

Nota nr 102 d.d. 13 nov. 1961

Formule voor de verdamping van een gewas

ir. W.C. Visser

De verdamping  $E_w$  stroomt als verzadigde stroming  $E_w = kF \cdot \Delta_1 \psi$  door de plant en als onverzadigde stroming  $E_w = kF_{gr} \cdot \Delta_2 \psi$  door de grond. Wij nemen aan, dat  $(kF)_{pl}$  niet van  $\psi$  afhankelijk is, terwijl  $(kF)_{gr}$  dit wel is. Stel dus  $(kF)_{pl} = \alpha$ . Verder is  $\Delta_1 \psi + \Delta_2 \psi = \psi_l - \psi_{gr}$  gelijk aan het potentiaalverschil tussen grond en lucht.

Men kan nu schrijven

$$\Delta_1 \psi + \Delta_2 \psi = \psi_l - \psi_{gr} = E_w \left( \frac{1}{(kF)_{gr}} + \frac{1}{\alpha} \right)$$

De opname van vocht door de plant beschouwen we als een putstroming naar de wortel gericht:

$$-Q = k \cdot 2\pi x \frac{d\psi}{dx} \quad \text{of} \quad \frac{-Q}{2\pi} \int_r^d \frac{dx}{x} = \int_{\psi_w}^{\bar{\psi}} k d\psi$$

Stel  $k = \frac{\Delta}{\psi^2 + a^2}$  (volgens Gardner met  $a^2 = \text{constante}$ )

Oplossing:

$$\frac{-Q}{2\pi} \ln \frac{d}{r} = \frac{\Delta}{a} \left( \text{lg} \frac{\bar{\psi}}{a} - \text{lg} \frac{\psi_w}{a} \right) \quad (1)$$

Als integratiegrenzen worden genomen:

Ondergrens:  $r$  de straal van de wortel met  $\psi_w$ , de spanning aan het grensvlak wortel - grond

Bovengrens:  $d$  de gemiddelde halve afstand tussen de individuele wortels onderling met  $\bar{\psi}$  de gemiddelde vochtspanning in de grond.

De  $\psi_w$  is moeilijk meetbaar en kan beter worden geëlimineerd.

1787068

Uit

$$\alpha(\psi_l - \psi_w) = E_w \quad \text{en voor } \psi_w = 0 \text{ hieruit volgende:}$$

$$\alpha(\psi_l - 0) = \int E_0 \quad \text{volgt nu voor } \psi_w:$$

$$\int E_0 - \alpha \psi_w = E_w \quad \text{of } \psi_w = \frac{\int E_0 - E_w}{\alpha}$$

De maximale verdampingscapaciteit  $\int E_0$  wordt dus gedefinieerd door  $\psi_w = 0$  dus een plant, die met zijn wortel in vrij water staat. In formule 1 wordt  $\psi_w$  nu geëlimineerd en de vochtstroom  $Q$  met  $E_w$  - de verdamping van het gewas die bij de spanning  $\psi_w$  aan het grensvlak van de wortel optreedt - gelijk gesteld.

$$-E_w = \frac{2\pi\Delta}{a \ln \frac{d}{r}} \left\{ \text{bgtg} \frac{\bar{\psi}}{a} - \text{bgtg} \frac{1}{\alpha a} (\int E_0 - E_w) \right\} \quad (2)$$

Pas de formule voor de tg van de dubbele hoek toe en noem  $\frac{2\pi\Delta}{a \ln \frac{d}{r}} = A$ .

$$\frac{E_w}{A} = \text{bgtg} \left( \frac{\frac{\int E_0 - E_w}{\alpha a} - \frac{\bar{\psi}}{a}}{1 + \frac{(\int E_0 - E_w) \bar{\psi}}{\alpha a^2}} \right)$$

of wel

$$\text{tg} \frac{E_w}{A} = \left( \frac{\frac{\int E_0 - E_w}{\alpha a} - \frac{\bar{\psi}}{a}}{1 + \frac{(\int E_0 - E_w) \bar{\psi}}{\alpha a^2}} \right)$$

