ITUUT VOOR CULTUURTECHNIEK EN WATERHUISHOUDING

# Opbrengst, verdamping, vochtspanning en vochtnalevering

ir. W.C. Visser

Nota nr. 176 d.d. 14 februari 1963

## De opbrengst en de vochtbehoefte

In de reeks, die in de titel staat weergegeven, treft men een onderlinge samenhang aan, die veroorzaakt wordt door de stroming van het water.

In grove trekken kan men zich deze samenhang als volgt voorstellen. Wanneer voldoende vocht aanwezig is, schept het water, al verdampende, de mogelijkheid de huidmondjes open te houden, waardoor koolzuur naar binnen kan dringen. Dit betekent dat verdampen van vocht dus een binnentreden van koolzuur en het optreden van een zekere assimilatie mogelijk maakt en daarvoor voorwaarde is. Men mag aannemen dat een vaste verhouding bestaat tussen de tijd dat het huidmondje open staat en de hoeveelheid koolzuur die wordt opgenomen. Verder mag men veronderstellen dat er een samenhang bestaat tussen de tijd dat het huidmondje open staat en de hoeveelheid vocht die verdampt, zodat er uiteindelijk een verband bestaat tussen de hoeveelheid verdampt vocht en de hoeveelheid geproduceerd assimilaat. Deze samenhang hoeft niet vrij van interacties te zijn. Men zou zich kunnen voorstellen dat temperatuur en stralingssom nog een invloed hebben los van die van het vocht alleen.

De samenwerking van factoren blijkt nu te berusten op een grondleggende formule:

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{x + A}{Q - q} + a$$

$$\frac{\partial y}{\partial q} = \frac{y + B}{Q - q} + b$$

enz.

betekenis:
x,y groeifactoren
A,a,B,b constanten
Q maximum opbrengst
q opbrengst

De integratie van deze simultane partiële differentiaalvergelijkingen levert een oplossing waarin drie vormen van onderlinge beïnvloeding voorkomen.

1. Onafhankelijkheid van de factoren.
   Wanneer de factoren onderling onafhankelijk zijn, dan blijkt dit bij alle bekende groeiformules uit een samenhang, waarbij de termen, die elk een afzonderlijke factor bevatten, met elkaar verme-

204279

nigvuldigd moeten worden.
De formule ziet er als volgt uit:

$$(ax-q)(by-q)(cz-q) \ldots\ldots.(Q-q) = D$$

Hierin zou x bijvoorbeeld straling, y stikstof, z fosfaat kunnen zijn, dus groeifactoren die naar aard en wezen geheel verschillend zijn.

2. Optelbare factoren

Wanneer de grootheden, waarmede men de groei wil beschrijven alle op dezelfde groeifactor slaan, maar daarvan verschillende facetten geven, dan blijkt, dat men deze grootheden, elk met eigen gewicht en eigen werkingsfunctie bij elkander moeten worden opgeteld.
De formule ziet er als volgt uit:

$$(ax + by + cfz + \ldots\ldots - q)(Q - q) = D$$

Hierin zou x de natuurlijke regen, y de kunstmatige regen, f(z) de nalevering van bodemvocht, gemeten aan de pF in de wortelzone kunnen zijn.

3. Elkaar beïnvloedende factoren

Wanneer de werking van een factor afhangt van de hoogte van een andere factor dan blijkt dit in de formule uit een produkt van de getalwaarden van die beide factoren. Men moet dit zien als een correctie van de constante. Wanneer de werkingsconstante a van x een invloed ondergaat van y, dan moet men a door ay vervangen. De formule neemt de volgende vorm aan:

$$(axy-q) \text{-----} (Q-q) = D$$

Men kan zich voorstellen dat x het vochtgebruik zou kunnen zijn en y de temperatuur, zodat de formule onder woorden brengt dat de plant bij hogere temperatuur zuiniger met water omgaat dan bij lage temperatuur.

Deze drie vormen van samenwerking van factoren zullen nu in werkelijkheid tegelijk voorkomen, zodat een volledige groeiformule alle vormen bevat maar waarbij bepaalde constanten nul kunnen zijn.

