DE BEREKENING VAN DEN INHOUD VAN OPSTANDEN DOOR METING VAN EEN ENKELEN MODELBOOM

(mit deutscher Zusammenfassung)

door

A. STOFFELS.

De werkwijzen ter bepaling van den inhoud van opstanden kunnen we in twee groepen verdeelen, nl. de meetmethoden en de schattingsmethoden. Het is moeilijk een scherpe scheiding te maken, doch in het algemeen spreekt men eerst van een meetmethode, wanneer de doorsnede op borsthoogte van alle tot den opstand behoorende stammen wordt gemeten.

De meetmethoden kunnen we weer verdeelen in werkwijzen, die op algemeene gegevens (tafels of grafieken) steunen en werkwijzen, die van modelboomen gebruik maken. Het eenvoudigste geval van deze laatste groep kunnen we ons denken bij het gebruik van een enkelen modelboom. Het zijn deze inhoudsbepalingen, die het onderwerp van dit artikel zullen vormen.

We zoeken hier dus naar een stam, die representatief is voor den geheelen opstand. Dit is dus een stam, die de gemiddelde massa van alle in den opstand voorkomende stammen bezit. Dit vraagstuk is natuurlijk niet eenvoudig, omdat we niets weten van de inhouden der enkele stammen van den opstand.

Een eerste methode is gebaseerd op de onderstelling, dat de stam met het gemiddelde grondvlak (d.i. doorsnede op borsthoogte) ook de gemiddelde massa zal bezitten. Dit is natuurlijk niet meer dan een onderstelling. We kunnen het gemiddelde grondvlak eenvoudig berekenen, aangezien we de doorsneden op borsthoogte van alle stammen bepalen. Vervolgens kunnen we in den opstand naar een stam zoeken, die deze doorsnede bezit en hem tot modelboom kiezen.

De inhoudsbepaling met behulp van den boom met het gemiddelde grondvlak is de oudste werkwijze met modelboomen. Zij werd reeds in 1824 door Huber gebezigd en later door G. Heyer bijzonder aanbevolen. De vraag is echter, of de onderstelling, dat de boom met het gemiddelde grondvlak ook de gemiddelde massa bezit, juist is.

Verschillende praktische onderzoekingen hebben vaak het tegendeel min of meer bewezen. Zij wijzen veelal op te kleine resultaten. Zoo vond Speidel bij zijn onderzoek van 55 fijnspar- en zilverdenopstanden, dat in 58 % der gevallen de diameter van den massamiddenboom meer dan 2 mm hooger lag dan die van den boom met het gemiddelde grondvlak. In 30 % der gevallen viel hij meer dan 4 mm hooger en in 9 % meer dan 5 mm hooger. Weise meende, dat in een opstand de massamiddenboom niet samenvalt met den stam van het gemiddelde grondvlak, doch zoo ligt, dat 60 % van het aantal stammen lichter en 40 % zwaarder is.

We zullen het vraagstuk thans wiskundig bezien en uitgaan van het stochastische verband, dat in een opstand zonder twijfel bestaat tusschen inhoud en grondvlak. De functie, die dit verband zoo goed mogelijk weergeeft, zullen we voorstellen door:

$$v = f(g),$$

waarin v de inhoud en g het grondvlak van een stam is.

De grondvlakken der enkele stammen van den opstand zullen we aanduiden met

$$g_1, g_2, \ldots\ldots, g_k, \ldots\ldots, g_n$$

en de bijbehoorende inhouden met

$$v_1, v_2, \ldots\ldots, v_k, \ldots\ldots, v_n,$$

waarbij n het aantal stammen voorstelt.

De functie f(g) kunnen we ons ontwikkeld denken volgens een machtreeks van Mac Laurin:

$$f(g) = a_o + a_1 g + a_2 g^2 + a_3 g^3 + \ldots\ldots$$

Substitueeren we achtereenvolgens de waarden g_1, g_2, ..., g_n in de bovenstaande gelijkheid en sommeeren we de leden dezer betrekkingen, dan vinden we:

$$\Sigma\, f(g_k) = na_o + a_1 \Sigma g_k + a_2\, \Sigma\, g_k^2 + a_3 \Sigma\, g_k^3 + \ldots\ldots$$

Deze laatste vorm stelt den totalen inhoud van den opstand voor met gebruikmaking van de functie $v = f(g)$, waarvan ons de gedaante evenwel niet bekend is.

