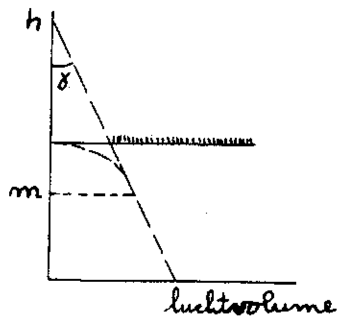
CULTUURTECHNIEK EN WATERHUISHOUDING

nr. 84 d.d. 9 juni 1961

De berekening van de afvoerfactor bij ondiepe grondwaterstand en ondiepe ondoorlatende laag

ir. W.C. Visser

Bij ondiepe waterstand neemt het bergend vermogen toe bij lagere grondwaterspiegel en neemt af bij hogere grondwaterstand. Aangenomen kan worden, dat het bergend vermogen volgens een lineaire betrekking afneemt. Er is dan een schijnbare waterstand H, boven het maaiveld gelegen, waar de raaklijn aan de kromme voor het bergend vermogen de vertikale as van de grondwaterdiepte snijdt. Het bergend vermogen is dan



$$\mu = \gamma (h - m) \tag{1}$$

De afvoerformule voor de stroming bij aanwezigheid van een ondoorlatende laag en stroming zowel onder als boven het drainageniveau luidt:

$$S - \alpha m - \beta m^2 = 0 \tag{2}$$

Deze formule wordt als volgt vervormd:

$$\frac{S}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} m - m^2 = 0$$

$$\left(m^2 + 2 \frac{\alpha}{2\beta} m + \frac{\alpha^2}{4\beta^2} \right) - \left(\frac{S}{\beta} + \frac{\alpha^2}{4\beta^2} \right) = 0$$

$$M^2 = \left(m + \frac{\alpha}{2\beta} \right)^2 = \left(\frac{S}{\beta} + \frac{\alpha}{4\beta^2} \right) \tag{3}$$

1786548

$$m + \frac{\alpha}{2\beta} = M = \sqrt{\frac{S}{\beta} + \left(\frac{\alpha}{2\beta} \right)^2} \tag{4}$$

De laatste formule wijst uit, dat men voor afvoeronderzoek in plaats van - zoals voor de hand lijkt te liggen - met de afvoer S te werken, evengoed kan werken met een drukhoogte M, gemeten vanaf een nulpunt, dat $\alpha/2\beta$ beneden de drainagebasis ligt. En zoals zal blijken, vereenvoudigt dit de berekeningen in zo belangrijke mate, dat men er de voorkeur aan zal geven de afvoeren eerst in de drukhoogte M om te rekenen volgens de formule (3) of (4).

De uitgangsformule gaat uit van de gelijkheid tussen de hoeveelheid water, die niet afstroomt, en de toename van de berging. De toename van de berging is μdm, de hoeveelheid niet afgestroomd water is $(S_i - S)dt$, zodat

$$\mu\, dm = (S_i - S)\, dt \tag{5}$$

S_i = neerslag $\qquad$ S = afvoer door grond

Vult men de formules (1) en (2) in, dan ontstaat

$$\gamma(h-m)\,dm = (S_i - \alpha m - \beta m^2)\,dt$$

of

$$\frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{m-h}{m^2+\frac{\alpha}{\beta}m-\frac{S_i}{\beta}}\right)dm = dt$$

Past men hier de samenvoeging van formule (3) toe, dan kan men schrijven:

$$\frac{\left(m+\frac{\alpha}{2\beta}\right)-\left(h+\frac{\alpha}{2\beta}\right)}{\left(m+\frac{\alpha}{2\beta}\right)^2-\left(\frac{S_i}{\beta}+\left\{\frac{\alpha}{2\beta}\right\}^2\right)} = \frac{\beta}{\gamma}\,dt$$

Noem nu $h+\frac{\alpha}{2\beta} = H$ $\qquad$ $m_0+\frac{\alpha}{2\beta} = M_0$

$m+\frac{\alpha}{2\beta} = M$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{S_i}{\beta}+\left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^2} = M_i$

