Bij tot nu toe uitgevoerde bewerkingen van grondwaterstandsgegevens door ir.Visser en zijn medewerkers werden geen gevallen aangetroffen, waarbij de waarde $\beta$ nul of zeer klein was, en dus de afstroming door de bovengrond zou mogen worden verwaarloosd. Hiernaast werden wel een aantal gevallen gevonden waarin $\alpha$ zeer klein was, zodat de bovenbeschreven lijnen vrijwel door de oorsprong gingen. Dit betekent dat in deze gevallen de stroming door de ondergrond mag worden verwaarloosd.

Bij de afleiding van de gewenste niet-stationaire vergelijkingen wordt uitgegaan van de veronderstelling dat de afvoer van een drainage of stroomgebied evenredig is met de zich in de grond bevindende hoeveelheid water. Bij de door de Afdeling Cultuurtechniek afgeleide vergelijking werd de stroming door de bovengrond dus de term $\beta$ in verg.(1a)verwaarloosd. In deze nota zal nu worden nagegaan, welke vorm de afvoervergelijking krijgt wanneer de stroming door de boven- of ondergrond wel en niet wordt verwaarloosd.

## 2. Verwaarlozing van de stroming door de bovengrond

De verhoging van de drukhoogte van het water in de grond hangt af van de toegevoerde hoeveelheid en het bergend vermogen van de grond volgens

$$\mu\, dm = (s_i - s)\, dt \qquad (3)$$

waarin

$\mu$ = het bergend vermogen van de grond

$m$ = de drukhoogte

$s_i$ = infiltratiesnelheid (neerslag minus verdamping)

$s$ = afvoer

$t$ = tijd

Verwaarlozing van de stroming door de bovengrond komt neer op de verwaarlozing van de laatste term in de teller van verg. (1a) dus

$$s = \alpha m \qquad (4)$$

of

$$ds = \alpha\, dm \tag{4a}$$

Invullen van (4a) in (3) geeft nu

$$\frac{\mu}{\alpha} ds = (s_i - s) dt$$

of

$$\frac{\mu}{\alpha} \int \frac{ds}{s - s_i} = -\int dt \tag{5}$$

Wordt nu de neerslag verdeeld in zodanige perioden $t$, dat de infiltratiesnelheid constant is, dan geldt volgens (5)

$$\frac{\mu}{\alpha} \Big[ \ln(s - s_i) \Big]_{s_{t_{n-1}}}^{s_{t_n}} = \Big[ -t \Big]_0^t$$

of

$$\frac{\mu}{\alpha} \ln \frac{s_{t_n} - s_i}{s_{t_{n-1}} - s_i} = -t$$

waaruit volgt dat

$$s_{t_n} = s_{t_{n-1}} e^{-\frac{\alpha}{\mu}t} + (1 - e^{-\frac{\alpha}{\mu}t}) s_i \tag{6}$$

Deze vergelijking wordt door <u>De Zeeuw</u> en <u>Hellinga</u> (Landb. Tijdschrift 1958, p.402) voorgesteld voor de karakterisering van de niet-stationaire afvoer. De faktor $\alpha$ volgt uit verg.(1) en kan worden bepaald uit

a) $\frac{Q}{m}$ - lijnen van drainage objecten (volgens verg.1)
b) Uit het afvoerverloop van drainreeksen, polder- of stroomgebieden (volgens verg.6)
c) Uit hydrologische constanten en drainafstanden (volgens verg.1)
d) Uit waarnemingen van grondwaterstandsbuizen.

