NN31545.0087

INSTITUUT VOOR CULTUURTECHNIEK EN WATERHUISHOUDING

NOTA no, 87 d.d. 12 juli 1961

Een criterium voor de cosinus-functie afgeleid uit zijn differentie-vergelijking

ir. Ph.Th.Stol

1786541

158/0661/30

CENTRALE LANDBOUWCATALOGUS
0000 0672 4708

I N H O U D

	Pag.
1. INLEIDING	2
2. DE DIFFERENTIETABEL	4
3. DE ALGEMENE OPLOSSING VAN EEN DIFFERENTIE-VERGELIJKING VAN DE TWEEDE ORDE MET CONSTANTE COEFFICIENTEN	7
3.1 $D = 0$	8
3.2 $D > 0$	9
3.3 $D < 0$	10
4. DIFFERENTIE-VERGELIJKINGEN VAN HOGERE ORDE	14
5. TOEPASSING OP WAARNEMINGSUITKOMSTEN	16
5.1 Inleiding	16
5.2 De afhankelijkheid van de waarnemingsfrequentie	17
6. DE ALGEMENE TERM IN DE DIFFERENTIE-TABEL VAN EEN COSINUS-FUNCTIE	19
7. DE VOORTPLANTING VAN FOUTEN IN EEN DIFFERENTIE-TABEL	24
8. SAMENVATTING EN CONCLUSIES	35
9. CIJFERVOORBEELD VAN DE AFGELEIDE EIGENSCHAPPEN	37
APPENDIX 1. De willekeurige constanten als functie van de tijd	39
2. De tweede oplossing voor a_o	43
3. De limiet voor de binomiaal-coëfficiënten	45
4. De oplossing van $\Delta^p x_t = 0$	48
5. Alternerende reeksen in de differentie-tabel	50

158/0661/30

1. INLEIDING

De studie van de waterbalans van een gegeven gebied zal zich veelal richten op het sluitend krijgen van de balans over vooraf vastgestelde perioden, Daarnaast is het van belang de termen van de balans te beschouwen in afhankelijkheid van de tijd. Deze termen, waaronder de neerslag, verdamping enz., zijn in de tijd variabel maar over een aantal jaren gemiddeld blijkt een soms duidelijk seizoeneffect te worden verkregen. Ten gevolge van dit seizoeneffect vertonen de termen een periodiciteit en de vraag kan worden gesteld met welke functie dit verschijnsel beschreven kan worden.

Als meest elementaire functie kan bijvoorbeeld de cosinus-functie gekozen worden en onderwerp van onderzoek is nu op welke wijze het bestaan van een dergelijke functie met een zekere betrouwbaarheid uit het cijfermateriaal aangetoond kan worden.

Nu kan men stellen dat met behulp van een Fourier-analyse steeds de mogelijkheid bestaat een uitdrukking te geven voor een periodiek optredend verschijnsel. Een dergelijke analyse verloopt echter aldus dat bij een functie van het type

$$y(t) = a_1\cos(t + \varphi_1) + a_2\cos(2t + \varphi_2) + \ldots + a_n\cos(nt + \varphi_n)$$

de constanten bepaald moeten worden. Afwijkingen in het uitgangsmateriaal kunnen bij deze wijze van weergeven niet leiden tot het verwerpen van de functie $y(t)$. Er is steeds een functie te vinden die zich goed aan de waarnemingen aanpast.

Anderzijds kan gevraagd worden naar een criterium dat dusdanig karakteristiek is voor een gegeven functie zelf dat wanneer niet voldaan wordt aan dat criterium, tot het verwerpen van de functie besloten moet worden.

In de te volgen procedure moet tevens een vereffening van de gegevens plaatsvinden, waarmede waarnemingsuitkomsten over een aantal jaren tot een gemiddeld beeld per jaar gecondenseerd worden. Dit gemiddelde kan in een later stadium van het onderzoek dienen als grondslag ten opzichte waarvan incidentele afwijkingen in de loop van elk jaar nader verklaard dienen te worden.

In de praktijk komt het er vervolgens op neer dat met bepaalde tussenpozen opgemeten getalwaarden ter bewerking beschikbaar zijn. Met andere woorden de gegevens zijn discontinu. Om al deze redenen werd in nota no.68 "Een onderzoek naar de mogelijkheid tot het scheiden van de termen berging en verdamping uit de formule van de waterbalans" voorgesteld om met behulp van het opstellen van differentievergelijkingen een analyse van de gegevens uit te voeren.

De eerste ervaringen, met deze methode opgedaan, maakten het noodzakelijk de theorie welke aan de methode ten grondslag ligt nader uit te werken ten einde een aantal schijnbare tegenstrijdigheden in de uitkomsten te kunnen verklaren.

De bewijzen en afleidingen voor het werken met een cosinus-functie zijn in deze nota verzameld en dienen als grondslag voor verdere onderzoekingen. Tevens wordt nader ingegaan op de invloed van de voortplanting van toevallige afwijkingen bij het uitvoeren van berekeningen met gegevens ontleend aan een differentie-tabel. Dit probleem hangt namelijk nauw samen met het opstellen van differentievergelijkingen als bedoeld in nota no.68. Voor de theorie over het oplossen van differentie-vergelijkingen wordt verwezen naar "Differenzengleichungen", Herbert Meschkowsky, Göttingen 1959 en "Finite difference equations", H.Levy and F.Lessman, London 1959.

2. DE DIFFERENTIE-TABEL

Als uitgangspunt bij de volgende beschouwingen dient een reeks getallen met rangnummer t = 1, 2, ...

$$y_1, y_2 \ldots, y_{t-1}, y_t, y_{t+1}, \ldots$$

die verkregen is door bijvoorbeeld van een functie equidistante ordinaatwaarden te berekenen. Van deze reeks getallen wordt een verschillen- of differentie-tabel opgesteld, door steeds het verschil van opeenvolgende waarde te nemen (tabel1).

Voor het berekenen van een willekeurige term uit een differentie-tabel behoeft niet de gehele tabel uitgerekend te worden. Zowel bij het berekenen van differenties van een bepaalde orde als bij het oplossen van differentie-vergelijkingen kan met voordeel van de volgende lineaire operatoren gebruik worden gemaakt.

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t \tag{1}$$

$$E^m y_t = y_{t+m} \tag{2}$$

De index t geeft aan dat op de tijdstippen t = 1, 2, ...,t-1, t, t+1, ... de variabele y een bepaalde waarde aanneemt; de variabele y is dus een van t afhankelijke discontinue grootheid. Steeds zal gelden dat t slechts gehele waarden kan aannemen.

Uit (1) en (2) volgt

$$\Delta y_t = (E-1)y_t$$

zodat de betrekking tussen de operatoren luidt

$$\Delta \equiv E-1 \tag{3}$$

Het lineair-zijn van de operatoren volgt uit

$$\Delta(ay_t + bz_t) = a\Delta y_t + b\Delta z_t \tag{3a}$$

en

$$E(ay_t + bz_t) = aEy_t + bEz_t$$

wat door uitschrijven geverifieerd kan worden.

Met (1) wordt een differentie van de eerste orde aangegeven. Differenties van hogere orde kunnen op eenvoudige wijze met behulp

van (3) en (3a) berekend worden.

Zo geldt bijvoorbeeld voor de differentie van de derde orde voor de (t+2)- de term

$$\Delta^3 y_{t+2} = (E-1)^3 y_{t+2} = (E^3 - 3E^2 + 3E - 1) y_{t+2}$$

waarna met toepassing van (2) verkregen wordt

$$y_{t+5} - 3y_{t+4} + 3y_{t+3} - y_{t+2}$$

Volledigheidshalve kan nog gedefinieerd worden als differentie van de nulde orde

$$\Delta^0 y_t = y_t$$

terwijl voor een constante C geldt

$$\Delta C = 0$$

Een overzichtelijke indeling van de differentie-tabel wordt verkregen door de rangschikking van de termen als in tabel 1 wordt aangegeven toe te passen.

Tabel 1 Differentie-tabel equidistante waarnemingen

tijdstip	Differentie van de orde						
t	0 waarneming	1	2	3	4	...	p
1	y_1						
		$\Delta y_1 = y_2 - y_1$					
2	y_2		$\Delta^2 y_1$				
		$\Delta y_2 = y_3 - y_2$		$\Delta^3 y_1$			
3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$		
		$\Delta y_3 = y_4 - y_3$		$\Delta^3 y_2$			
4	y_4		$\Delta^2 y_3$		$\Delta^4 y_2$		
.	.	.	.	.	.		
.	.	.	.	.	.		
.	.	.	.	.	.		
t	y_t		$\Delta^2 y_{t-1}$		$\Delta^4 y_{1-2}$		$\Delta^p y_{t-\frac{1}{2}p}$
		$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$		$\Delta^3 y_{t-1}$			
t+1	y_{t+1}		$\Delta^2 y_t$		$\Delta^4 y_{t-1}$		$\Delta^p y_{t-\frac{1}{2}p+1}$
		$\Delta y_{t+1} = y_{t+2} - y_{t+1}$		$\Delta^3 y_t$			
.	.	.	.	.	.		.

De tweede <u>term</u> van de tweede-orde differentie, $\Delta^2 y_2$, wordt dus opgebouwd uit de <u>elementen</u> y_4, y_3 en y_2. Hiermee zijn tevens de in het volgende te gebruiken begrippen "term" en "element" gedefinieerd.

3. DE ALGEMENE OPLOSSING VAN EEN DIFFERENTIE-VERGELIJKING VAN DE TWEEDE ORDE MET CONSTANTE COËFFICIËNTEN

Een betrekking waarin differenties van de p^e orde voorkomen wordt een differentie-vergelijking van de p^e orde genoemd. De oplossing van de differentievergelijking levert een functie die p willekeurige elementen bevat, Deze willekeurige elementen moeten door middel van de randvoorwaarden zo bepaald worden dat de functie de discontinue gegeven waarden verbindt (zie de figuren in de volgende paragrafen). De indeling van dit soort vergelijkingen komt overeen met die van de differentiaal-vergelijkingen, Ook de methoden van oplossing vertonen, naast enkele principiële verschillen, onderling overeenkomsten. Zonder nader op de theorie in te gaan wordt in deze paragraaf het verloop van de oplossing van de differentie-vergelijking van de tweede orde gegeven (zie literatuuropgaven aan het slot van de Inleiding).

Beschouwd zal worden de differentievergelijking

$$a_o \Delta^2 y_t + \Delta y_t + y_t = C_o \qquad (4)$$

In deze betrekking zijn a_o en C_o constanten. Opgemerkt kan worden dat (4) ook geschreven kan worden als (4') door (2) toe te passen

$$a_o \Delta^2 y_t + y_{t+1} = C_o \qquad (4')$$

Hiermede wordt dus een betrekking gegeven tussen de (t+1)ste term van de 0-de orde en de t-de term van de tweede orde differentie. Beide termen komen in de differentie-tabel op dezelfde regel voor.

Een grafische voorstelling wordt verkregen door alle termen van de 0-de en tweede orde differenties op eenzelfde regel van tabel 1 tegen elkaar uit te zetten volgens

$$y_{t+1} = - a_o \Delta^2 y_t + C_o \qquad (5)$$

De oplossing van de gereduceerde differentie vergelijking

$$a_o \Delta^2 y_t + \Delta y_t + y_t = 0 \qquad (6)$$

verloopt via de karakteristieke vergelijking in E.

Uit (4') volgt achtereenvolgens

$$a_o(E-1)^2 y_t + Ey_t = 0$$

$$(a_o E^2 - 2a_o E + a_o + E)y_t = 0$$

zodat de wortels gezocht moeten worden van

$$a_o E^2 - (2a_o - 1)E + a_o = 0 \qquad (7)$$

Algemeen kan gesteld worden dat deze wortels zijn

$$E_1 = \alpha \qquad (7a)$$

$$E_2 = \beta$$

De complementaire functie is dan

$$\boxed{y_{t_c} = C_1 \alpha^t + C_2 \beta^t} \qquad (8)$$

waarin C_1 en C_2 willekeurige constanten zijn.

Een particuliere oplossing van (4) is eenvoudig te vinden doordat $\Delta C_o = \Delta^2 C_o = 0$ waaruit blijkt dat $y_t = C_o$ aan de differentie-vergelijking voldoet zodat de totale oplossing luidt

$$\boxed{y_t = C_1 \alpha^t + C_2 \beta^t + C_o} \qquad (8a)$$

Uit (7) volgt voor de wortels α en β

$$\alpha, \beta = \frac{(2a_o - 1) + \sqrt{1-4a_o}}{2a_o}$$

Afhankelijk van de waarde die de discriminant $D = 1-4a_o$ zal aannemen doen zich drie gevallen voor die achtereenvolgens besproken zullen worden.

3.1 $\boxed{D = 0}$, indien $a_o = \frac{1}{4}$

Onder de voorwaarde $a_o = \frac{1}{4}$ geldt voor α en β

$$\alpha = \beta = -1$$

Door de gelijkheid van de wortels neemt de complementaire functie de volgende gedaante aan:

$$\boxed{y_{t_c} = (-1)^t (C_1 t + C_2)} \tag{9}$$

Een grafische voorstelling van dit resultaat wordt gegeven in figuur 1.

