is mogelijk, indien we uitgaan van de onderstelling, dat de grondvlakverdeling nagenoeg overeenkomt met de normale frequentieverdeling.

De frequentiedifferentiaal kunnen we aangeven als

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 (g-\overline{g})^2} ,$$

waarin h een constante is. De standaardafwijking $\varepsilon_{\overline{g}}$ is dan gelijk aan:

$$\varepsilon_{\overline{g}} = \pm \frac{1}{h\sqrt{2}} \, .$$

We kunnen nu die waarde van $g_{1/4}$ bepalen, waarbij een vierde van het aantal stammen van de opstand een kleiner grondvlak heeft dan deze waarde en drie vierde een groter grondvlak. Op overeenkomstige wijze kunnen we de waarde $g_{3/4}$ berekenen, waaronder we dat grondvlak verstaan, waarbij drie kwart van het aantal stammen een kleiner en een kwart een groter grondvlak heeft.

Nemen we de normale verdeling aan, dan is :

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{g_{1/4}-\bar{g}} e^{-h^2(g-\bar{g})^2}\,dg = {}^1/_4 \quad \text{en} \quad \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{g_{3/4}-\bar{g}} e^{-h^2(g-\bar{g})^2} = {}^3/_4$$

Stellen we vervolgens $h(g-\bar{g}) = t$, dan krijgen we :

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{g_{1/4}-\bar{g}} e^{-h^2(g-\bar{g})^2}\,dg = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{t_{1/4}} e^{-t^2}\,dt = {}^1/_4$$

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{g_{3/4}-\bar{g}} e^{-h^2(g-\bar{g})^2}\,dg = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{t_{3/4}} e^{-t^2}\,dt = {}^3/_4$$

De integratie levert ons de waarden

$$t_{1/4} = h\ (g_{1/4} - \bar{g}) = -0.477$$

$$t_{3/4} = h\ (g_{3/4} - \bar{g}) = +0.477$$

waaruit we kunnen afleiden :

$$h\ (g_{1/4} - g_{3/4}) = -0.954$$

$$\frac{1}{h} = \frac{g_{3/4} - g_{1/4}}{0.954}$$

De gezochte standaardfwijking vindt men nu als volgt :

$$\varepsilon_{\bar{g}} = \pm \frac{1}{h\sqrt{2}} = \pm \frac{g_{3/4} - g_{1/4}}{0.954\sqrt{2}}$$

$$\varepsilon_{\bar{g}} = \pm\ 0.74(g_{3/4} - g_{1/4})\ .$$

Met de bovenstaande formule is het mogelijk op eenvoudige wijze de standaardafwijking te benaderen. Het is echter een benadering, omdat we aannamen, dat de grondvlakverdeling normaal is, wat zij in de meeste gevallen niet zal zijn.

In het gekozen voorbeeld kunnen we de werkwijze als volgt toepassen. We moeten de grondvlakken vinden, waarbij $\frac{1}{4} \times 252 = 63$ stammen een kleiner grondvlak en $\frac{3}{4} \times 252 = 189$ stammen een kleiner grondvlak hebben. De grondvlakken zijn :

$$g_{1/4} = 0.00196 + \frac{30}{31} \times 0.0087 = 0.00280$$

$$g_{3/4} = 0.00636 + \frac{26}{34} \times 0.0149 = 0.00750$$

De standaardafwijking berekenen we nu als :

$$\varepsilon_{\bar{g}} = \pm 0.74 \ (0.00750 - 0.00280) = \pm 0.00348$$

en de beide grondvlakken g_- en g_+ :

$$g_- = 0.00608 - 0.00348 = 0.00260$$
$$g_+ = 0.00608 + 0.00348 = 0.00956.$$

We zoeken thans in de opstand naar twee modelbomen met de genoemde grondvlakken en bepalen de inhouden. Wanneer de grondvlakken van de gekozen bomen niet geheel met de berekende waarden overeenstemmen, dan kan vanzelfsprekend een omrekening plaats. vinden.

In het voorgaande hebben we geen acht geslagen op de toevallige fouten, die ontstaan door de spreiding van de staminhouden om de regressielijn. Al naar de gewenste nauwkeurigheid zal men een of meerdere modelbomen met de grondvlakken g_- en g_+ moeten opmeten.

