INSTITUUT VOOR CULTUURTECHNIEK EN WATERHUISHOUDING

Nota no. 73 II dd. 21 maart 1961

Onderzoek naar de formule voor de pF-curve

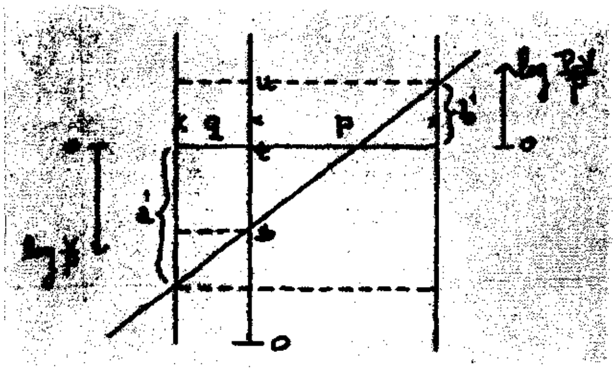
ir. W.C. Visser

Het tot dusverre uitgevoerde onderzoek wees uit, dat in een N-nomogram met log v (v = vochtgehalte) en log (1-v) (1-v = luchtgehalte) langs de evenwijdige assen een redelijke beschrijving van de pF-curve gegeven kan worden. Op de schuine as moet dan een lineaire schaal voor de pF worden uitgezet met een bij de pF-curve behorende schaaleenheid en een juist beginpunt.

Verdere berekeningen wezen uit, dat een correctie aan de begin- en eindwaarden van de vochtschaal een mogelijkheid bieden om het N-nomogram om te vormen tot een nomogram met drie evenwijdige assen. Deze correcties kunnen worden opgevat als een bepalingsfout van het ovendroge- en het geheel verzadigde gewicht. Ook kan men zich afvragen of er een zeker porienvolume is - wortel- of wormgangen - dat bestaat als gevolg van een andere oorzaak dan de bodemkundige eigenschappen van korrelgrootteverdeling en vochtaantrekking van het grondmateriaal, dat de vorm van de pF-curve grotendeels bepaalt.

Het type van de formule

Het nomogram met drie evenwijdige lijnen, zie fig. 1, geeft de volgende onderlinge samenhang weer:



$$\frac{a' + b'}{p + q} = \frac{s - t + a'}{q} = \frac{t + b' - s}{p}$$

Nu stelt men de afstand p+q tussen de assen gelijk aan 1. Nu volgt uit de voorgaande formule:

$$q(a'+b') - a' = s - t \qquad (q-1)a' + qb' = s - t$$
$$p(a'+b') - b' = t - s \qquad pa' + (p-1)b' = t - s$$

$$qb' - (1-q)a' = s - t$$
$$(1-p)b' + pa' = t - s$$

Vervangt men nu a' door $\log \frac{v}{P}$ en b' door $\log \frac{P-v}{P}$, stelt men de waarde van de pF ter plaatse van het punt t op de nul-as van het nomogram, gelijk a en ter plaatse van het punt s gelijk aan de bij vochtgehalte v behorende pF, en stelt men de schaaleenheid op de pF-schaal gelijk b, dan ontstaat de formule

$$a - b\,pF = \log \frac{\left(\frac{v}{P}\right)^{p}}{\left(\frac{P-v}{P}\right)^{1-p}}$$

Vereenvoudiging is mogelijk als volgt:

$$\frac{a}{1-p} - \frac{b}{1-p}\,pF = \log \frac{\left(\frac{v}{P}\right)^{\frac{p}{1-p}}}{\frac{P-v}{P}}$$

$$\left(\frac{a}{1-p} - \frac{1-2p}{1-p}\log P\right) - \frac{b}{1-p}\,pF = \log \frac{v^{\frac{p}{1-p}}}{P-v}$$

$$A \qquad\qquad - B\,pF = \log \frac{v^{m}}{P-v}$$

<u>Het bepalen van de constanten</u>

De formule voor de pF-curve werd nu

$$a - b\,pF = p \log \frac{v}{P} - (\cancel{p}\,1-p) \log \frac{P-v}{P}$$

Voor P en v zijn waarden bekend. Maar er kan een systematische fout aanwezig zijn in het droog gewicht dat op elke v inwerkt, en in het gewicht bij verzadiging, dat op de P inwerkt.

Vervangt men v door $v+\Delta v$ en P door $P+\Delta P$, dan zijn Δv en ΔP onbekenden, die met de onbekende p als product voorkomen. Om tot een oplossing te komen, moet voor p een waarde als benadering worden geschat en als correctie op $p+\Delta p$ de onbekende Δp worden bepaald. De voortplanting van de fout vindt men als volgt:

$$F = p \log \frac{v}{P} - (1-p) \log \frac{P-v}{P} \qquad \Delta F_p = \left(\log \frac{v}{P} + \log \frac{P-v}{P} \right) \Delta p$$

$$\Delta F_v = \left(\frac{p}{v} + \frac{1-p}{P-v} \right) 0.434 \, \Delta v \qquad \Delta F_P = - \left(\frac{p}{v} + \frac{1-p}{P-v} \right) \frac{v}{P} \, 0.434 \, \Delta P$$