Figuur 1. De zwarte stippen (de discontinue gegevens voor gehele waarden van t) worden verbonden door de functies welke door de oplossing van de differentie-vergelijking worden bepaald.

Het is mogelijk deze oplossing om te werken tot een cosinusfunctie en de gedaante van (14) te geven. Zie Appendix 1.

3.2 $\boxed{D > 0}$, indien $a_o < \frac{1}{4}$

Voor de complementaire functie geldt (8) waarin nu $\alpha \neq \beta$, terwijl beide wortels reëel zijn. Wordt bovendien gevonden dat $\alpha > 0$ en $\beta > 0$ dan kan (8) nog in de volgende vorm worden gebracht

$$\boxed{y_{t_c} = C_1 e^{\alpha' t} + C_2 e^{\beta' t}} \tag{10}$$

waarin $\alpha' = \ln \alpha$ en $\beta' = \ln \beta$

Een schematische voorstelling van de oplossingen van dit type staat in figuur 2 aangegeven.

Figuur 2. De zwarte stippen (de discontinue gegevens voor gehele waarden van t) worden verbonden door de som van de functie welke uit de oplossing van de differentie-vergelijking verkregen worden.

3.3 $\boxed{D < 0}$, indien $a_o \quad \frac{1}{4}$

Dit laatste geval houdt in dat de wortels van (7) toegevoegd complex zijn, waardoor deze wortels overgaan in de vorm

$$\alpha, \beta = \frac{(2a_o-1) \pm i \sqrt{4a_o-1}}{2a_o}$$

zodat gesteld kan worden

$$\alpha = a + bi$$
$$\beta = a-- bi$$

met

$$a = \frac{2a_o - 1}{2a_o} \qquad (11)$$

$$b = \frac{\sqrt{4a_o - 1}}{2a_o}$$

De herleiding van (8) verloop voor dit geval als volgt:

$$y_t = C_1(a+bi)^t + C_2(a-bi)^t$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}^{\,t} \left\{ C_1\left(\frac{a+bi}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^t + C_2\left(\frac{a-bi}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^t \right\} \qquad (12)$$

Stel nu

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\theta \quad \text{en} \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\theta \qquad (13)$$

dit is geoorloofd daar deze transformatie geen beperking van de waarden die a en b kunnen aannemen inhoudt terwijl tevens aan $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ voldaan wordt.

Uit (11) volgt

$$a^2+b^2 = \frac{4a_o^2 - 4a_o + 1}{4a_o^2} + \frac{4a_o - 1}{4a_o^2} = 1$$

zodat (12) wordt

$$y_t = C_1(\cos\theta + i\sin\theta)^t + C_2(\cos\theta - i\sin\theta)^t$$

en na toepassing van de stelling van de Moivre

$$y_t = (C_1 + C_2)\cos\theta\, t + i\,(C_1 - C_2)\sin\theta\, t$$

of, na invoering van nieuwe constanten

$$y_t = B_1\cos\theta\, t + B_2\sin\theta\, t$$

$$= \sqrt{B_1^2 + B_2^2}\left\{ \frac{B_1}{\sqrt{B_1^2+B_2^2}}\cos\theta\, t + \frac{B_2}{\sqrt{B_1^2+B_2^2}}\sin\theta\, t \right\}$$

vervolgens wordt gesteld, overeenkomstig (13)

$$\frac{B_1}{\sqrt{B_1^2+B_2^2}} = \cos\varphi \,,\; \frac{-B_2}{\sqrt{B_1^2+B_2^2}} = \sin\varphi \quad \text{en} \quad \sqrt{B_1^2+B_2^2} = C \qquad (13^*)$$

zodat ten slotte voor de complementaire functie verkregen wordt

$$\boxed{y_{t_c} = C\cos(\theta t + \varphi)} \qquad (14)$$

In deze oplossing zijn C en φ willekeurige constanten. De waarde van θ hangt samen met de waarde voor a_o uit (4). Uit (13) volgt namelijk nog

$$t\,\theta = \frac{b}{a}$$

en in verband met (11)

$$tg\theta = \frac{\sqrt{4a_o-1}}{2a_o-1}$$

Hieruit ontstaat een vierkantsvergelijking in a_o namelijk

$$\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{4a_o-1}{(2a_o-1)^2} \qquad (15)$$

waaruit na enige herleiding volgt

$$a_o = \frac{1}{2(1 \mp \cos\theta)}$$

wat voor de positieve wortel wordt

$$\boxed{a_o = \frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta}} \qquad (16)$$

Opgemerkt wordt dat de keuze van de positieve wortel uit (15) in (26) verantwoord wordt. Zie ook Appendix 2.Evenals in (8a) kan als particuliere oplossing genomen worden $y_t = C_o$ zodat de volledige oplossing luidt

$$\boxed{y_t = C\cos(\theta t + \varphi) + C_o} \qquad (17)$$

Hiermee is aangetoond dat aan het gegeven verband volgens (5) met $a_o > \frac{1}{4}$ slechts een cosinus-functie aan de elementen van de differentie-tabel ten grondslag zal liggen.

De grafische voorstelling van deze oplossing volgt in figuur 3.

Figuur 3. De zwarte stippen (de discontinue gegevens voor gehele waarden van t) worden verbonden door de functie die als oplossing uit de betreffende differentie-vergelijking ontstaat.

4. DIFFERENTIE-VERGELIJKINGEN VAN HOGERE ORDE

De algemene betrekking tussen de termen van de 0-de en de tweede orde op eenzelfde regel uit de differentietabel luidt volgens (5)

$$y_{t+1} = - a_o \Delta^2 y_t + C_o \tag{18}$$

De overeenkomstige betrekkingen voor hogere orden kunnen uit (18) afgeleid worden door opnieuw differenties te nemen. Achtereenvolgens komt er ($\Delta C_o = 0$):

$$\Delta y_{t+1} = - a_o \Delta^3 y_t \tag{19}$$

$$\Delta^2 y_{t+1} = - a_o \Delta^4 y_t \tag{20}$$

$$\Delta^4 y_{t+1} = - a_o \Delta^5 y_t$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\Delta^p y_{t+1} = -a_o \Delta^{p+2} y_t . \tag{21}$$

Opgemerkt moet worden dat (18), (19), ..., (21) steeds een regel lager in de differentietabel voorkomen. Hieraan kan vooreerst voorbijgegaan worden.

De oplossing van bijvoorbeeld (20) verloopt nu als volgt

$$a_o \Delta^4 y_t + \Delta^2 y_{t+1} = 0$$

$$a_o (E-1)^4 y_t + (E-1)^2 E y_t = 0$$

De karakteristieke vergelijking is

$$(E-1)^2 \left\{ a_o E^2 - (2a_o - 1)E + a_o \right\} = 0$$

waarvan de wortels zijn (zie ook (7) en(7a))

$$E_1 = \alpha$$

$$E_2 = \beta$$

$$E_3 = E_4 = \gamma_{1,2} = 1$$

De algemene oplossing van (20) met $D<0$ - volgens 3.3 - is nu, rekening houdend met 2 gelijke wortels γ,

$$\boxed{y_t = C \cos(\theta t+\varphi) + (C_1+C_2 t)\,\gamma^t} \qquad (22)$$

In deze uitdrukking is dus $\gamma = 1$. Om aansluiting te vinden bij de oplossing van de differentie-vergelijking (4) kan voor de willekeurige constanten genomen worden $C_1=C_o$ en $C_2=0$ waarmee weer de oplossing (17) verkregen is.

5. TOEPASSING OP WAARNEMINGSUITKOMSTEN

5.1 Inleiding

In principe kan het bovenstaande op een reeks waarnemingsuitkomsten toegepast worden. Hiertoe worden gegevens afkomstig van met gelijke tijdsintervallen verrichte waarnemingen in een differentietabel samengebracht waarna de differenties van de orden 1, 2, ... worden berekend.

Vervolgens worden de in tabel 2 genoemde paren gegevens grafisch uitgezet. Opgemerkt moet worden dat vanaf (19) de constante C_o door het nemen van hogere differenties verdwijnt.

Tabel 2 Mogelijkheden tot grafische voorstelling van de differentievergelijkingen van een cosinus-functie.

formule	y-as	x-as	hellingstangens	constante
(18)	y_{t+1}	$\Delta^2 y_t$	$-a_o$	C_o
(19)	Δy_{t+1}	$\Delta^3 y_t$	$-a_o$	0
(20)	$\Delta^2 y_{t+1}$	$\Delta^4 y_t$	$-a_o$	0
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Indien de waarnemingen in verband gebracht met de tijd aan een cosinus-functie voldoet, zal met de genoemde mogelijkheden (18), (19), (20), ... steeds een lineair verband gevonden moeten worden.

Theoretisch is het dus mogelijk volgens (18) de constanten a_o en C_o die in de differentievergelijking (4) voorkomen te bepalen en met (19), (20), ... te controleren of a_o blijft gelden. Wanneer hieraan voldaan wordt kan besloten worden de veronderstel-

ling dat de waarnemingen aan een functie van het type (17) voldoen te aanvaarden.

5.2 De afhankelijkheid van de waarnemingsfrequentie

Het verband tussen de constante a_o uit de differentievergelijking en uit de complementaire functie was volgens (16)

$$a_o = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{1}{2} \theta}$$

De waarde die θ aanneemt is bepalend voor de golflengte van de cosinusfunctie zie (14). Hieruit volgt meteen dat aan θ een voorwaarde opgelegd moet worden indien een periodiciteit van een jaar aan het uitgangsmateriaal ten grondslag ligt.

Stel dat met gelijke intervallen k waarnemingen per jaar verricht worden. Dan is

$$y_t = C \cos \left(\frac{360}{k} t + \varphi\right) + C_o \qquad (23)$$

zodat a_o wordt

$$a_o = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{180}{k}}$$

Voor een aantal gebruikelijke waarnemingsfrequenties k wordt in tabel 3 de theoretische waarde van a_o gegeven. Zo zal bij het werken met bijvoorbeeld decade gegevens, indien (23) geldt, bij het uitzetten van de gegevens, zoals in tabel 2 werd aangegeven, een hellingstangens van $-a_o = -32,9$ gevonden moeten worden.

Tabel 3 De invloed van de waarnemingsfrequentie op de waarden van a_o

tijdvak tussen 2 waarnemingen	aantal k per jaar	$\theta = \frac{360^o}{k}$	a_o
1 dag	365	0^o59	5000 (afgerond)
pentade	72	5	131,5....
decade	36	10	32,9....
$\frac{1}{2}$ maand	24	15	14,6....
maand	12	30	3,73...
$1\frac{1}{2}$ maand	8	45	1,707...
2 maanden	6	60	1
kwartaal	4	90	0,5
trimester	3	120	0,333...
$\frac{1}{2}$ jaar	2	180	0,25[1]
jaar	1	360	∞

Opgemerkt moet nu worden dat de gegeven waarden voor a_o slechts gelden met theoretisch juiste waarden van de cosinusfunctie. Zodra echter afrondingsfouten of andere onnauwkeurigheden van invloed zijn worden lagere waarden voor a_o gevonden. Wanneer bij het uitzetten van een reeks waarnemingsuitkomsten volgens het principe van tabel 2 achtereenvolgens (18), (19), (20), ... beschouwd worden blijkt een steeds kleinere waarde van a_o achtereenvolgens het verband tussen de differenties weer te geven. Het blijkt tevens dat deze lage waarden van a_o onafhankelijk van de waarnemingsfrequentie zijn.

In de volgende paragrafen zal aangetoond worden dat de invloed van afrondingsfouten en toevallige fouten zich bij deze differentiemethode zodanig voortplant dat in het verband tussen differenties die 2 in orde verschillen bij steeds hogere orden, onafhankelijk van de waarnemingsfrequentie, een limietwaarde van $a_o = \frac{1}{4}$ bereikt wordt.

---

1) Voor deze waarde geldt de oplossing (22) niet. Zie 3.1 en Appendix 1.

6. DE ALGEMENE TERM IN DE DIFFERENTIETABEL VAN EEN COSINUSFUNCTIE

Voor de verdere beschouwing van de eigenschappen van de uit een cosinusfunctie ontwikkelde differentietabel wordt nu uitgegaan van de functie

$$\boxed{y_t = C \cos(\theta t + \varphi) + C_o}$$

wat tevens de algemene vorm van de termen van de 0-de orde is. Elke y_t voldoet theoretisch aan de gegeven functie.