Stellen we verder het gemiddelde grondvlak voor door $\overline{g}$ en plaatsen we in den ontwikkelden vorm van f(g) deze waarde, dan ontstaat:

$$f(\overline{g}) = a_o + a_1 \overline{g} + a_2 \overline{g}^2 + a_3 \overline{g}^3 + \ldots\ldots$$

De inhoud van den opstand, dien we vinden door de vermenigvuldiging van den inhoud van den stam met het gemiddelde grondvlak en het aantal stammen n, is nu:

$$n.f(\overline{g}) = na_o + na_1 \overline{g} + na_2 \overline{g}^2 + na_3 \overline{g}^3 + \ldots\ldots$$

In de ontwikkelde vormen voor $\Sigma\, f(g_k)$ en $n.f(\overline{g})$ zijn de eerste twee termen steeds gelijk, doch de volgende termen zullen in het algemeen verschillen. Hieruit volgt, dat de beide uitwerkingen slechts eenzelfde resultaat zullen opleveren, wanneer $a_2 = a_3 = \ldots\ldots = O$ is. Dit laatste houdt dus in, dat slechts een bevredigende uitkomst met de werkwijze van den stam met het gemiddelde grondvlak wordt verkregen, wanneer de functie f(g) als volgt is opgebouwd:

$$f(g) = a_o + a_1 g.$$

De functie moet dan dus door een rechte lijn kunnen worden voorgesteld. Deze rechte vinden we in de literatuur terug onder den naam van „Gehrhardt-Kopezky-rechte".

Gehrhardt bewees in zijn proefschrift het omgekeerde. Indien tusschen grondvlak en inhoud een rechtlijnig verband aanwezig is, dan vallen de stam met het gemiddelde grondvlak en die met de gemiddelde massa samen. Hier wordt het bewijs gegeven, dat grondvlak- en massamiddenboom slechts kunnen samenvallen, wanneer het verband tusschen grondvlak en staminhoud rechtlijnig is en in geen andere gevallen.

Nieuwere onderzoekingen hebben bewezen, dat dit rechtlijnige verband niet steeds voorhanden is en dat de betrekking tusschen grondvlak en inhoud in de meeste gevallen tenminste door een parabolische vergelijking moet worden weergegeven:

$$f(g) = a_o + a_1 g + a_2 g^2,$$

waarin $a_2 > 0$ is.

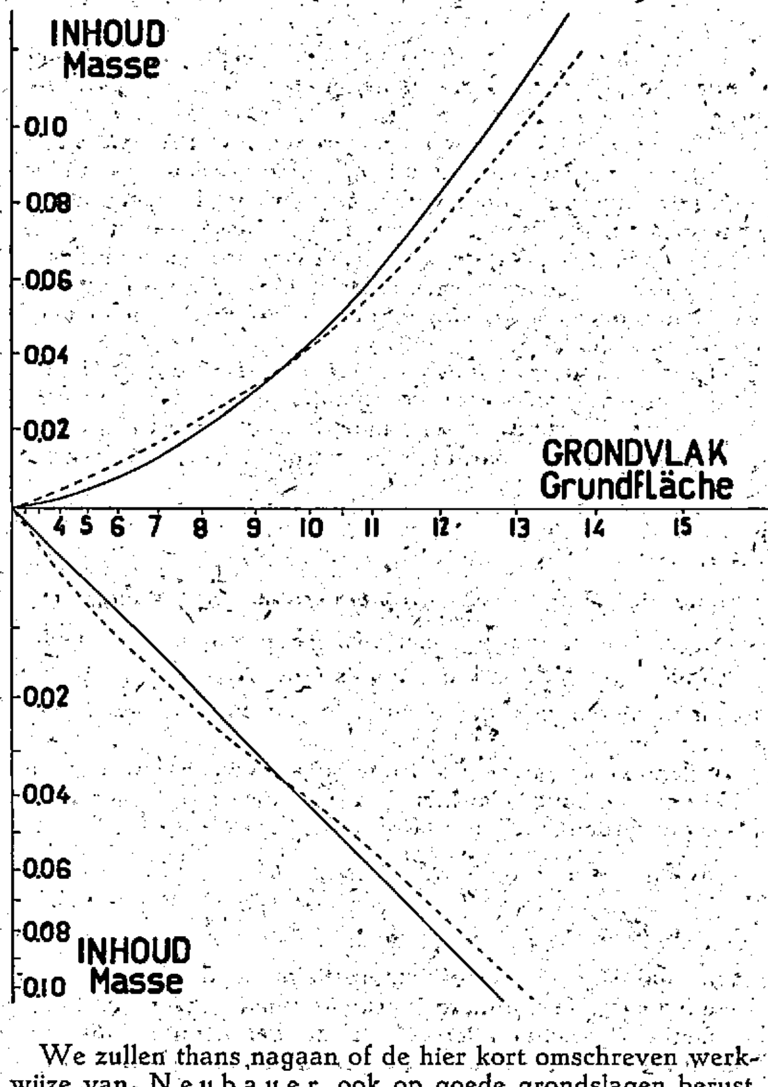
Aangezien $\Sigma\ g_k^2$ steeds grooter is dan $n\overline{g}^2$, brengt een positieve waarde van a_2 met zich mede, dat $n.f(\overline{g})$ kleiner is dan $\Sigma'\ f(g_k)$. In dit geval geeft dus de werkwijze met den modelboom met het gemiddelde grondvlak steeds een te klein resultaat.