Dit levert de formule

$$\frac{M-H}{M^2-M_i^2}\,dM = \frac{\beta}{\gamma}\,dt \tag{6}$$

$$\frac{\beta}{\gamma}\,dt = \frac{1}{2}\left\{\frac{d(M^2-M_i^2)}{M^2-M_i^2} - 2\,\frac{H\,dM}{M^2-M_i^2}\right\}$$

$$\frac{2\beta}{\gamma}\,dt = \frac{d(M^2-M_i^2)}{M^2-M_i^2} - \frac{2H}{2M_i}\left(\frac{dM}{M-M_i} - \frac{dM}{M+M_i}\right)$$

$$\frac{2\beta}{\gamma}\,t\Big|_0^t = \ln (M+M_i)(M-M_i) + \frac{H}{M_i}\,\ln \frac{M+M_i}{M-M_i}\Big|_{M_0}^{M}$$

$$\frac{2\beta t}{\gamma} = \ln \frac{M-M_i}{M_0-M_i} + \ln \frac{M+M_i}{M_0+M_i} + \frac{H}{M_i}\,\ln \frac{M+M_i}{M_0+M_i} - \frac{H}{M_i}\,\ln \frac{M-M_i}{M_0-M_i}$$

$$\frac{2\beta t}{\gamma} = \left(1-\frac{H}{M_i}\right)\ln\left(\frac{M-M_i}{M_0-M_i}\right) + \left(1+\frac{H}{M_i}\right)\ln\left(\frac{M+M_i}{M_0+M_i}\right) \qquad (7)$$

Nu is het een voordeel om met de waterstandsvariaties te werken, omdat dit overzichtelijker blijkt te zijn en tevens de aanloop vormt tot de vereenvoudiging van de formule. Deze wordt dus geschreven

$$M = M_0 + \Delta m$$

Deze Δm kan met kleine letter geschreven worden, omdat Δm niet afhankelijk is va: de nulpuntsverplaatsing over de afstand $\alpha/2\beta$

De formule wordt nu:

$$\frac{2\beta t}{\gamma} = \left(1-\frac{H}{M_i}\right)\ln\left(1+\frac{\Delta m}{M_0-M_i}\right) + \left(1+\frac{H}{M_i}\right)\ln\left(1+\frac{\Delta m}{M_0+M_i}\right) \qquad (8)$$

Wij nemen nu aan, dat tussen de opeenvolgende waarnemingen m_0 en m_1 gelijke tijdsintervallen t voorkomen, die men als eenheid kan nemen. Dus is t = 1. Verder stellen wij $\frac{\alpha}{2\beta} = D$ $\quad \frac{\beta}{\gamma} = T$

Ter beschikking zijn nu de volgende formules:

1) $M_i^2 = \frac{1}{\beta} S_i + D^2$

2) $A - 1 = \frac{\Delta m}{m_0 + D - M_i}$ $\qquad B - 1 = \frac{\Delta m}{m_0 + D + M_i}$

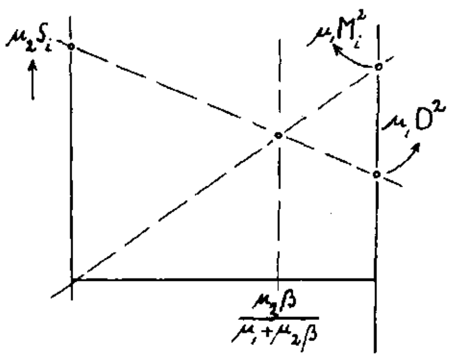
3) $2T = \left(1-\frac{H}{M_i}\right)\ln A + \left(1+\frac{H}{M_i}\right)\ln B$

Van deze drie formules worden nu nomogrammen gemaakt.

1. Nomogram voor M_i

Het nomogram wordt beschreven door de determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & \mu_1 D^2 & 1 \\ 0 & \mu_2 S_i & 1 \\ \mu_2 & \mu_1\mu_2 M_i^2 & \mu_2+\frac{\mu_1}{\beta} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{array}{ll} x=1 & y=\mu_1 D^2 \\ x=0 & y=\mu_2 S_i \\ x=\frac{\mu_2\beta}{\mu_1+\mu_2\beta} & y=\frac{\mu_1\mu_2\beta M_i^2}{\mu_1+\mu_2\beta} \end{array}$$

