INSTITUUT VOOR CULTUURTECHNIEK EN WATERHUISHOUDING
NOTA no.206 d.d. 12 juli 1963

Het overschrijdings-diagram van neerslag- en afvoerverdelingen

Ir. Ph.Th. Stol

I N H O U D

I. INLEIDING

Een gebruikelijke en overzichtelijke methode voor het onderling vergelijken van twee series waarnemingsuitkomsten is het "tegen elkaar uitzetten" van de meetresultaten. Bekende voorbeelden van deze wijze van werken zijn: het uitzetten van waterstandsgegevens uit twee peilbuizen, het uitzetten van peilhoogten in waterleidingen van twee meetpunten, het uitzetten van neerslaghoeveelheden van twee regenstations enz.

Door het toepassen van deze werkwijze worden de bekende stippendiagrammen verkregen, die het midden kunnen houden tussen een "stippenwolk" en een "nauw verband".

Voor een verdergaande analyse van het verkregen resultaat, anders dan een kwalitatieve illustratie, zal moeten worden nagegaan wat de mathematische grondslag van de bovenbeschreven werkwijze is. Deze zal eerst in het kort worden besproken.

II. HET FLUCTUATIEDIAGRAM

Het kenmerkende van het "uitzetten tegen elkaar" van overeenkomstige grootheden is het feit dat steeds gegevens worden uitgezet, die in een bepaald opzicht iets gemeenschappelijks hebben, zoals in het voorbeeld van de waterstanden: het tijdstip van optreden. In het stippen-(fluctuatie)-diagram komt dit tijdstip niet meer op de assen voor, doch kan bij elke stip worden bijgeschreven en is dus in deze figuur een parameter, die uit de betrekking tussen de op de assen uitgezette variabelen is geëlimineerd (figuur 1).

Stel bijvoorbeeld dat de waterstand p in buis 1 een functie f_1 is van de tijd t, dan geldt:

$$p_1 = f_1(t) \tag{2.1}$$

Een tweede buis kan op een andere wijze op de seizoenbeweging reageren dan de eerste zodat een andere functie met de tijd wordt gevonden, bijvoorbeeld:

$$p_2 = f_2(t) \tag{2.2}$$

Wil men nu nagaan of in het algemeen $p_1 = p_2$, dus of de waterstanden op eenzelfde tijdstip aan elkaar gelijk zijn, dan worden <u>mathematisch</u> de volgende handelingen verricht (figuur 1).

a. de inverse functie wordt genomen, zodat t expliciet is gemaakt:

$$t = f_1^{-1}(p_1) \tag{2.3}$$

$$t = f_2^{-1}(p_2) \tag{2.4}$$

b. voor gelijke tijdstippen t worden (2.3) en (2.4) tegen elkaar uitgezet zodat de betrekking wordt verkregen:

$$f_2^{-1}(p_2) = f_1^{-1}(p_1)$$

en dus met bijvoorbeeld p_2 op de y-as

$$p_2 = f_2\left\{f_1^{-1}(p_1)\right\} \tag{2.5}$$

c. in het stippendiagram wordt de relatie tussen p_2 en p_1 beoordeeld en in het algemeen zal een functie g worden gevonden, in symbolen

$$p_2 = g(p_1) \tag{2.6}$$

zodat in verband met (2.5) symbolisch geldt

$$f_2 f_1^{-1} \equiv g$$

Het meest eenvoudige verband dat voor (2.6) kan worden gevonden is

$$p_2 = p_1$$

met andere woorden beide waterstandsbuizen vertonen op hetzelfde tijdstip steeds dezelfde waterstand, zodat in verband met (2.5) geldt

$$p_2 = p_1 = f_1\left\{f_1^{-1}(p_1)\right\} = f_2\left\{f_1^{-1}(p_1)\right\}$$

waaruit de conclusie volgt dat

$$f_1 \equiv f_2 \tag{2.7}$$

en, teruggaand naar (2.1) en (2.2)

$$p_1 = f(t)$$

$$p_2 = f(t)$$

In het algemeen zal de functie g in (2.6) niet deze eenvoudige vorm aannemen en de relatie tussen f_1 en f_2 zal dan ook minder eenvoudig zijn dan die in (2.7). Bovendien hangt het van f_1 en f_2 af welk functioneel onderscheid tussen beide bestaat voor een bepaalde vorm van g.

