NSTITUUT VOOR CULTUURTECHNIEK EN WATERHUISHOUDING
Nota nr. 101 d.d. 6 mei 1963

Een tweedegraads formule voor de groeiwet voor beperkende factoren

ir. W.C. Visser

De formule van Mitscherlich kan het patroon voor de groeiwet voor beperkende factoren niet geven. Deze formule kan namelijk het naar rechts verschuiven van de ondergrens van het optimale gebied niet weergeven. De groeiwet vergt de aanwezigheid van twee asymptoten, een hellende en een horizontale, plus een zekere variatie ten aanzien van de mate, waarin de curve in de hoek bij S indringt of daarvan verwijderd blijft. (fig. 1)

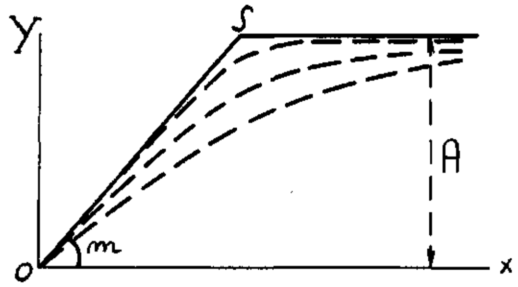


Fig. 1

De veel gebruikte formule van het type $y = \frac{ax}{x+b}$ kan aan deze wensen niet voldoen. De formule heeft de volgende eigenschappen:

a) De uitvaarthoek: $\frac{y}{x} = \frac{a}{x+b}$. Voor x en y gelijk 0 is $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{b}$

b) Voor $x = \infty$ $\quad y = \frac{a}{1+\frac{b}{x}}$ is $y = a$

c) Voor $x = 0$ $\quad y = 0$

De vorm van de curve volgt uit de schrijfwijze

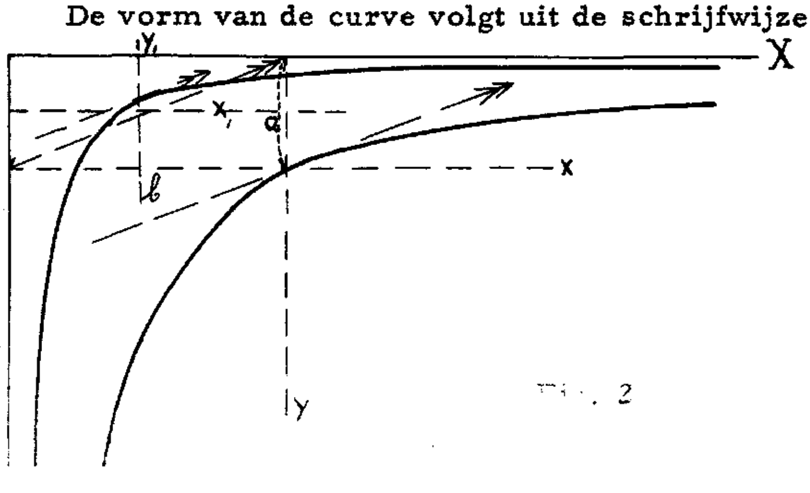


Fig. 2

$$xy + by - ax = 0$$
$$xy + by - ax - ab = -ab$$
$$(x + b)(y - a) = -ab$$
$$X \quad Y = -ab$$
met $X - x = b$
$$Y - y = -a$$

De curve XY = -ab is een rechthoekige hyperbool, waarvan het assenstelsel over afstanden -a en b is verschoven. De uitvaarthoek $\frac{a}{b}$ is een willekeurig punt op de hyperbool en dus geen asymptoot. Schrijft men de vergelijking $(\frac{x}{a} + \frac{b}{a})(\frac{y}{b} - \frac{a}{b}) = -1$, dan is $\frac{a}{b}$ of $\frac{b}{a}$ constant en gelijk aan de uitvaarthoek of zijn inverse waarde. Wil men deze hoek constant houden, dan kan men een van de assen een willekeurige schaal a geven en de andere een daarmede samenhangende schaal b zonder dat $\frac{a}{b}$ daardoor verandert. De curve kan door de keuze van a en b vlakker of steiler worden gemaakt bij een zelfde uitvaartshoek. Rekent men de formule echter weer om op de zelfde waarde van de maximum opbrengst A = a, dan krijgt men steeds dezelfde formule. Staat de uitvaarthoek vast en de waarde A = a, dan staat de formule geheel vast.