## 3. Verwaarlozing van de stroming door de ondergrond

In gebieden, waar het watervoerend pakket tot op slechts geringe diepte beneden het ontwateringsniveau reikt, kan zich de situatie voordoen, dat de stroming door de ondergrond van slechts geringe betekenis is. Dit komt neer op het verwaarlozen van de eerste term in de teller van (1a) dus

$$s = \beta \cdot m^2 \tag{7}$$

Invullen van dit verband in (3) geeft dan

$$\mu \, dm = (s_i - \beta \, m^2) \, dt$$

of

$$\frac{\mu}{\beta} \; \frac{dm}{m^2 - \frac{s_i}{\beta}} = -dt \tag{8}$$

Integratie van deze vergelijking vergt, dat de noemer in faktoren wordt ontbonden dus

$$\left\{ \frac{A}{m + \sqrt{\frac{s_i}{\beta}}} + \frac{B}{m - \sqrt{\frac{s_i}{\beta}}} \right\} dm = -dt \tag{8a}$$

De constanten $A$ en $B$ dienen nu te worden bepaald. Uit (8) en 8a) volgt nu dat

$$A\left(m - \sqrt{\frac{s_i}{\beta}}\right) + B\left(m + \sqrt{\frac{s_i}{\beta}}\right) = 1$$

zodat de voorwaarden waaraan $A$ en $B$ moeten voldoen zijn

$$A + B = 0$$

$$-A\sqrt{\frac{s_i}{\beta}} + B\sqrt{\frac{s_i}{\beta}} = 1$$

waaruit volgt dat

$$A = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s_i}{\beta}} \qquad B = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s_i}{\beta}}$$

zodat (8a) kan worden geschreven als

$$\frac{\mu}{\beta}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{s_i}}\left\{\frac{dm}{m-\sqrt{\frac{s_i}{\beta}}}-\frac{dm}{m+\sqrt{\frac{s_i}{\beta}}}\right\}=-dt$$

Integratie en instellen van de randvoorwaarden vergt nu:

$$t=0 \qquad m=m_0$$
$$t=t \qquad m=m_1$$

en

$$\frac{\mu}{2}\sqrt{\frac{1}{\beta s_i}}\left[\ln\frac{m-\sqrt{\frac{s_i}{\beta}}}{m+\sqrt{\frac{s_i}{\beta}}}\right]_{m_0}^{m_1}=\Big[-t\Big]_0^t$$

of

$$\frac{\mu}{2}\sqrt{\frac{1}{\beta s_i}}\ln\frac{m_1-\sqrt{\frac{s_i}{\beta}}}{m_1+\sqrt{\frac{s_i}{\beta}}}\cdot\frac{m_0+\sqrt{\frac{s_i}{\beta}}}{m_0-\sqrt{\frac{s_i}{\beta}}}=-t \qquad (9)$$

waaruit volgt dat

$$\frac{m_1-\sqrt{\frac{s_i}{\beta}}}{m_1+\sqrt{\frac{s_i}{\beta}}}\cdot\frac{m_0+\sqrt{\frac{s_i}{\beta}}}{m_0-\sqrt{\frac{s_i}{\beta}}}=e^{-\frac{2t}{\mu}\sqrt{\beta s_i}} \qquad (10)$$

Om de waarden van $m$ uit deze uitdrukking te vervangen door de bijbehorende afvoer kan verg.(7) wederom ingevoerd worden in (10). Dit geeft

$$\frac{\sqrt{s_1}-\sqrt{s_i}}{\sqrt{s_1}+\sqrt{s_i}}\cdot\frac{\sqrt{s_0}+\sqrt{s_i}}{\sqrt{s_0}-\sqrt{s_i}}=e^{-\frac{2t}{\mu}\sqrt{\beta s_i}} \qquad (11)$$

Deze vorm kan als volgt worden omgewerkt.

$$\sqrt{s_1 s_0} + \sqrt{s_1 s_i} - \sqrt{s_0 s_i} - \sqrt{s_i^2} = \left\{ \sqrt{s_1 s_0} \quad \sqrt{s_1 s_i} + \sqrt{s_0 s_i} - \sqrt{s_i^2} \right\} e^{-\frac{2t}{\mu}\sqrt{\beta s_i}}$$

$$\left\{ \frac{1 - e^{-\frac{2t}{\mu}\sqrt{\beta s_i}}}{1 + e^{-\frac{2t}{\mu}\sqrt{\beta s_i}}} \right\} \sqrt{s_1 s_0} + \sqrt{s_1 s_i} = \sqrt{s_0 s_i} + \left\{ \frac{1 - e^{-\frac{2t}{\mu}\sqrt{\beta s_i}}}{1 + e^{-\frac{2t}{\mu}\sqrt{\beta s_i}}} \right\} \sqrt{s_i^2} \qquad (12)$$