De algemene term van differenties van de eerste orde is

$$\begin{aligned}
\Delta y_t &= y_{t+1} - y_t \\
&= C \left[\cos\left\{\theta (t+1) + \varphi\right\} - \cos(\theta t + \varphi) \right] \\
&= C \left[\cos(\theta t + \varphi + \theta) - \cos(\theta t + \varphi) \right] \\
&= C \left[-2 \sin(\theta t + \varphi + \tfrac{1}{2}\theta) \sin \tfrac{1}{2}\theta \right]
\end{aligned}$$

zodat voor de orde p=1 geldt

$$\Delta y_t = -2.C. \sin \tfrac{1}{2}\theta . \sin\left\{ (t+\tfrac{1}{2})\theta + \varphi \right\} \tag{24}$$

Nu wordt gesteld dat voor de orde p de algemene term t voorgesteld wordt door

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta^p y_t = (-2 \sin\tfrac{1}{2}\theta)^p\, C \Big[&\sin\left\{ (t+\tfrac{p}{2})\theta + \varphi \right\} \sin \tfrac{1}{2} p\pi \\ &+ \cos\left\{ (t+\tfrac{p}{2})\theta + \varphi \right\} \cos \tfrac{1}{2} p\pi \Big]\end{aligned}} \tag{25}$$

Door volledige inductie kan deze bewering bewezen worden. Namelijk uit tabel 1 volgt dat bijvoorbeeld

$$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 = \Delta(\Delta y_2)$$

en algemeen

$$\Delta^{p+1} y_t = \Delta(\Delta^p y_t) = \Delta^p y_{t+1} - \Delta^p y_t$$

Het laatste lid van deze betrekking wordt toegepast op (25)

$$\Delta^p y_{t+1} = (-2\sin\tfrac{1}{2}\theta)^p\, C\Big[\sin(\theta t+\theta+\tfrac{p}{2}\theta+\varphi)\,\sin\tfrac{1}{2}p\pi + \cos(\theta t+\theta+\tfrac{p}{2}\theta+\varphi)\,\cos\tfrac{1}{2}p\pi\Big]$$

$\Delta^p y_t$ = zie (25)

Het verschil wordt, door toepassing van de formules voor het verschil van twee goniometrische functies

$$\Delta^p y_{t+1} - \Delta^p y_t = (-2\sin\tfrac{1}{2}\theta)^p C\Big[2\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos(\theta t+\tfrac{p+1}{2}\theta+\varphi)\sin\tfrac{1}{2}p\pi - 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\sin(\theta t+\tfrac{p+1}{2}\theta+\varphi)\cos\tfrac{1}{2}p\pi\Big]$$

Aangezien $\cos\frac{1}{2}p\pi = \sin\frac{p+1}{2}\pi$ en $-\sin\frac{1}{2}p\pi = \cos\frac{p+1}{2}\pi$

wordt het verschil

$$=(-2\sin\tfrac{1}{2}\theta)^{p+1}\, C\Big[\sin\Big\{(t+\tfrac{p+1}{2})\theta+\varphi\Big\}\sin\tfrac{p+1}{2}\pi + \cos\Big\{(t+\tfrac{p+1}{2})\theta+\varphi\Big\}\cos\tfrac{p+1}{2}\pi\Big]$$

$$=\Delta^{p+1} y_t$$

Hiermee is de gedaante van (25) terugverkregen. Voor p=1 is (25) juist en ontstaat (24). In het bovenstaande is bewezen dat als p=1 voldoet dat ook p+1=2 voldoet enz. waaruit volgt dat (25) algemeen geldt[1].

De betrekking tussen de termen op eenzelfde regel in de differentietabel (tabel 1) kan nu algemeen uit (25) afgeleid worden.

$$\Delta^p y_{t+1} = (-2\sin\tfrac{1}{2}\theta)^p\, C\Big[\sin\Big\{(t+1+\tfrac{p}{2})\theta+\varphi\Big\}\sin\tfrac{1}{2}p\pi + \cos\Big\{(t+1+\tfrac{p}{2})\theta+\varphi\Big\}\cos\tfrac{1}{2}p\pi\Big] \qquad (25a)$$

en

$$\Delta^{p+2} y_t = (-2\sin\tfrac{1}{2}\theta)^{p+2} C\Big[\sin\Big\{(t+\tfrac{p+2}{2})\theta+\varphi\Big\}\sin\tfrac{1}{2}(p+2)\pi + \cos\Big\{(t+\tfrac{p+2}{2})\theta+\varphi\Big\}\cos\tfrac{1}{2}(p+2)\pi\Big] \qquad (25b)$$

[1] Met $C_o=0$ geldt (25) ook voor p=0 en wordt de algemene term van de 0-de orde volgens (14) verkregen.

In deze laatste uitdrukking is

$$\sin\tfrac{1}{2}(p+2)\pi = -\sin\tfrac{1}{2}p\pi$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(p+2)\pi = -\cos\tfrac{1}{2}p\pi$$

De vormen tussen de vierkante haken van (25a) en (25b) zijn dus op het teken na gelijk, zodat voor de verhouding (25a):(25b) gevonden wordt:

$$\boxed{\frac{\Delta^{p} y_{t+1}}{\Delta^{p+2} y_t} = \frac{-1}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta} = -a_o} \qquad (26)$$

Hiermee is de keuze van de positieve wortel in (16) verklaard. (Zie Appendix 2).

Wordt (26) voor de orden p, p+1, p+2,... toegepast dan geldt de betrekking voor opvolgende regels in de differentietabel zoals in figuur 4a staat aangegeven.

Het verband tussen achtereenvolgende termen op eenzelfde regel volgens figuur 4b wordt voor de even orden

$$y_t - C_o = -a_o \Delta^2 y_{t-1} \tag{27a}$$

$$-a_o \Delta^2 y_{t-1} = (-a_o)^2 \Delta^4 y_{t-2}$$

$$(-a_o)^2 \Delta^4 y_{t-2} = (-a_o)^3 \Delta^6 y_{t-3}$$

$$\ldots \quad = (-a_o)^{\frac{1}{2}p} \Delta^p y_{t-\frac{1}{2}p} \qquad p = 2, 4, 6, \ldots$$

voor de oneven orden

$$\Delta y_t = -a_o \Delta^3 y_{t-1} \tag{27b}$$

$$-a_o \Delta^3 y_{t-1} = (-a_o)^2 \Delta^5 y_{t-2}$$

$$(-a_o)^2 \Delta^5 y_{t-2} = (-a_o)^3 \Delta^7 y_{t-3}$$

$$\ldots = (-a_o)^{\frac{1}{2}(p-1)} \Delta^p y_{t-\frac{1}{2}(p-1)} \qquad p = 1, 3, 5, \ldots$$

Door het nemen van differenties kunnen beide reeksen uit elkaar verkregen worden n.l.

$$\Delta \left\{ (-a_o)^{\frac{1}{2}p} \Delta^p y_{t-\frac{1}{2}p} \right\} = (-a_o)^{\frac{1}{2}p} \Delta^{p+1} y_{t-\frac{1}{2}p} \qquad p=2,4,6,\ldots$$

waaruit voor het tweede lid volgt

$$(-a_o)^{\frac{1}{2}(p-1)} \Delta^p y_{t-\frac{1}{2}(p-1)} \qquad p = 3, 5, 7, \ldots \tag{27c}$$

Aan deze laatste vorm voldoet ook p=1 waarmee de vergelijkingen reeks (27b) verkregen is.

-.-.-.-.-.-.-.-

De waarden van de termen van de p-de orde, uitgedrukt in de eerste term wordt volgens (27a) en (27b)

$$\Delta^p y_{t-\frac{1}{2}p} = \frac{y_t - C_o}{\sqrt{a_o^{\,p}}} \sqrt{-1^{\,p}} \qquad p=2,4,6,\ldots \qquad (28a)$$

en

$$\Delta^p y_{t-\frac{1}{2}(p-1)} = \frac{\Delta y_t}{\sqrt{a_o^{\,(p-1)}}} \sqrt{-1}^{\,(p-1)} \qquad p=1,3,5,\ldots \qquad (28b)$$

Wordt nu volgens het schema van figuur 4 b steeds hogere orden in beschouwing genomen dan zal bij toenemende p de absolute waarde van (28a) en (28b) naderen tot 0 indien $a_o > 1$ wat overeenkomt met een waarnemingsfrequentie $k > 6$ (pag .....), zodat

$$\lim_{p \to \infty} \Delta^p y_{t-\frac{1}{2}p} = 0 \qquad a_o > 1,\ p=2,4,6\ldots. \qquad (28c)$$

Voor het geval dat $a_o=1$, dus met 6 equidistante gegevens per jaar (tabel 3), worden de noemers in de rechterleden van (28a) en (28b) onafhankelijk van a_o. De gehele differentietabel zal nu uit termen bestaan gelijk aan de elementen verminderd met C_o (zie bijlage 3).

Met $a_o < 1$ zal de grootte van de termen bij hogere differenties toenemen. De verhouding zoals die volgens (26) berekend wordt blijft steeds onafhankelijk van de orde van differentie p. Enkele voorbeelden worden gegeven in bijlage 3.

Gevraagd wordt nu naar de verhouding tussen de termen indien deze voor steeds hogere orden opgesteld wordt. Als voorwaarde moet gesteld worden dat van (30) inderdaad een voldoende aantal differenties genomen kan worden met andere woorden dat er geen eindige waarde van p is waarvoor alle termen z_t gelijk aan 0 zijn. (Zie Appendix 4).

Bij een waarnemingsfrequentie van meer dan 6 waarnemingen per jaar zal volgens (28 c) indien p steeds grotere waarden aanneemt.

$$\boxed{\lim_{p \to \infty} \Delta^{p} y_{t-\frac{1}{2}p} = 0} \quad (a_o > 1) \quad p = 2,4,6,\ldots \qquad (31)$$

De betekenis van $p \to \infty$ voor de index is dat verondersteld moet worden dat een voldoend aantal elementen aanwezig is voor het nemen van de differenties, een voorwaarde die met een goniometrische functie zeker kan worden vervuld. De betekenis van de gebruikte index $(t - \frac{1}{2}p)$ kan ook in tabel 1 nagegaan worden.

De uitkomst van (31) houdt in dat voor $p \to \infty$ indien $a_o > 1$ de variabele y in (30) verdwijnt zodat resteert

$$a = \frac{\Delta^{p} e_{t-\frac{1}{2}p}}{\Delta^{p+2} e_{t-\frac{1}{2}p-1}} \qquad p=2,4,6,\ldots \quad (32)$$

Door nog eenmaal een differentie te nemen gaat in (29) de even reeks over in de oneven reeks op de wijze als in (27c) is afgeleid.

Voor de limiet geldt dat $p \to \infty = (p+1) \to \infty$ zodat een analyse van de even reeks alleen voldoende is.

Berekend moet dus worden, symbolisch voorgesteld met a in (32) afhankelijk van p,

$$\lim_{p \to \infty} a(p) \qquad (32a)$$

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

Een term in de differentietabel van willekeurige orde p op dezelfde regel als e_t voorkomend kan uit de elementen berekend worden volgens (3)

$$\Delta^p e_{1-\frac{1}{2}p} = (E-1)^p e_{t-\frac{1}{2}p} \tag{32b}$$

waarin voor eindige p niet alle termen van een zelfde orde gelijk aan 0 zijn (Appendix 4).

Ontwikkeld volgens het binomium van Newton

$$(E-1)^p e_{t-\frac{1}{2}p} = \sum_{i=o}^{p} \binom{p}{i} E^{p-i} (-1)^i e_{t-\frac{1}{2}p}$$

Wanneer de operator E volgens (2) op het argument inwerkt

$$\boxed{\Delta^p e_{t-\frac{1}{2}p} = \sum_{i=o}^{p} \binom{p}{i} (-1)^i e_{t+\frac{1}{2}p-i}} \tag{33}$$

Voor de noemer van (32) wordt dit

$$\Delta^{p+2} e_{t-\frac{1}{2}p-1} = \sum_{i=0}^{p+2} \binom{p+2}{i} (-1)^i e_{t+\frac{1}{2}p-i+1}$$

Uit deze laatste vorm wordt nu het eerste (i=o) en het laatste element (i=p+2) afgesplitst. Gemakshalve worden deze beide samen voorgesteld door T zodat, daar p+2 steeds even is

$$T\left(\tfrac{1}{2}p+1\right) = e_{t+(\frac{1}{2}p+1)} + e_{t-(\frac{1}{2}p+1)} \tag{34}$$

In het linkerlid moet $(\frac{1}{2}p+1)$ opgevat worden als argument van T. Er komt dus

$$\Delta^{p+2} e_{t-\frac{1}{2}p-1} = T\left(\tfrac{1}{2}p+1\right) + \sum_{i=1}^{p+1} \binom{p+2}{i} (-1)^i e_{t+\frac{1}{2}p-i-1} \tag{35}$$

Onder het somteken van (33) en (35) staan nu dezelfde elementen, namelijk

$$e_{t+\frac{1}{2}p},\ e_{t+\frac{1}{2}p-1}, \ldots,\ e_{t-\frac{1}{2}p+1},\ e_{t-\frac{1}{2}p}$$

wat aan de hand tabel 4 gemakkelijk geverifieerd kan worden. Tevens blijkt dat dezelfde elementen in (33) en (35) met een verschillend rangnummer van de binomiaalcoefficiënten voorkomen; dit is in tabel 4 op regel p aangegeven. Door voor de differentie van de orde p+2 de binomiaal-indices te verschuiven volgens regel p+2 in tabel 4

ontstaat de situatie dat voor de differenties die in orde twee verschillen onderling elke i hetzelfde element aanduidt. Hiertoe wordt in (35) overgegaan op de index i+1 die loopt van o→p. De sommatie wordt nu geschreven als

$$\sum_{i=o}^{p} \binom{p+2}{i+1} (-1)^{i+1} e_{t+\frac{1}{2}p-i} \qquad (36)$$

Zie ook bijlagen 1 en 2.