De samenhang zou kunnen worden weergegeven door:

$$(a_1 v + b_1 vs + c_1 vt + d_1 vst - q)(e_1 s - q)\ (f_1 t - q)(Q - q) = C \qquad (1)$$

betekenis $a_1$, $e_1$ en $f_1$ werkingsfactoren
$b_1$, $c_1$ en $d_1$ interactiefactoren
$Q$ maximale opbrengst
$C$ constante, representerende de verwaarloosde factoren
$v$ verdamping
$q$ opbrengst
$s$ stralingssom
$t$ temperatuursom

In dit model vindt men een verdampingsterm v, die voor voldoende lange tijdvaklengten afhangt van het verdampend vermogen van de atmosfeer als spannings kenmerk aan de bladkant en de pF van de grond als spannings kenmerk aan de wortelkant.

De verdamping en de vochtspanning

Over de verdamping als functie van de vochtvoorraad in de grond zijn wij nog maar slecht geïnformeerd. De wortel zal van belang zijn. Vlak - en diepwortelaars, vertakte wortelstelsels en penwortels zullen hun invloed hebben, maar wij weten hiervan niet veel.

De bouw van het vochtprofiel zal van belang zijn. Naar mate de indroging voortschrijdt zal de vochtspanning van een diepere laag maatgevend worden voor de groei. Ook hierover is niet veel bekend.

Met het weinige dat bekend is, kan men een eerste poging doen om tot een formulering te komen. De verdamping zal een bepaalde waarde $bE_o$ niet mogen overtreffen, zal nul worden bij pF 4.2 en zal in eerste aanleg recht evenredig toenemen met het pF-verschil ten opzichte van 4.2.

De volgende formule kan dit weergeven:

$$a_2\ (4.2 - pF) = \log \frac{b_2 E_o + E_w}{b_2 E_o - E_w} \qquad (2)$$

betekenis

$a_2$ worteldikte parameter
$b_2$ gewasverdamping constante
$E_o$ berekende open water verdamping
$E_w$ werkelijke verdamping

Deze formule geeft weer, dat de pF*, waarbij de volledige verdamping ongeveer zal kunnen optreden, gelijk is aan:

$$pF^* = 4.2 - \frac{1}{a_2}$$

Deze pF zal men vinden bij de situatie, waar de haarwortels nog juist in de wijdste met vocht gevulde poriën kunnen binnen groeien. Hebben de haarwortels een diameter $d_2$, dan zal de pF, waarbij poriën met een diameter $d_2$ nog juist gevuld zijn, gelijk zijn aan log h en $h = \frac{0.3}{d_2}$

Stelt men de dikte van de haarwortel op 5µ dan is h = 600 cm en de pF = 2.8. Men berekent $a_2$ dan op 1/4.2-2.8 = 0.7.
In de formule komt verder een grootheid $b_2$ voor die de verdamping van het speciale gewas aangeeft. Is b = 1 dan is de maximale verdamping gelijk $E_0$. Gewassen of exposities die een hogere verdamping toelaten, zullen een hogere b-waarde vertonen.

De formule bevat geen krommings parameter. Het lijkt de vraag of dit juist is. Wanneer slechts een gering volume aan critische poriëndiameters aanwezig is, zou men een scherpere overgang verwachten dan wanneer in de reeks van poriëngrootten rondom de critische diameter een groot volume aan poriën aanwezig zou zijn.

## De capillariteit en het spanningsprofiel

De verdampingsformule maakt gebruik van de pF in de hoofdwortel zone op een bepaalde diepte beneden maaiveld. Deze pF moet men echter niet als een beschrijving zien, die van het vermoeden uitgaat, dat het de pF op deze plaats is, die de waterhuishouding beheerst. Het is alleen een kengetal voor de waterhuishouding in het profiel.