Nu is A omstreeks 1000 maal zo groot als  $E_w$ . Wij kunnen de tangens dus vervangen door de boog. Verder maken we de breuken in teller en noemer weg. Zo ontstaat:

$$\frac{1}{aA} E_w = \frac{(\int E_0 - E_w) - \alpha \bar{\psi}}{\alpha a^2 + (\int E_0 - E_w) \bar{\psi}}$$

$$(\int E_0 - E_w) \left( \frac{\bar{\psi} E_w}{A a} - 1 \right) = - \left( \frac{\alpha a}{A} E_w + \alpha \bar{\psi} \right)$$

$$\frac{(\int E_0 - E_w)(A a - \bar{\psi} E_w)}{\left( \frac{A}{a} \bar{\psi} + E_w \right)} = \alpha a^2$$

Drie vormen zijn naast de laatste van belang. Voor een inzicht in de vorm van de curve:

$$(\int E_0 - E_w) \left( \frac{A a}{\bar{\psi}} - E_w \right) = \alpha a^2 \left( \frac{A}{a} + \frac{E_w}{\bar{\psi}} \right) \quad (3)$$

Waar bij hoge  $\psi$  de  $E_w/\psi$  verwaarloosbaar wordt, is dit een formule voor de beperkende factor in  $1/\bar{\psi}$ . De  $1/\bar{\psi}$  schaal heeft blijkbaar grote voordelen.

Stelt men  $aA = P$ ,  $\alpha aA = Q$  en  $\alpha a^2 = R$  dan is een voor de hand liggende rekenformule:

$$\frac{(\int E_o - E_w)(\frac{P}{\bar{\psi}} - E_w)}{(\frac{Q}{R} + \frac{E_w}{\bar{\psi}})} = R \quad \text{of} \quad \frac{(\int E_o - E_w)(P - \bar{\psi} E_w)}{(\frac{Q}{R} \bar{\psi} + E_w)} = R \quad (3)$$

of voor R verwaarloosbaar:

$$(\int E_o - E_w)(\frac{P}{\bar{\psi}} - E_w) = Q \quad (4)$$

Voor vereffening brengt men de formule op de vorm:

$$(\int E_o - E_w)P - \bar{\psi} Q - E_w R = (\int E_o - E_w)\bar{\psi} E_w \quad (5)$$

Deze formule is lineair in P, Q en R en laat zich vereffenen.

Een snelle berekening van de curve, wanneer P, Q en R bekend zijn, levert de formules:

$$\bar{\psi} = \frac{P(\int E_o - E_w) - R E_w}{E_w(\int E_o - E_w) + Q} \quad (6)$$

$$\frac{dE_w}{d\bar{\psi}} = - \frac{E_w(\int E_o - E_w) + Q}{\bar{\psi}(\int E_o - 2E_w) + P + R} \quad (7)$$

De formule voor  $E_w$  is minder prettig:

$$E_w = \frac{1}{2} \left( \frac{P+R}{\bar{\psi}} + \int E_o \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{P+R}{\bar{\psi}} + \int E_o \right)^2 - \left( P \frac{\int E_o}{\bar{\psi}} - Q \right)}$$

In deze formule voor  $\bar{\psi}$  zal  $RE_w$  vaak verwaarloosd mogen worden. De buiging in de curve wordt door Q beheerst, de helling van de lijn met coördinaten  $E_w$  en  $1/\bar{\psi}$  door P.