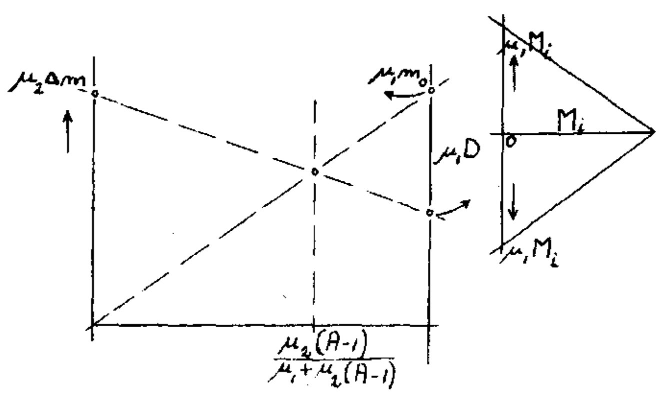


Het nomogram heeft op de x = 0 as een $\mu_2 S_i$-schaal. Op de x = 1 as zijn twee schalen afgezet en wel een $\mu_1 D$ schaal en een $\mu_1 M_i$ schaal. Langs de y = 0 as wordt een $\frac{\mu_2\beta}{\mu_1+\mu_2\beta}$ schaal uitgezet. De drie lijnen als hiernaast weergegeven snijden in één punt. Bij het toepassen van dit nomogram is S_i bekend. D is min of meer bekend, want is af te leiden uit de diepte van de ondoorlatende laag beneden de drainagebasis. De waarde van β moet worden geschat en geleidelijk verbeterd.

2. Nomogram voor log A en log B

Het nomogram wordt beschreven door de determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & \mu_1(D\pm M_i) & 1 \\ 0 & \mu_2 \Delta m & 1 \\ \mu_2 & \mu_1\mu_2 m_0 & \mu_2+\frac{\mu_1}{A-1} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{array}{ll} x=1 & y=\mu_1(D-M_i) \\ x=0 & y=\mu_2 \Delta m \\ x=\frac{\mu_2(A-1)}{\mu_1+\mu_2(A-1)} & y=\frac{\mu_1\mu_2 m_0(A-1)}{\mu_1+\mu_2(A-1)} \end{array}$$

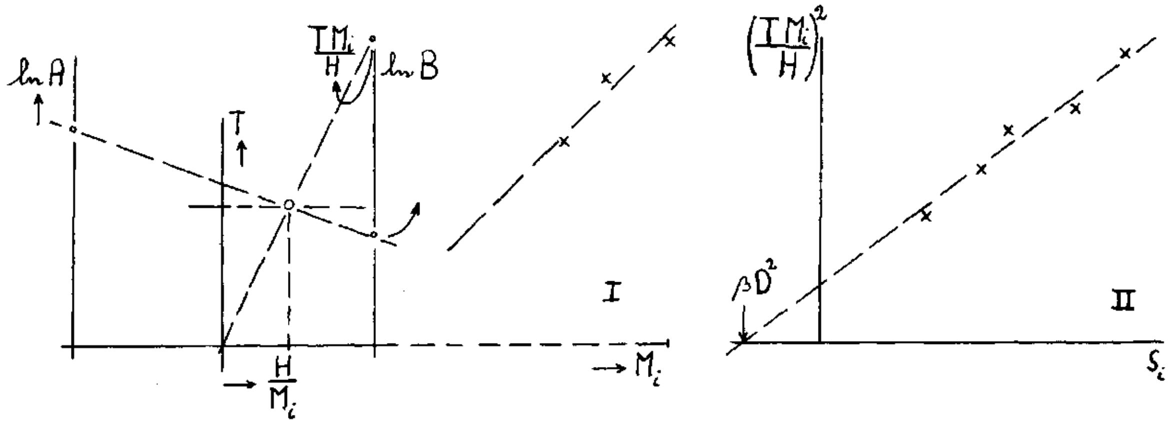


Het nomogram heeft op de x = 0 as een $\mu_2\Delta m$-schaal. Op de x = 1 as staat een $\mu_1 D$-schaal, terwijl op een los blad een $\pm\mu_1 M_i$-schaal staat. Legt men de nullijn van het losse blad aan bij D en schuift het losse blad horizontaal naar de juiste plaats, dan gede schuine lijnen de plaats van D_i+M_i en $D-M_i$ aan. Op de y = 0 as wordt de schaal $\frac{\mu_2(A-1)}{\mu_1+\mu_2(A-1)}$ uitgezet. Deze schaal wordt echter niet becijferd met A, maar met ln A. Op de x = 1 as wordt nog een μ, m_0 schaal aangebracht. De drie lijnen als in het nomogram getekend snijden elkaar in één punt. Voor de waarde van D moet hier hetzelfde cijfer worden genomen als in het vorige nomogram, terwijl bij herhaalde bewerking dezelfde verbetering moet worden toegepast. Voor de waarde A en B kan men hetzelfde nomogram gebruiken, waarbij een positieve M_i de waarde van B geeft, terwijl de negatieve M_i de waarde voor A oplevert.