Daar echter geldt dat

$$\frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} = tgh\,\frac{x}{2}$$

kan ook worden geschreven

$$\frac{1 - e^{-\frac{2t}{\mu}\sqrt{\beta s_i}}}{1 + e^{-\frac{2t}{\mu}\sqrt{\beta s_i}}} = tgh\left(\frac{t}{\mu}\sqrt{\beta s_i}\right)$$

zodat verg.(12) overgaat in

$$\sqrt{s_1 s_0}\; tgh\left(\frac{t}{\mu}\sqrt{\beta s_i}\right) + \sqrt{s_1 s_i} = \sqrt{s_0 s_i} + \sqrt{s_i^2}\; tgh\left(\frac{t}{\mu}\sqrt{\beta s_i}\right)$$

$$\sqrt{s_1} = \frac{\sqrt{s_0 s_i} + \sqrt{s_i^2}\; tgh\left(\frac{t}{\mu}\sqrt{\beta s_i}\right)}{\sqrt{s_0}\; tgh\left(\frac{t}{\mu}\sqrt{\beta s_i}\right) + \sqrt{s_i}}$$

of algemeen geschreven

$$\boxed{\sqrt{s_{t_n}} = \frac{\sqrt{s_{t_{n-1}}} + \sqrt{s_i}\; tgh\left(\frac{t}{\mu}\sqrt{\beta s_i}\right)}{\sqrt{s_{t_{n-1}}}\; tgh\left(\frac{t}{\mu}\sqrt{\beta s_i}\right) + \sqrt{s_i}} \sqrt{s_i}} \qquad (13)$$

voor $s_i = 0 \longrightarrow \sqrt{s_{t_n}} = \dfrac{\mu \sqrt{s_{t_{n-1}}}}{\mu + t\sqrt{\beta s_{t_{n-1}}}}$



[illegible] $t_g$

[illegible]

Deze vergelijking heeft een iets ingewikkelder vorm dan verg.(6) doch bij bekende $\beta$ en $s_i$ kan het afvoerverloop nog wel zonder veel moeite worden nagegaan.

Bij gebruik van verg.(13) zou deze beter in de vorm

$$\sqrt{\frac{s_{t_n}}{s_i}} = \frac{\sqrt{\frac{s_{t_{n-1}}}{s_i}} + tgh\left(\frac{t}{\mu}\sqrt{\beta s_i}\right)}{\sqrt{\frac{s_{t_{n-1}}}{s_i}}\, tgh\left(\frac{t}{\mu}\sqrt{\beta s_i}\right) + 1} \qquad (13a)$$

kunnen worden geschreven. Hierbij zijn de afvoeren als verhoudingen geschreven, welke verhoudingen eveneens gelden voor de drukhoogten. Men heeft dan het voordeel dat de bewerking ook op grondwaterstanden kan worden toegepast.

In beide gevallen heeft men het grote voordeel dat de waarden voor de tangenshyperbolicus in getabelleerde vorm gegeven zijn in o.a. Keiichi Hayashi; Fünfstellige Tafeln für Kreis und Hyperbelfunktionen (Walter de Gruyter & Co.Berlin 1955).

## 4. Algemene afvoervergelijking

Behalve de beide bovenomschreven vergelijkingen zullen vele gevallen voorkomen, waarin geen van de beide componenten van de stroming mag worden verwaarloosd. Een vergelijking voor het afvoerverloop kon dan worden verkregen door verg.(1a) in zijn geheel in te vullen in (3). We krijgen dan

$$\mu\, dm = (s_i - \alpha m - \beta m^2)\, dt$$

of

$$\frac{\mu\, dm}{\beta m^2 + \alpha m - s_i} = -dt \qquad (14)$$

Een oplossing van deze vergelijking kan als volgt worden verkregen.

