

Het samenstellen van capillariteitsformules

W. C. Visser

Doelstelling

De capillariteitsformules hebben over het algemeen een zodanige vorm dat het moeilijk is er verdere berekeningen op te baseren. Het gebruik van deze formules zal daarom over het algemeen nomografisch moeten zijn. Het lijkt daarom niet noodzakelijk wegen te zoeken om moeilijke integraties uit te kunnen voeren. Men zal zich beter direct op numerische oplossingen kunnen richten.

Beschrijving van de mogelijke berekeningen

- 1) De formule voor de pF-curve geeft aan hoe de capillaire spanning ψ samenhangt met het vochtgehalte v . De capillaire spanning wordt geleverd door de capillaire krachten, die in de bodemporiën optreden en die groter zijn naar mate de poriën kleiner zijn.
- 2) De pF-curven kunnen op grond van de relatie tussen spanning en diameter worden omgezet in een curve voor de poriëngrootteverdeling.
- 3) De grootte van de porie is een maat voor het stromingsdebiet door de porie. Deze samenhang wordt gegeven door de formule van Poiseuille.
- 4) Uit de som van de debieten in alle capillairen tezamen zal men de doorlatendheid van de grond kunnen berekenen bij opklimmende graad van vochtverzadiging.
- 5) De capillaire stroomsnelheid is gelijk aan de doorlatendheid, vermenigvuldigd met het spanningsverval $d\psi/dz$. In geval de stroom in de richting van de zwaartekracht optreedt, moet hier de invloed van de zwaartekracht nog bij worden opgeteld. Integreert men, dan krijgt men het spanningsprofiel als relatie tussen de capillaire spanning ψ en de hoogte z .
- 6) De ψ kan uit deze formule geëlimineerd worden door gebruik te maken van de formule voor de pF-curve. Het spanningsprofiel - de ψ - z relatie - wordt dan omgezet in een vochtgehalteprofiel - de v - z relatie.



- 7) Onder 6) is een relatie tussen vochtgehalte en de plaats in het profiel verkregen, waarbij de capillaire stroomsnelheid v_c als beschrijvende parameter optreedt.

Door de totale vochtinhoud van dit vochtprofiel te bepalen tussen $z = 0$ en $z = z$ is het mogelijk van het laagsgewijze berekende vochtgehalte op de beschikbare voorraad in het profiel over te gaan. De invloed van het aanvoeren of opstijgen van het water op de ligging van de grondwaterspiegel kan door de juiste keuze van de integratiegrenzen z worden verantwoord. Hier worden ook veranderingen in $z = 0$ door stromingen in het grondwater ondergebracht.

- 8) Een nog weer verdergaande stap is die, waarbij de capillaire stroomsnelheid als een toe- of afname van de vochtinhoud per eenheid van tijd wordt opgevat, dus als een waarde dI/dt . Door uit de formule, die de vochtinhoud van het profiel beschrijft als functie van de capillaire stroomsnelheid $v_c = dI/dt$ kan men de snelheid van capillaire vochtonttrekking of van de vochtaanvoer vaststellen.

De formules

Dezelfde beschouwing kan met formules nog eens worden weergegeven.

- 1) De pF-curve luidt $A - B pF = \log \frac{v^p}{(P-v)^{1-p}}$ met $pF = \log \psi$
 Hervormen tot $\log \left(\frac{a}{\psi}\right)^b = \log \frac{v^p}{(P-v)^{1-p}}$ of $\frac{1}{\psi} = \frac{1}{a} \frac{v^{p/b}}{(P-v)^{(1-p)/b}} = \frac{1}{a P^{1-p/b}} \frac{\left(\frac{v}{P}\right)^{p/b}}{\left[1 - \left(\frac{v}{P}\right)\right]^{(1-p)/b}}$

- 2) De samenhang tussen ψ en de capillaire diameter d is volgens de formule voor de capillaire zuigkracht $d = \frac{0.3}{\psi}$. Dit in de pF-formule geeft

$$d = \frac{0.3}{a} \frac{v^{p/b}}{(P-v)^{(1-p)/b}}$$

- 3) De formule van Poiseuille geeft aan, dat de doorstromende hoeveelheid q in een capillair volgens de formule $q = vF = k \frac{d^4}{dz} F$ voor een verval $\frac{d\psi}{dz} = 1$ wordt weergegeven door $q = \frac{\pi d^4}{2 \eta} k = c \frac{\pi d^4}{2 \eta}$ met $\eta = \text{viscositeit}$
 $c = \text{bochtigheidscoëfficiënt}$