De formule wordt nu:

$$a - b\,pF - \log \frac{v(P-v)}{P^2} \Delta p - 0.434 \left(\frac{p}{v} + \frac{1-p}{P-v} \right) \Delta v + 0.434 \frac{v}{P} \left(\frac{p}{v} + \frac{1-p}{P-v} \right) \Delta P$$
$$= p \log \frac{v}{P} - (1-p) \log \frac{P-v}{P}$$

De wijze waarop de vergelijking voor de berekening van de constanten wordt geschreven, hangt af van de waarde van p. Is p klein, dan kan de formule het beste door 1-p gedeeld worden en p/1-p als nieuwe constante m worden ingeveerd. Is p daarentegen groot en 1-p klein, dan kan de formule beter door p worden gedeeld en 1-p/p als nieuwe constante n worden ingevoerd. Voor p gelijk aan een tussengelegen waarde zijn dan beide schrijfwijzen bruikbaar.

Men voert nu de volgende samenvattingen in, verdeeld in de schrijfwijze I en II.

$$\mathrm{I} \quad \frac{a}{1-p} = X, \quad \frac{b}{1-p} = Y, \quad \frac{\Delta p}{1-p} = Z, \quad 0.434 \, \Delta v = U, \quad 0.434 \, \Delta P = V, \quad \frac{p}{1-p} = m$$

$$\mathrm{II} \quad \frac{a}{p} = X, \quad \frac{b}{p} = Y, \quad \frac{\Delta p}{p} = Z, \quad 0.434 \, \Delta v = U, \quad 0.434 \, \Delta P = V, \quad \frac{1-p}{p} = n$$

De formule wordt dan:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{I} & X - (pF) Y - \log \left(\frac{v(P-v)}{P^2} \right) Z - \left(\frac{m}{v} + \frac{1}{P-v} \right) U + \frac{v}{P} \left(\frac{m}{v} + \frac{1}{P-v} \right) V = \left(m \log \frac{v}{P} - \log \frac{P-v}{P} \right) \\ \mathrm{II} & X - (pF) Y - \log \left(\frac{v(P-v)}{P^2} \right) Z - \left(\frac{1}{v} + \frac{n}{P-v} \right) U + \frac{v}{P} \left(\frac{1}{v} + \frac{n}{P-v} \right) V = \left(\log \frac{v}{P} - n \log \frac{P-v}{P} \right) \end{array}}$$

De onbekenden, die moeten worden berekend, zijn nu X, Y, Z, U en V. De termen tussen haken kunnen uit de analysecijfers worden berekend, waarbij voor P en p een schatting moet worden gemaakt. De waarde van P zal vermoedelijk wel met vrij grote nauwkeurigheid bekend zijn. Zijn er onvoldoende gegevens voor een directe berekening van het poriënvolume uit droog gewicht, soortelijk gewicht en monstervolume, dan kan men een bedrag, dat het vochtgehalte bij de laagste pF wat te boven gaat, nemen.

De waarde van m = 1/n zal vermoedelijk veelal omstreeks 0.5 zijn voor lichte gronden. Bij zware klei lijken hoge waarden van m mogelijk en zal men beter met n kunnen werken. Lichte gronden met een m nagenoeg gelijk 0 zijn bij grafische analyse reeds aangetroffen.

Schatting van de waarde van m

Zodra een aantal curven doorgerekend zijn, zal men de waarde van m wel aan de hand van de zwaarte van de grond kunnen schatten. Voor niet te zware kleien zou men de berekening tweemaal kunnen uitvoeren met m = 1 en m = 0, waartussen de juiste waarde veelal zal liggen. Dit zou een indruk over de snelheid van convergeren kunnen geven van de functie van m.

De waarde van p of m kan ook worden afgeleid door de ligging van het buigpunt bij de uit de hand getekende pF-curve te schatten. De waarde van p blijkt uit de tweede afgeleide $d^2F/dv^2 = 0$

$$\frac{dF}{dv} = \left(\frac{p}{V} + \frac{1-p}{P-v}\right) 0.4343 \qquad \frac{d^2F}{dv^2} = \left(\frac{-p}{v^2} + \frac{1-p}{(P-v)^2}\right) 0.4343$$

Uit de waarde voor $\frac{d^2F}{dv^2}$ volgt:

$$(P-v)^2 p = v^2(1-p) \qquad \text{of} \qquad P^2p - 2Ppv + (2p-1)v^2 = 0$$

De waarde van p laat zich uit die van v berekenen of andersom:

$$v = \frac{2Pp \pm \sqrt{4P^2p^2 - 4P^2p(2p-1)}}{2(2p-1)} \qquad \frac{v}{P} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{p}-1}}{2-\frac{1}{p}} = \frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{p}-1}}$$

$$p = \frac{v^2}{(P-v)^2 + v^2} \qquad \text{of} \qquad p = \frac{1}{\left(\frac{1-\frac{v}{P}}{\frac{v}{P}}\right)^2 + 1}$$

Dit levert de volgende betrekking op tussen v/P bij het buigpunt en de waarde van p en m:

v/P =	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
p =	0.003	0.012	0.030	0.059	0.100	0.155	0.224	0.308	0.402	0.50
m =	0.003	0.012	0.031	0.062	0.111	0.182	0.288	0.445	0.67	1.00
n =	362	81	32.2	16.0	9.0	5.44	3.47	2.25	1.50	1.00

v/P =	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
p =	0.500	0.600	0.691	0.775	0.850	0.900	0.940	0.970	0.988	0.99
m =	1.00	1.50	2.25	3.47	5.44	9.00	16.0	32.2	81	362
n =	1.00	0.67	0.445	0.288	0.182	0.111	0.062	0.031	0.012	0.00

Vaak echter zullen de waarnemingen niet zo nauwkeurig zijn, dat men het buigpunt goed kan vaststellen. Bovendien is een buigpunt op zichzelf geen erg nauwkeurig criterium als "meest rechte punt op een toch al vrijwel rechte lijn".