Willen we evenwel het grondvlak γ weten, waarbij de gemiddelde inhoud voorkomt, dan dienen we in het algemeen de vergelijking op te lossen:

$$na_o + a_1 \Sigma g_k + a_2 \Sigma\ g_k^2 + \ldots\ldots = na_o + na_1 \gamma + na_2 \gamma^2 + \ldots\ldots$$

$$a_1 (\Sigma\ g_k - \gamma) + a_2 (\Sigma\ g_k^2 - \gamma^2) + \ldots\ldots = O.$$

Om aan de genoemde onjuistheid te ontkomen heeft Neubauer een andere werkwijze naar voren gebracht. De methode bestaat allereerst in de berekening van den totalen inhoud met behulp van een massatafel. Door de deeling van dezen totalen inhoud door het aantal stammen n vindt men den gemiddelden inhoud van een stam volgens de gegevens van de massatafel. Neubauer zoekt dan met inachtneming van de gevonden hoogtekromme naar het grondvlak, waarbij deze gemiddelde inhoud optreedt. Hierna keert hij naar den werkelijken opstand terug en zoekt naar een boom, die het betreffende grondvlak bezit. Van dezen stam bepaalt Neubauer den inhoud en vindt daarna den werkelijken inhoud van den opstand door vermenigvuldiging van de massa van den gemeten boom met het aantal stammen.



We zullen thans nagaan of de hier kort omschreven werkwijze van Neubauer ook op goede grondslagen berust. Geven we daartoe allereerst het verband tusschen grondvlak en inhoud volgens de massatafel met inachtneming van de gegevens van de hoogtekromme weer door:

$$v = \varphi(g),$$

waarna we de functie $\varphi(g)$ eveneens ontwikkeld denken volgens de machtreeks van M a c L a u r i n:

$$\varphi(g) = \alpha_o + \alpha_1 g + \alpha_2 g^2 + \alpha_3 g^3 + \ldots\ldots$$

De totale inhoud van den opstand volgens de massatafel wordt thans:

$$n\alpha_o + \alpha_1 \Sigma g_k + \alpha_2 \Sigma g_k^2 + \alpha_3 \Sigma g_k^3 + \ldots\ldots$$

De doorsnede γ op borsthoogte, die we volgens de methode van N e u b a u e r berekenen voor den opstandsmiddenboom, is dus in het algemeen aan te duiden als de oplossing van de vergelijking:

$$n\alpha_o + \alpha_1 \Sigma g_k + \alpha_2 \Sigma g_k^2 + \ldots\ldots = n\alpha o + n\alpha_1 \gamma + n\alpha_2 \gamma^2 + \ldots\ldots$$

$$\alpha_1 (\Sigma g_k - \gamma) + \alpha_2 (\Sigma g_k^2 - \gamma^2) + \ldots\ldots = o.$$

Deze waarde komt slechts overeen met die, welke we hierboven als de juiste bij de werkelijke inhoudsfunctie $f(g)$ leerden kennen, indien

$$\frac{a_1}{\alpha_1} = \frac{a_2}{\alpha_2} = \frac{a_3}{\alpha_3} = \ldots\ldots \text{ is.}$$

Zooals men na een korte becijfering kan zien, houdt dit in, dat de inhoudsfunctie van den werkelijken opstand ten opzichte van die van de massatafel in ieder geval als volgt moet zijn opgebouwd:

$$f(g) = A + B\ \varphi\ (g),$$

waarin A en B twee willekeurige constanten voorstellen.