Dit in de formule uit 2) geeft

$$q = c \frac{\pi}{2 \eta} \left(\frac{0.3}{a}\right)^4 \frac{v^{4p/b}}{(P-v)^{4(1-p)/b}} \quad \textcircled{1}$$

- 4) De doorlaatfactor voor de grond is gelijk aan de som van alle debieten q voor de gezamenlijke capillairen bij een spanningsverval $d\psi/dz = 1$. Wanneer men integreert van $v = 0$ tot v vindt men de capillaire doorlatendheid k_c , die bij het vochtgehalte v hoort. Integreert men van $v = 0$ tot $v = P$ dan vindt men k voor de verzadigde grond. Berekend moet worden:

$$k_c = \int q dv = \frac{0.3^4 \pi c}{2 \eta a^4} \int \frac{v^{4P/l}}{(P-v)^{\frac{4(1-P)}{l}}} dv \quad (2)$$

Geef de term voor het integraalteken - waarin c staat voor de factor voor de kronkelingen van de capillairen -, de variatie in diameter alsmede een toevalsfactor, omdat de poriën vertakken en de reeks van grootste poriën telt weer door A . Verder neme men ter vereenvoudiging $\frac{v}{P} = x$, $\frac{4P}{l} = m$, $\frac{4(1-P)}{l} = n$. De integratie van een vorm

$$k_c = AP^{m-n} \int \frac{x^m}{1-x^n} dx$$

is exact op te lossen door een nieuwe variabele in te voeren, bestaande uit x , verheven tot een macht, die de grootste gemene deler van m en n is, ofwel van p en $1-p$, omdat $4/b$ hierbij reeds direct als deler optreedt.

Dit is nogal een heel rekenwerk, omdat er een ruim aantal integratietermen ontstaat, die alle stuk voor stuk moeten worden berekend. Numerisch uitwerken voor enkele waarden van p en b zou mogelijk minder werk zijn.

- 5) De capillaire stroomsnelheid v_c wordt beheerst door de formule:

$$v_c = k_c \left(\frac{d\psi}{dz} \pm 1 \right)$$

De eenheid geeft de invloed van de zwaartekracht weer met een positieve waarde voor naar beneden gerichte stroming en een negatief teken bij naar boven gerichte capillaire opstijging. Men kan omvormen tot

$$dz = \frac{d\psi}{\frac{v_c}{k_c} + 1} \quad \text{opstijging}$$

$$dz = \frac{d\psi}{\frac{v_c}{k_c} - 1} \quad \text{inzijging}$$

In deze beide formules kan men het resultaat van de integratie voor k_c uit 4) invoegen na in de gevonden integraal v te hebben omgerekend in ψ ofwel in deze bewerking $d\psi$ te hebben omgezet in dv . Dit laatste is misschien het eenvoudigste, gezien de samenhang

$$l \frac{d\psi}{\psi} = p \frac{dv}{v} + (1+p) \frac{dv}{P-v} \quad \text{of} \quad d\psi = \frac{a(P-v)^{1-P/l}}{l v^{P/l}} \left(\frac{p}{v} + \frac{1-p}{P-v} \right) dv$$

De te integreren formule wordt nu:

$$\int dz = \int \frac{\frac{a}{z} \frac{(P-v)^{1-p/b}}{v^{p/b}} \left(\frac{P}{v} + \frac{1-p}{P-v} \right)}{v_c \pm 1} dv \quad (3)$$

$$\left(\frac{0.3}{a} \right)^4 \frac{\pi c}{2 \eta} \int \frac{v^{4p/b}}{(P-v)^{4(1-p/b)}} dv$$

Neemt men als eenvoudig geval $p = \frac{1}{2}$, $b = 2$, wat voor b een veel te hoge waarde is, dan vindt men voor k_c

$$k_c = A \int \frac{v}{P-v} dv = -Av - AP \ln(P-v)$$

De waarden voor p en v in de formule voor $\frac{d\psi}{dz}$ geeft:

$$dz = \frac{\frac{a}{z} \frac{(P-v)^{1/4}}{v^{1/4}} \left(\frac{1}{2v} + \frac{1}{2(P-v)} \right)}{v_c - A(v-P) \ln(P-v) \pm 1} dv$$

- 6) Dit soort vergelijkingen zal vermoedelijk niet, of alleen met veel moeite, exact op te lossen zijn. Een numerische oplossing, zowel van de relatie tussen z en v als tussen z en ψ met verschillende combinaties p en b zal daarom nagestreeft moeten worden.
- 7) De voorgaande beschouwing levert een relatie $v = f_1(v_c z)$. Nu is de vochtinhoud van het profiel over een hoogte dz gelijk aan $v dz$. De vochtinhoud over het gehele profiel is de integraal

$$I = \int v dz = \int f_1(v_c z) dz \quad (4)$$

Deze integratie is exact niet meer uit te voeren, omdat de v niet opgelost zal kunnen worden uit de integratie van de formule onder 5), wanneer men al in staat zou zijn de integratie tot een goed eind te brengen. Hier zal numerisch geïntegreerd moeten worden.