Deze waterhuishouding wordt beheerst door een vochtvoorraad en door een capillaire opstijging. Deze worden beschreven door de beide formules:

$$V_c = \frac{d}{\Psi^2}\left(\frac{d\Psi}{dz} - 1\right) \quad a) \qquad \sqrt{\frac{V_c}{d}}\,\Psi = tg\left(\sqrt{\frac{V_c}{d}}\,z\right) \quad b) \qquad (3)$$

Betekenis: $V_c$ is capillaire stroming
d doorlatendheidsgetal bij lage $\Psi$
$\Psi = 10^{pF}$
z hoogte boven grondwater

Deze formules zijn voor verfijningen vatbaar, die echter de formule zodanig compliceren dat dit het gebruik in samenstellingen vrijwel uitsluit. Deze gecompliceerde formules zijn eindpunten van een redenering, waarna verdere geen verdere ontwikkeling mogelijk lijkt. Ze zijn geen beginpunten voor verdere ontwikkelingen.

De formule geeft nu aan, hoeveel vocht aan de plant door capillaire opstijging toegevoerd wordt. Het overige water wordt aan de grond onttrokken. Men mag nu als quasi-permanente stroming pogen, de vochthuishouding zo te beschrijven, dat de hoeveelheid water, die tussen de pF-z curve voor $V_c$ en $V_c - \Delta V_c$ besloten wordt eerst moet worden opgenomen, voor de capillaire opstijging tot $V_c - \Delta V_c$ daalt. De formule 3 moet dan met $V_c - \Delta V_c$ worden berekend. De $\Psi$ kan voor deze nieuwe stroomsnelheid $V_c - \Delta V_c$ worden berekend, terwijl formule 2 met deze pF = log $\Psi$ een waarde voor $E_w$ geeft. Het verschil in vochtstroom uitgedrukt door $E_w$ en $V_c$ is de hoeveelheid vocht die onttrokken is aan de vochtvoorraad, de hoeveelheid vocht dus die tussen de pF-z curve voor $V_c$ en $V_c - \Delta V_c$ besloten ligt.

<u>De pF-curve ter omrekening op vochtgehalten</u>

De doelstelling moet nu zijn, de hoeveelheid vocht te bepalen, die zich tussen deze beide capillariteitscurven bevindt. Nu wordt de samenhang tussen de $\Psi$ en het vochtgehalte C door de pF-curve gegeven, welke wordt weergegeven door de formule:

$$A - B\,pF = \log \frac{C^m}{P-C} \qquad a) \qquad\qquad (4)$$

$$\frac{A^1}{\Psi} = \frac{C^{m/B}}{(P-C)^{1/B}} \qquad b)$$

Betekenis: A, B en m constanten
C = vochtgehalte
P = poriënvolume
$A^1 = 10^{A/B}$ = constante

Wanneer men deze waarde voor $\Psi$ nu invult in de formule $V_c$ (3) dan kan integratie voor een <u>homogeen</u> profiel een inzicht geven in de vochtverdeling over het profiel bij 1) gegeven grondwaterdiepte Z, 2) de waarde van het vochtgehalte in de wortelzone en 3) de vochtstroom $V_c$.
Het blijkt nu dat de tweede macht van $\Psi$ in formule 3a bij deze integratie zijn bijzondere rekentechnische voordeel verliest.

De capillariteitsformule met vochtgehalte variabele

Het omzetten van formule 3a vereist de volgende procedure:

$$V_c = \frac{d}{\Psi^n}\left(\frac{d\Psi}{dz} - 1\right) \quad a) \quad \text{of} \quad V_c = \frac{d\Psi}{\Psi^n}\left(\frac{d\Psi}{dc}\,\frac{dc}{dz} - 1\right) \quad b)$$

$$\Psi = \frac{A^1(P-C)^{1/B}}{C^{m/B}} \quad c) \qquad \frac{d\Psi}{dc} = -A^1\,\frac{(P-C)^{1/B}}{C^{m/B}}\left(\frac{1}{P-C} + \frac{1}{C}\right) \quad d)$$

Dit invullen in formule voor $\frac{dc}{dz}$ uit formule 5 b:

$$\frac{dc}{dz} = \frac{1}{\frac{d\Psi}{dc}}\left(\frac{V_c{}^n}{d} + 1\right) \quad e)$$ geeft als op te lossen differentiaal-

vergelijking:

$$\frac{dc}{dz} = -\frac{C^{m/B}}{A^1(P-C)^{1/B}}\,\frac{C(P-C)}{P}\left(\frac{V_c}{d}\,\frac{A^{1^n}(P-C)^{n/B}}{C^{mn/B}} + 1\right) \quad f)$$

