)OR CULTUURTECHNIEK EN WATERHUISHOUDING

NOTA no. 68 dd. december 1960

Werkgroep Lysimeters

Een onderzoek naar de mogelijkheid tot het scheiden van de termen berging en verdamping uit de formule van de waterbalans

ir. Ph. Th. Stol

Inleiding

In de formule voor de waterbalans komen onder meer als variabelen voor de kwel, de berging en de werkelijke verdamping. Voor het geval dat neerslag en afvoer bekend zijn en de kwel constant beschouwd mag worden, wordt in het volgende aangegeven op welke wijze getracht kan worden de termen berging en verdamping te scheiden met behulp van de formule voor de waterbalans.

Als doelstelling voor het hier beschrevene kan genoemd worden de mogelijkheid na te gaan in hoeverre de waterbalansformule als functie van de tijd zich voor verdere analysering leent.

De formule voor de waterbalans

De gebruikelijke formulering voor het in evenwicht brengen van de waterbalans luidt:

$$N + K = V + A + \Delta B \qquad (1)$$

waarin
- N = neerslag in mm in een bepaald tijdvak
- K = kwel in mm in hetzelfde tijdvak
- V = verdamping in mm in hetzelfde tijdvak
- A = afvoer in mm in hetzelfde tijdvak
- ΔB = verschil van de geborgen hoeveelheid tussen begin en eind van het beschouwde tijdvak in mm

De formulering (1) geeft duidelijk aan welke grootheden in de balans onderscheiden worden en van welk teken zij voorzien zijn. Om analytisch te rekenen, is de schrijfwijze (1) te beknopt. Zo komt het feit, dat gesommeerde hoeveelheden over n tijdvakken gebruikt mogen worden niet tot uiting, evenmin als het feit, dat N, K, V, A en ΔB een functie zijn van de tijd respectievelijk een discontinue functie van het beschouwde tijdvak (b.v. dagen, maanden). Om hierin te voorzien, wordt in de eerste plaats de tijdvakeenheid m (b.v. dagen, decaden, maanden) ingevoerd. Het gehele tijdvak kan nu lopen van $1 \rightarrow n$. In het in studie zijnde voorbeeld zijn de eerste gegevens afkomstig van 1 januari 1952; wanneer - om de gedachte te bepalen - met maanden gewerkt wordt, zijn er op 1 januari 1961 9x12 = 108 tijdvakken verstreken en geldt m = 1, 2, 3, ...n (n = 108).

Daar (1) moet gelden voor elke tijdvaklengte kan algemeen geschreven worden:

$$\sum_{p=1}^{m} N_p + \sum_{p=1}^{m} K_p = \sum_{p=1}^{m} V_p + \sum_{p=1}^{m} A_p + B_{m+1} - B_1 \qquad m = 1, 2, \ldots n \qquad (2)$$

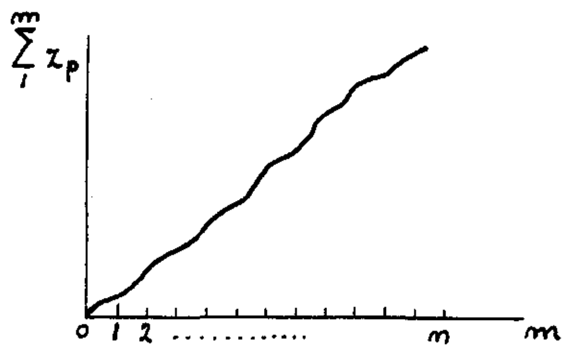
Hierin is B de geborgen hoeveelheid op het beginpunt van het tijdvak m, $(B_{m+1} - B_1)$ stelt dus het verschil in geborgen hoeveelheid voor gerekend vanaf het beginpunt tot het eindpunt van het tijdvak.

Nu kan in (2) het bekende deel expliciet uitgedrukt worden in

$$\sum_{1}^{m} z_p \equiv \sum_{1}^{m} N_p - \sum_{1}^{m} A_p = \sum_{1}^{m} V_p - \sum_{1}^{m} K_p + B_{m+1} - B_1 \qquad m = 1, 2, \ldots n \qquad (3)$$

Deze vergelijking is nu een functie van m en geeft een uitdrukking voor de waterbalans door sommering van de gegevens. Zo geldt voor maanden in 1952, dat 1 = januari 1952 en m = 12 = december 1952. B_1 is de geborgen hoeveelheid op 1 januari 1952 en B_{13} die op 1 januari 1953. Steeds is $\sum_1^m z_p$ in getalswaarde bekend.