De gebruikte nummering met index i heeft nu nog het nadeel dat met toenemende waarden van p de vernummering van de elementen verspringt, zodat voor bijvoorbeeld t=4 voor de termen met differenties van de even orden het overzicht uit tabel 5 ontstaat. De stippen in de tabel stellen de afgesplitste elementen voor.

Tabel 5 De nummering van de elementen in een aantal termen uitgaande van het element e_4

index	Δ^o	Δ^2			Δ^4					...	Δ^p
	e_4	$e_5-2e_4+e_3$			$e_6-4e_5+6e_4-4e_3+e_2$						
i voor p	0	0	1	2	0	1	2	3	4		
i voor p+2	.	.	0	.	.	0	1	2	.		
j voor elke p	0	-1	0	1	-2	-1	0	1	2	...	

Door over te gaan op de index j krijgt elk element in elke term op dezelfde regel als e_4 dezelfde aanwijzer. De betrekking is

$$i = \frac{1}{2}p+j$$

waarvoor de grenzen worden

$$\left[i-\frac{1}{2}p\right]_{i=o}^{i=p} = \left[j\right]_{j=-\frac{1}{2}p}^{j=\frac{1}{2}p}$$

Een schematische voorstelling van deze betrekking wordt nog gegeven

in Appendix 3 en bijlage 1.

Met deze herleiding wordt (32), of $\frac{(33)}{(35)}$, geschreven als

$$\frac{\Delta^{e}{}_{t-\frac{1}{2}p}}{\Delta^{p+2}e_{t-\frac{1}{2}p-1}} = \frac{\sum_{j=-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} \binom{p}{\frac{1}{2}p+j} (-1)^{\frac{1}{2}p+j} e_{t-j}}{T(\frac{1}{2}p+1) - \sum_{j=-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} \binom{p+2}{\frac{1}{2}p+j+1} (-1)^{\frac{1}{2}p+j} e_{t-j}}$$

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

Eerst zal aangetoond worden dat in (37) bij toenemende p onder de op pag. 24 gestelde voorwaarden T $(\frac{1}{2}p+1)$ verwaarloosd kan worden, met andere woorden dat de som van elementen in de noemer steeds grotere waarden krijgt.

Voor het bewijs wordt de noemer uitgeschreven in de paren elementen met dezelfde binomiaalcoëfficiënten, uitgaande van e_t dus van

$$e_t,\ e_{t+1} + e_{t-1},\ e_{t+2} + e_{t-2},\ \ldots \tag{38a}$$

wat met het symbool T kan worden weergegeven als

$$\frac{1}{2}\,T\,(0),\ T\,(1),\ T\,(2),\ \ldots \tag{38b}$$

De bijbehorende binomiaalcoëfficiënten worden verkregen uit (37) en wel uit

$$\binom{p+2}{\frac{1}{2}p+1+j} (-1)^{\frac{1}{2}p+j}\ ,\ j=0, \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm \frac{1}{2}p$$

of

$$(-1)^{\frac{1}{2}p+j} \frac{(p+2)!}{(\frac{1}{2}p+1-j)!\ (\frac{1}{2}p+1+j)!} = (-1)^{\frac{1}{2}p+j} \frac{(p+2)!}{\left\{(\frac{1}{2}p+1)^2-j^2\right\}!}$$

Voor oplopende waarden van p wordt de noemer van (37)

$p=0,\ j=0 \qquad T(1) - 2.\ \frac{1}{2}\ T(0)$

$p=2,\ j=1 \qquad T(2) + 6.\ \frac{1}{2}\ T(0) - 4\ T(1)$

$p=4,\ j=2 \qquad T(3) - 20.\ \frac{1}{2}\ T(0) + 15\ T(1) - 6\ T(2)$

$\vdots$

$$p=p,\ j=\tfrac{1}{2}p \qquad T(\tfrac{1}{2}p+1)-(-1)^{\frac{1}{2}p}\left[\binom{p+2}{\frac{1}{2}p+1}\tfrac{1}{2}T(0)-\binom{p+2}{\frac{1}{2}p+3}T(1)-\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\binom{p+2}{\frac{1}{2}p+1+\frac{1}{2}p}(-1)^{\frac{1}{2}p}\,T(\tfrac{1}{2}p)\right]$$

Uit deze laatste vorm kan dus eveneens elke term voor een willekeurige p berekend worden. De grenzen voor j worden in deze uitdrukking teruggevonden in de laatste term, deze heeft namelijk het argument $(\frac{1}{2}p)$.

De algemene term wordt, teneinde de limiet overgang $p \to \infty$ voor te bereiden verder herleid. Hiertoe worden de binomiaalcoëfficiënten uitgeschreven waardoor ontstaat:

$$T(\tfrac{1}{2}p+1)-(-1)^{\frac{1}{2}p}\left[\frac{(p+2)!}{(\frac{1}{2}p+1)!(\frac{1}{2}p+1)!}\tfrac{1}{2}T(0)-\frac{(p+2)!}{(\frac{1}{2}p)!(\frac{1}{2}+2)!}T(1)+\right.$$

$$\left.+\frac{(p+2)!}{(\frac{1}{2}p-1)!(\frac{1}{2}p+3)!}T(2)-\ldots+(-1)^{\frac{1}{2}p}\frac{(p+2)!}{1!(\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}p+1)!}T(\tfrac{1}{2}p)\right]$$

waaruit volgt:

$$T(\tfrac{1}{2}p+1)-(-1)^{\frac{1}{2}p}\frac{(p+2)!}{\left\{(\frac{1}{2}p+1)!\right\}^2}\left[\tfrac{1}{2}T(0)-\frac{(\frac{1}{2}p+1)}{\frac{1}{2}p+2}T(1)+\frac{(\frac{1}{2}p)(\frac{1}{2}p+1)}{\frac{1}{2}p+2)(\frac{1}{2}p+3)}T(2)-\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\frac{2.3\ldots(\frac{1}{2}p+1)}{(\frac{1}{2}p+2)(\frac{1}{2}p+3)\ldots(\frac{1}{2}p+1+\frac{1}{2}p)}(-1)^{\frac{1}{2}p}\,T(\tfrac{1}{2}p)\right]$$

De factor voor de rechte haak kan als volgt herleid worden

$$\frac{(p+2)(p+1)\ldots(p-\frac{1}{2}p+2)(p-\frac{1}{2}p+1)\ \ldots\ 3.2.1}{\left\{(\frac{1}{2}p+1)(\frac{1}{2}p)(\frac{1}{2}p-1)\ldots\ 3.2.1\right\}^2}$$

wat overeenkomt met

$$\frac{(p+2)(p-1)(p)(p-1)\ldots(\frac{1}{2}p+4)(\frac{1}{2}p+3)(\frac{1}{2}p+2)}{(\frac{1}{2}p+1)(\frac{1}{2}p)(\frac{1}{2}p-1)(\frac{1}{2}p-2)\ldots\ 3.2.1},\ (\tfrac{1}{2}p+1)\ \text{termen}$$

De limiet van deze oneindig voortlopende reeks wordt na de volgorde van de factoren omgedraaid te hebben

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\frac{1}{2}p+2}{1} \cdot \frac{\frac{1}{2}p+3}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}p+4}{3} \ldots = \infty \qquad (39a)$$

De vorm tussen de rechte haken wordt, als oneindig voortlopende reeks geschreven:

$$\left[\frac{1}{2}\,T(0) - \frac{(\frac{1}{2}+\frac{1}{p})}{(\frac{1}{2}+\frac{2}{p})}\,T(1) + \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}+\frac{1}{p})}{(\frac{1}{2}+\frac{2}{p})\cdot(\frac{1}{2}+\frac{3}{p})}\,T(2) - \ldots\right],(\tfrac{1}{2}p+1)\text{termen}$$

De limiet voor $p \to \infty$ geeft dan, onder de eerder gestelde voorwaarde dat het aantal termen zo groot is dat de limiet genomen kan worden

$$\left[\frac{1}{2}T\,(0) - T(1) + T\,(2) - T\,(3) + T\,(4) - \ldots\right]$$

Uitgeschreven in de elementen volgens (38b) en (38a)

$$\left[e_t - e_{t+1} - e_{t-1} + e_{t+2} + e_{t-2} - e_{t+3} - e_{t-3} + \ldots\right]$$
$$= \left[(\ldots e_{t-2} + e_t + e_{t+2} + \ldots) - (\ldots e_{t-3} + e_{t-1} + e_{t+1} + e_{t+3} \ldots)\right]$$

Deze vorm houdt in dat het verschil genomen moet worden van : 1ste de som van e_t met alle elementen die op "even afstand" van e_t liggen, met 2de de som van alle elementen die op "oneven afstand" van e_t liggen. Beide sommen zijn weer oneindig voortlopende reeksen.

In symbolen samengevat

$$\left[S(e) - S(o)\right] \qquad (39b)$$

Voorts wordt weer de betekenis van

$$\lim_{p\to\infty} T\,(\tfrac{1}{2}p+1) = T\,(\tfrac{1}{2}p+1) \qquad (39c)$$

deze dat er een voldoende aantal T-termen zijn. Opgemerkt moet worden dat de T-termen zelf alle slechts eindige waarden kunnen

aannemen zoals in het begin van deze paragraaf werd gesteld.

Voor de limiet van de noemer van (37) kan met behulp van (39a) (39b) en (39c) geschreven worden, bedenkend dat $\sqrt{-1}^{p}$ slechts het teken bepaalt

$$\lim_{p\to\infty} \Delta^{p+2} e_{t-\frac{1}{2}p-1} = T\left(\tfrac{1}{2}p+1\right) = \pm\left|\left\{\infty\right\}\left[S(e)-S(o)\right]\right| \qquad (40)$$

Over deze uitkomst valt nog het volgende op te merken. In S(e) komen alle mogelijke toevallige afwijkingen zowel positieve als negatieve van z_t ten opzichte van y_t voor, die op de duur tegen elkaar weg zullen vallen. Evenzo in S(o).

Dit houdt in dat zowel S(e) en S(o) naar nul naderen en dat ook het verschil van beide oneindig voortlopende reeksen (39b) op de duur de waarde 0 gaat aannemen.

Aangezien echter in (39a) alle $\left(\frac{1}{2}p+1\right)$ termen afzonderlijk oneindig worden zal (39a) sneller tot ∞ naderen dan (39b) tot o en zal de limiet van het produkt eveneens oneindig zijn. Aangezien voorts $T\left(\frac{1}{2}p+1\right)$ slechts eindige waarden aanneemt kan deze t.o.v. de tweede term in het rechterlid van (40) voor $p\to\infty$ verwaarloosd worden, hetgeen te bewijzen was.

Onafhankelijk van $T\left(\frac{1}{2}p+1\right)$ is dus

$$\left|\lim_{p\to\infty} \Delta^{p+2} e_{t-\frac{1}{2}p-1}\right| = \infty \qquad (40a)$$

Het is duidelijk dat voor de teller van (37) op analoge wijze bewezen kan worden dat

$$\boxed{\left|\lim_{p\to\infty} \Delta^{p} e_{t-\frac{1}{2}p}\right| = \infty} \qquad (40b)$$

Dit is tevens de uitdrukking van de limiet voor de algemene term. De termen van hogere differenties in een differentietabel van willekeurige onafhankelijke elementen nemen dus in grootte toe. Tevens kan bewezen worden dat op de duur ($p\to\infty$) de termen een alternerend teken krijgen (Appendix 5).

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

Ten slotte blijft nog over te berekenen de limiet van (32),

symbolisch voorgesteld in (32a),

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\Delta^{p} e_{t-\frac{1}{2}p}}{\Delta^{p+2} e_{t-\frac{1}{2}p-1}}$$

waarvoor uit (37) volgt, onder verwaarlozing van $T(\frac{1}{2}p+1)$ volgens (40):

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\sum_{j=-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} \binom{p}{\frac{1}{2}p+j} (-1)^{\frac{1}{2}p+j} e_{t-j}}{(-1) \sum_{j=-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} \binom{p+2}{\frac{1}{2}p+j+1} (-1)^{\frac{1}{2}p+j} e_{t-j}} \tag{41}$$

Het is niet mogelijk de limiet te berekenen uit de limieten van de teller en de noemer daar beide volgens (40a) en (40b) tot ∞ naderen. De volgende herleiding kan toegepast worden.