Met $p_2 = ap_1$ kan nog algemeen worden afgeleid dat

$$p_2 = ap_1 = af_1\left\{f_1^{-1}(p_1)\right\} = f_2\left\{f_1^{-1}(p_1)\right\} \tag{2.8}$$

zodat

$$f_2 \equiv af_1$$

Meer gecompliceerd is $p_2 = g(p_1)$ reeds als algemene lineaire betrekking dus wanneer het fluctuatiediagram een rechte voorstelt die niet door de oorsprong gaat, dan namelijk is

$$p_2 = ap_1 + b$$

Hieruit is het al niet meer mogelijk een algemene relatie tussen f_2 en f_1 af te leiden, aangezien a en b beide tot de operatoren van de functie *g* behoren en het afzonderen van het argument (p_1) volgens (2.8) niet meer algemeen mogelijk is.

De gevallen waarin van een stippenbundel of zelfs een stippenzwerm sprake is zijn terug te brengen tot het feit dat minstens één van de inverse betrekkingen (2.3) of (2.4) meerwaardig is. Deze meerwaardigheid kan optreden door:

a. meerwaardigheid van (2.3) of (2.4) zelf, welke ontstaat doordat bijvoorbeeld (2.1) of (2.2) cyclische functies zijn (figuur 1).

b. het aanwezig zijn van een grootheid die mede het verband tussen de variabelen vastlegt. Deze grootheid kan dan nog functioneel of toevallig veroorzaken dat bij een bepaalde y meer waarden van t kunnen optreden (figuur 2).

Het eerste geval van figuur 2 kan nog als volgt worden behandeld. Stel dat y afhankelijk is van t en h, zodat

$$y_1 = f_1(t,h)$$

$$y_2 = f_2(t,h) \tag{2.8}$$

De functie die t in y_1 uitdrukt is slechts bij constante h de inverse van f zodat moet worden geschreven, bijvoorbeeld

$$t = \phi_1(y_1,h)$$

$$t = \phi_2(y_2,h)$$

Na eliminatie van t door gelijkstelling volgt:

$$\phi_2(y_2,h) = \phi_1(y_1,h)$$

en in verband met (2.8)

$$y_2 = f_2\left\{\phi_1(y_1,h),h\right\}$$

zodat bij constante y_1 de functionele betrekking wordt

$$y_2 = \phi(h)$$

waaruit dus volgt dat bij een constante waarde van y_1, afhankelijk van de waarden van h, verschillende waarden voor y_2 worden gevonden.

Bij de gebruikelijke, vaak kwalitatieve wijze van werken met fluctuatiediagrammen kan men het wel zonder de boven uiteengezette theorie stellen. Bij gebruik van de methode van het tegen elkaar uitzetten van twee series gegevens in meer gecompliceerde gevallen is het wel noodzakelijk een analyse van de eigenschappen van het gevonden verband uit te voeren.

In I.C.W.-Nota no.165 over het gebruik van frequentieverdelingen bij het afvoeronderzoek is een voorbeeld gegeven van het vergelijken van twee frequentieverdelingen (namelijk die van de afvoer en die van de neerslag) door deze tegen elkaar uit te zetten.

De wiskundige grondslagen van deze bewerking zullen thans nader worden uiteengezet.

III. HET DIAGRAM VAN TWEE FREQUENTIEVERDELINGEN

Stel dat de cumulatieve neerslagverdeling wordt weergegeven door de functie (zie Nota no.186 pagina 2)

$$P(\underline{N} < N) = \int_{-\infty}^{N} f(u)du = \int_{0}^{N} f(u)du \qquad (3.1)$$

In woorden: de kans dat de (stochastische) grootheid $\underline{N}$ een waarde aanneemt kleiner dan N is de integraal van $-\infty$ tot N van de kansdichtheidsfunctie f(N). De laatste gelijkheid is verantwoord door het feit dat de neerslaghoeveelheid geen negatieve waarde kan aannemen en dus

$$\int_{-\infty}^{0} f(u)du = 0$$

Stel vervolgens dat de cumulatieve afvoerverdeling op analoge wijze wordt weergegeven door

$$P(\underline{A} < A) = \int_{-\infty}^{A} g(u)du = \int_{0}^{A} g(u)du \qquad (3.2)$$

Vervolgens wordt de kans P geëlimineerd door gelijkstelling van

$$P(\underline{N} < N) = P(\underline{A} < A) \qquad (3.3)$$

zodat ook in verband met (3.1) en (3.2)

$$\int_{0}^{N} f(u)du = \int_{0}^{A} g(u)du \qquad (3.4)$$

Hierin is dus f(u) de kansdichtheidsfunctie voor de neerslag en g(u) de kansdichtheidsfunctie voor de afvoer.