Vaststellen van de constanten

De formule kan worden bewerkt door te bedenken, dat als $y = \frac{ax}{x+b}$ ook geldt $\frac{1}{y} = \frac{1}{a} + \frac{b}{ax}$ of $\frac{a}{y} = 1 + \frac{b}{x}$. Stelt men $\frac{1}{x} = u$ en $\frac{1}{y} = v$, dan is au = 1 + bv of au - bv = 1. Dit is een rechte lijn, die de assen op $\frac{1}{a}$ en $\frac{1}{b}$ snijdt en een helling heeft gelijk $\frac{a}{b}$.

Verder kan men gebruik maken van de omstandigheid, dat $\log(x + b) + \log(y - a) = \log ab$. Men kan de x en y proberenderwijze met waarden vermeerderen en zien wanneer de lijn recht wordt, en deze a en b met log ab vergelijken, dan wel uit de inversen grafiek de a en b halen en in de log schaal toetsen.

De formule $xy + by - ax = 0$ levert de formule $x(y - a) = -by$, $x = \frac{+by}{a-y}$.

Samenhang met de formule van Mitscherlich

De formule $xy + by - ax - ab = -ab$ of $(x + b)(y - a) = -ab$ kan men schrijven $\frac{a-y}{a} = \frac{b}{x+b}$ of $\frac{a-y}{a} = e^{-\ln \frac{1}{b}(x+b)}$

Hieruit volgt: $y = a(1 - e^{-\ln \frac{1}{b}(x+b)})$

$$y = a(1 - e^{-\ln(x+b) + \ln.b})$$

Indien men stelt $\ln(x+b) = cu$ en $\ln.b = cB$, dan geldt:

$$y = a(1 - e^{-c(u-B)})$$

Uit deze formule volgt: $\frac{dy}{d \log x} = c(a - y)$ of $\frac{dy}{dx} = c(\frac{a-y}{x})$

Hieruit blijkt hoe de formule $y = \frac{ax}{x+b}$ een bijzonder geval is van de formule van Mitscherlich met als werkelijke groeifactor de log van de waargenomen groeifactor.

De scheefhoekige hyperbool

Wanneer men de opgaande curve als asymptoot wenst uit te voeren, dan kan men overgaan op een scheefhoekige hyperbool met een asymptoot horizontaal gedraaid en de hoek tussen de asymptoten zo groot, dat na draaiing van de ene asymptoot tot de horizontale stand de andere de goede uitvaarthoek krijgt.

Zoals uit de formule zal blijken, is deze scheefhoekige hyperbool een rechthoekige hyperbool $X = \frac{-c}{Y}$, die bij een rechte lijn $X = \frac{1}{-aY}$ wordt opgeteld, dus $X = \frac{1}{-aY} - \frac{c}{Y}$. Deze curve is echter opgegeven vanuit een coördinaat nulpunt, dat ter plaatse van punt S in figuur 1 ligt.