3. <u>Nomogram voor H en T</u>

Het nomogram wordt beschreven door de determinant:

$$\begin{vmatrix} 0 & \ln A & 1 \\ 2 & \ln B & 1 \\ 1+\frac{H}{M_i} & T & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} x = 0 & y = \ln A \\ x = 2 & y = \ln B \\ x = 1+\frac{H}{M_i} & y = T \end{matrix}$$



De waarden ln A en ln B, afgelezen uit het vorige nomogram, worden met gelijke schaal langs de as voor x = 0 en x = 2 uitgezet. Bij x = 1 zet men met dezelfde schaal T uit. Nu worden afleeslijnen getrokken door 1) de punten ln A en ln B, 2) horizontaal door punt T voor een geschatte waarde van T en 3) door het punt x = 1, y = 0 en het punt op de $\frac{TM_i}{H}$ as. Deze drie lijnen snijden elkaar in één punt. Door voor T een keuze te doen, vindt men een snijpunt met de ln A-ln B lijn en dus een waarde voor $\frac{TM_i^x}{H}$, waarin M_i^x aangeeft, dat dit een schatting voor M_i is, waarin niet alleen, zoals in het eerste nomogram, een onzekerheid wegens de keuze van β en D schuilt, maar ook wegens de keuze van T. Zet men nu in nevendiagram I op de as y = 0, x > 2 de waarde M_i uit het eerste nomogram af, dan zullen de punten $M_i - M_i^x$ op een lijn liggen, die door een juiste keuze van T recht moet worden gemaakt en door de oorsprong moet gaan. De fout door onjuiste keuze van β en D plant zich in de logarithmen maar in beperkte mate voort en uit zich vooral in de M_i - -waarde. Om hiervan een indruk te krijgen, wordt een nevendiagram II gemaakt, waarin $\left(\frac{TM_i}{H}\right)^2$ wordt afgezet, maar met de eerste macht wordt becijferd. Hiertegen wordt S_i uitgezet.

Deze punten $\left(\frac{TM_i}{H}\right)^2$ en S_i moeten op een rechte lijn liggen, die de horizontale as doorsnijdt bij de waarde $-\beta D^2 - S_i$. Men heeft met deze beide nevendiagrammen nu een indruk gekregen van de waarde van $\frac{T}{H}$ en van βD^2. De waarde van D kan men nog vinden door de intercept op de vertikale as te delen door $\left(\frac{T}{H}\right)^2$, terwijl H volgt uit $T \times \frac{H}{T}$.

Het vereffenen van de waarnemingen

De bewerking vindt nu plaats door eerst enkele T-waarden te proberen en de nevendiagrammen I en II te maken. Waar de waarnemingen het beste zich om de beide rechten scharen, heeft men de waarde van T het beste benaderd. Uit de waarde voor βD^2 leidt men dan betere schattingen voor β en D^2 in nomogram 1 af, vindt daaruit betere waarden voor M_i, welke in nomogram 2 betere waarden voor ln A en ln B geven. In nomogram 3 kan men weer opnieuw met enkele waarden van T experimenteren. Tenslotte wordt voor β en D met behulp van I dezelfde waarde gevonden als men in nomogram 1 als uitgangspunt nam.

De reïtteratie is hiermede voltooid en de onbekenden T, H, β en D kunnen worden berekend.

De punten $\mu_1 D^2$ in nomogram 1 en $\mu_1 D$ in nomogram 2 alsmede het β-punt in nomogram 1 komen nu vast te staan. De β-as in nomogram 1 kan men desgewenst met een M_i-schaal voorzien, die direct kan worden afgelezen. In nomogram 2 kan men de $\mu_1 D$-schaal voorzien met een vaste positieve en negatieve M_i-schaal. Omdat nu echter nomogram 1 aangeeft hoe M_i en S_i samenhangen, kan men de M_i-schaal in nomogram 2 met S_i becijferen, waardoor de hulpschaal M_i kan vervallen.

In nomogram 3 kan men de horizontale T-schaal zijn vaste plaats geven, terwijl de $\frac{TM_i}{H}$-schaal kan uitrekenen, maar ook hier weer met S_i kan becijferen.

Met de oorspronkelijke gegevens m_0 en S_i kan nu Δm worden berekend. Deze Δm wordt bij m_0 opgeteld en levert de m_1 voor hetzelfde tijdvak, welke de m_0 is voor het daaropvolgende tijdvak. Het lijkt echter minder handig om de berekening van m voor opeenvolgende tijdstippen met het nomogram uit te voeren. Het zal beter gaan, wanneer men een m_0-S_i diagram met Δm - lijnen maakt door uit het nomogram een aantal waarden af te lezen en deze uit te zetten. Het samenstel van nomogrammen blijft dan alleen een middel tot vereffenen van de waarnemingen. Een nieuw cartesiaans nomogram wordt gebruikt voor het aflezen bij gegeven constanten.