Een andere schatting van m kan uit een oplossing van m volgen, waarbij de Δv en ΔP even verwaarloosd worden. De oplossing loopt als volgt:

$$A - B\,pH_1 = \log \frac{v_1^m}{P-v_1} \qquad\qquad A - B\,pH_2 = \log \frac{v_2^m}{P-v_2}$$

$$A - B\,pH_2 = \log \frac{v_2^m}{P-v_2} \qquad\qquad A - B\,pH_3 = \log \frac{v_3^m}{P-v_3}$$

$$-B(pH_1 - pH_2) = \log \frac{v_1^m}{P-v_1} - \log \frac{v_2^m}{P-v_2} \qquad\qquad -B(pH_2 - pH_3) = \log \frac{v_2^m}{P-v_2} - \log \frac{v_3^m}{P-v_3}$$

$$\frac{\log \frac{v_1^m}{P-v_1} - \log \frac{v_2^m}{P-v_2}}{pH_1 - pH_2} = \frac{\log \frac{v_2^m}{P-v_2} - \log \frac{v_3^m}{P-v_3}}{pH_2 - pH_3}$$

$$\log \frac{v_1^m}{v_2^m}\,\frac{P-v_2}{P-v_1} = \frac{pH_1 - pH_2}{pH_2 - pH_3}\,\log \frac{v_2^m}{v_3^m}\,\frac{P-v_3}{P-v_2}$$

$$m \log \frac{v_1}{v_2} + \log \frac{P-v_2}{P-v_1} = m \left(\frac{pH_1 - pH_2}{pH_2 - pH_3}\right) \log \frac{v_2}{v_3} + \frac{pH_1 - pH_2}{pH_2 - pH_3}\,\log \frac{P-v_3}{P-v_2}$$

$$\boxed{+m = \frac{\left(\frac{pF_1 - pF_2}{pF_2 - pF_3}\right) \log \frac{P - v_3}{P - v_2} - \log \frac{P - v_2}{P - v_1}}{\frac{pF_1 - pF_2}{pF_2 - pF_3} \log \frac{v_3}{v_2} - \log \frac{v_2}{v_1}}}$$

$$\boxed{A = B\,pF + \log \frac{v^m}{P - v}} \qquad \boxed{B = \frac{\log \left(\frac{P - v_3}{P - v_2}\right) - m \log \frac{v_3}{v_2}}{pF_2 - pF_3}}$$

Uit drie waarnemingen, bij voorkeur zo gekozen dat zij niet op een te rechtlijnig deel van de curve liggen, kan men de waarde van m berekenen. De waarde van p volgt dan als m/m+1.

De formules geven aan, dat m en B niet afhankelijk zijn van de schaal, waarin v en P-v zijn uitgedrukt. De waarde van A is schaalafhankelijk. Met deze schatting van A, B en m kan men nu een verdere schatting van Δ v en Δ (P-v) maken, zonder te omvangrijke berekeningen te behoeven te maken. Men kan de zo gevonden waarden voor A, B en m invullen in de formule:

$$A - B\,pF = m \log (v + \Delta v) - \log (P - v + \Delta (P - v))$$

$$A - B\,pF = m \log v + 0.434 \frac{\Delta v}{v} - \log (P - v) - 0.434 \frac{\Delta (P - v)}{P - v}$$

$$\boxed{\frac{0.434 m}{v} \Delta v - \frac{0.434}{P - v} \Delta (P - v) = A - B\,pF - m \log v + \log (P - v)}$$

De schatting van de 5 onbekenden zou men nu als volgt kunnen uitvoeren: De waarden van A, B en m berekent men voor de pF-waarden 1,5 - 2,7 - 4,2. Deze waarden substitueert men in het rechter lid van de juist genoemde formule, waarna de betrekking tussen Δv en Δ(P-v) met de waarden voor pF 1.0 en 6.0 uitvoert. De waarde voor pF 0.4 kan vooreerst beter worden uitgesloten, omdat hierin vermoedelijk wat grote afwijkingen optreden.

De correctie op Δv en Δ(P-v) zal moeten worden overdreven omdat een deel van die fout in de waarden voor pF 1.5 en 4.2 is opgenomen. Men kan de tweede berekening daarom beter met wat te hoge correcties uitvoeren en achteraf nagaan naar welke waarde de uitkomsten convergeren.

<u>De pF, waarbij 50% vocht optreedt</u>

Zijn de constanten bekend, dan kan men enkele eigenschappen van de pF-curve nagaan.