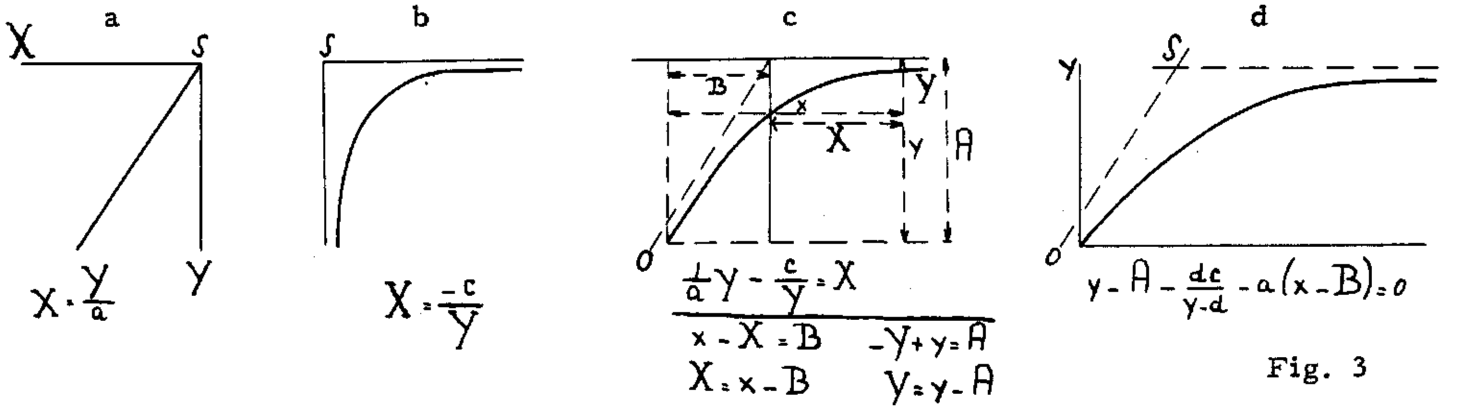


Fig. 3

In figuur 3 staat dit nog eens aangegeven. In fig. a vindt men de asymptoot $y = -aX$ met positief teken wegens het derde kwadrant ten opzichte van S. In fig. b vindt men de rechthoekige hyperbool $XY = -c$ met een horizontale en een vertikale asymptoot. Negatief teken wegens vierde kwadrant. Telt men op, dan komen de vertikale- (fig. c) en de scheve (fig. a) asymptoot tegen elkaar aan te liggen. Dit blijft, als som van twee asymptoten, zelf ook een asymptoot. In fig. c ziet men het resultaat van de optelling van de X. Voor een negatieve Y krijgt men een negatieve X uit $X = \frac{1}{a} Y$ en een positieve X uit $X = \frac{-c}{Y}$, zodat de x na optelling het verschil van de twee X-waarden wordt.

Gaat men in fig. c over op het assenstelsel xy met de oorsprong 0, dan wordt de X-coördinaat met een waarde B vergroot of $x = X + B$, $X = x - B$. De som van $-Y + y = A$ of $Y = y - A$.

Voegt men dat in in de formule

$$\frac{1}{a} Y - \frac{c}{Y} = X$$

dan ontstaat na vermenigvuldigen met a:

$$(y-A) - \frac{ac}{(y-A)} = a(x-B)$$

$$(y-A)^2 - a(x-B)(y-A) - ac = 0$$

$$y^2 - 2Ay + A^2 - axy + aAx + aBy - aAB - ac = 0$$

$$y^2 - axy + aAx - (2A-aB)y + (A^2-ac-aAB) = 0$$

In de formules is als constante nog opgenomen de B, die geen biologische betekenis heeft en wiskundig niet onafhankelijk is. Het is de x-waarde voor $y = 0$, die echter ook 0 gesteld dient te worden. Uit de formule volgt:

$$A - ac - aAB = 0$$

$$B = \frac{A^2-ac}{aA} = \frac{A}{a} - \frac{c}{A}$$

Definitieve formules zijn dus:

$$(y-A) - \frac{ac}{y-A} - a(x + \frac{c}{A} - \frac{A}{a}) = 0 \quad \text{of} \quad (y-A)^2 - a(x + \frac{c}{A} - \frac{A}{a})(y-A) - ac = 0$$

$$y^2 - axy - (2A + \frac{ac}{A} - A)y + aAx + (A^2 + ac - A^2 - ac) = 0$$

$$y^2 - axy - (A + \frac{ac}{A})y + aAx = 0$$

$$y^2 - \alpha xy - \beta y + \gamma x = 0 \quad \text{met} \quad \alpha = a$$

$$\beta = A + \frac{ac}{A}$$

$$\gamma = aA$$

In deze formules zijn de constanten afhankelijk van de schalen, die men voor x en y kiest. Men zou nu er naar kunnen streven de schaalconstanten steeds te berekenen voor $A = 1$ en $a = 1$, dus voor de maximum opbrengst en de uitvaarthoek constant en gelijk 1. Men krijgt dit resultaat door voor y een schaal in te voeren gelijk $\frac{1}{A}$, terwijl voor x een schaal wordt ingevoerd gelijk $\frac{1}{aA}$.