(5)

$$\frac{dc}{dz} = -\frac{C^{m/B+1}}{a_5(P-C)^{1/B-1}}\left(\frac{V_c}{b_5}\,\frac{(P-C)^{n/B}}{C^{mn/B}} + 1\right) \quad g)$$

$$\frac{dc}{dz} = -\frac{C^p}{a_5(P-C)^q}\left(\frac{V_c}{b_5}\,\frac{(P-C)^r}{C^s} + 1\right) \quad h)$$

Men kan eenvoudig aantonen dat $r(p-1) = s(q+1)$

Verder is: $m = s/r$

$n = s/p-1$

$B = 1/q+1$

Samenvattingen:

$a_5 = A^1P$

$b_5 = d/A^{1^n}$

$p = m/B + 1$

$q = 1/B - 1$

$r = n/B$

$s = mn/B$

Van deze integraal moet worden nagegaan, welke waarden p, q, r en s ongeveer hebben. De integratie is nog niet aangevat.

Het resultaat zal zijn, een uitdrukking voor de hoeveelheid vocht in elke laag in de grond bij een gegeven grondwaterdiepte en vochtstroom.

Door deze hoeveelheid voor opeenvolgende $V_c$-waarden te berekenen kan men de samenhang tussen vochtinhoud, capillaire opstijging en daling van de grondwaterspiegel krijgen. De verdampingssnelheid van het gewas bepaalt de tijdfactor.

## Het berekenen van de vochtinhoud van het profiel

Men kan nu echter ook direct de formules 3b en 4b onderling in verband brengen door de $\Psi$ te elimineren en vindt dan:

$$\frac{b^1 (P - C)^{\frac{1-p}{a}}}{C^{\frac{p}{a}}} = \sqrt{\frac{d}{V_c}} \quad tg \left( \sqrt{\frac{V_c}{d}} \, z \right) \qquad a)$$

Dit kan kort worden geschreven als

$$\frac{(P - C)^{1-p}}{C^p} = e \; tg^a \, (fz) \qquad b)$$

Betekenis:

$C = \frac{dI}{dz}$ = vochtgehalte

$I$ = vochtinhoud

$p$ = exponent pF-curve

$P$ = poriënvolume

$a$, $e$ en $f$ constanten

$z$ = grondwaterdiepte

Stel nu de term achter het gelijkteken even A om de schrijfwijze wat te vereenvoudigen. Dan geeft formule b) de volgende betrekking voor $\frac{dI}{dz}$ :

$$\left(P - \frac{dI}{dz}\right)^{1-p} = A \left(\frac{dI}{dz}\right)^p$$

Deze vergelijking laat het oplossen van $\frac{dI}{dz}$ toe voor de volgende waarden van p:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| p = | 0 | 0,33 | 0,50 | 0,67 | 1,0 |
| 1-p = | 1 | 0,67 | 0,50 | 0,33 | 0 |

Oplossing:

| | | |
|---|---|---|
| $p = 0$ | $P - \frac{dI}{dz} = A$ | $\frac{dI}{dz} = P - A$ |
| $p = 0,33$ | $\left(P - \frac{dI}{dz}\right)^2 = A^3 \frac{dI}{dz}$ | $\frac{dI}{dz} = P + \frac{A^3}{2} \pm \sqrt{\left(P + \frac{A^3}{2}\right)^2 - P^2}$ |
| $p = 0,50$ | $P - \frac{dI}{dz} = A^2 \frac{dI}{dz}$ | $\frac{dI}{dz} = P/A^2{+1}$ |
| $p = 0,67$ | $P - \frac{dI}{dz} = A^3 \left(\frac{dI}{dz}\right)^2$ | $\frac{dI}{dz} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\,PA^3}}{A^3}$ |
| $p = 1$ | $1 = A \frac{dI}{dz}$ | $\frac{dI}{dz} = 1/A$ |

Deze vergelijkingen vragen het integreren van vergelijkingen van het type

$$dy = \int \frac{x^n}{x^{2m}+1}\,dx$$

Deze integralen zijn bekend en men kan dus formules ontwerpen, die de vochtinhoud van een homogeen profiel beschrijven als samenhang met de constanten van de pF-curve, het vochtgehalte bij het maaiveld, de diepte van het grondwater en de grootte van de capillaire vochtstroom. Dit resultaat kan maar voor een beperkt aantal waarden van p worden gevonden, maar via nomogrammen is deze kloof tussen p-waarden wel te overbruggen.