- 8) Uit 7) volgt een relatie tussen I , z en v_c . Nu is v_c de hoeveelheid vocht, die per tijdseenheid uit het profiel verdwijnt of binnenstroomt. In de relatie $v_c = \int_2 (I z)$ heeft v_c de betekenis $v_c = \pm dI/dt$ zodat

$$dI = \pm \int_2 (I z) dt \quad (5)$$

Het + teken geeft aan, dat I met t toeneemt en dus het geval wordt beschreven waar regen de grond indringt. Het - teken geldt voor de capillaire opstijging en daarop volgende verdamping.

Het nagestreefde gebruik

Het doel van deze berekeningen is velerlei. De oplossingen gaan alle uit van de vrij goed vaststaande formule voor de pF-curve, waaruit formule 1 volgt. De constanten zijn a, b, p, P en c', waarbij in c' de $\frac{0.3^4 \pi}{2\eta}$ opgenomen dient te worden. Ook a kan overigens in c' worden opgenomen. Uit deze 4 constanten volgt nu de samenhang tussen:

Formule 2

ψ en k_c of v en k_c . Hieruit kan bij bekende verzadigde doorlatendheid de capillaire doorlatendheid, die zich nog zo moeilijk laat bepalen, berekend worden. De aandacht verdient de samenhang, omdat in de integraal voor k_c steeds een $-\ln(P-v)$ voorkomt, die voor $v = P$ gelijk oneindig wordt. De asymptoot, die bij de pF-curve wordt bepaald, is dus geen maat voor het porienvolume en zal als $(P + \Delta P - v)$ moeten worden geschreven. De waarde ΔP heeft tot taak een maximale poriediameter van eindige grootte in te voeren.

Formule 3

z , v en v_c of z, ψ en v_c . Dit levert de gebruikelijke relatie van de capillaire opstijging of inzigging, waarvoor Wind en Wesseling empirische relaties vonden. Door deze samenhang op de pF-curve te baseren kan worden nagegaan of de empirische curven voldoende overeenkomen met de curven, waarvan het empirisme een differentieniveau dieper ligt en de hoeveelheid waarnemingen, die beschikbaar is, veel groter is. Vooral de exponent in de Wind-Wesseling formule is een belangrijke parameter, waarover niet al te veel bekend is.

Formule 4

I , z en v_c . Deze samenhang levert de relatie tussen de vochtvoorraad, de grondwaterdiepte en de vochtopname of het verdampingsverlies. De vochtinhoud van het profiel, de grondwaterdiepte en, uit 2 vochtbemonsteringen, de verdamping zijn in het veld met goede nauwkeurigheid te bepalen. Hieruit moet de bochtigheidsfactor c te bepalen zijn. Zowel voor de lysimeteronderzoekingen als voor verdampingsschattingen te velde lijkt dit een belangrijke bron van inzicht.

Formule 5

I , z en t . Uit deze formule zijn alle capillaire grootheden verdwenen. Men vindt uit te velde bepaalbare gegevens de snelheid, waarmee de vochtvoorraad van een profiel wordt verbruikt. Dit zou voor aride gebieden en voor tegen regen beschermde lysimeters een waardevolle formule kunnen zijn.

De resultaten van de formules 3, 4 en 5 kan men onderling vergelijken, zodat men voor elke waarde van een van de variabelen de samenhangende getallen voor z, ψ, v, v_c, l en t kan vinden. In deze combinatie van 6 grootheden moeten velerlei mogelijkheden te vinden zijn om uit een aantal te velde verzamelde getalwaarden zich een oordeel te vormen of de vochtinhouding voldoende beheerst wordt door 1) een homogeen profiel, 2) een beperkte dikte van de zone, waar het water het systeem binnentreedt of er uit verdwijnt, 3) een bochtigheidsfactor, die voor alle capillaire diameters constant is.

Indien aan deze eisen voldoende voldaan wordt, zal uit de combinatie van gegevens een indruk omtrent de waarden van de vier uitgangsparemeters b, p, P en c te verkrijgen zijn.