De som van produkten in teller en noemer wordt beschouwd als het inproduct van de vectoren

$$\begin{aligned} \underline{e} &= (e_{t-\frac{1}{2}p},\ e_{t-\frac{1}{2}p+1},\ \ldots,\ e_{t+\frac{1}{2}p}) \\ \underline{b}_1 &= \binom{p}{\frac{1}{2}p+j} (-1)^{\frac{1}{2}p+j} && j=\tfrac{1}{2}p,\ \tfrac{1}{2}p-1,\ \ldots\ -\tfrac{1}{2}p \\ \underline{b}_2 &= -\binom{p+2}{\frac{1}{2}p+j+1} (-1)^{\frac{1}{2}p+j} && j=\tfrac{1}{2}p,\ \tfrac{1}{2}p-1,\ \ldots,-\tfrac{1}{2}p \end{aligned} \tag{42}$$

waardoor (41) wordt

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\underline{b}_1 \cdot \underline{e}}{\underline{b}_2 \cdot \underline{e}} \tag{43}$$

Wanneer nu zou blijken dat de verhouding tussen de kentallen van de vectoren $\underline{b}_1$ en $\underline{b}_2$ voor $p\to\infty$ tot een limiet L naderen, onafhankelijk van het volgnummer van deze kentallen j, dan kan (43) geschreven worden als

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\underline{b}_1 \cdot \underline{e}}{\underline{b}_2 \cdot \underline{e}} = \frac{(L\ \underline{b}_2) \cdot \underline{e}}{\underline{b}_2 \cdot \underline{e}} = L \tag{43a}$$

De vector $\underline{b}_1$ is dan namelijk L maal zo **lang** als de vector $\underline{b}_2$.

Het onderzoek naar de verhouding tussen de kentallen verloopt als volgt.

Uit (42) ontstaat voor de verhouding van een willekeurig paar kentallen

$$\frac{b_{1\,j}}{b_{2\,j}} = \frac{\binom{p}{\frac{1}{2}p+j}}{-\binom{p+2}{\frac{1}{2}p+j+1}} \qquad j=\tfrac{1}{2}p,\ \ldots,\ -\tfrac{1}{2}p \tag{44}$$

In bijlagen 1 en 2, worden waarden van de coëfficiënten en hun verhouding gegeven, zie ook Appendix 3.

De noemer kan ontwikkeld worden tot

$$\binom{p+2}{\frac{1}{2}p+j+1} = \frac{(p+2)!}{(\frac{1}{2}p+1-j)!(\frac{1}{2}p+1+1)!} = \frac{(p+2)(p+1)p!}{(\frac{1}{2}p+1-j)(\frac{1}{2}p+1+j)(\frac{1}{2}p-j)!(\frac{1}{2}p+j)!}$$

waaruit volgt

$$\binom{p+2}{\frac{1}{2}p+j+1} = \frac{(p+2)(p+1)}{\left\{(\frac{1}{2}p+1)^2 - j^2\right\}} \binom{p}{\frac{1}{2}p+j}$$

Ingezet in (44) en teller en noemer gedeeld door p^2 geeft

$$\lim_{p\to\infty} \frac{b_{1j}}{b_{2j}} = \lim_{p\to\infty} \frac{(\frac{1}{2}+\frac{1}{p})^2 - (\frac{j}{p})^2}{-(1+\frac{2}{p})(1+\frac{1}{p})} = -\frac{1}{4} \quad (\text{voor } j^2=0,1,2,\ldots) \tag{45}$$

Deze uitkomst is dus onafhankelijk van j en geldt dus voor alle overeenkomstige kentallen.

Het blijkt dus dat de vector $\underline{b}_2$ nadert tot een vector in de richting tegengesteld aan die van $\underline{b}_1$ en met een lengte van $4\underline{b}_1$.

Na deze bewerkingen geldt **ten** slotte voor (37).

$$\boxed{\lim_{p\to\infty} \frac{\Delta^p e_{t-\frac{1}{2}p}}{\Delta^{p+2} e_{t-\frac{1}{2}p-1}} = -\frac{1}{4}} \tag{46}$$

In bijlage 2 wordt de verhouding van de binomiaalcoëfficiënten weergegeven voor de orden p=0,1,2,...,15.

-o-o-o-o-o-o-o-

volgens (5) respectievelijk(30) in een reeks toevallige elementen met oplopende orde p tot een limiet nadert.

Is de waarnemingsfrequentie hoog, $k > 6$, dan zullen in de differentietabel de cosinus termen y_t in orde van grootte afnemen met het toenemen van de orde van differentie p (31)(pag. 26). De toevallige fouten e_t krijgen hierdoor en mede door het feit dat deze in orde van grootte toenemen (40b) een steeds grotere invloed (zie bijlage 3). De verhoudingsfactor a (pag . 34) blijkt onder deze omstandigheden tot een limietwaarde $\frac{1}{4}$ te naderen. Voorbeelden van de wijze waarop deze limiet bereikt wordt, worden gegeven in tabel 6 in Appendix 3 en in bijlage 2.

Het criterium voor de cosinusfunctie kan dus gevonden worden in de eis dat bij het grafisch uitzetten van de termen die twee in orde verschillen, voorkomend op eenzelfde regel van de differentietabel die hellingstangens a_o gevonden moet worden die past bij de gebruikte waarnemingsfrequentie k.

Wordt een andere, lagere hellingstangens gevonden dan behoeft nog niet tot verwerpen van de cosinusfunctie besloten te worden, maar zal het criterium geen maatstaf kunnen zijn ten gevolge van het feit dat mogelijk toevallige afwijkingen te sterk gaan overheersen.

-o-o-o-o-o-o-o-

9. CIJFERVOORBEELD VAN DE AFGELEIDE EIGENSCHAPPEN.

In een cijfervoorbeeld zullen de gevonden resultaten nog eens nader geïllustreerd worden. De bijlagen 3 hebben op deze paragraaf betrekking en dienen tot toelichting op het besprokene. In het onderstaande wordt steeds naar de desbetreffende plaats in de theorie terugverwezen.

Als cijfervoorbeeld zouden gegevens van b.v. waterstandswaarnemingen, berekende of gemeten verdamping, enz. gebruikt kunnen worden. Ervaringen hiermee opgedaan zullen in een afzonderlijke nota vermeld worden. Hier wordt er de voorkeur aan gegeven een cosinusfunctie tot uitgangspunt te nemen. Door afronding ontstaat een zekere fout t.o.v. de werkelijke waarde. Deze fout komt overeen met de e uit (29); gezien hun periodiciteit zijn de e's niet onafhankelijk. Hieraan kan in het volgende voorbijgegaan worden.

In bijlage 3.1 worden ordinaatwaarden gegeven voor het geval 36 gegevens per golflengte ter beschikking staan. (k=36), alle waarden zijn in zeven decimalen gegeven.

In bijlage 3.1 worden achtereenvolgende differenties genomen. Het blijkt dat de absolute waarde van de termen overeenkomstig (31) weliswaar steeds kleiner wordt doch slechts tot de 6e differentie; daarna nemen de termen bij hogere differenties in grootte toe doordat de toevallige fout gaat overheersen (40b). In de differentie-orde p=20 hebben de termen een alternerend teken, (Appendix 5) behalve op de plaats waar naar het volgende kwart van de golflengte wordt overgegaan, dit als gevolg van de periodiciteit in de e-reeks. (Hierdoor blijft ook de Q bij de hogere orden gehandhaafd).

In bijlage 3.2 worden de verhoudingen gegeven tussen termen op eenzelfde regel van de differentietabel. Zo is voor de 3e term van de nulde orde deze verhouding

$$\frac{0,9396942}{-0,0285519} = -\ 32,9118 = -a_o$$

Deze waarde komt goed overeen met de theoretische voor k=36, n.l. a_o = 32,9124... Ook voor de tweede orde differenties worden waarden gevonden die goed met de theoretische overeenstemmen, resp. 32,9254; 32,9213;... Tot deze orden gelden de verhoudingen nog als karakteristiek

voor de cosinusfunctie en is deze verhouding een criterium voor het bestaan van de cosinusfunctie; voor hogere orden nadert de verhouding al spoedig tot waarden die ongeveer $\frac{1}{4}$ zijn.

In de laatste kolom van bijlage 3.2 wordt de limiet = $\frac{1}{4}$ (46) al zeer dicht benaderd.

In bijlage 3.3 worden de ordinaatwaarden gegeven voor het geval 6 gegevens per golflengte bekend zouden zijn (k=6). Volgens de theorie moeten de exacte waarden van de termen bij opvolgende differenties gelijk blijven (tabel 3, $a_o=1$). Ten gevolge van de afrondingsfout is dit in tabel 3.3 niet het geval doch de fout plant zich nu slechts relatief langzaam voort. (Appendix 6)

In bijlage 3.4 tenslotte wordt aangenomen dat de waarnemingsfrequentie k=4. De termen op dezelfde regel in de differentietabel nemen naar de hogere differenties met een factor -2 in grootte toe ($a_o=\frac{1}{2}$) zoals theoretisch werd afgeleid (16).

Er kan bewezen worden dat aan deze waarde van a_o identiek voldaan wordt, zodat het steeds mogelijk is een cosinusfunctie exact aan gegevens van dit type aan te passen. Namelijk voor de uitgangsgegevens geldt $z_t=a$, $z_{t+1}=b$, $z_{t+2}=-a$, $z_{t+3}=-b$, ... zodat

$$\Delta^2 z_t = (E-1)^2 z_t = z_{t+2} - 2z_{t+1} + z_t$$
$$= -a-2b+a = -2b$$

zodat steeds geldt, ongeacht de afrondingsfouten

$$\frac{z_{t+1}}{\Delta^2 z_t} = -\frac{1}{2} = -a_o \qquad (k=4)$$

-o-o-o-o-o-

APPENDIX 1.

1. De willekeurige constanten als functie van de tijd

Een bijzondere eigenschap van een differentievergelijking is het discontinu zijn van de onafhankelijk variabele. Deze eigenschap maakt het mogelijk aan de willekeurige constanten een functioneel verband op te leggen. Hiervan kan gebruik gemaakt worden voor het herleiden van een polynomium in een goniometrische functie.

De verkregen oplossing (9) in paragraaf 3.1 luidde

$$y_t = (-1)^t (C_1 t + C_2) \qquad (1)$$

De volledige oplossing werd verkregen door aan (1) een particuliere oplossing $y_t = C_o$ toe te voegen. Voor de volgende beschouwing is het niet noodzakelijk hiermee rekening te houden zodat (1) de oplossing van de differentievergelijking van pag . 7 voorstelt.

De willekeurige constanten in dit "polynomium" worden als volgt gekozen:

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = B$$

waardoor ontstaat

$$y_t = (-1)^t B \qquad (2)$$

Een grafische voorstelling van deze oplossing wordt gegeven in figuur 5. (zie ook fig. 1)

fig 5 De zwarte stippen (de discontinue gegevens voor gehele waarden van t) worden verbonden door de functies welke door de oplossing van de differentievergelijking bepaald worden.

Met (2) is de oplossing gegeven van de vraag naar de functie die voor t=1,2,3,... de waarden -B,+B,-B,... aanneemt.

Het is echter duidelijk dat ook elke continue functie die voor t=1,2,3,... deze waarden aanneemt een oplossing van de differentievergelijking moet zijn. Dit houdt in dat B een continue functie van t kan zijn mits t niet-gehele waarden kan aannemen, wat met een tijdfunctie zeker het geval is. Dus

$$y_t = (-1)^t \, B(t) \tag{3}$$

mits echter

$$y_1 = -B(1) = -B \tag{4}$$

$$y_2 = +B(2) = +B$$

enzovoorts

Een willekeurige functie B (t) die aan (4) voldoet is de Fourier-reeks met periode 1 dus

$$B(t) = \frac{1}{2}A + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2\pi nt \tag{5}$$

waarin a_o, a_1, a_2, ..., b_1, b_2,... nader te bepalen constanten zijn. Dat (5) voldoet volgt uit

$$B(1) = \frac{1}{2}A + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$B(2) = \frac{1}{2}A + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

enzovoorts

door de som van constanten gelijk B te stellen.

Wordt gevraagd de oplossing (1) en dus (3) de gedaante van een cosinusfunctie te geven dan kunnen in (5) de hogere termen weggelaten worden zodat

$$B(t) = \frac{1}{2}A + a_1 \cos 2\pi t + b_1 \sin 2\pi t$$

en met A = 0 kunnen de alternerende B-waarden verkregen worden uit

$$(-1)^t B(t) = a_1 \cos \pi t + b_1 \sin \pi t \tag{6}$$

Deze betrekking voldoet aan (4) door te stellen dat $a_1=B$. De herleiding van (6) verloopt dan verder

$$y_t = B \cos \pi t + b_1 \sin \pi t$$
$$= \sqrt{B^2+b_1^2} \left\{ \frac{B}{\sqrt{B^2+b_1^2}} \cos \pi t + \frac{b_1}{\sqrt{B^2+b_1^2}} \sin \pi t \right\}$$

stel

$$\frac{B}{\sqrt{B^2+b_1^2}} = \cos \Psi, \quad \frac{-b_1}{\sqrt{B^2+b_1^2}} = \sin \Psi \tag{7}$$

In het beschouwde geval is D=0 en $a_o=\frac{1}{4}$ (zie pag . 8.) Uit tabel 3 op pag. 18 volgt dat de waarnemingsfrequentie voor dit geval k=2 is. Invoeren van deze frequentie geeft

$$y_t = \sqrt{B^2+b_1^2} \cos \left(\frac{2\pi}{k} t + \Psi \right) \tag{8}$$

waarmee voor t een nieuwe schaal gekozen kan worden.