## De snelheden van de vochtonttrekking

Deze oplossing brengt het vochtgehalte in de formule voor de capillaire opstijging en bepaalt de vochtinhoud van het profiel tot aan het grondwater toe. Hiermede is men nog niet aan het einddoel, want nu moet het gewas nog in de samenhang ondergebracht via formule 2. Hier begint onze kennis echter al wat te ontbreken, zodat wat onderzoek nodig zal zijn eer men achter de schrijftafel weer verder zal kunnen komen.

De opvatting is echter, dat de plant een vochthoeveelheid $E_w$ verdampt die wordt opgebouwd uit de capillair opstijgende hoeveelheid $V_c$ plus het verschil tussen de vochtinhouden $I_2 - I_1$ op de eerste en tweede dag

$$(E_w - V_c)\,\Delta t = \Delta I$$

Hier ligt de mogelijkheid om de tijdfactor in de beschouwing te betrekken en te berekenen met welke snelheid $V_c$, $E_w$, I, C of $\Psi$ over het gehele profiel of laagsgewijze zullen dalen.

Deze tijdfactor komt dus op de volgende wijze in de beschouwing: Uit formule 2 kan men $\Psi$ oplossen en combineren met formule 5c

$$\frac{\Psi}{15000} = \left(\frac{b_2E_o - E_w}{b_2E_o + E_w}\right)^{1/a_2} \quad \text{en} \quad \Psi = \frac{A^1(P-C)^{1/B}}{C^{m/B}}$$

Dit levert:

$$\frac{a_6(P - C)^{q+1}}{C^{p-1}} = \left(\frac{b_2E_o-E_w}{b_2E_o+E_w}\right)^{1/a_2} \qquad (6)$$

Nu werd gesteld dat de werkelijke dagverdamping $E_w$ gelijk was aan de capillaire opstijging $V_c$ plus de onttrekking $\Delta$ I volgens formule 5b per eenheid$\Delta$ $V_c$.

Wordt dit goed geformuleerd, dan zal het dus de tijdfactor in de vochtonttrekking aan het profiel brengen en krijgt men, naast een vochtaanvoer $V_c$ door capillariteit een vochtonttrekking $V_o$ door de wortel, direct en in zijn onmiddellijke nabijheid over het doorwortelde en nog niet tot pF 4.2 uitgedroogde vochtprofiel.

<u>De invloed van het wortelstelsel</u>

Deze uitdroging van het vochtprofiel vereist vrij wat nadere aandacht. Zou de plant de mogelijkheid missen, zijn gemiddeld niveau van vochtopname naar diepere lagen te verleggen, dan - zo leerde een eerste onderzoek - zal de daling van de waterstand boven twee decimeter zich niet laten verklaren en zal de plant in zeer korte tijd aan verwelken toe zijn.

Op dit punt komt de wortel in het geding. De veronderstelling, waarop het opnamemodel nu moet berusten kan eenvoudiger of gecompliceerder worden gesteld.

Het eenvoudigste is de veronderstelling, waarbij men aanneemt, dat over een bepaald deel van het profiel het vocht bij zijn stroming de geringste weerstand ontmoet in de capillaire zone. Op een bepaald niveau echter zal de geringste weerstand ontstaan bij stroming door de wortel. De stroming door de grond vergt meer weerstand naarmate het vochtgehalte afneemt. De stroming door de wortel daarentegen wordt door een onveranderlijke weerstandswaarde beheerst, maar hangt af van de dichtheid van het wortelstelsel in opeenvolgende lagen. De vraag is nu waar de beide stromingsweerstanden aan elkander gelijk worden.