Enkele bijzondere punten laten zich berekenen:

$$E_w = \int E_o \quad \bar{\psi} = - \frac{R}{Q} \int E_o \quad \frac{dE_w}{d\bar{\psi}} = - \frac{Q}{\bar{\psi} \int E_o + P + R} \quad (8)$$

$$E_w = \frac{P}{P+R} \int E_o \quad \bar{\psi} = 0 \quad \frac{dE_w}{d\bar{\psi}} = - \frac{PR \int E_o^2}{(P+R)^3} - \frac{Q}{P+R} \quad (9)$$

$$E_w = \frac{1}{2} \int E_0 \quad \bar{\psi} = \frac{2 \int E_0 (P-R)}{\int E_0^2 + 4Q} \quad \frac{dE_w}{d\bar{\psi}} = - \frac{\int E_0^2 / 4 + Q}{P+Q} \quad (10)$$

$$E_w = 0 \quad \bar{\psi} = \frac{P}{Q} \int E_0 \quad \frac{dE_w}{d\bar{\psi}} = - \frac{Q}{\bar{\psi} \int E_0 + P+R} \quad (11)$$

Enkele waarden zijn gemakkelijk te schatten.

Het absolute verwelkingspunt vindt men bij:

$$\bar{\psi} = \frac{P}{Q} \int E_0 \quad \bar{\psi}_{\text{verwelking}} = 15000$$

Voor A vindt men

$$A = \frac{2\pi\Delta}{2.30a \log \frac{d}{r}} \quad \text{of} \quad \frac{A}{a} = \frac{2\pi}{2.30 \log \frac{d}{r}} \frac{\Delta}{a^2} \quad \text{of} \quad \frac{Q}{R} = \frac{2\pi}{2.30 \log \frac{d}{r}} k_{\psi=0}$$

$$k_{\psi=0} = 0.366 \log \frac{d}{r} \frac{Q}{R} \quad 0.366 \log \frac{d}{r} \text{ schatten op 1}$$

Gebruik als derde gegeven een schatting voor de  $\bar{\psi}$  bij halve verdamping, b.v.

$\psi = 3000$  of

$$3000 = \frac{2 \int E_0 (P-R)}{\int E_0^2 + 4Q} \quad \text{of} \quad Q = \frac{\int E_0 (P-R)}{2\bar{\psi}_{1/2}} - \frac{\int E_0^2}{4}$$

Een vierde schatting is die van de  $\bar{\psi}$  waarbij de stijgende tak in de  $E_w - \frac{1}{\bar{\psi}}$  grafiek de lijn voor  $E_w = \int E_0$  snijdt. Dit is ongeveer het punt van de veldcapaciteit. De waarde voor  $\bar{\psi}$  wordt gevonden als