Uit: $A - B\,pF = \log \frac{v^m}{P-v}$ volgt $pF = \frac{1}{B}\left(A - \log \frac{v^m}{P-v}\right)$

Waar P-v = v, dus het 50% vochtgehalte optreedt, geldt:

$$pF_{50\%} = \frac{1}{B}\left(A - \log \left(\frac{P}{2}\right)^{m-1}\right)$$

Wil men een oordeel over de doorluchting uit de constanten van de pF-curve afleiden, dan zou men als maatstaf voor v kunnen nemen 0.3 P, wat bij P = 45% zou neerkomen op een luchthoudend percentage van 13.5.

De formule wordt dan:

$$pF = \frac{1}{B}\left(A - m \log 0.3P + \log 0.7P\right) = \frac{1}{B}\left(A - m \log 0.3 + \log 0.7 - (m-1)\log\right.$$

$$pF = \frac{1}{B}\left\{A + (0.5229\,m - 0.1549) - (m-1)\log P\right\}$$

Wanneer de constanten bekend zijn, geeft deze formule aan hoe hoog de pF moet oplopen om een voldoende doorluchting mogelijk te maken.

<u>De pF, waarbij het meeste vocht beschikbaar komt</u>

De pF, waarbij de grootste hoeveelheid vocht onttrokken kan worden, welk punt weergegeven wordt met een ster, treedt op bij het buigpunt.

Hier is: $\frac{v^*}{P} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{p}-1}}{2-\frac{1}{p}} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{m}}}{1-\frac{1}{m}}$ Het minteken geldt.

De uit m volgende waarde voor v geeft, gesubstitueerd in de formule voor de pF, de waarde waarbij het meeste vocht beschikbaar is. Substitueert men de m en v^* waarden in

$$\frac{d\,pF^*}{dv} = \frac{-1}{B}\left(\frac{m}{v^*} + \frac{1}{P-v^*}\right)$$

dan vindt men daaruit de hoeveelheid water per eenheid pF.

Uit $\dfrac{dp\mathcal{F}^*}{dv} = \dfrac{-1}{BP}\left(\dfrac{m}{\frac{v^*}{P}} + \dfrac{1}{1-\frac{v^*}{P}}\right)$ en $\begin{cases} \dfrac{v^*}{P} = \dfrac{m-\sqrt{m}}{m-1} = \sqrt{m}\left(\dfrac{\sqrt{m}-1}{m-1}\right) \\ 1-\dfrac{v^*}{P} = \dfrac{m-1-m+\sqrt{m}}{m-1} = \dfrac{\sqrt{m}-1}{m-1} \end{cases}$

volgt $\dfrac{dp\mathcal{F}^*}{dv} = \dfrac{-1}{BP}\left\{\dfrac{m(m-1)}{m-\sqrt{m}} + \dfrac{m-1}{\sqrt{m}-1}\right\}$

$$\frac{dp\mathcal{F}^*}{dv} = \frac{-1}{BP}\left\{\frac{(m+\sqrt{m})(m-1)}{m-\sqrt{m}}\right.$$

$$\frac{dp\mathcal{F}^*}{dv} = \frac{-1}{BP}\left(\sqrt{m}+1\right)^2$$

De hoeveelheid water, die maximaal per eenheid van toename van de pF vrij komt, is dus op eenvoudige wijze van de waarde van m afhankelijk.

Voor de pF van het buigpunt krijgt men, door de waarden van $\frac{v^*}{P}$ en $1-\frac{v^*}{P}$ uitgedrukt in m te substitueren:

$$p\mathcal{F}^* = \frac{A}{B} - \frac{m}{2B}\log m - \frac{m-1}{B}\log P\left(\frac{\sqrt{m}-1}{m-1}\right)$$

$$p\mathcal{F}^* = \frac{1}{B}\left\{A - \frac{m}{2}\log m - (m-1)\log\left(\frac{P}{\sqrt{m}+1}\right)\right\}$$

$$p\mathcal{F}^* = \frac{1}{B}\left\{A - (m-1)\log P + \left[(m-1)\log(\sqrt{m}+1) - \frac{m\log m}{2}\right]\right\}$$

De term, die alleen m bevat, kan vooraf berekend worden. De relatie tussen B, pF, A, P en m laat zich in een nomogram gemakkelijk samenvatten, n.l.

$$Bp\mathcal{F}^* - A = H = (1-m)\log P + f(m)$$

waarin H een hulpschaal. Vergelijkt men de formule met die welke voor de doorluchting werd afgeleid, dan blijkt dat alle termen aan elkaar gelijk zijn, behalve de m-functie. Deze kan men blijkbaar variëren om over verschillende aspecten geïnformeerd te worden.

Wageningen, maart 1961.

Voorbeeld van berekening van de constanten

Men zou de formule met de 5 onbekenden A, B, m, Δ V en ΔP kunnen oplossen door 5 combinaties pF - V in de formule in te zetten en de 5 formules met 5 onbekenden op te lossen. Het is echter een niet onbelangrijke hoeveelheid werk en bedacht moet worden, dat de oplossing reïtteratief is en men dus de berekening een aantal malen zal moeten herhalen.

De gang van de hier gekozen oplossing is, dat men met een gekozen waarde voor ΔV_1 en ΔP_1 de onbekenden A, B en m berekent volgens de hiervoor gegeven formules uit drie waarnemingen.