Deze oplossing is gelijkwaardig met die volgens (23) van pag voor $a_o > \frac{1}{4}$. Door gelijkstelling van de willekeurige constanten uit (7) aan die uit (13*) van pag. 12

$$\sqrt{B^2+b_1^2} = C$$
$$B = B_1$$
$$b_1 = B_2$$

wordt ook

$$\Psi = \varphi$$

zodat hiermede (3) en dus ook (1) herleid is tot

$$y_t = C \cos \left(\frac{2\pi}{k} t + \varphi \right) \tag{9}$$

De grafische voorstelling van deze oplossingen zijn bijeengebracht in figuur 6.

Fig. 6. De oplossing uit figuur 5 wordt getransformeerd tot een welke voor niet gehele waarden van t ook betekenis heeft.

De oplossing (9) kan dus verkregen worden met een waarnemingsfrequentie k=2 door de differentievergelijking op te lossen en daarna de willekeurige constante(n) door middel van een Fourier-reeks aan overige bekende punten gelegen tussen t_1 en t_2, t_2 en t_3, ..., aan te passen.

Tevens kan (9) verkregen worden door rechtstreeks de differentievergelijking op te lossen voor die gevallen waarin $k > 2$.

APPENDIX 2 De tweede oplossing voor a_o.

In paragraaf 3.3 werd in (16) de oplossing voor a_o gegeven door het nemen van de positieve wortel uit (15).

De beide wortels zijn

$$a_o(+) = \frac{1}{2(1-\cos\theta)} \qquad a_o(-) = \frac{1}{2(1+\cos\theta)}$$

waaruit

$$a_o(+) = \frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta} \quad \text{en} \quad a_o(-) = \frac{1}{4\cos^2\frac{1}{2}\theta}$$

In paragraaf 6 werd in (26) voor de gebruikte differentievergelijking het toepassen van de positieve wortel verantwoord.
Ook voor het geval dat voor de differentievergelijking een sinusfunctie als oplossing gekozen wordt geldt de positieve wortel. Met weglating van de niet ter zake doende constanten ontstaat namelijk:

$$y_t = \sin\theta\, t$$

$$\Delta y_t = \sin(\theta t+\theta) - \sin\theta\, t$$

$$= 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos(\theta t+\tfrac{1}{2}\theta)$$

Ook voor een sinusfunctie wordt de factor waarmee de termen voor volgende differenties toenemen dus gevormd uit $\sin\frac{1}{2}\theta$.

De keuze van de positieve wortel wordt vereist voor het geval dat met voortschrijdende sommen van twee termen wordt gewerkt en wel

$$y_t = \cos\theta\, t$$

$$t_{t+1} + y_t = \cos\theta(t+1) + \cos\theta\, t$$

waaruit volgt:

$$y_{t+1} + y_t = 2\cos\tfrac{1}{2}\theta \cdot \cos(\theta t+\tfrac{1}{2}\theta)$$

Of, overgaand op het voortschrijdende gemiddelde, wat gedefinieerd zou kunnen worden als

$$\vec{y}_t = \frac{y_{t+1} + y_t}{2}$$

ten slotte

$$\vec{y}_t = \cos\frac{1}{2}\theta \,.\, \cos(\theta t+\frac{1}{2}\theta)$$

Voor een sinusfunctie wordt dit resultaat

$$\vec{y}_t = \cos\frac{1}{2}\theta .\ \sin\ (\theta t+\frac{1}{2}\theta\ )$$

Opgemerkt moet worden dat een voortschrijdende som over steeds twee elementen y niet de bewerking is die de tegenhanger vormt van het nemen van differenties. De tegengestelde bewerking van het nemen van differenties is namelijk het doorlopend sommeren vanaf een vast beginpunt. Het volgende willekeurig cijfervoorbeeld maakt dit duidelijk

y_t	2		4		12		10		6	.	.
Δy_t		2		8		-2		-4		.	.
$\sum\Delta y_t$	0		2		10		8		4	.(+ constante)	
$\sum\Delta y_t + 2=y_t$	2		4		12		10		6	.	.

De beginvoorwaarde, waarmee de willekeurige constante bepaald moet worden luidt voor dit geval

$$y_1=2$$

APPENDIX 3 De limiet voor de binomiaalcoëfficiënten.

In bijlage 2 wordt aangegeven op welke wijze de verhouding van binomiaalcoëfficiënten in de driehoek van Pascal nadert naar de limietwaarde 0,25 volgens (45) op pag. 34.

Ook kan een indruk gegeven worden van de nadering van (46) tot de limietwaarde. In dit geval kunnen verhoudingen berekend worden van de sommen van binomiaalcoëfficiënten, indien aangenomen wordt

$$\ldots = + e_{t-2} = -e_{t-1} = +e_t = -e_{t+1} = +e_{t+2} = \ldots$$

zodat (41) wordt

$$\lim_{p \to \infty} \frac{\sum^{p} \binom{\frac{1}{2}p+j}{}}{-\sum^{p+2} \binom{\frac{1}{2}p+j+1}{}} = \lim_{p \to \infty} \lambda_p, (p \text{ even})$$

In schema komt dit neer op het berekenen van de verhouding λ_p voor $p=0, 1, 2, 3, \ldots, \to \infty$

p	0	1	2	3	...
verhouding λ_p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+1}{3+3}$,	$\frac{1+2+1}{4+6+4}$,	$\frac{1+3+3+1}{5+10+10+5}$,	...
In 2 decimalen	0,50	0,33	0,,29	0,27	...

De tellers en noemers worden verkregen uit de driehoek van Pascal volgens het onderstaande schema

De berekening van deze verhoudingen λ kan als volgt vereenvoudigd worden.

De algemene term wordt geschreven als

$$\lambda_p = \frac{\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i}}{\sum_{i=1}^{p+1} \binom{p+2}{i}} \qquad (1)$$

Voor een schematische voorstelling wordt verwezen naar bijlage 2.

Voor de teller kan geschreven worden

$$\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} 1^{p-1} . 1^{i} = (1+1)^{p} = 2^{p}$$

Voor de noemer:

$$\sum_{i=1}^{p+1} \binom{p+2}{i} = \sum_{i=0}^{p+2} \binom{p+2}{i} - 2$$

$$= (1+1)^{p+2} - 2$$

$$= 4.2^p - 2$$

Zodat de algemene term is

$$\boxed{\lambda_p = \frac{2^p}{4.2^p - 2}} \qquad (2)$$

De limiet volgt uit

$$\lim_{p\to\infty} \lambda_p = \lim \frac{1}{4-2^{1-p}} = \frac{1}{4}$$

Berekend tot in 6 decimalen voor p= 0,1,...,18 wordt het resultaat gegeven in tabel 6.

Tabel 6 Verhoudingen van sommen van binomiaalcoëfficiënten volgens (1)

p	λ_p	p	λ_p	p	λ_p
0	0,500 000	8	0,250 489	16	0,250 002
1	0,333 333	9	0,250 244	17	0,250 001
2	0,285 714	10	0,250 122	18	0,250 000
3	0,266 667	11	0,250 060		
4	0,258 064	12	0,250 030		
5	0,253 968	13	0,250 015		
6	0,251 968	14	0,250 008		
7	0,250 980	15	0,250 004		

APPENDIX 4 De oplossing van $\Delta^p x_t = 0$

In paragraaf 7 (pag.24) werd de veronderstelling uitgesloten dat alle $\Delta^p x_t$ gelijk aan 0 zouden zijn voor eindige p. In dit geval namelijk ontstaat de volgende oplossing

$$\Delta^p x_t = 0 \qquad (1)$$

of, met operator E

$$(E-1)^p x_t = 0$$

De karakteristieke vergelijking heeft de wortels

$$E_{1,2,\ldots,p} = 1$$

De oplossing van (1) is hiermee (zie ook (22) op pag.15)

$$x_t = C_{p-1} t^{p-1} + \ldots + C_2 t^2 + C_1 t + C_o \qquad (2)$$

Deze functie, een polynomium van de (p-1)ste graad in t, heeft dus tot eigenschap dat in de differentie van orde p alle termen gelijk aan 0 worden. Deze mogelijkheid kan dus terecht verworpen worden daar deze niet de aangenomen cosinusfunctie tot grondslag heeft.

Opgemerkt kan nog worden dat de oplossing (2) slechts tot de cosinusfunctie

$$x_t = C \cos \left(\frac{2\pi}{k} t + \varphi \right) \qquad (3)$$

herleid kan worden indien de waarnemingsfrequentie k=1 is.

Volgens (5) uit Appendix 1 namelijk kan voor (2) geschreven worden met $C_p = \ldots = C_2 = C_1 = 0$, en $C_o = C_o(t)$

$$x_t = a_1 \cos 2\pi t + b_1 \sin 2\pi t + \frac{1}{2} A$$

waaruit

$$x_t = C \cos (2\pi t + \varphi) + \frac{1}{2} A \qquad (4a)$$

en na invoering van de waarnemingsfrequentie k=1

$$x_t = C \cos \left(\frac{2\pi}{k} t + \varphi \right) + \frac{1}{2} A \qquad (4b)$$

Indien echter voor (1) een andere waarnemingsfrequentie geldt ($k \neq 1$) kan de herleiding van (4a) tot (4b) niet plaatsvinden.

Een grafische voorstelling van de oplossing (4b) wordt gegeven in figuur 7, voor het geval A=0.

fig. 7. De zwarte stippen (de gegevens voor gehele waarden van t) worden verbonden door een functie, afgeleid uit de oplossing van de differentievergelijking, die ook voor niet gehele waarden van t betekenis heeft.

Ook voor (32a) op pag. 26) werd aangenomen dat voor eindige p niet alle termen gelijk 0 zijn. Deze aanname is juist, daar het een gevolg is van het feit dat de elementen e onderling als onafhankelijke grootheden beschouwd worden.

Alle $\Delta^p e_t = 0$ leidt namelijk via de analoge vorm via (1) tot de functie

$$e_t = C_{p-1}t^{p-1} + \ldots + C_2t^2 + C_1t + C_o$$

terwijl in tegenstelling hiermee aan de elementen e geen voorwaarden opgelegd konden worden (pag. 24).

APPENDIX 5 Alternerende reeksen in de differentietabel

In paragraaf 7 is met (40 b) aangetoond dat voor een willekeurige term

$$\left| \lim_{p\to\infty} \Delta^p e_{t-\frac{1}{2}p} \right| = \infty \qquad (1)$$

Het toenemen in grootte van de termen bij opvolgende differenties verloopt snel indien de termen een alternerend teken hebben. Bij voorbeeld

Tabel 7 Differentietabel van termen met alternerend teken

t	Δ^0	Δ^1	Δ^2	enz.
t	e_t		$-(e_{t+1}+2e_t+e_{t-1})$	
		$-(e_{t+1}+e_t)$		
t+1	$-e_{t+1}$		$(e_{t+2}+2e_{t+1}+e_t)$	
		$(e_{t+2}+e_{t+1})$		
t+2	e_{t+2}		$-(e_{t+3}+2e_{t+2}+e_{t+1})$	
		$-(e_{t+3}+e_{t+2})$		
t+3	$-e_{t+3}$		$(e_{t+4}+2e_{t+3}+e_{t+2})$	

In dit geval worden dus steeds de absolute waarden van de elementen gesommeerd.

Bewezen kan worden dat op de duur, $p\to\infty$, van een kolom in een differentietabel van eindige onafhankelijke willekeurige elementen e, de op elkaar volgende termen alternerende tekens verkrijgen.

Voor het bewijs wordt uitgegaan van de algemene term zoals deze in de teller van (37) voorkomt

$$\boxed{\sum_{j=-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} \binom{p}{\frac{1}{2}p+j} (-1)^{\frac{1}{2}p+j} e_{t-j}} \qquad (2)$$

Het verloop van het bewijs is nu als volgt. Uitgaande van de elementen ..., e_{t-1}, e_t, e_{t+1}, ... is bijvoorbeeld de vierde orde differentie voor twee opeenvolgende termen (zie tabel 4, pag. 25).

$$\Delta^4 e_t = e_{t+2} - 4\, e_{t+1} + 6\, e_t - 4 e_{t-1} + e_{t-2} \tag{3}$$

$$\Delta^4 e_{t+1} = e_{t+3} - 4 e_{t+2} + 6 e_{t+1} - 4 e_t + e_{t-1} \tag{4}$$

index $\quad t+\frac{1}{2}p \quad \ldots \quad \ldots \quad t-\frac{1}{2}p+1$

De pijltjes in bovenstaand schema verbinden de elementen met gelijke index .