Hieruit blijkt, dat de methode van N e u b a u e r niet voor elke opstandsbepaling op een geheel juiste grondgedachte steunt. De samenhang, die tusschen de inhoudsfunctie van den werkelijken opstand en die van de massatafel moet bestaan, is zeker niet zeer streng te noemen, doch het is niet juist te meenen, dat bij het gebruik van de methode van N e u b a u e r geen enkele voorwaarde ten grondslag zou liggen. Dit neemt natuurlijk geenszins weg, dat de werkwijze een fraaie vondst is en zeer zeker de voorkeur verdient boven die van de gemiddelde doorsnede.

We zullen aan de hand van een eenvoudig voorbeeld het bovenstaande eens toetsen. Gekozen is een jonge berkenproefvlakte ter grootte van 0.1 ha, gelegen in de boschwachterij „Kolleberga" van de houtvesterij „Kolleberga Skolrevir" te Ljungbyhed (Zweden). De 252 stammen werden alle geklemd in diameterklassen met een interval van 1 cm. Het resultaat met de berekening van de totale grondvlakte is hieronder weergegeven.

Het gemiddelde grondvlak is derhalve 1.5318 : 252 = 0.00608 m², hetgeen overeenkomt met een diameter van 8.8 cm. Een stam met een dergelijken diameter blijkt na velling en meting een inhoud te bezitten van 0.0303 m³. De inhoud van den opstand is dan bij gebruikmaking van de methode van den grondvlaksmiddenboom:

$$V = 252 \times 0{,}0303 = 7.64\ m^3.$$

diameter cm	aantal stammen	grondvlak per boom m^2	grondvlak per klasse m^2
2	5	0.000314	0.00157
3	4	0.000707	0.00283
4	9	0.001257	0.01131
5	15	0.00196	0.02940
6	31	0.00283	0.08773
7	27	0.00385	0.10395
8	44	0.00503	0.22132
9	28	0.00636	0.17808
10	34	0.00785	0.26690
11	29	0.00950	0.27550
12	9	0.01131	0.10179
13	8	0.01327	0.10616
14	6	0.01539	0.09234
15	3	0.01767	0.05301
	252		1.53189

Bij de berekening volgens de methode van Neubauer werd allereerst de inhoud van den opstand berekend volgens de gegevens van een plaatselijk opgestelde massatafel voor berk. Het resultaat is in den volgenden staat aangegeven.

diameter	aantal stammen	hoogte volgens hoogtekromme	inhoud per boom	inhoud van klasse
2	5	2.6	0.001	0.005
3	4	4.5	0.002	0.008
4	9	5.8	0.003	0.027
5	15	6.8	0.005	0.075
6	31	7.6	0.008	0.248
7	27	8.3	0.013	0.351
8	44	8.9	0.021	0.924
9	28	9.4	0.030	0.840
10	34	9.8	0.043	1.462
11	29	10.2	0.061	1.769
12	9	10.5	0.083	0.747
13	8	10.7	0.110	0.880
14	6	10.9	0.142	0.852
15	3	11.1	0.180	0.540
	252			8.728

De gemiddelde massa met behulp van de gegevens der tafel is nu $8.728 : 252 = 0.0346\ m^3$. Volgens de tafel heeft een stam met een diameter van 9.3 cm een dergelijken inhoud. We zien hier dus, dat deze middenboom 0.5 cm hooger ligt dan de boom met het gemiddelde grondvlak. Een stam met den diameter van 9.3 cm wordt geveld en de inhoud wordt bepaald op 0.0337 m³. De totale inhoud van de proefvlakte bedraagt volgens deze werkwijze dus:

$$V = 252 \times 0.0337 = 8.51 \text{ m}^3.$$

We hebben met opzet een jongen opstand gekozen, omdat daarbij als regel het verband tusschen grondvlak en inhoud verder van een rechtlijnigen samenhang afstaat dan bij oudere opstanden. Deze gevallen zijn meestal ongunstig voor de toepassing van den boom met het gemiddelde grondvlak als representatieven stam voor den opstand.