De stroming door de grond en door de wortel wordt weergegeven door de formules:

$$V_c = \frac{d}{\Psi^2} \left( \frac{d\Psi}{dz} - 1 \right) \quad a) \qquad V_w = \frac{r^2}{8\eta} W_z \left( \frac{d\Psi}{dz} - 1 \right) \quad b) \qquad (7)$$

betekenis:
$V_c$ = capillaire vochtstroom
$V_w$ = vochtstroom door wortel
$\eta$ = viscositeits constante
$r$ = straal vaatbundels
$W_z$ = doorstromingsoppervlak in wortel op hoogte z

De formules geven een doorlatendheid, een doorstromingsoppervlak en e drukhoogteverval aan. Stelt men dat het drukhoogteverval in grond en wortel gelijk zijn, dan zal de weerstand gelijk zijn aan het produkt van doorlatendheid en doorstroomd oppervlak.
Neemt men nu aan, dat in de grond en in de wortel hetzelfde drukverva optreedt, ook al zijn de drukken zelf ongelijk, dan zijn in formule 7a en b de termen tussen haken gelijk.
Dan moet dus

$$\frac{d}{\Psi^2} = \frac{r^2}{8\eta} W_z$$

zijn of in verband met formule 3b

$$d \sqrt{\frac{V_c}{d}} \operatorname{Cotg} \left( \sqrt{\frac{V_c}{d}} \, z \right) = \frac{r^2}{8\eta} W_z \qquad (7c)$$

De functie $W_z$ geeft aan hoe groot het doorstromingsvlak in de wortel in procenten van het horizontaal gelegen, door het opstijgende water doorstroomde totale oppervlak in de grond is.

De formule voor het doorstroomde vlak in de wortel is volledig o: bekend. Het zal echter een functie van z zijn en men zal dus z kunnen oplossen bij gegeven hoogte boven het grondwater z en de capillaire vochtstroom in de grond. Het belang van het wortelonderzoek blijkt hi bij duidelijk.

Een model dat zich meer bij de werkelijkheid aansluit is dat waarbij wordt verondersteld, dat over het gehele doorwortelde deel van het profiel steeds water door de grond en de wortel beide stroomt. Dit wordt wat ingewikkeld omdat men uit mathematische overwegingen wel gebonden is aan de veronderstelling van een constante capillair vochtstroom $V_c$ onafhankelijk van z, terwijl de stroom door de wortel toeneemt evenredig met $dI/dV_c$, wat bij een gegeven worteldichtheidsfunctie $W_z$ voert naar een functie voor het potentiaal verval in de wortelvaten. Dan moet men consequent zijn en ook de weerstanden in stengel en blad, in wortelepidermis en huidmondje, enz. er in halen, waarmede men aan een verbeterde uitvoering van formule 2 begint. Vooreerst zal een empirische formule als 2, die de $\Psi$ en $E_o$ samenbindt, wel voldoende zijn wat de nauwkeurigheid betreft en nog niet te veel wat betreft de mathematische hanteerbaarheid.

## Conclusie en samenvatting

Het doel van het onderzoek naar de invloed van water op de opbren is de groei vast te leggen aan de verdamping, de verdamping aan de voch spanning en de vochtspanning aan de capillariteit. Naar wens kan men dan de niet van belang geachte grootheden elimineren.

Om de tijdfactor in de beschouwing te betrekken kan niet meer in vochtspanningen alleen gewerkt worden, maar moet men op vochthoeveelheden overgaan. Hiertoe wordt de pF-curve in de beschouwing gehaald, wat een inzicht geeft in groei of verdamping en vochtgehalte. Na integratie krijgt men de relatie met de vochtinhoud van het profiel.

Op dit punt zijn de beschouwingen tevens om te buigen van vochtgehalte of vochtinhoud naar luchtgehalte en luchtinhoud. De berekeningen vormen niet alleen een aanloop naar een steviger inzicht in het vochtgebruik en de verdroging, maar geven ook toegang tot een dieper inzicht in de vochtoverlast, de doorluchting en delen van het vroegheidsprobleem.

De vraagtekens ontstaan, waar de wortelwerking in het geding is, wat overeenkomt met de vraag, hoe in formule 2 de pF moet worden opgenomen, wanneer men de pF met de diepte variërend in de beschouwingen moet betrekken. Op deze lacune in onze kennis loopt thans de verdieping van het inzicht vast.