Resumerende kunnen we opmerken, dat het werken met twee modelbomen de mogelijkheid biedt om de inhoud van houtopstanden te bepalen, indien tussen inhoud en grondvlak een stochastische parabolische betrekking bestaat. Dit vormt een aanzienlijke verbetering in vergelijking tot de inhoudsbepaling met de boom met het gemiddelde grondvlak.

LITERATUUR.

1. Gehrhardt, E.: „Die theoretische und praktische Bedeutung des arithmetischen Mittelstammes." Meiningen 1901.
2. Gehrhardt, E.: „Ein Vergleich des Kopezky-Gehrhardtschen Verfahren der Bestandsmassenermittlung mit demjenigen von Neubauer und Tischendorf in Bezug auf Einfachkeit und Genauigkeit." Tharandter forstliches Jahrbuch 1933, blz. 328—344.
3. Heyer, G.: „Über die Ermittlung der Masse, des Alters und des Zuwachses der Holzbestände." Dessau 1852.
4. Hohenadl, W.: „Die Berechnung des Holzgehalts von Beständen mit Hilfe von zwei Mittelstämmen." Centralblatt für das gesamte Forstwesen 1929, blz. 26—37.
5. Hohenadl, W.: „Alte und neue Verfahren von Bestandsberechnungen." Forstwissenschaftliches Centralblatt 1931, blz. 381—392 & 434—446.
6. Hohenadl, W.: „Die Vereinfachung der Bestandsberechnung." Forstwissenschaftliches Centralblatt 1932, blz. 681—693 & 734—745.
7. Hohenadl, W.: „Die Bestandsmessung." Forstwissenschaftliches Centralblatt 1936. blz. 51—61, 69—86 & 114—127.
8. Hohenadl, W.: „Holzmessung und forstliche Forschung." Forstwissenschaftliches Centralblatt 1938, blz. 305—322, 333—343 & 382—391.
9. Neubauer, W.: „Die Bestandesaufnahme nach dem Verfahren des Mittelstammes und nach Stammklassen gleicher Masse". Centralblatt für das gesamte Forstwesen 1924, blz. 23—31, 105—115 en 1925, blz. 1—29 & 90—111.
10. Neubauer, W.: „Zur Frage der kombinierten Verwendung von Massentafeln und Probestämmen bei Bestandesaufnah-

men." Centralblatt für das gesamte Forstwesen 1932, blz. 305—320.
11. Neubauer, W.: „Massenlinienverfahren und Verfahren nach Stammklassen gleicher Masse." Tharandter forstliches Jahrbuch 1933, blz. 749—756.
12. Peschel, W.: „Neuere Verfahren der Bestandsmassenermittlung nach Probestämmen, ihre mathematisch-statistische Begründung und ihre Erprobung an einem praktischen Bestandsbeispiel." Tharandter forstliches Jahrbuch 1936, blz. 889—921 en 1937, blz. 1—50.
13. Stoffels, A.: „De berekening van den inhoud van opstanden door meting van een enkelen modelboom (Zusammenfassung: Die Bestandsmassenermittlung durch Messung eines einzelnen Probestammes)." Nederlandsch Boschbouwtijdschrift 1942, blz. 399—408.
14. Tischendorf, W.: „Lehrbuch der Holzmassenermittlung." Berlin 1927.

THE MENSURATION OF STANDS BY MEASURING TWO SAMPLE TREES
(summary)

In former days the volume of stands was often determinated as the product of the volume of the tree with the mean basal area and the total number of trees. This method suggests that between the volume v of a tree and its basal area g exists a linear relation:

$$v = c_0 + c_1 g \quad ,$$

in which c_0 and c_1 represent two constants.

New experiments have shown that this supposition do not exist in most cases and at least a stochastic function of the second degree is necessary to indicate the relation between v and g:

$$v = c_0 + c_1 g + c_2 g^2 \;.$$

By taking two sample trees with the basal areas $\bar{g} \pm \varepsilon_{\bar{g}}$, in which $\bar{g}$ represents the mean basal area and $\varepsilon_{\bar{g}}$ the standard deviation of its distribution, it is possible to get better results.

If a normal distribution of g may be suggested, a more simple calculation of the standard deviation can be made and will aid to find the total volume of the stand.
