ɔR CULTUURTECHNIEK EN WATERHUISHOUDING
a nr. 160 d.d. 13 december 1962

De mathematische formulering van de waterhuishouding in een stroomgebied

W.C. Visser

Inleiding

De stroming van water in de grond en door de beek wordt beheerst door een aantal fundamentele vergelijkingen. Wanneer hier een voorbeeld wordt uitgewerkt laten wij de stroming door de capillaire zone even buiten beschouwing. Een studie van wat in dat gedeelte van de weg, die de regendruppel aflegt, gebeurt is reeds ver gevorderd, maar lijkt zo gecompliceerde resultaten te geven, dat opnemen van dit deel in de afvoervergelijking de grondprincipes zou versluieren. Bovendien lijkt het dat veelal deze stroming in de capillaire zone in het vraagstuk zal worden opgenomen als een omrekening, die de tijd-regensom curve omzet in de curve, die de aanvoer van water aan het phreatisch vlak in verband met de tijd geeft. Dit wordt dan een onderdeel van het voorperiode-onderzoek.

In de volgende beschouwing zullen de vijf grondleggende vergelijkingen worden besproken, die bij de meest eenvoudige opzet de afvoer beheersen.

De formule voor het terreinverval

De formules laten zich over het algemeen het eenvoudigste uitschrijven wanneer ze worden gegeven ten opzichte van de beekbodem. Men moet dan echter een formule voor de ligging van de beekbedding beneden het niveau van de beek bij de bron geven, waarop de overige formules betrokken worden.

Als algemene formule kan men gebruiken:

$$h = \alpha\, l^{n} \qquad (1)$$

h = ligging beneden het bronniveau
l = lengte langs de beek vanaf bron
n op 2 te stellen

De ligging van de grondwaterspiegel kan nu met $h + G$ (2a) worden weergegeven, het slootpeil met $h + S$ (2b)

De formule voor de grondwaterstroming

Voor de grondwaterstroming zijn vele formules ontworpen, welke alle het debiet berekenen uit de drukhoogte $(h+S) - (h+G) = S - G$. Hier zal de eenvoudigste formule als voorbeeld worden genomen en wel

$$s = \beta\,(S - G) \qquad (3)$$

$\beta = \dfrac{8kd}{l^2}$
s = afvoerintensiteit

welke formule door haar lineaire eigenschappen de beste kansen op een oplossing biedt.

De balansformule voor het grondwater

De regen valt met een intensiteit s_i gedurende een tijd δt en voert een hoeveelheid $s_i\delta t$ aan water aan. Ondergronds stroomt een deel van het water met een debiet s gedurende een tijd δt af, zodat een hoeveelheid $s\delta t$ verdwijnt. Het overblijvende water zal geborgen worden met een bergingspercentage μ_1 per eenheid grondwaterstijging. Bij een stijging δG wordt $\mu_1\delta G$ aan water geborgen. De balansformule is dus blijkbaar:

$$\mu_1 \delta G = (s_i - s)\delta t \qquad (4)$$

De formule voor de beekafvoer

De formule voor de beekafvoer moet onderscheiden worden in een transportformule, die geldt wanneer door elke doorsnede van het beekpand evenveel water loopt, en daarnaast een formule voor het geval dat over elke lengte δl zijdelings water wordt opgenomen. Dit zou men de drainageformule kunnen noemen. In dit geval is de transportformule van belang, waarvoor men een type van die van Manning zal kiezen. In deze formule vervangt men echter de natte radius door de hoogte van de waterspiegel boven de beekbodem. Hierdoor wordt de formule een bijzonder geval, maar voor het uit te werken voorbeeld wat eenvoudiger.

Als voorbeeld kiezen wij:

$$\frac{\delta(h+S)}{\delta l} = \gamma \frac{Q^m}{S^p} \qquad (5)$$

Q = transport door beek
γ = afvoerfactor
m kieze men 2
p kieze men 5
$\frac{\delta S}{\delta l}$ = verval op afstand l vanaf bron

De balansformule voor de beek

Op de beek stroomt zijdelings de afvoer uit de akker s over een tijd δt en een lengte δl af. Deze hoeveelheid is $s\delta t\delta l$. Een deel van dit water stroomt af als toename δQ van de afvoer Q. In een tijd δt stroomt extra af $\delta Q\delta t$. Het andere deel wordt in het beekprofiel geborgen met een bergingscoefficient μ_2 en een stijging δS. Over een lengte δl neemt de berging $\mu_2\delta S\delta l$ aan water op. Als vergelijking voor de balansformule voor de beek geldt dus

$$s\delta l\delta t = \delta Q\delta t + \mu_2 \delta S\delta l \qquad (6)$$

Samenvoeging en bewerking van de formules

Van de vijf formules:

$$h = \alpha l^2 \qquad (1)$$

$$s = \beta(S - G) \qquad (3)$$

$$\frac{\delta G}{\delta t} = \frac{s_i}{\mu_1} - \frac{s}{\mu_1} \qquad (4)$$

$$\frac{\delta(h+S)}{\delta l} = \gamma \frac{Q^2}{S^5} \qquad (5)$$

$$\frac{\delta S}{\delta t} = \frac{s}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_2}\frac{\delta Q}{\delta l} \qquad (6)$$

moet nu één formule worden gemaakt. Verder zal men een aantal grootheden willen elimineren, waarvoor in aanmerking komen de grootheden h, s, G en Q. Er blijven dan als variabelen over S, l, t en s_i, alsmede de hydrologische constanten μ_1, μ_2, α, β en γ.

Het samenstellen van de formules vindt plaats door formule 3 in 4 en 6 te substitueren.

$$\frac{\delta G}{\delta t} = \frac{s_i}{\mu_1} - \frac{\beta S}{\mu_1} + \frac{\beta G}{\mu_1} \tag{7}$$

$$\frac{\delta S}{\delta t} = \frac{\beta S}{\mu_2} - \frac{\beta G}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_2}\frac{\delta Q}{\delta l} \tag{8}$$

Door formule 8 nog eens naar t te differentiëren, ontstaat in deze formule een term $\frac{\delta G}{\delta t}$, die vervangen kan worden door formule 7. Hiermede heeft men de twee formules samengesteld tot een enkele formule voor de stroming in de grond, zowel als in de beek.

$$\frac{\delta^2 S}{\delta t^2} = \frac{\beta}{\mu_2}\frac{\delta S}{\delta t} - \frac{\beta}{\mu_2}\frac{\delta G}{\delta t} - \frac{1}{\mu_2}\frac{\delta^2 Q}{\delta l\,\delta t} \tag{9}$$

Substitueer formule 7:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta t^2} = \frac{\beta}{\mu_2}\frac{\delta S}{\delta t} - \frac{\beta s_i}{\mu_1\mu_2} + \left\{\frac{\beta^2}{\mu_1\mu_2}S - \frac{\beta^2}{\mu_1\mu_2}G\right\} - \frac{1}{\mu_2}\frac{\delta^2 Q}{\delta l\,\delta t} \tag{10}$$

Nu elimineert men G in formule 10 met behulp van formule 8.

Uit 8 volgt:

$$\left(\frac{\beta^2}{\mu_1\mu_2}G - \frac{\beta^2}{\mu_1\mu_2}S\right) = -\frac{\beta}{\mu_1}\frac{1}{\mu_2}\frac{\delta Q}{\delta l} - \frac{\beta}{\mu_1}\frac{\delta S}{\delta t} \tag{11}$$

Het blijkt dat ook de term met S in formule 10 wegvalt.

Uit de formules 10 en 11 volgt de eenvoudigste vergelijking, die het proces beschrijft en wel:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta t^2} - \beta\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1\mu_2}\right)\frac{\delta S}{\delta t} + \frac{\beta s_i}{\mu_1\mu_2} = \frac{\beta}{\mu_1}\frac{1}{\mu_2}\frac{\delta Q}{\delta l} - \frac{1}{\mu_2}\frac{\delta^2 Q}{\delta l\,\delta t} \tag{12}$$

Zou men het deel na het gelijkteken op grond van metingen als functie van t en s_i kunnen schrijven, dan zou dit de oplossing in sterke mate vereenvoudigen. Men kan echter verder gaan en de Q elimineren. Voor de hiervoor benodigde verdere bewerkingen zie men blz. 5.

De metingen van de waterdiepte S als zelfregistrerende meting levert behalve S na grafisch differentiëren ook $\frac{\delta S}{\delta t}$ en $\frac{\delta^2 S}{\delta t^2}$. De waarde van $\frac{\delta S}{\delta l}$ - of het verhang - is echter uit deze metingen niet af te leiden. Hiertoe dienen vervalmeters ingeschakeld te worden, die als zelfregistrerende meter in staat stelt niet alleen $\frac{\delta S}{\delta l}$ maar na differentiëren ook $\frac{\delta^2 S}{\delta l \delta t}$ te geven. Van belang is verder om grootheden als $\frac{\delta^2 S}{\delta l^2}$ direct te meten. Zou dit mogelijk zijn, dan volgt uit een zelfregistrerende optekening door grafische differentiatie direct $\frac{\delta^3 S}{\delta l^2 \delta t}$

Uit 5 volgt:

$$\frac{\delta^2 h}{\delta l^2} + \frac{\delta^2 S}{\delta l^2} = \frac{2\gamma Q}{S^5}\frac{\delta Q}{\delta l} - \frac{5\gamma Q^2}{S^6}\frac{\delta S}{\delta l} \tag{13}$$