Met deze uitkomsten worden nu voor twee verdere waarnemingen de ΔV_2 en ΔP_2 opgelost, de waarden die toegevoegd aan de eerst geschatte ΔV_1 en ΔP_1 een betere benadering van de definitieve oplossing voor deze waarden geeft. De toepassing van ΔV_2 en ΔP_2 kan soms echter moeilijkheden geven, omdat men weleens over de juiste oplossing heen schiet en het geval kan krijgen, dat het vochtgehalte voor pF 6.0 en 0.4 buiten de assymptoot vallen en er immaginaire getallen ontstaan. Daarom kiest men de ΔV en ΔP zo, dat de beide genoemde waarnemingen nog juist reële logarithmen houden. In die gevallen, waarin de extreme waarden niet te zeer van de formule afwijken, zal men een correctie ΔV_2 en ΔP_2 krijgen, die van de assymptoot af gericht is. In de derde kolom van het voorbeeld ziet men, dat door de keuze van ΔV_1 en ΔP_1 de $(P\text{-}v)_{0.4}$ en de $V_{6.0}$ beide op 0.2 gesteld zijn geworden, zeer lage waarden dus, die ΔV_2 en ΔP_2 waarden van + 0.18 respectievelijk + 0.16 doen ontstaan, getallen die aan V en P-v moeten worden toegevoegd zoals het + teken aangeeft. De gevonden ΔV_2 en $\Delta(P\text{-}v)_2$ zijn echter geen nauwkeurige aanwijzers voor de definitieve oplossing en men moet met enkele pogingen deze definitieve oplossing insluiten. Wanneer men de ΔV_2 en $\Delta(P\text{-}v)_2$ voldoende dichtbij nul heeft gebracht, vindt men voor A, B en m de juiste waarden. In het doorgerekende voorbeeld blijken de oorspronkelijke vochtgehalten V in de eerste kolom met $\Delta V = 2.2$ te moeten worden verminderd, terwijl het luchtgehalte (P-v) met $\Delta(P\text{-}v)_2 = 1.2$ dient te worden verminderd. Het berekende voorbeeld laat zien, dat het geen zin heeft om de berekening met de onveranderde getalwaarden te beginnen, zoals in de eerste twee kolommen. Men kan beter de

ΔV_1 en $\Delta(P\text{-}v)_1$ allereerst zo groot kiezen dat de logarithmen nog juist reëel blijven. Ook bij het via vereffening bepalen van de 5 onbekenden zal dit de techniek zijn, die de geringste moeilijkheden doet optreden. De volgende berekening kan men met een ΔV en $\Delta(P\text{-}v)$ uitvoeren, die gelijk is aan ΔV_1 + 2 à 3 maal ΔV_2 en voor $\Delta(P\text{-}v)$ dezelfde ruime marge, omdat de ΔV_2 en $\Delta(P\text{-}v)_2$ aanmerkelijk te klein uitvallen. Op deze wijze heeft men redelijke zekerheid dat men de werkelijke oplossing insluit.

In een tweede tabel wordt met de vier niet gebruikte waarnemingen een controleberekening uitgevoerd.

P		40.5		37.9		36.7		37.2		37.6	
	Nr	v	(P-v)	v	(P-v)	v	(P-v)	v	(P-v)	v	(P-v)
pF 0.4	1	39.1	1.4	36.5	1.4	36.5	0.2	36.7	0.5	37.0	0.6
1.0	2	37.6	2.9	35.0	2.9	35.0	1.7	35.2	2.0	35.5	2.1
2.3	3	24.6	15.9	22.0	15.9	22.0	14.7	22.2	15.0	22.5	15.1
4.2	4	6.3	34.2	3.7	34.2	3.7	33.0	3.9	33.3	4.2	33.4
6.0	5	2.8	37.7	0.2	37.7	0.2	36.5	0.4	36.8	0.7	36.9
v_3/v_4	$(P-v)4/(P-v)_3$	3.905	2.151	5.946		5.946	2.245	5.6923	2.2220	5.3571	2.2119
v_2/v_3	$(P-v)3/(P-v)_2$	1.528	5.483	1.591		1.591	8.647	1.5856	7.5000	1.5778	7.1905
$\log v_3/v_4 = I$	$\log (P-v)4/(P-v)_3 = II$	0.5916	0.3326	0.7742	0.3326	0.7742	0.3512	0.7554	0.3464	0.7289	0.3448
a. $\log v_2/v_3$	$\log (P-v)3/(P-v)_2$	0.1841	0.7390	0.2017		0.2017	0.9369	0.2002	0.8751	0.1981	0.8568
		0.4048	0.2276	0.5297		0.5297	0.2403	0.5168	0.2370	0.4987	0.2559
b. I x 0.6842	II x 0.6842	0.2207	0.5114	0.3280	0.5114	0.3280	0.6966	0.3166	0.6381	0.3006	0.6209
b-a= noemer	b-a= teller										
m		2.3172		1.5592		2.1258		2.0155		2.0655	
	$\log v_3$		1.3909		1.3424		1.3424		1.3465		1.3522
$m \log v_3/v_4$	$m \log v_3$ +	1.3709	3.2230	1.2072	2.0931	1.6442	2.8510	1.5225	2.7135	1.5055	2.7930
$\log (P-v)4/(P-v)_3$	$2.3^{+}B$ +	0.3326	2.0622	0.3326	1.8639	0.3512	2.4155	0.3464	2.2623	0.3448	2.2397
som	$\log (P-v)_3$-	1.7035	1.2014	1.5397	1.2014	1.9954	1.1673	1.8689	1.1761	1.8505	1.1790
$/1.9^{*} = B$	A	0.8966	4.0838	0.8104	2.7556	1.0502	4.0992	0.9836	3.7997	0.9738	3.8537