We schrijven voor (14)

$$\frac{\mu}{\beta}\left\{\frac{A\,dm}{\left(m-\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}}{2\beta}\right)}+\frac{B\,dm}{\left(m-\frac{-\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}}{2\beta}\right)}\right\}=-dt \quad (15)$$

Stellen we nu

$$p=\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}}{2\beta}$$

$$q=\frac{-\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}}{2\beta}$$

dan moet vervolgens (15)

$$A(m-q)\quad+B(m-p)=1$$

waaruit volgt dat

$$A+B=0$$

$$Aq+Bp=-1$$

Hieruit valt voor $A$ en $B$ af te leiden:

$$A=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}}$$

$$B=\frac{-\beta}{\sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}}$$

Voor verg.15 valt dan te schrijven

$$\frac{\mu}{\sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}}\left\{\frac{dm}{m-p}-\frac{dm}{m-q}\right\}=-dt$$

Integreren en invoeren van de randvoorwaarden

$$t = 0 \qquad m = m_0$$
$$t = t \qquad m = m_1$$

geeft dan

$$\frac{\mu}{\sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}}\left[\ln \frac{2\beta m+\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}}{2\beta m+\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}}\right]_{m_0}^{m_1} = \Big[-t\Big]_0^t$$

of

$$\frac{\mu}{\alpha^2+4\beta s_i}\ln \frac{2\beta m_1+\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}}{2\beta m_1+\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}}\cdot\frac{2\beta m_0+\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}}{2\beta m_0+\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}} = -t \quad (16)$$

Om in (16) weer $m_0$ en $m_1$ te kunnen vervangen door de bijbehorende afvoeren, beschouwen we verg.(1a), waaruit volgt dat

$$s - \alpha m - \beta m^2 = 0$$

of

$$m = \frac{\alpha \pm\sqrt{\alpha^2+4s\beta}}{-2\beta} \qquad (17)$$

Aangezien echter $\alpha > 0$ en $\beta > 0$ is de vorm onder het wortelteken positief. Daar ook $m > 0$ hoeven we in 17 alleen het min-teken te gebruiken als mogelijke oplossing. Voor 17 valt dus te schrijven

$$2\beta m + \alpha = \sqrt{\alpha^2+4\beta s} \qquad (18)$$

~~Bij het~~ invullen van (18) en (16) gaan we gemakshalve schrijven

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\alpha^2+4\beta s_i} &= A = 2\beta m_i+\alpha \\ \sqrt{\alpha^2+4\beta s_0} &= B = 2\beta m_0+\alpha \\ \sqrt{\alpha^2+4\beta s_1} &= C = 2\beta m_1+\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Men kan desgewenst de formule in afvoeren of drukhoogten uitdrukken door resp. de linker of rechter uitdrukking voor $A$ , $B$ en $C$ in te vullen. Bij invullen van de linkeruitdrukking krijgen we

$$\frac{\sqrt{C} - \sqrt{A}}{\sqrt{C} + \sqrt{A}} + \frac{\sqrt{B} + \sqrt{A}}{\sqrt{B} - \sqrt{A}} = e^{-\frac{t}{\mu}\sqrt{A}} \qquad (20)$$

Een vergelijking die vrijwel dezelfde uitkomst geeft werd door Visser (Landb.Tijdschr.65(1953) 66-81) afgeleid. Door het volgen van een andere weg bij de verdere uitwerking werd echter een resultaat gekregen dat veel bewerkelijker is.