Wanneer algemeen aangetoond kan worden dat in het algemeen voor twee opeenvolgende termen geldt

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\Delta^p e_t}{\Delta^p e_{t+1}} < 0 \tag{5}$$

dan zullen de termen $\Delta^p e_t$, $\Delta^p e_{t+1}$, $\Delta^p e_{t+2}$, ... ($p\to\infty$) een alternerende reeks vormen.

Het bewijs verloopt als volgt

Met (2) wordt dus de algemene uitdrukking van de teller van (5) gegeven. De noemer wordt

$$\boxed{\sum_{j=-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} \binom{p}{\frac{1}{2}p+1} (-1)^{\frac{1}{2}p+1} e_{t+1-j}} \tag{6}$$

Nu worden in (2) en (6) de niet gemeenschappelijke elementen afgesplitst, wat in (3) en (4) de elementen e_{t-2} en e_{t+3} zijn, zodat er komt

$$\text{Teller: } (-1)^p e_{t-\frac{1}{2}p} + \sum_{j=-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p-1} \binom{p}{\frac{1}{2}p+j} (-1)^{\frac{1}{2}p+j} e_{t-j} \tag{7}$$

Ook nu kan gezocht worden naar een mogelijk constante verhouding tussen de kentallen van de vectoren $\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ voor $p \to \infty$. Dus

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\binom{p}{\frac{1}{2}p+j}}{\binom{p}{\frac{1}{2}p+j+1}} \qquad , \; j=\tfrac{1}{2}p-1,\ \tfrac{1}{2}p,\ \ldots,\ -\tfrac{1}{2}p$$

$$= \lim_{p\to\infty} \frac{p!}{(\frac{1}{2}p-j)!(\frac{1}{2}p+j)!} \cdot \frac{(\frac{1}{2}p-j-1)!(\frac{1}{2}p+j+1)!}{p!}$$

$$= \lim_{p\to\infty} \frac{(\frac{1}{2}p-j-1)!(\frac{1}{2}p+j+1)(\frac{1}{2}p+j)!}{(\frac{1}{2}p-j)(\frac{1}{2}p-j-1)!\ (\frac{1}{2}p+j)\ !}$$

$$= \lim_{p\to\infty} \frac{\frac{1}{2}p+j+1}{\frac{1}{2}p-j}$$

Voor de limietovergang wordt j ontwikkeld volgens de reeks $j= 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ zodat er komt (zie ook tabel 5)

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{j}{p} + \frac{1}{p}}{\frac{1}{2} \mp \frac{j}{p}} = 1, \qquad j=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

De verhouding tussen de kentallen van de vectoren $\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ nadert dus tot 1 zodat

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\underline{v}_1 \cdot \underline{e}}{-\underline{v}_2 \cdot \underline{e}} = -1$$

Hiermede is aangetoond dat in (5) de verhouding dus negatief is en de termen in de differenties van hogere orden op de duur zullen alterneren van teken.

BIJLAGE 3.1 Differentietabel voor $z_t = \cos t + e_t$

De cosinuswaarden worden gegeven in 7 decimalen. De afrondingsfout wordt gelijk gesteld aan e_t. Door het cyclisch verloop van de functie is het voldoende slechts van 1/4 golflengte de getallen te vermelden. Het aantal equidistante ordinaatwaarden bedraagt 36, zodat deze reeks kan gelden voor een waarnemingsfrequentie k = 36. De tijd t is uitgedrukt in het centesimale stelsel.

t	z_t	Δz_t	$\Delta^2 z_t$	$\Delta^3 z_t$	$\Delta^4 z_t$	$\Delta^5 z_t$	$\Delta^6 z_t$
		0,015 191 8		-0,000 461 4		0,000 013 9	
0,00	1,000 000 0		-0,030 383 6		0,000 922 8		-0,000 027 8
		-0,015 191 8		0,000 461 4		-0,000 013 9	
11,11	0,984 808 2		-0,029 922 2		0,000 908 9		-0,000 027 2
		-0,045 114 0		0,001 370 3		-0,000 041 1	
22,22	0,939 694 2		-0,028 551 9		0,000 867 8		-0,000 025 9
		-0,073 665 9		0,002 238 1		-0,000 067 0	
33,33	0,866 028 3		-0,026 313 8		0,000 800 8		-0,000 037 2
		-0,099 979 7		0,003 038 9		-0,000 104 2	
44,44	0,766 048 6		-0,023 274 9		0,000 696 6		0,000 022 1
		-0,123 254 6		0,003 735 5		-0,000 082 1	
55,56	0,642 794 0		-0,019 539 4		0,000 614 5		-0,000 079 7
		-0,142 794 0		0,004 350 0		-0,000 161 8	
66,67	0,500 000 0		-0,015 189 4		0,000 452 7		0,000 016 7
		-0,157 983 4		0,004 802 7		-0,000 145 1	
77,78	0,342 016 6		-0,010 386 7		0,000 307 6		0,000 003 6
		-0,168 370 1		0,005 110 3		-0,000 141 5	
88,89	0,173 646 5		-0,005 276 4		0,000 166 1		-0,000 024 6
		-0,173 646 5		0,005 276 4		-0,000 166 1	
100,00	0,000 000 0		0,000 000 0		0,000 000 0		0,000 000 0
		-0,173 646 5		0,005 276 4		-0,000 166 1	
	-0,173 646 5		0,005 276 4		-0,000 166 1		0,000 024 6

BIJLAGE 3.1 vervolg

t	$\Delta^6 z_t$	$\Delta^7 z_t$	$\Delta^8 z_t$	$\Delta^9 z_t$	$\Delta^{20} z_t$	$\Delta^{21} z_t$	$\Delta^{22} z_t$
0,00	-0,000 027 8	-0,000 000 6	0,000 001 2	0,000 000 5	-0,069 779 0	-0,174 133 2	0,348 266 4
11,11	-0,000 027 2	0,000 000 6	0,000 000 7	-0,000 000 5	0,104 354 2	0,174 133 2	-0,478 340 8
22,22	-0,000 025 9	0,000 001 3	-0,000 012 6	-0,000 013 3	-0,199 853 4	-0,304 207 6	0,827 890 7
33,33	-0,000 037 2	-0,000 011 3	0,000 070 6	0,000 083 2	0,323 829 7	0,523 683 1	-1,264 096 1
44,44	0,000 022 1	0,000 059 3	-0,000 161 1	-0,000 231 7	-0,416 583 3	-0,740 413 0	1,578 404 4
55,56	-0,000 079 7	-0,000 101 8	0,000 198 2	0,000 359 3	0,421 408 1	0,837 991 4	-1,590 744 5
66,67	0,000 016 7	0,000 096 4	-0,000 109 5	-0,000 307 7	-0,331 345 0	-0,752 753 1	1,281 939 0
77,78	0,000 003 6	-0,000 013 1	-0,000 015 1	0,000 094 4	0,197 840 9	0,529 185 9	-0,809 210 0
88,89	-0,000 024 6	-0,000 028 2	0,000 052 8	0,000 067 9	-0,082 183 2	-0,280 024 1	0,362 207 3
100,00	0,000 000 0	0,000 024 6	0,000 000 0	-0,000 052 8	0,000 000 0	0,082 183 2	0,000 000 0
	0,000 024 6	0,000 024 6	-0,000 052 8	-0,000 052 8	0,082 183 2	0,082 183 2	-0,362 207 3

BIJLAGE 3.4 Differentietabel voor $z_t = \cos(t-22,22) + e_t$

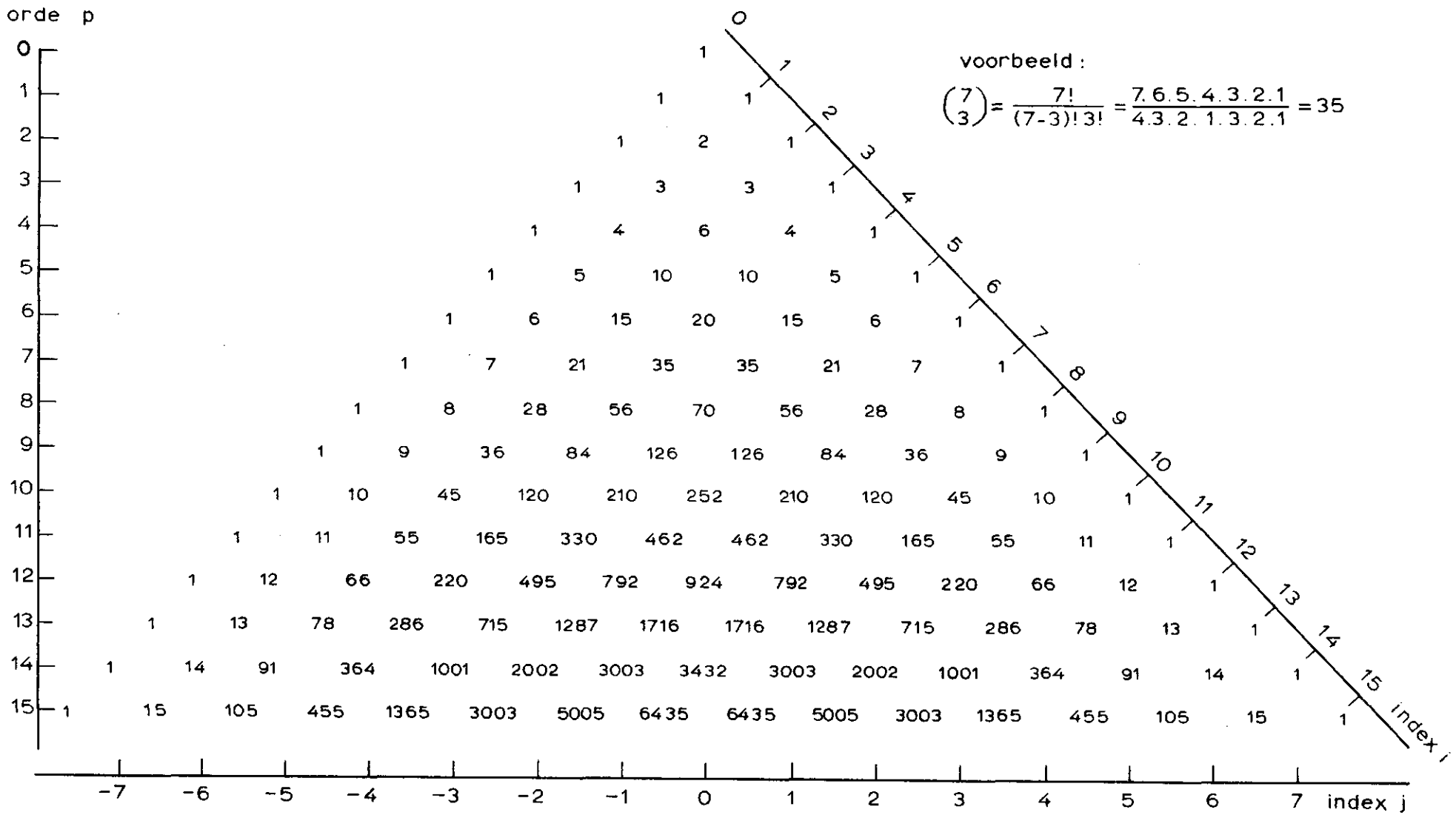
De cosinuswaarden worden gegeven in 7 decimalen. De afrondingsfout wordt gelijkgesteld aan e_t. Het aantal equidistante ordinaatwaarden bedraagt 4, zodat deze reeks kan gelden voor een waarnemingsfrequentie k=4. De tijd t is uitgedrukt in het centesimale stelsel.

t	z_t	Δz_t	$\Delta^2 z_t$	$\Delta^3 z_t$	$\Delta^4 z_t$	$\Delta^5 z_t$	$\Delta^6 z_t$
22,22	0,939 694 2		-1,879 388 4		3,758 776 8		-7,517 553 6
		-1,281 710 8		2,563 421 6		-5,126 843 2	
122,22	-0,342 016 6		0,684 033 2		-1,368 066 4		2,736 132 8
		-0,597 677 6		1,195 355 2		-2 390 710 4	
222,22	-0,939 694 2		1,879 388 4		-3,758 776 8		7,517 553 6
		1,281 710 8		-2,563 421 6		5,126 843 2	
322,22	0,342 016 6		-0,684 033 2		1,368 066 4		2,736 132 8
		0,597 677 6		-1,195 355 2		2,390 710 4	
22,22	0,939 694 2		-1,879 388 4		3,758 776 8		-7,517 553 6
		-1,281 710 8		2,563 421 6		-5,126 843 2	

De verhouding $\frac{z_{t+1}}{\Delta^2 z_t}$, $\frac{\Delta^2 z_{t+1}}{\Delta^3 z_t}$, ... voor bovenstaande differentietabel heeft de theoretische waarde $a_o = 0,5$ (k=4). In de tabel blijkt hieraan identiek voldaan te worden.