De formule wordt nu:

$$(\frac{y}{A})^2 - a(\frac{x}{aA})(\frac{y}{A}) - (A + \frac{ac}{A})(\frac{y}{A}) + aA(\frac{x}{aA})$$

$$\frac{y^2}{A^2} - \frac{xy}{A^2} - (1 + \frac{ac}{A^2})y + x = 0 \qquad \text{of} \qquad y^2 - xy - acy = (y-x)A^2$$

Afleiding uit de formule voor de hyperbool

De hyperbool heeft als eenvoudigste formule $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$.

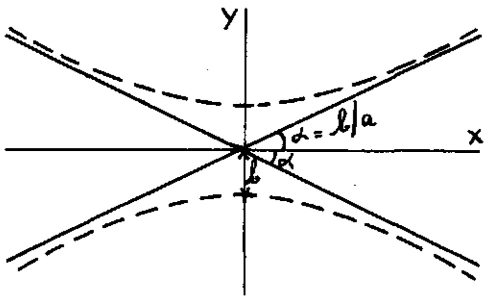


Fig. 4

Voor het negatieve teken van de $\pm$ geldt
$x = 0 \qquad y = b$
$y = 0 \qquad x = \text{imaginair}$
$\text{tg}\ \alpha = \pm \frac{b}{a}$ = asymptoot voor x en y groot tegenover de -1. Verder is $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ en $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

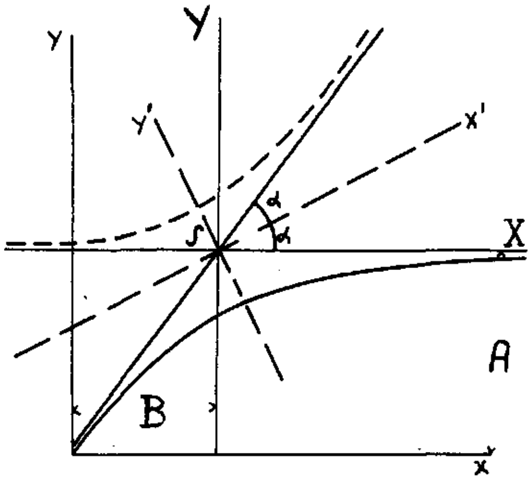


Fig. 5

Nu draait men het assenstelsel $x_1 y_1$ zo, dat een stelsel x y ontstaat, dat voor de x-as samenvalt met de asymptoot met helling $-\frac{b}{a}$. Wat is nu de formule voor de onderste tak van de hyperbool? Dit volgt uit het volgende:

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = -1$$

Gedraaide coördinaten:

$$x' = X \cos \alpha + Y \sin \alpha$$
$$y' = Y \cos \alpha - X \sin \alpha$$
$$\text{of} \qquad x = (aX+bY)/\sqrt{a^2+b^2}$$
$$y = (aY-bX)/\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\frac{(aX+bY)^2}{a^2} - \frac{(aY-bX)^2}{b^2} + a^2 + b^2 = 0$$

$$\frac{a^2X^2+2abXY+b^2Y^2}{a^2} - \frac{a^2Y^2-2abXY+b^2X^2}{b^2} + a^2 + b^2 = 0$$

$$(b^4-a^4)Y^2 + 2ab(b^2+a^2)XY + a^2b^2(b^2+a^2) = 0$$

$$(b^2-a^2)Y^2 + 2abXY + a^2b^2 = 0$$

Uit deze formule kunnen enkele vormen worden ontleend b.v.