+ 2.3 komt van pF 2.3

* 1.9 komt van 4.2 - 2.3 = $pF_{4.2} - pF_{2.3}$

P	Hr	40.5 V	(P-v)	37.9 V	(P-v)	36.7 V	(P-v)	37.2 V	(P-v)	37.6 V	(P-v)
$V_{0.4}$	$(P-v)_{0.4}$	39.1	1.4	36.5	1.4	36.5	0.2	36.7	0.5	37.0	0.6
log $V_{0.4}$	log $(P-v)_{0.4}$	1.5922	0.1461	1.5623	0.1461	1.5623	$\bar{0}$.6990	1.5647	$\bar{0}$.3010	1.5682	$\bar{0}$.2218
$V_{6.0}$	$(P-v)_{6.0}$	2.8	3[illegible]7	0.2	37.7	0.2	36.5	0.4	36.8	0.7	36.9
log $V_{6.0}$	log $(P-v)_{6.0}$	0.4472	1.5763	$\bar{0}$.6990	1.5763	$\bar{0}$.6990	1.5623	$\bar{0}$.3979	1.5658	$\bar{0}$.1549	1.5670
m log $V_{0.4}$	m log $V_{6.0}$ 1	3.6894	1.0363	2.4359	$\bar{1}$.0899	3.3180	$\bar{1}$.4845	3.1537	$\bar{0}$.8020	3.2391	$\bar{0}$.3199
0.4^{++} B	6.0^{Γ} B 2	0.3586	5.3796	0.3242	4.8624	0.4201	6.3012	0.3934	5.9016	0.3895	5.8428
A	A 3	4.0838	4.0838	2.7556	2.7556	6.2230	4.0992	3.7997	3.7997	3.8537	3.8537
log $(P-v)_{0.4}$	log $(P-v)_{6.0}$ 4	0.1461	1.5763	0.1461	1.5763	$\bar{0}$.6990	1.5623	$\bar{0}$.3010	1.5658	$\bar{0}$.2218	1.5670
1 + 2 = 5		4.0470	6.4159	2.7601	3.7725	3.7381	4.8167	3.5471	5.0994	3.6286	5.5229
3 + 4 = 6		4.2299	5.6601	2.9017	4.3319	3.4002	5.6615	$\overset{+}{3}$.4987	5.3655	3.6319	5.4207
5 - 6 = c_1	5 - 6 = c_2	$\bar{0}$.1829	$\overset{+}{0}$.7558	$\bar{0}$.1416	$\bar{0}$.5594	$\overset{+}{0}$.3379	$\bar{0}$.8448	$\overset{+}{0}$.0484	$\bar{0}$.2661	$\bar{0}$.0053	$\overset{+}{0}$.1022
0.4343 M		1.0064		0.6772		0.9224		0.8753		0.8970	
0.4343 M/$V_{0.4}$ a_1	0.4343 K/$V_{6.0}$ a_2	0.0257	0.3581	0.0185	3.3860	0.0253	4.6120	0.0239	2.1883	0.0242	1.2814
$-0.4343/(P-v)_{0.4}$ b_1	$-0.4343/(P-v)_{6.0}$ b_2	$\bar{0}$.3102	$\bar{0}$.0115	$\bar{0}$.3102	$\bar{0}$.0115	$\bar{2}$.1715	$\bar{0}$.0119	$\bar{0}$.8686	$\bar{0}$.1180	$\bar{0}$.7238	$\bar{0}$.0118
$c_1b_2 - c_2b_1$	7	$\overset{+}{0}$.2366		$\bar{0}$.1719		$\bar{1}$.8385		$\bar{0}$.2368		$\overset{+}{0}$.0740	
$a_1c_2 - a_2c_1$	8	$\bar{0}$.0849		$\overset{+}{0}$.4691		$\bar{1}$.5798		$\bar{0}$.1123		$\overset{+}{0}$.0067	
$a_1b_2 - a_2b_1$	9	0.1108		$\bar{1}$.0501		1$\bar{0}$.0147		$\bar{1}$.8979		$\bar{0}$.9272	
ΔV = 7 / 9		$\bar{2}$.1353		$\overset{+}{0}$.1637		$\overset{+}{0}$.1836		$\overset{+}{0}$.1248		$\bar{0}$.0798	
$\Delta(P-v)$ = 8 / 9		$\bar{0}$.7662		$\bar{0}$.4467		$\overset{+}{0}$.1577		$\overset{+}{0}$.0592		$\bar{0}$.0072	