Verg.(20) is analoog aan (11) zodat direct valt te schrijven

$$\sqrt{C} = \sqrt{A}\;\frac{\sqrt{B} + tgh\left(\frac{t}{2\mu}\sqrt{A}\right)}{\sqrt{B}\,tgh\left(\frac{t}{2\mu}\sqrt{A}\right) + \sqrt{A}} \qquad (21)$$

of na invullen van de betreffende waarden de algemene vergelijking

$$\boxed{\sqrt{\alpha^2+4\beta s_{t_n}} = \sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}\;\frac{\sqrt{\alpha^2+4\beta s_{t_{n-1}}} + \sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}\;tgh\left(\frac{t}{2\mu}\sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}\right)}{\sqrt{\alpha^2+4\beta s_{t_{n-1}}}\;tgh\left(\frac{t}{2\mu}\sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}\right) + \sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}}} \qquad (22)$$

De berekening volgens deze vergelijking zal dezelfde bezwaren opleveren als die voor verg.(13). Waarschijnlijk kunnen de berekeningen nog wel vrij ver vereenvoudigd worden met behulp van nomogrammen

Evenals bij verg.(13) geldt hier, dat een betere vorm voor de bewerking zal zijn

$$\sqrt{\frac{\alpha^2+4\beta s_{t_n}}{\alpha^2+4\beta s_i}} = \frac{\sqrt{\frac{\alpha^2+4\beta s_{t_{n-1}}}{\alpha^2+4\beta s_i}} + tgh\left(\frac{t}{2\mu}\sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}\right)}{\sqrt{\frac{\alpha^2+4\beta s_{t_{n-1}}}{\alpha^2+4\beta s_i}}\;tgh\left(\frac{t}{2\mu}\sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}\right) + 1} \qquad (22a)$$

Hieraan zal echter nog de nodige aandacht moeten worden besteed.

## 5. Samenvatting

Uitgaande van de drainagevergelijking van Hooghoudt zijn drie formules afgeleid voor de niet-stationaire afvoer waarbij bepaalde delen van de stroming zijn verwaarloosd. Het resultaat kan als volgt worden weergegeven:

a) Uitgangsformule.

$$s = \alpha m + \beta m^2 \qquad (1a)$$

waarin de eerste term de afvoer door de ondergrond, de tweede term de afvoer door de bovengrond geeft.

b) Betekenis symbolen.

$\alpha = \frac{8 k d}{\ell^2}$ uit drainagevergelijking van Hooghoudt.

$\beta = \frac{4 k}{\ell^2}$ (idem)

$s_i$ = infiltratiesnelheid (neerslag minus verdamping)

$s_{t_n}$ = afvoer op tijdstip $t_n$

$\mu$ = bergend vermogen van de grond

c) Verwaarlozing van de afvoer door de bovengrond.

$$s_{t_n} = s_{t_{n-1}} e^{-\frac{\alpha}{\mu} t} + (1 - e^{-\frac{\alpha}{\mu} t}) s_i \qquad (6)$$

d) <u>Verwaarlozing van de afvoer door de ondergrond.</u>

$$\sqrt{s_{t_n}} = \sqrt{s_i}\,\frac{\sqrt{s_{t_{n-1}}} + \sqrt{s_i}\,\mathrm{tgh}\left(\frac{t}{\mu}\sqrt{\beta s_i}\right)}{\sqrt{s_{t_{n-1}}}\,\mathrm{tgh}\left(\frac{t}{\mu}\sqrt{\beta s_i}\right) + \sqrt{s_i}} \qquad (13)$$

e) <u>Algemene vergelijking.</u>

$$\sqrt{\alpha^2+4\beta s_{t_n}} = \sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}\,\frac{\sqrt{\alpha^2+4\beta s_{t_{n-1}}} + \sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}\,\mathrm{tgh}\left(\frac{t}{2\mu}\sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}\right)}{\sqrt{\alpha^2+4\beta s_{t_{n-1}}}\,\mathrm{tgh}\left(\frac{t}{2\mu}\sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}\right) + \sqrt{\alpha^2+4\beta s_i}} \qquad (22)$$

Wageningen oktober 1959

Dr.J.Wesseling