VOOR CULTUURTECHNIEK EN WATERHUISHOUDING
Nota no. 62 d.d. 23 januari 1961.

De quasi- permanente afvoer-formule met variabel bergend vermogen en lineaire drainage-functie.

ir. W.C.Visser

De grondslag van de formule

De onsamendrukbaarheid van water blijkt uit de gelijkheid tussen de vochtberging enerzijds en het verschil van aan- en afvoer anderzijds.

Dit wordt weergegeven door :

$$\mu \, dm = (s_L - s)\, dt \qquad (1)$$

Hierin stellen wij, als eenvoudigste geval:

$$s = \alpha m$$
$$\mu = \sigma (H - m) \qquad (2)$$

μ = bergend vermogen
s_L = neerslag
m = drukhoogte
s = afvoer
t = tijd

De waarde van H is de hoogte, waarop de lijn van de berging een berging nul doet berekenen. De bergingsafname wordt lineair verondersteld. De afname bij hoge waterstanden neemt echter versneld toe en de bergingslijn zal een berging nul eerst op enige afstand boven het maaiveld doen berekenen.

Substitueert men de vergelijkingen 2 in vergelijking 1 dan ontstaat:

$$\frac{\sigma (H - m)}{s_L - \alpha m}\, dm = dt \qquad (3)$$

<u>De integratie</u>

Om de integratie te vergemakkelijken, worden de volgende omrekeningen ingevoerd:

$$S_i = \alpha\, m_i$$
$$H - m = H - m_i + m_i - m \qquad (3)$$
$$dm = -d(m_i - m)$$

Hier-uit volgt voor formule 3:

$$dt = -\frac{\gamma}{\alpha}(H - m_i)\;\frac{d(m_i - m)}{m_i - m} + \frac{\gamma}{\alpha}\,dm$$
$$t\Big|_0^t = \frac{\gamma}{\alpha}\,m - \frac{\gamma}{\alpha}(H - m_i)\ln(m_i - m)\Big|_{m_0}^{m} \qquad (4)$$
$$t = \frac{\gamma}{\alpha}\left\{(m - m_0) - (H - m_i)\ln\left(\frac{m_i - m}{m_i - m_0}\right)\right.$$

De formule geeft aan, hoe de waterstand van een waarde m_o naar een waarde m stijgt of daalt onder invloed van de neerslag S_i en de afvoer αm.

Wil men de samenhang als functie van s schrijven, dan kan dit door de volgende substitutie:

$$m = 1/\alpha\, s$$
$$m_o = 1/\alpha\, s_o$$
$$m_i = 1/\alpha\, s_i$$
$$H^1 = 1/\alpha\, s_H$$

Men mag dus ook werken met de formule: $\gamma' = \frac{\gamma}{\alpha^2}$

$$t = \gamma'\left\{(s - s_0) - (s_H - s_i)\ln\left(\frac{s_i - s}{s_i - s_0}\right)\right\} \qquad (5)$$

De formule kent dus twee constanten en wel s_H of m_H met daarnaast hetzij γ/α hetzij γ/α^2. Voor het overige wordt de formule opgebouwd uit de grootheden die de stroming doen ontstaan, namelijk in formule 5 s_0 en s_i met t en s als variabelen.

De berekening van S

De formule is niet eenvoudig als een uitdrukking voor S te schrijven. Men kan echter de volgende omvorming toepassen:

$$\frac{t}{\gamma'} = \left\{s - (s_H - s_i)\ln(s_i - s)\right\} - \left\{s_o - (s_H - s_i)\ln(s_i - s_o)\right\}$$

$$e^{\frac{t}{\gamma'}} = \frac{e^{s}}{(s_i - s)^{s_H - s_i}} \Big/ \frac{e^{s_o}}{(s_i - s_o)^{s_H - s_i}} \quad \text{of} \quad e^{\frac{t}{\gamma'(s_H - s_i)}} = \frac{e^{\frac{s}{s_H - s_i}}}{(s_i - s)} \Big/ \frac{e^{\frac{s_o}{s_H - s_i}}}{(s_i - s_o)}$$

$$\frac{e^{\frac{s}{s_H - s_i}}}{s_i - s} = \frac{1}{s_i - s_o}\, e^{\frac{t(s_H - s_i) + \gamma' s_o}{\gamma'(s_H - s_i)}}$$

Ontwikkel de e-functie in een reeks. Dit geeft:

$$\frac{1 + \frac{s}{s_H - s_i} + \frac{1}{2}\frac{s^2}{(s_H - s_i)^2} + \cdots\cdots}{s_i - s} = \frac{1}{s_i - s_o}\, e^{\frac{t(s_H - s_i) + \gamma s_o}{\gamma(s_H - s_i)}}$$