$$\psi_{\text{veldcap.}} = \frac{P}{\int E_0}$$

Voorbeeld

Stel  $k_{\psi=0} = 500$

$\int E_0 = 0.5$

$Q = 500R$

$P = 250$

$\alpha = \frac{Q}{P} = 0.00002$

$\psi_{\text{verwelking}} = 25000$

$P \int E_0 = 25000Q$

$\frac{Q}{R} = 0.005$   
 $a = \sqrt{\frac{PR}{Q}} = 0.7$

$\psi_{\text{veldcap.}} = \frac{P}{\int E_0} = 500$

$P = 500 \int E_0$

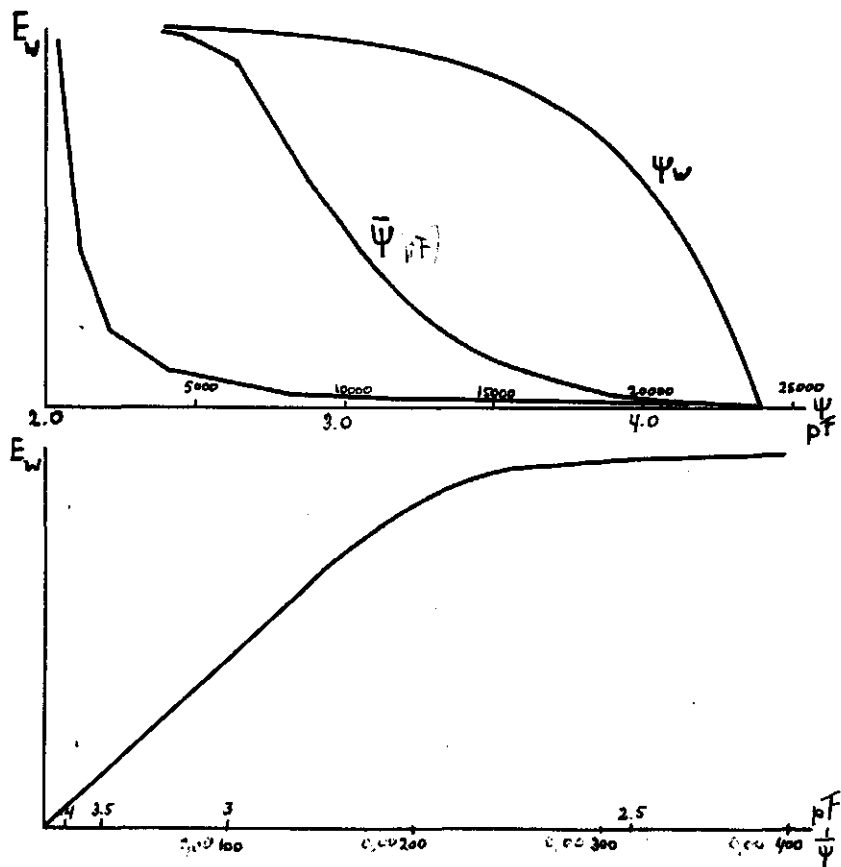
$R = 0.00001$

$A = \sqrt{\frac{PQ}{R}} = 11000$

Berekening met

$$\bar{\psi} = \frac{P(\int E_0 - E_w)}{E_w(\int E_0 - E_w) + Q}$$

$E_w$	$\int E_0 - E_w$	$E_w \int (E_0 - E_w)$	$+Q$	$\int (E_0 - E_w) / +Q$	$\bar{\Psi}$	$\Psi_w$	$\frac{C}{pF}$	$\frac{1}{\bar{\Psi}}$
0.00	0.50				25000	25000	4.40	0.00004
0.01	0.49	0.0049	0.0099	49.50	12400	24500	4.09	0.00008
0.02	0.48	0.0096	0.0146	33.00	8250	24000	3.92	0.00012
0.05	0.45	0.0225	0.0275	16.40	4100	22500	3.61	0.00024
0.10	0.40	0.0400	0.0450	8.90	2220	20000	3.35	0.00045
0.20	0.30	0.0600	0.0650	4.62	1160	15000	3.06	0.00086
0.30	0.20	0.0600	0.0650	3.08	770	10000	2.89	0.00130
0.40	0.10	0.0400	0.0450	2.22	555	5000	2.74	0.00180
0.45	0.05	0.0225	0.0275	1.82	455	2500	2.66	0.00220
0.48	0.02	0.0096	0.0146	1.37	317	1000	2.50	0.00315
0.49	0.01	0.0049	0.0099	1.01	252	500	2.40	0.00397



In het voorbeeld zijn waarden voor de verzadigde doorlatendheid  $k$ , de verwelkingsgrens  $\psi_{\text{verwelking}}$  en de veldcapaciteitsspanning  $\Psi_{\text{veldcap}}$  geschat en daaruit  $P$ ,  $Q$  en  $R$  zowel als  $\alpha$ ,  $a$  en  $A$  berekend. Daaruit lost men de  $\bar{\psi}$  op voor verschillende verdampingswaarden  $E_w$ . De figuur geeft het bekende beeld weer, waaruit blijkt, dat de verwelkingsgrens geen stromingskarakteristiek is. Het  $E_w = 0$  punt ligt bij een  $\psi$ , die enkele malen hoger is. Ter verduidelijking wordt ook nog  $\frac{1}{\psi}$  berekend, die in de tweede figuur een veel eenvoudiger maat blijkt te zijn. De berekende waarden van de spanning op het grensvlak van de wortel  $\psi_w$  laat zien bij welke spanning de plant in werkelijkheid groeit.