Uit 1 volgt:

$$\frac{\delta h}{\delta l} = 2\alpha l \tag{14a} \qquad \frac{\delta^2 h}{\delta l^2} = 2\alpha \tag{14b}$$

Uit 13 en 14b volgt:

$$\frac{\delta Q}{\delta l} = \frac{S^5}{2\gamma Q}\frac{\delta^2 S}{\delta l^2} + \frac{5}{2}\frac{Q}{S}\frac{\delta S}{\delta l} + \frac{\alpha S^5}{\gamma Q} \tag{15}$$

Uit 15 volgt:

$$\frac{\delta^2 Q}{\delta l \delta t} = \frac{5 S^4}{2\gamma Q}\frac{\delta^2 S}{\delta l^2}\frac{\delta S}{\delta t} - \frac{S^5}{2\gamma Q^2}\frac{\delta^2 S}{\delta l^2}\frac{\delta Q}{\delta t} + \frac{S^5}{2\gamma Q}\frac{\delta^3 S}{\delta l^2 \delta t}$$

$$+ \frac{5}{2S}\frac{\delta S}{\delta t}\frac{\delta Q}{\delta t} - \frac{5Q}{2S^2}\frac{\delta S}{\delta l}\frac{\delta S}{\delta t} + \frac{5Q}{2S}\frac{\delta^2 S}{\delta l \delta t}$$

$$+ \frac{5\alpha}{\gamma}\frac{S^4}{Q}\frac{\delta S}{\delta t} - \frac{\alpha}{\gamma}\frac{S^5}{Q^2}\frac{\delta Q}{\delta t} \tag{16}$$

Uit formule 5 volgt: $\frac{\delta^2 (h+S)}{\delta l \delta t} = \frac{\delta^2 S}{\delta l \delta t}$ daar de maaiveldshoogte h niet van t afhangt.

$$\frac{\delta^2 S}{\delta l \delta t} = \frac{2\gamma Q}{S^5}\frac{\delta Q}{\delta t} - \frac{5\gamma Q^2}{S^6}\frac{\delta S}{\delta t}$$

ofwel

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \frac{S^5}{2\gamma Q}\frac{\delta^2 S}{\delta l \delta t} + \frac{5}{2}\frac{Q}{S}\frac{\delta S}{\delta t} \tag{17}$$

Verder volgt uit 5:

$$Q^2 = \left\{\frac{\delta S}{\delta l} + 2\alpha l\right\}\frac{S^5}{\gamma} \tag{18} \qquad Q = \sqrt{\left\{\frac{\delta S}{\delta l} + 2\alpha l\right\}\frac{S^5}{\gamma}} \tag{19}$$

Samenvattend volgt uit 16 en 17:

$$\frac{\delta^2 Q}{\delta l \delta t} = \left\{\frac{5S^4}{2\gamma Q}\frac{\delta^2 S}{\delta l^2} - \frac{5Q}{2S^2}\frac{\delta S}{\delta l} + \frac{5\alpha S^4}{\gamma Q}\right\}\frac{\delta S}{\delta t}$$

$$- \left\{\frac{S^5}{2\gamma Q^2}\frac{\delta^2 S}{\delta l^2} - \frac{5}{2S}\frac{\delta S}{\delta t} + \frac{\alpha S^5}{\gamma Q^2}\right\}\left\{\frac{S^5}{2\gamma Q}\frac{\delta^2 S}{\delta l \delta t} + \frac{5Q}{2S}\frac{\delta S}{\delta t}\right\}$$

$$+ \frac{S^5}{2\gamma Q}\frac{\delta^3 S}{\delta l^2 \delta t} + \frac{5Q}{2S}\frac{\delta^2 S}{\delta l \delta t} \tag{20}$$

Eveneens volgt uit 12 en 15:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta t^2} - \beta\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1\mu_2}\right)\frac{\delta S}{\delta t} + \frac{\beta S_i}{\mu_1\mu_2} = \frac{\beta S^5}{2\mu_1\mu_2\delta Q}\frac{\delta^2 S}{\delta l^2} + \frac{5\beta}{2\mu_1\mu_2}\frac{Q}{S}\frac{\delta S}{\delta l} + \frac{\alpha\beta}{\delta\mu_1\mu_2}\frac{S^5}{Q} - \frac{1}{\mu_2}\frac{\delta^2 Q}{\delta l\delta t} \qquad (21)$$

Door 18, 19, 20 en 21 te combineren heeft men een vergelijking afgeleid, die alleen S, t en l bevat en wat dat betreft oplosbaar zou zijn. De uiteindelijk verkregen formule ziet er niet naar uit oplosbaar te zijn. Door de juiste metingen te verrichten, kan men een indruk krijgen van de termen, die in de definitieve oplossing wel verwaarloosd kunnen worden.

Wageningen, december 1962.