$$-X = \frac{(b^2-a^2)Y^2 + a^2b^2}{2ab} \qquad \text{of} \qquad -X = \frac{b^2-a^2}{2ab}\,Y + \frac{ab}{2Y}$$

of bij verschuiven van het assenstelsel naar een nieuwe oorsprong

$$-(x-B) = \frac{b^2-a^2}{2ab}\,(y-A) + \frac{ab}{2}\;\frac{1}{(y-A)}$$

$$(x-B) = \frac{1}{m}\,(y-A) - \frac{ab}{2}\;\frac{1}{(y-A)}$$

$$y^2 - mxy - (A + \frac{abm}{2A}) + mAx = 0 \qquad\qquad a = \frac{mb}{\sqrt{m^2+1}-1}$$

$$y^2 - mxy - (A + \frac{b^2m^2}{2A(\sqrt{m^2+1}-1)})y + mAx = 0$$

Voor de invoeging van $m = \frac{-2ab}{b^2-a^2}$ geldt de volgende verantwoording. De helling van de asymptoot $tg\,\alpha = -\frac{b}{a}$ wordt door de draaiing van het assenstelsel over een hoek α gelijk nul. De helling $\frac{b}{a}$ van de andere asymptoot wordt dan echter verdubbeld. Hiervoor geldt:

$$tg\,2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{2b/a}{1-b^2/a^2} = \frac{2ab}{a^2-b^2} = \frac{-2ab}{b^2-a^2} = m$$

Het vinden van de constanten

Om de constanten te vinden, staan er verschillende mogelijkheden open. De waarde voor A zal veelal met niet te veel moeite te benaderen zijn, al bestaat er een grote kans, dat men de schatting wat te laag maakt. Hetzelfde geldt voor de hellingstangens m, ook wat de kans op onderschatting betreft.

Trekt men de hellende asymptoot, dan moet bedacht worden dat beide asymptoten op gelijke afstand van het snijpunt S tot op gelijke afstand benaderd worden door de kromme. De wigvormige ruimten tussen de asymptoot en de kromme zijn gelijkvormig, maar elkaars spiegelbeeld. Heeft men beide asymptoten getrokken en is de spiegelbeeldrelatie daarbij tot stand gekomen, dan blijft de mogelijkheid dat de asymptoten nog evenwijdig verschoven moeten worden om de juiste kwadratische samenhang op te leveren. Zou men de goede plaats van de asymptoten hebben gevonden, dan zou de kortste afstand van het punt S (fig. 4) tot de curve een afstand b opleveren, terwijl de helling van de schuine asymptoot tg 2α geeft met tg$\alpha = b/a$.

Een andere mogelijkheid wordt gevormd door het uitmeten van de afstand van de punten in horizontale en vertikale richting tot de beide asymptoten. Deze afstanden u en v verhouden zich tot elkaar als $u = c/v$. Door de u en v logarithmisch tegen elkaar uit te zetten, vindt men $c = b/2$. Ook deze methode hangt wat de uitkomst betreft eveneens sterk af van de juistheid van het trekken van de asymptoten.

Een methode, die van de formule zelf uitgaat, bedient zich van een nomogram, dat de formule exact weergeeft. Men gaat uit van de formule

$$y^2 - \alpha xy = \beta y - \gamma x \qquad \begin{aligned} \alpha &= m \\ \beta &= A + \frac{b^2 m^2}{A(\sqrt{m^2+1} - 1)} \\ \gamma &= mA \end{aligned}$$

In deze formule zijn x en y bekend en dus ook xy en y^2. De α, β en γ zijn de onbekenden. Men kan nu echter de y in procenten of in delen van A uitdrukken, waardoor $A = 1$ wordt en de formule overgaat in:

$$y^2 - mxy = \left(1 + \frac{b^2m^2}{\sqrt{m+1} - 1}\right)y - mx \qquad \text{of} \qquad y^2 + mx(1-y) = \left(1 + \frac{m^2b^2}{\sqrt{m+1} - 1}\right)y$$

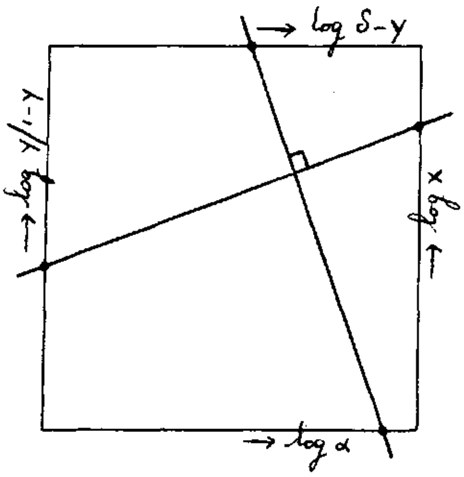
$$y^2 + \alpha x(1-y) = \delta y$$

Ook hier kan men weer y^2, $x(1-y)$ en y bepalen en met deze drie bekende reeksen de onbekenden α en δ uit een nomogram berekenen. Dit nomogram krijgt op twee manieren een eenvoudige vorm, indien de formule als volgt wordt omgewerkt:

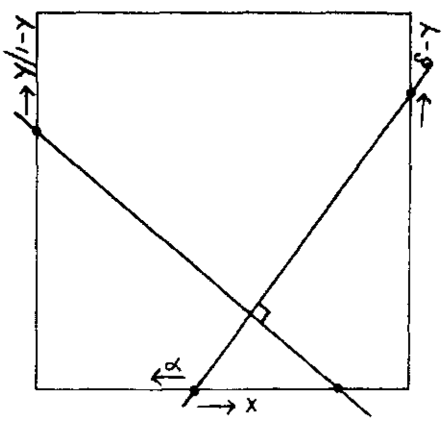
$$\alpha x(1-y) = \delta y - y^2$$

$$\frac{\alpha}{\delta - y} = \frac{y/(1-y)}{x}$$

$$\log \alpha - \log(\delta - y) = \log \frac{y}{1-y} - \log x$$



De logarithmische waarden voor $y/(1-y)$ en x worden op de vertikale assen uitgezet en de punten worden voor elk samenhorend stel verbonden.
Nu wordt op de onderste as een punt gezocht van waaruit op al deze lijnen een loodrechte lijn getrokken kan worden. De bovenste schaal wordt dan gesneden op een punt $\delta - y$, waar men de bijbehorende waarde voor y bij optelt om δ te krijgen, die voor alle paren x en y zo goed mogelijk op een constant bedrag moet uitkomen
Men kan de gemiddelde waarde voor δ nog eens gebruiken om de waarde van α beter vast te stellen. Dezelfde bewerking is ook met metrische waarden mogelijk.



Uitgaande van $\frac{\alpha}{\delta - y} = \frac{y/(1-y)}{x}$ kan men op de onderste horizontale schaal de x uitzetten en op de linker vertikale schaal $y/(1-y)$. Deze punten worden voor alle bijeenbehorende stellen x en y verbonden. Op de horizontale as wordt tevens, maar in tegengestelde richting van de x-schaal, de α uitgezet en op de rechter as de waarde voor δ -y. Het beste kan deze schaal verschuifbaar worden gemaakt, waarbij men y uitzet en de schaal over de afstand δ verschuift.

Nu moeten op de vele verbindingslijnen x - x/(1-y) loodrechte lijnen worden getrokken, die de punten y van de δ -y schaal bij de juiste verschuiving verbinden met een enkel punt op de α-schaal. Men moet met de waarden van δ wat proberen, totdat men een constante waarde op de α-schaal krijgt.

De logarithmische bepaling van α en S heeft het voordeel, dat de ongunstige fouteninvloed van 1-y wat minder grote moeilijkheden zal bieden. Daarvoor is de bepaling van δ onder de logarithme minder handig. De metrische schaal laat de δ gemakkelijk bepalen door een verschuivende y-schaal. De y/(1-y) kan echter zeer onhandig groot worden.

Wil men de mogelijke fout van het omrekenen van y in % van A in deze oplossing duidelijker naar voren laten komen, dan kan dit plaatsvinden door alleen y/1-y te vervangen door y/A-y. De invloed van de fout van A kan men overzichtelijk maken door een nomogram te maken met A, y en y/A-y met de A langs de horizontale as, y/A-y langs de vertikale, en lijnen voor y. Men kan dan nagaan welke waarden y(A-y) door verandering van A weinig verplaatsen en een goede schatting van α en δ toelaten, en welke waarden gevoelig zijn. Men kan dan ook nagaan welke correctie α en δ zullen krijgen of in welke richting de correctie zal gaan.

De opbrengstaangroei

De aangroei van de opbrengst wordt veelal gezien als een eenvoudiger functie dan de groeicurve en men eist, dat de aangroei een begrijpelijke wet volgt en is bereid te aanvaarden dat de groeiwet zelf, als integraal van de meeropbrengst, een niet meer gemakkelijk te begrijpen formulering krijgt. Voor de kwadratische groeiwet kan men eveneens de meeropbrengstwet vaststellen.