++ 0.4 komt van $pF_{0.4}$
Γ 6.0 komt van $pF_{6.0}$

pF		V	$V - \Delta V = V_1$	$(P-v) - \Delta(P-v) = (P-v)_1$	log V	$-k \log V_1 + \log (P-v)_1$	+ A = BpF	Δ pF
			P = 37.6					
pF	1.5	36.0	33.9	3.7	1.5302	3.1616 -	+ 1.2603	
						0.5682 +	1.2942	- 0.2058
	2.0	31.1	28.2	9.4	1.4502	2.9964 -	+ 1.8304	
						0.9731 +	1.8796	- 0.1204
	2.7	18.6	15.7	21.9	1.1959	2.4711 -	+ 2.7230	
						1.3404 +	2.7962	+ 0.0762
	3.4	11.9	9.0	28.6	0.9542	1.9719 -	+ 3.3582	
						1.4564 +	3.4280	+ 0.0280
						+ A 3.8537	+ 0.9738 B	

De pF bij krimpende monsters

Bij krimpende monsters is het veelal niet geheel duidelijk wat men als vochtgehalte moet kiezen, omdat bij de pF-bepaling het vochtgehalte als een vochtgehalte in volumeprocenten wordt weergegeven. Dit vochtgehalte gaat dan afhankelijk worden van het percentage aan krimp.

Nu is het bekend, dat de krimp een logarithmische functie van de druk is en men kan dus het poriënvolume P schrijven als:

$$P_{pF} = P - \alpha\, pF$$

Wanneer men dit in de formule voor de pF invoegt, krijgt men de volgende functie voor het krimpende monster:

$$F = a - b\,pF - p \log \frac{v}{P - \alpha pF} + (1-p) \log \frac{(P - \alpha pF - v)}{P - \alpha pF} = 0$$

Deze formule houdt in, dat het totale monstervolume dus tesamen met het vochtgehalte op droog gewicht wordt bepaald. De vereffeningstermen zijn nu:

$$\frac{\delta F}{\delta p} = -\left\{ \log \frac{v}{P - \alpha pF} + \log \frac{P - \alpha pF - v}{P - \alpha pF} \right\}$$

$$\frac{\delta F}{\delta v} = -\left\{ \frac{p}{v} + \frac{1-p}{P - \alpha pF - v} \right\} = -\frac{1}{v}\left\{ p + \frac{(1-p)v}{P - \alpha pF - v} \right\}$$

$$\frac{\delta F}{\delta P} = +\left\{ \frac{p}{P - \alpha pF} + \frac{1-p}{P - \alpha pF}\,\frac{v}{P - \alpha pF - v} \right\} = +\frac{1}{P - \alpha pF}\left\{ p + \frac{(1-p)v}{P - \alpha pF - v} \right\}$$

$$\frac{\delta F}{\delta \alpha} = -\frac{pF}{P - \alpha pF}\left\{ p + \frac{(1-p)v}{P - \alpha pF - v} \right\} = -\frac{pF}{P - \alpha pF}\left\{ p + \frac{(1-p)v}{P - \alpha pF - v} \right\}$$

Noem nu de gelijke term tussen accoladen in de laatste drie formules A. De vereffeningsformule wordt nu:

$$a - b\,pF - p \log \frac{v}{P - \alpha pF} + (1-p) \log \frac{P - \alpha pF - v}{P - \alpha pF} - 0.4343\left\{ \log \frac{v}{P - \alpha pF} + \log \frac{P - \alpha pF - v}{P - \alpha pF} \right\} \Delta p$$

$$- 0.4343 \frac{A}{v} \Delta v + \frac{0.4343\, A}{P - \alpha pF} \Delta P - \frac{0.4343\, pF\, A}{P - \alpha pF} \Delta \alpha = 0$$

Onbekenden zijn hier nu: a, b, Δp, Δv, ΔP en $\Delta \alpha$.

Deze berekening kan alleen worden uitgevoerd, indien het volume van het monster bij het bereiken van het evenwicht voor een bepaalde pF-trap werkelijk wordt gemeten. De gebruikelijke pF-waarden, berekend met een constant monstervolume, laten het bepalen van een samendrukbaarheid niet toe.

Wel worden soms de volumeveranderingen voor de hoogste pF, die in het ongeroerde monster wordt gemeten, opgegeven. Met deze krimp, omgezet in een volumekrimp, en een evenredige verdeling ervan over de pF-trappen zou men in staat zijn de werkelijke vochtgehalten in volumeprocenten te berekenen. Bovenstaande beschrijving zou een eerste poging kunnen vormen om het krimpende monster met een pF-curve te beschrijven. De huidige techniek, die de krimp negeert, is wel wat te onzeker om zware klei-of veenmonsters te beschrijven.

De oplossing van Δ v en Δ(P-v)

De oplossing van onbekenden, die in een logarithme opgenomen zijn, wordt ongunstig beïnvloed doordat tijdens de reïtteratie tussenstadia kunnen optreden, die imaginair zijn. Verder kunnen fouten in de waarnemingen hetzelfde effect hebben dan wel de waarden van Δ v en Δ(P-v) zeer afwijkend doen uitvallen. Men zal met de eerste schatting dan een zo onvoldoende benadering krijgen, dat het ontwikkelen van de logarithme in een reeks niet meer mogelijk is. Tenslotte zal bij negatieve correctie een alternerende reeks ontstaan, die, in geval de reeks niet convergeert, zelfs naar teken de richting van de correctie niet weergeeft, wanneer slechts de eerste term van de reeks wordt medegenomen.