bijlage 1

DE DRIEHOEK VAN PASCAL MET BINOMIAAL COËFFICIËNTEN $\binom{p}{1}$



voorbeeld :

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!\,3!} = \frac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1.3.2.1} = 35$$

61c-76-5

INSTITUUT VOOR CULTUURTECHNIEK EN WATERHUISHOUDING WAGENINGEN

fig. 1

GRAFISCHE VOORSTELLING VAN $y_t = (-1)^t (C_1 t + C_2)$

$t = 1, 2, 3, \ldots$

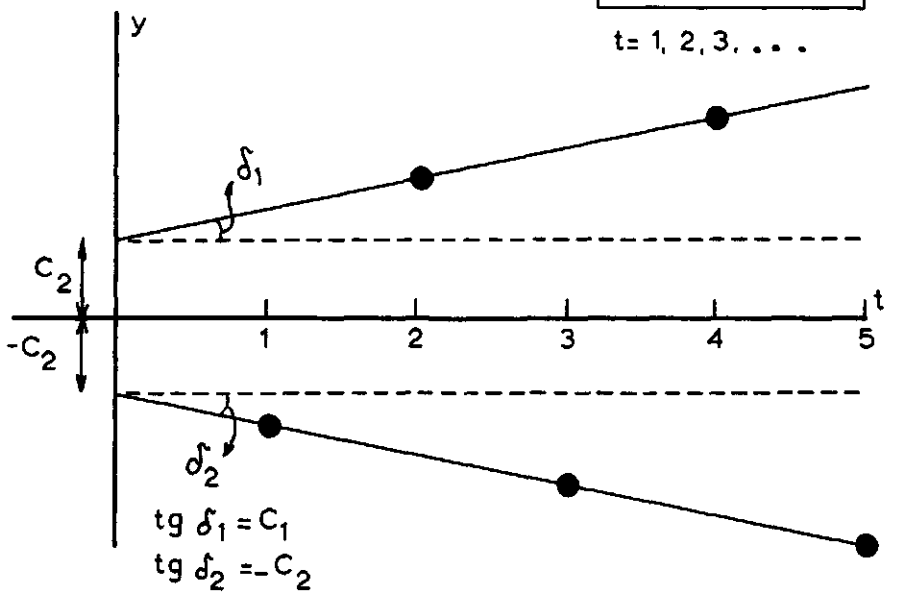
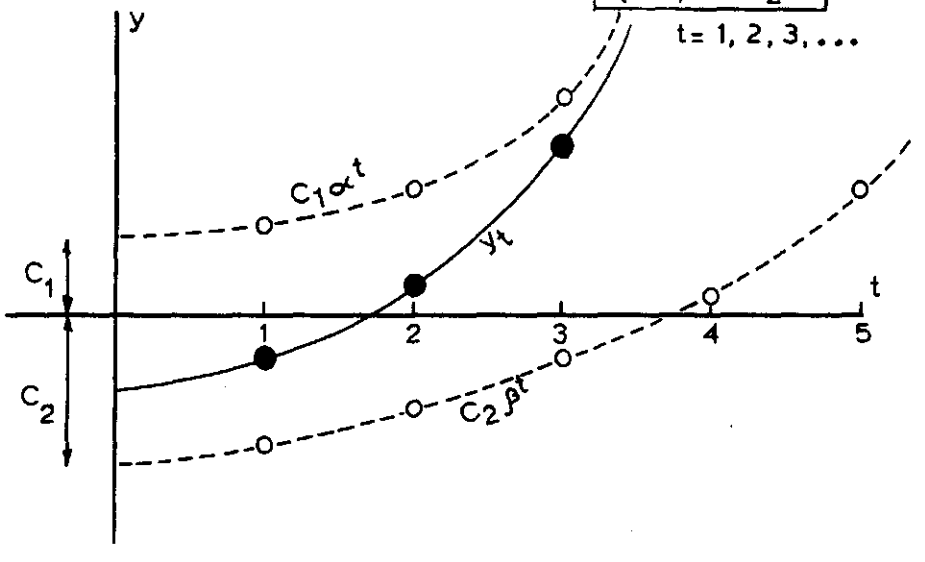


fig. 2

GRAFISCHE VOORSTELLING VAN $y_t = C_1 \alpha^t + C_2 \beta^t$

$t = 1, 2, 3, \ldots$



61c
76-1

fig. 3

GRAFISCHE VOORSTELLING VAN $y_t = C \cos(\theta t + \varphi)$ $t = 1, 2, 3, \ldots$

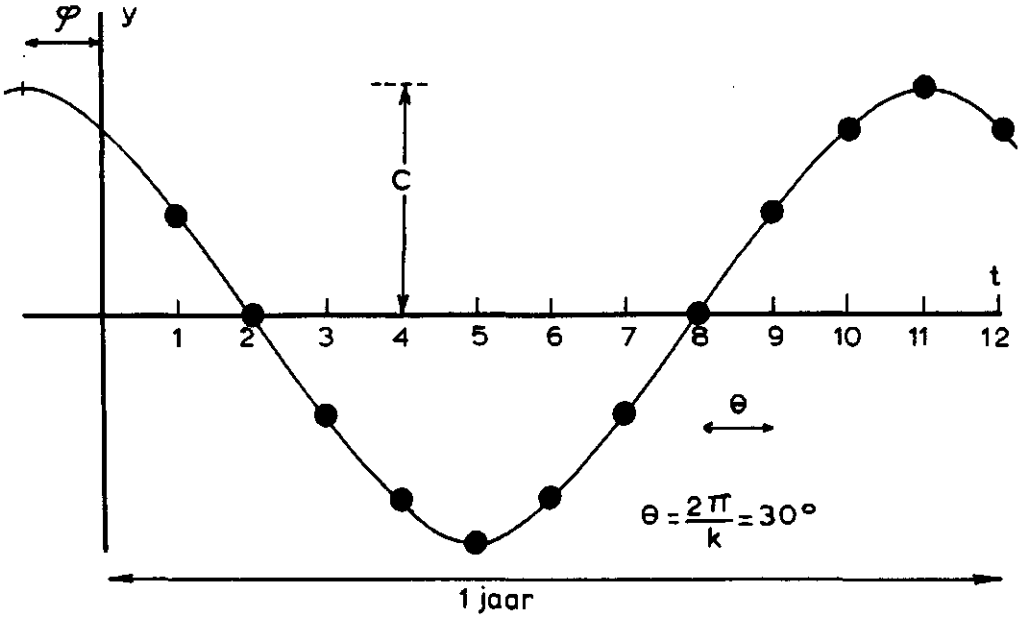


fig 4a

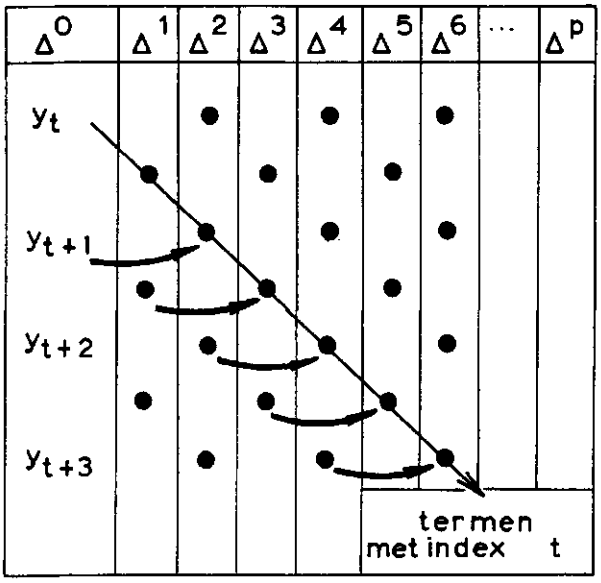
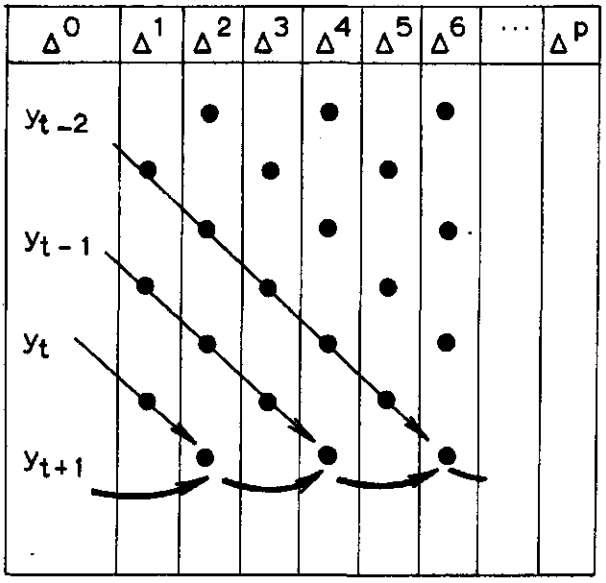
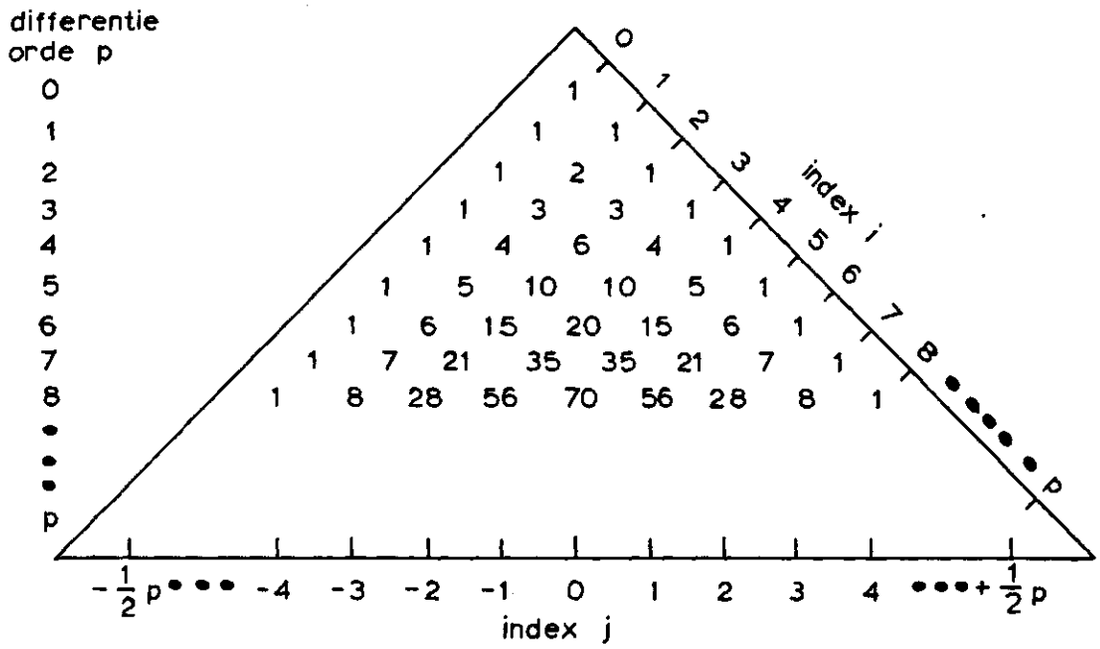


fig 4b



SCHEMATISCHE VOORSTELLING VAN DE BETREKKINGEN TUSSEN DE DIFFERENTIES MET OPKLIMMENDE ORDE $p = 1, 2, 3, \ldots$ ZIE TABEL 1

61c
76-2

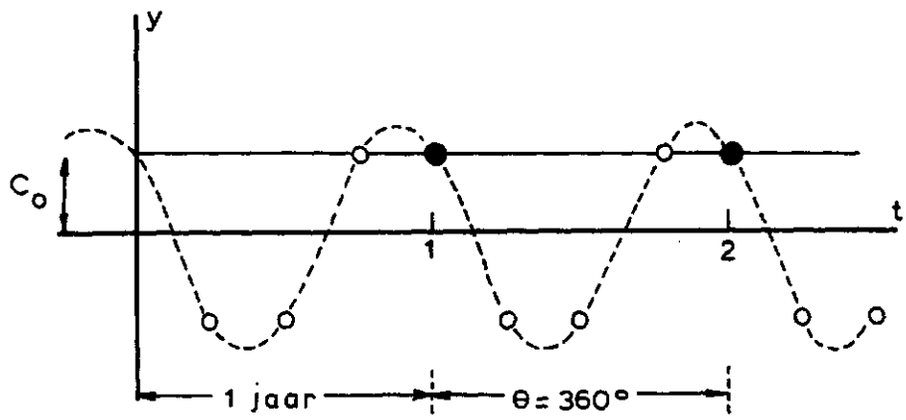


SCHEMA VOOR DE BETREKKINGEN TUSSEN DE ORDE p EN DE INDICES i en j

fig. 7

GRAFISCHE VOORSTELLING VAN $\boxed{y_t = C_o\,(t)}$

$t = 1, 2, 3, \ldots$



61c
76-4