Men schrijft daartoe de formule het beste:

$$F = axy - y^2 - aAx + a(\frac{A}{a} - \frac{c}{A})y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{dF/dx}{dF/dy} = \frac{a(A-y)}{ax - 2y + (\frac{A}{a} - \frac{c}{A})a} = \frac{A-y}{x - \frac{2}{a}y + (\frac{A}{a} - \frac{c}{A})} = \frac{A-y}{x + \frac{2}{a}(A-y) - (\frac{A}{a} + \frac{c}{A})}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A-y}{(x - \frac{A}{a} + \frac{c}{A}) + \frac{2}{a}(A-y)} = \frac{A-y}{(x-B) + \frac{2}{a}(A-y)}$$

Men ziet, dat de opbrengstaanwas evenredig is met het opbrengstdeficiet, een formulering, die bij opbrengstwetten vrijwel altijd als juist wordt aanvaard. Maar bovendien is de aanwas nog omgekeerd evenredig met het opbrengstdeficiet en de groeifactor min een constante. In deze constante herkent men de B. De waarde x-B geeft aan hoe de groei wordt beheerst door de hoeveelheid groeifactor, die te kort schiet of in exces is ten opzichte van de hoeveelheid, die, indien b = 0 zou zijn en er dus geen afwijking van de scheve asymptoot was, de opbrengst tot de bovengrens van de stijgende asymptoot kan brengen, dus het punt S in fig. 5.

Men kan het dus zo formuleren, dat de meeropbrengst recht evenredig is met het opbrengstdeficiet en omgekeerd met de gewogen som van het opbrengst en het voedingsdeficiet. De weging heeft daarbij tot taak het opbrengstdeficiet om te zetten in een virtuele toename van het voedingsdeficiet. De opbrengsttoename is dus recht evenredig met het opbrengstdeficiet en omgekeerd evenredig met het voedingsdeficiet of -exces.

Een rekenvoorbeeld

Wil men met de formule een geval doorrekenen, dan heeft men drie gegevens nodig en wel de maximaal te bereiken opbrengst A, de hellingstangens m van de stijgende asymptoot, die aangeeft hoe de opbrengst op de groeifactor reageert en de waarde b voor de kromming van de curve, die aangeeft hoe groot de afstand is tussen de curve en het snijpunt van de asymptoten.

Als formule kan men het beste een vorm kiezen, welke wordt afgeleid uit de formule, die alleen de drie genoemde grootheden bevat.

$$y^2 - mxy + mAx - (A + \frac{\alpha b^2}{A})y = 0 \qquad \text{met} \qquad \alpha = \frac{m^2}{2\sqrt{m^2+1} - 1}$$

Hieruit kan men afleiden:

$$x = \frac{1}{m}\left\{ y + \frac{\alpha b^2}{A} \cdot \frac{y}{A-y} \right\}$$

Voor dit rekenvoorbeeld kiezen wij nu A = 10, 15, 20 b = 3 m = 1 $\alpha = 1,179$. Ter vereenvoudiging van de berekening worden de waarden y zo gekozen, dat in de drie reeksen met opklimmende A dezelfde waarde voor y/A-y ontstaat.

A			y/A-y	$\alpha b^2/A$			$y + \frac{\alpha b^2}{A} = x$		
10	15	20		1.061	0.707	0.530	10	15	20
	y								
2	3	4	0.250	0.265	0.176	0.132	2.265	3.176	4.132
4	6	8	0.667	0.707	0.472	0.353	4.707	6.472	8.353
6	9	12	1.500	1.591	1.061	0.795	7.591	10.061	12.795
7	10.5	14	2.333	2.652	1.768	1.326	9.652	12.268	15.326
8	12	16	4.000	4.244	2.828	2.122	12.244	14.828	18.122
9	13.5	18	9.000	9.549	6.363	4.774	18.549	19.863	22.774
9.5	14.25	19	19.000	20.157	13.433	10.078	29.657	27.683	29.078