In schema:



De gemiddelde verdamping over een lang tijdvak

Uit (3) kan de bekende rekenwijze voor het bepalen van de gemiddelde verdamping over een lang tijdvak afgeleid worden. Stel de lengte van het tijdvak op m eenheden, dan is het gemiddelde per eenheid m (dag, decade, maand):

$$\frac{\sum_{1}^{m} z_p}{m} \equiv \bar{z} \equiv \bar{N} - \bar{A} = \bar{V} - \bar{K} + \frac{B_{m+1} - B_1}{m} \qquad (m = 1, 2, \ldots m) \qquad (4)$$

Uit neerslag en afvoergegevens volgt een waarde voor $\bar{z}$. Kan de kwel verwaarloosd worden, dan geeft (4) een waarde voor de gemiddelde verdamping op een restterm na. Deze restterm kan verwaarloosd worden, indien m groot is ten opzichte van de teller en ook als $B_{m+1} = B_1$, dat wil zeggen, dat de reeks afgebroken wordt op een tijdstip, waarop een zelfde bergingstoestand optreedt. Daar dit laatste slechts bij benadering zal gelden, dient tevens m groot genomen te worden.

De verdamping en berging als functie van de tijdvaklengte m

Voor het oplossen van de onbekenden uit (3) is het noodzakelijk over meer betrekkingen te beschikken dan (3) alleen. Uit het discontinue karakter van deze gelijkheid volgt, dat hier met differenties gewerkt moet worden. De definitie van de operator "Δ" luidt: $\Delta f(m) = f(m+1) - f(m)$, waarmee de rekenwijze voor het bepalen van differenties van de eerste orde vastgelegd is.
algemeen Voor een som geldt: $\Delta \sum_{1}^{m} x_p = \sum_{1}^{m+1} x_p - \sum_{1}^{m} x_p = x_{m+1}$.

De eerste differentie van (3) wordt nu:

$$z_{m+1} \equiv N_{m+1} - A_{m+1} = V_{m+1} - K_{m+1} + \Delta B_{m+1} \qquad (\Delta B_1 = 0)$$

waarvoor geschreven kan worden:

$$z_m \equiv N_m - A_m = V_m - K_m + \Delta B_m \qquad m = 1, 2, \ldots\ldots m \qquad (5)$$

Kan hierin de kwel voor elke m even groot genomen worden, dan gaat (5) over in:

$$z_m \equiv N_m - A_m = V_m - K + \Delta B_m \qquad m = 1, 2, \ldots\ldots m \qquad (6)$$

De volgende differentie wordt nu:

$$\Delta z_m \equiv \Delta N_m - \Delta A_m = \Delta V_m + \Delta^2 B_m \qquad (7)$$

De (constant gedachte) kwel is uit deze betrekking verdwenen en volgende differenties geven nu:

$$\Delta^2 z_m \equiv \Delta^2 N_m - \Delta^2 A_m = \Delta^2 V_m + \Delta^3 B_m \qquad (8)$$

$$\Delta^3 z_m \equiv \Delta^3 N_m - \Delta^3 A_m = \Delta^3 V_m + \Delta^4 B_m \qquad (9)$$

enz.

Kan V_m bij eerste benadering verwaarloosd worden (wintermaanden), dan volgt uit (6) een eerste schatting voor (ΔB_m-K). Kan echter ΔV_m bij eerste benadering verwaarloosd worden (winter- en zomermaanden met verdamping van gelijke orde), dan volgt uit (7) een eerste schatting voor $\Delta^2 B_m$. Kan $\Delta^2 V_m$ verwaarloosd worden (voorjaar en najaar met gelijkmatig toenemende, respectievelijk afnemende verdamping), dan volgt uit (8) een eerste schatting voor $\Delta^3 B_m$. De gevonden schattingen voor de verschillende differenties moeten uiteraard een samenhangend geheel vormen. Waarschijnlijk zal een iteratieve werkwijze gevolgd moeten worden om het systeem sluitend te krijgen.

Evenzo kunnen de berging en de differenties daarvan, indien bij benadering verwaarloosbaar, dienen om uit (6) tot en met (8) de onderscheiden differenties van de verdamping te bepalen. In de omstandigheid, dat de berging steeds met een hogere differentie voorkomt dan de verdamping, ligt het voordeel besloten, dat de ene term verwaarloosd kan worden als de andere relatief groot is.