Ontwikkelt men ook de noemer $(s_i - s)^{-1}$ nog tot een reeks dan ontstaat:

$$\left\{1 + \frac{s}{s_H - s_i} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_H - s_i}\right)^2 + \cdots\right\}\left\{1 + \frac{s}{s_i} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_i}\right)^2 + \cdots\right\} = \frac{s_i}{s_i - s_o}\, e^{\frac{t(s_H - s_i) + \gamma s_o}{\gamma(s_H - s_i)}}$$

Breekt men bij de tweede macht af, dan wordt de benaderde oplossing:

$$1 + s \cdot \frac{s_H}{s_i(s_H - s_i)} + s^2\, \frac{2(s_H^2 - s_H s_i) + s_i^2}{2 s_i^2 (s_H - s_i)^2} = \frac{s_i}{s_i - s_o}\, e^{\frac{t(s_H - s_i) + \gamma s_o}{\gamma(s_H - s_i)}} \tag{6}$$

Algemeen beschreven:

$$1 + \alpha s + \beta s^2 = \gamma e^{\delta t + \varepsilon} \tag{7}$$

Hoewel over het algemeen s klein zal zijn tegenover s_i en s_H en dus de convergentie wel snel zal gaan, zal berekening moeten uitwijzen, of voor een grote waarde van s_i de waarde van $s_H - s_i$ niet te klein wordt en er mogelijk geen convergentie meer optreedt. Dan zal deze oplossing niet meer mogelijk zijn.

De bepaling van γ en S_H

De waarde van de constanten γ en S_H vindt men door formule 5 als volgt te schrijven:

$$t\,\frac{1}{\gamma} + \ln\left(\frac{S_i - S}{S_i - S_0}\right) \cdot S_H = S_i \ln\left(\frac{S_i - S}{S_i - S_0}\right) + (S - S_0) \qquad (8)$$

Men neemt nu de gegevens van een droog weer staart waar $S_i = 0$ en als formule geldt:

$$t\,\frac{1}{\gamma} + \left(\ln \frac{S}{S_0}\right) S_H = S - S_0 \qquad (9)$$

Hier-in is S_0 de afvoer na het einde van de regen. De afvoer S van de volgende dagen wordt door S_0 gedeeld en met S_0 verminderd. De ln zowel als het verschil worden dan negatief. Men deelt het verschil zowel als de t door $\ln \frac{S}{S_0}$.

Nu ontstaat:

$$\frac{S - S_0}{\ln S/S_0} = \frac{+t}{\ln S/S_0} \cdot \frac{1}{\gamma} + S_H \qquad (10)$$

Zet men dus $\frac{S-S_0}{\ln S/S_0}$ uit tegen $\frac{t}{\ln S/S_0}$, dan moet een lineaire betrekking ontstaan met de cotg van de hellingshoek gelijk γ en de interceptie gelijk S_H

Wil men ook de dagen met regen in zijn beschouwing betrekken en niet gebruik maken van het gedurende meerdere dagen gelijk nul zijn van de regen, dan dient een dag voor dag werkwijze te worden toegepast, waarin t steeds gelijk 1 is.

Hiertoe wordt formule 8 als volgt vervormd:

$$\frac{t}{\ln \frac{S_i - S}{S_i - S_0}}\;\frac{1}{\gamma} + S_H = S_i + \frac{S - S_0}{\ln \frac{S_i - S}{S_i - S_0}} \qquad (11)$$

Men kan het zich nu gemakkelijk maken door de volgende benadering toe te passen:

$$\ln \frac{S_i - S}{S_i - S_0} = \ln \frac{S_i - S_0 + S_0 - S}{S_i - S_0} = \ln \left\{ 1 - \frac{S - S_0}{S_i - S_0} \right\} = -\frac{S - S_0}{S_i - S_0}$$

Dit in te vullen, en t gelijk 1 stellende, waardoor S overgaat in S_1 geeft

$$-\left(\frac{S_i - S_0}{S_1 - S_0}\right) \frac{1}{\gamma} + S_H = S_i - \frac{S_1 - S_0}{S_1 - S_0}\left(S_i - S_0\right) = S_0 \qquad (12)$$

of:

$$S_0 = -\left(\frac{S_i - S_0}{S_1 - S_0}\right) \cdot \frac{1}{\gamma} + S_H$$

Men vermindert de regen S_i van dag 1 met de afvoer van de vorige dag S_0. Daarna vermindert men de afvoer S_1 van dag 1 met de afvoer van de vorige dag S_0. Deze twee verschillen deelt men op elkaar. De noemer wordt negatief, wat het min-teken in een plus-teken omzet.
Het quotiënt wordt nu op de horizontale as uitgezet. Op de verticale as zet men de afvoer S_0 van de vorige dag uit. Door de punten moet een rechte lijn getrokken worden met cotg van de hellingshoek gelijk γ en interceptie gelijk S_H .