In de bovenstaande figuur is de samenhang tusschen inhoud en grondvlak, zooals deze volgens de massatafel aanwezig wordt geacht, met een getrokken lijn aangegeven. In de grafische voorstelling geeft de abscis het grondvlak en de ordinaat den inhoud weer. De getrokken lijn is dus de voorstelling van de functie φ (g). Onder deze grafiek is een voorstelling aangegeven, waarbij wederom het grondvlak als abscis is gekozen, doch waarvan de schaalindeeling van den inhoud als ordinaat zoo is gewijzigd, dat de functie φ (g) verschijnt in de gedaante van een rechte lijn, die een hoek van 45° maakt met de beide coördinaatsassen. We kunnen thans zeggen, dat de inhoudsbepaling van N e u b a u e r opgaat voor de opstanden, waarvan de functie f(g) in het assenstelsel met vervormde assenindeeling eveneens kan worden weergegeven door een rechte lijn.

De samenhang tusschen grondvlak en inhoud werd nadien in den berkenopstand nauwkeurig onderzocht door de meting van den inhoud van een groot aantal stammen en de wiskundige vereffening van de resultaten. Hierdoor ontstond een functie f(g), die in de figuur is aangeduid met een onderbroken lijn. In het assenstelsel met de gewijzigde ordinaatindeeling is de functie eveneens door een onderbroken lijn weergegeven. Zooals we terstond zien, is deze laatste lijn niet recht, zoodat we kunnen aannemen, dat voor het hier onderzochte geval aan de voorwaarde, welke aan de methode van N e u b a u e r ten grondslag ligt, niet is voldaan.

We moeten hier dadelijk opmerken, dat een geval gekozen is, waarbij de afwijking van een rechte lijn grooter is dan in de meeste gevallen. In het bijzonder wanneer de functies f(g) en φ (g) elkander op één of twee plaatsen binnen het beschouwde gebied snijden, ontmoet men dergelijke afwijkingen.

Het voorgaande kunnen we tenslotte als volgt samenvatten. De werkwijze met den stam met het gemiddelde grondvlak kan slechts juiste resultaten geven, wanneer het verband tusschen grondvlak en inhoud rechtlijnig is. Bij oudere opstanden ontmoet men wel een dergelijk verband, doch bij jongere opstanden vrijwel nooit. We vinden dan meestal met de methode te lage uitkomsten.

De methode van N e u b a u e r beteekent een aanzienlijke verbetering. Doch ook aan haar ligt een voorwaarde ten grondslag, namelijk dat de constanten a_1, a_2, ... enz. en α_1, α_2, ... enz. een aaneengesloten evenredigheid vormen. De voorwaarde is niet bijzonder streng, maar moet worden gesteld, indien de methode van Neubauer theoretisch juist wil zijn.

Het spreekt van zelf, dat zich ook toevallige fouten zullen voordoen bij de keuze en de meting van den representatieven stam, zoowel bij de eerste als bij de tweede werkwijze. Het ging ons hier slechts om de eenzijdige onnauwkeurigheden van de methoden op te sporen.

LITERATUUR.

Gehrhardt, E.: „Die theoretische und praktische Bedeutung des arithmetischen Mittelstammes." Meiningen 1901.

Gehrhardt, E.: „Ein Vergleich des Kopezky-Gehrhardtschen Verfahren der Bestandsmassenermittlung mit demjenigen von Neubauer und Tischendorf in Bezug auf Einfachkeit und Genauigkeit." Tharandter forstl. Jahrbuch 1933, blz. 328—344.

Heyer, G.: „Über die Ermittlung der Masse, des Alters und des Zuwachses der Holzbestände." Dessau 1852.

Neubauer, W.: „Die Bestandesaufnahme nach dem Verfahren des Massenmittelstammes und nach Stammklassen gleicher Masse." Centralblatt für das gesamte Forstwesen 1924, blz. 23—31, 105—115 en 1925, blz. 1—29, 90—111.

Neubauer, W.: „Zur Frage der kombinierten Verwendung von Massentafeln und Probestämmen bei Bestandesaufnahmen." Centralblatt für das gesamte Forstwesen 1932, blz. 305—320.