Een volgende mogelijkheid is uit b.v. (7) en (9) een betrekking op te stellen tussen $\Delta^2 B_m$ en $\Delta^4 B_m$ door die termen in de reeks onderling te vergelijken, dat wil zeggen Δz_m tegen $\Delta^3 z_m$ uit te zetten, wanneer $\Delta V_m = \Delta^3 V_m = 0$. Wordt een eenvoudige samenhang gevonden, dan kan uit oplossing van de differentievergelijking

$$\Delta^4 B_m = \phi(\Delta^2 B_m)$$

een verband tussen B en m gevonden worden. Omgekeerd zou op analoge wijze eveneens een betrekking tussen V en m gevonden kunnen worden.

De verdamping en berging in korte tijdvakken

De schematische indeling met betrekking tot de onderscheiden differenties van verdamping en berging in winter- en zomermaanden, enz. kan meer gedetailleerd worden door de volgende overwegingen.

Als eerste benadering voor de verdamping kan de "Penman-verdamping" V^P gebruikt worden. Met een gemiddelde reductiefactor α geldt $V_m = \alpha V_m^P$ en verder

$$\Delta(\alpha V_m^P) = \alpha \Delta V_m^P$$

$$\Delta^2(\alpha V_m^P) = \alpha \Delta^2 V_m^P \quad \text{enz.}$$

Uit deze betrekkingen kunnen de in de vorige paragraaf benodigde tijdvakken met verwaarloosbare V_m, ΔV_m, $\Delta^2 V_m$, enz. vastgesteld worden.

Deze betrekkingen kunnen ook gebruikt worden, indien α niet constant is. Er geldt, met α afhankelijk van m,

$$\Delta(\alpha_m V_m^P) = \alpha_{m+1} \Delta V_m^P + V_m^P \Delta \alpha_m$$

Wordt aangenomen, dat α_m voor opeenvolgende tijdvakken slechts weinig varieert, dan kan de tweede term van het rechterlid geschreven worden als $\alpha_m \Delta V_m^P$, waaruit weer verwaarloosbare waarden afgeleid kunnen worden.

De volgende differentie heeft tot uitkomst:

$$\Delta^2(\alpha_m V_m^P) = \alpha_{m+2} \Delta^2 V_m^P + \Delta V_m^P \Delta \alpha_{m+1} + V_{m+1}^P \Delta^2 \alpha_m + \Delta \alpha_m \Delta V_m^P$$

De tweede differentie van de tweede orde kan gelijkgesteld worden aan $\alpha_m \Delta^2 V_m^P$ onder de voorwaarden, dat

1) $\Delta^2 \alpha_m$, $\Delta \alpha_{m+1}$, $\Delta \alpha_m$ verwaarloosbaar zijn ten opzichte van α_m,
2) $\alpha_{m+2} = \alpha_m$ (bij benadering).

Voor α's, die voor opeenvolgende m niet veel in waarde verschillen, geldt deze benadering nog wel.

Als eerste benadering voor verschillen in berging kan gebruik gemaakt worden van verschillen in waterstandsgegevens. Evenals in het voorgaande geldt nu, indien voor de waterstand het symbool P gebruikt wordt, $\Delta B_m = \beta \Delta P_m$.

Voor de volgende twee differenties geldt:

$$\Delta^2 B_m = \beta \Delta^2 P_m \qquad \Delta^3 B_m = \beta \Delta^3 P_m \qquad \text{enz.}$$

waarmee op overeenkomstige wijze als voor de verdamping beschreven is, gehandeld kan worden. De factor β kan nog afhankelijk van P gesteld worden; deze complicatie wordt voor een eerste benadering buiten beschouwing gelaten. De naijling van de waterstand ten opzichte van de gevallen neerslag zal geëlimineerd kunnen worden door de respectieve reeksen onderling te verschuiven, welke methode ook gevolgd kan worden voor het bestuderen van de naijling van de afvoer ten opzichte van de neerslag.

Opmerkingen

In het voorgaande is aangegeven op welke wijze getracht kan worden de termen berging en verdamping uit de formule voor de waterbalans te scheiden. De gegeven formulering werd voor een tijdvakeenheid m afgeleid en is daarmede algemeen gehouden. Het werken met differenties van hogere orde brengt met zich mede, dat bij een lange tijdvakeenheid (maanden) al spoedig meer dan een geheel seizoen in de bewerking is opgenomen. Om deze reden zal het wenselijk blijken als tijdvakeenheid b.v. een decade te nemen. Tevens ontstaat dan het voordeel, dat de analyse van bijvoorbeeld α in afhankelijkheid van het tijdvak en van β in afhankelijkheid van de grondwaterdiepte door het groter aantal gegevens verder doorgevoerd kan worden.