De oplossing van Δ v en Δ(P-v) is langs de volgende wegen mogelijk. De formule luidt:

$$m \log (v_i + \Delta v) - \log \{ (P - v_i) + \Delta (P - v_i) \} = A - B\, pF_i \qquad (1)$$

Andere schrijfwijzen zijn:

$$p \log (v_i + \Delta v) - (1-p) \log \{ (P - v_i) + \Delta (P - v_i) \} = a - b\, pF_i \qquad (2)$$

$$\log (v_i + \Delta v) - n \log \{ (P - v_i) + \Delta (P - v_i) \} = \alpha - \beta\, pF_i \qquad (3)$$

Bekend zijn v_i, pF_i, $a = (1-p)A = p\alpha$, $b = (1-p)B = p\alpha$, $p = \frac{m}{1+m} = \frac{1}{1+n}$

Gevraagd zijn: Δ v en Δ(P-v).

Gaan we van formule 1 verder uit, dan kan die worden geschreven:

$$m \log v_i + m \log \left(1 + \frac{\Delta v}{v_i}\right) - \log (P - v_i) - \log \left(1 + \frac{\Delta (P-v)}{(P - v_i)}\right) = A - B\, pF_i$$

$$m \log \left(1 + \frac{\Delta v}{v_i}\right) - \log \left(1 + \frac{\Delta (P-v)}{(P - v_i)}\right) = A - B\, pF_i - m \log v_i + \log (P - v_i) \qquad (4)$$

Ook is mogelijk:

$$m \log (v_i + \Delta v) = A - B\, pF_i + \log (P - v_i) + \log \left(1 + \frac{\Delta (P-v)}{P - v_i}\right)$$

$$v_i + \Delta v = 10^{\frac{A - B\, pF_i + \log (P - v_i)}{m}} \times 10^{\frac{1}{m} \log \left(1 + \frac{\Delta (P-v)}{P - v_i}\right)} \qquad (5)$$

Er zijn nu drie benaderingen mogelijk en wel:

a) Men stelt in formule (5) Δ (P-v) gelijk nul. De uitkomst noemen we $\overline{v_i}$.

b) Men vervangt $\log\left\{1+\frac{\Delta(P-v)}{P-v_i}\right\}$ door $\frac{0.434\,\Delta(P-v)}{P-v_i}$ en ontleent Δ (P-v) aan een aan formule (5) gelijksoortige formule voor $(P-v_j)$.

c) Men schrijft voor $10^{\frac{1}{m}\log\left\{1+\frac{\Delta(P-v)}{(P-v_i)}\right\}}$ de waarde $\left\{1+\frac{\Delta(P-v)}{P-v_i}\right\}^{1/m}$

ad a De eerste term van formule komt overeen met de benadering a en schrijven wij verder $\overline{v_i}$.

ad b De tweede verwaarlozing is bij formule (5) niet van waarde, maar kan wel in formule (4) worden toegepast. De oplossing van Δ v en Δ(P-v) volgt dan uit:

$$\left.\begin{aligned} 0.434\,m\frac{\Delta v}{v_i} - \frac{0.434\,\Delta(P-v)}{P-v_i} &= A - Bp\vartheta_i - m\log v_i + \log(P-v_i) \\ 0.434\,\frac{m\,\Delta v}{v_j} - \frac{0.434\,\Delta(P-v)}{P-v_j} &= A - Bp\vartheta_j - m\log v_j + \log(P-v_j) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

De oplossing gelukt alleen, indien van geen van de waarnemingen $\Delta v/v$ of $\Delta(P-v)/P-v$ groter is dan 1, en liever nog dan een getal belangrijk kleiner dan 1. Is hieraan niet voldaan, dan convergeert de reeks niet of langzaam.

ad c De oplossing van de twee vergelijkingen geschiedt als volgt:

$$v_i + \Delta v = \overline{v_i}\left\{1+\frac{\Delta(P-v)}{P-v_i}\right\}^{1/m} \quad (7a)$$

$$(P-v_j)+\Delta(P-v) = \overline{P-v_j}\left(1+\frac{\Delta v}{v_j}\right)^m \quad (7b)$$

Men kiest nu de schrijfwijze, waarbij $P-v_i$ en v_j de hoogste waarde hebben, dus i staat voor pF 6 en j voor pF 1. Men stelt nu eerst in formule (7b) Δ v = 0 en berekent $\Delta(P-v) = (\overline{P-v_j}) - (P-v_j)$. Dit wordt in (7a) ingevuld. Eenzelfde procedure met Δ (P-v) = 0 levert een oplossing voor een betere benadering van Δ (P-v). De formules worden:

$$\Delta v = \overline{v_i}\left\{1+\frac{(\overline{P-v_j})-(P-v_j)}{P-v_i}\right\}^{1/m} - v_i$$

$$\Delta(P-v) = (\overline{P-v_j})\left(1+\frac{\overline{v_i}-v_i}{v_j}\right)^m - (P-v_j) \quad (8)$$

Men berekent dus eerst $\overline{v_i}$ en $\overline{P-v_j}$ en als verschil met v_i en $P-v_j$ de waarden voor Δ v en Δ(P-v). Dan worden de termen tussen haken berekend, tot de macht m en 1/m verheven, waarna de correctie op $\overline{v_i}$ en $P-v_j$ kan worden berekend, die de verdere verfijning van de schatting voor de correcties oplevert. Eventueel moet nog verder gereïttereerd worden.