Neubauer, W.: „Massenlinienverfahren und Verfahren nach Stammklassen gleicher Masse." Tharandter forstl. Jahrbuch 1933, blz. 749—756.

Peschel, W.: „Neuere Verfahren der Bestandsmassenermittlung nach Probestämmen, ihre mathematisch-statistische Begründung und ihre Erprobung an einem praktischen Bestandsbeispiel." Tharandter forstl. Jahrbuch 1936, blz. 889—921 en 1937, blz. 1—50.

Speidel: „Beiträge zu den Wuchsgesetzen des Hochwaldes." Tübingen 1893.

Tischendorf, W.: „Lehrbuch der Holzmassenermittlung." Berlin 1927.

Tischendorf, W.: „Grundflächen- oder Massenmittel-

stamm?" Allg. Forst- und Jagdzeitung 1927, blz. 346.
Weise: „Ertragstafeln für die Kiefer". Berlin 1880.

DIE BESTANDSMASSENERMITTLUNG DURCH MESSUNG EINES EINZELNEN PROBESTAMMES.
(Zusammenfassung.)

Die Verfahren zur Berechnung der Bestandsmasse können in Messungs- und Schätzungsmethoden eingeteilt werden. Bei den Messungsverfahren kann man sich von allgemeinen Ziffern (Tafeln oder grafischen Darstellungen) oder von Probestämmen bedienen. Das einfachste Probestammverfahren besteht aus der Messung eines einzelnen Probestammes.

Ein erstes Verfahren beruht auf der Unterstellung, dasz der Grundflächenmittelstamm auch die mittlere Stammmasse besitzt. Gibt man die stochastische Beziehung zwischen Masse v und Grundfläche g mit $\hat{v} = f(g)$ an, so wurde gezeigt, dasz das Verfahren nur richtige Ergebnisse erweisen kann, wenn zwischen Masse und Grundfläche ein linearer Zusammenhang besteht.

Aus neuen Untersuchungen hat es sich erwiesen, dasz diese lineare Beziehung, welche wir in der Literatur unter dem Namen „Gehrhardt-Kopezky-Linie" antreffen, nicht immer vorhanden ist und wir diesen Zusammenhang mindestens von einer parabolischen Gleichung wiedergeben müssen:

$$f(g) = a_o + a_1 g + a_2 g^2,$$

worin a_2 im allgemeinen positiv ist. Mit dieser Annahme vor Augen wurde berechnet, dasz mit diesem Verfahren meistens zu niedrige Ergebnisse erhalten werden.

Zur Vermeidung dieser Ungenauigkeit hat Neubauer eine neue Methode entworfen. Er berechnet zuerst die Masse des Bestandes mittels einer Massentafel. Neubauer berechnet dann den Durchmesser des Stammes mit der mittleren Masse nach den Ziffern der Massentafel. Er nimmt jetzt aus dem zu untersuchenden Bestande einen Stamm mit dem gefundenen Durchmesser und bestimmt davon die Masse. Die Bestandsmasse findet er durch Vervielfachung mit der Stammzahl.

Man kann den Zusammenhang zwischen Masse und Grundfläche nach der Massentafel angeben mit $\hat{v} = \varphi$ (g) und diese Funktion nach Mac Laurin entwickeln:

$$\varphi(g) = \alpha_o + \alpha_1 g + \alpha_2 g^2 + \ldots\ldots$$

Auch die Gleichung f(g) kann man nach Mac Laurin entwickelt denken:

$$f(g) = a_o + a_1 g + a_2 g^2 + \ldots\ldots$$

Es wurde gezeigt, dasz das Verfahren von Neubauer theoretisch nur ein richtiges Ergebnis aufweisen kann, wenn

$$\frac{a_1}{\alpha_1} = \frac{a_2}{\alpha_2} = \frac{a_3}{\alpha_3} = \ldots\ldots$$

ist, oder dasz zwischen $f(g)$ und $\varphi(g)$ die nachstehende Beziehung zutrifft:

$$f(g) = A + B\,\varphi\,(g),$$

worin A und B zwei Konstanten darstellen. Obwohl dem Verfahren diese Unterstellung zu Grunde liegt, bedeutet diese Methode jedenfalls eine wichtige Verbesserung des erstgenannten Verfahrens.