Het eliminatieresultaat, dat overschr.-diagram zou kunnen worden genoemd, levert een betrekking op tussen de variabele grootheden A en N (figuur 3). Deze betrekking zal thans nader worden bestudeerd.

Allereerst moet nog worden opgemerkt dat de functies (3.1) en (3.2) monotoon stijgend zijn, zodat steeds geldt

$$\text{indien } N_2 > N_1 \text{ dan } P_2(N) > P_1(N)$$
$$\text{indien } A_2 > A_1 \text{ dan } P_2(A) > P_1(A)$$

Door eliminatie van gelijke waarden van P ontstaat weer een monotone, en tevens weer eenwaardige functie waarvoor

$$\text{indien } N_2 > N_1 \text{ dan } \phi_2(N) > \phi_1(N) \qquad \text{(figuur 3)}$$

Dit houdt in dat het overschr.-diagram geen stippenzwerm of stippenbundel te zien geeft doch een "redelijk strakke curve" welke men gaarne voor nadere analyse zou willen gebruiken.

IV. ANALYSE VAN HET OVERSCHRIJDINGS-DIAGRAM

Onderscheid zal worden gemaakt tussen de volgende grootheden

A, N als aanduiding van de afvoer, respectievelijk neerslag, indien deze functioneel ten opzichte van elkaar worden beschouwd en gedacht wordt aan een chronologische rangschikking van meet-uitkomsten.

$\underline{A}$, $\underline{N}$ als aanduiding voor de afvoer respectievelijk neerslag, speciaal wanneer de kansverdeling mede in beschouwing wordt genomen en gedacht wordt aan een rangschikking van meetuitkomsten naar grootte.

A_g, N_g als aanduiding voor de bovengrenzen waartoe geïntegreerd moet worden voor het berekenen van de onderschrijdingskans, bijvoorbeeld $P(\underline{A} < A_g) = p\%$

Worden nu in een figuur tegen elkaar uitgezet die waarden van A_g en N_g waarmee aan (3.4) voldaan wordt, dan ontstaat een betrekking tussen de <u>bovengrenzen</u> van de kansintegralen. Met andere woorden bij een bepaalde waarde van N_g wordt afgelezen welke waarde van A_g moet worden toegepast voor het verkrijgen van gelijke onderschrijdingsfrequenties (figuur 3). De relatie die wordt gevonden is dan ook deze dat steeds wordt aangegeven dat bij een bepaalde neerslag<u>hoeveelheid N_g of minder</u> een afvoer zal optreden ter grootte <u>A_g of minder</u>.

Stel vervolgens dat er wordt gevonden over het gehele traject

$$A_g = bN_g + a \qquad \text{(voor de bovengrenzen)}$$

dan kunnen de volgende herleidingen plaatsvinden

$$\int_0^A g(u)du = \int_0^{bN+a} g(u)du$$

differentiatie naar de variabele bovengrens geeft [HÜTTE, pagina 127].

$$g(\underline{A}) = g(b\underline{N} + a)$$

zodat de grootheden A en $bN + a$ dezelfde kansdichtheidsfunctie hebben en dus isomoor zijn of, in formule

$$\underline{A} \overset{\infty}{=} b\underline{N} + a \qquad (4.1)$$

De uitkomst (4.1) houdt niet in dat een functionele relatie van hetzelfde type aanwezig zal zijn dus in het algemeen

$$A \neq bN + a \qquad (4.2)$$

o - o - o - o - o

De betrekking tussen de bovengrenzen mag niet voor een betrekking tussen de oorspronkelijke variabelen in de plaats worden gesteld. Wanneer namelijk van twee grootheden de kansverdeling identiek is, behoeven deze twee grootheden zelf nog niet functioneel te zijn gebonden. Een bekend, wat simpel voorbeeld is dat van het gooien met twee dobbelstenen. De kansverdelingen voor steen D_1 en voor steen D_2 zijn identiek, toch zullen in het algemeen dezelfde uitkomsten niet gelijktijdig optreden, zodat $D_1 \neq D_2$. Ook het verschijnsel van na-ijling - bijvoorbeeld de 3e worp van D_2 = 1e worp van D_1, wat overigens met eerlijk spel niet reäliseerbaar is - valt in de frequentieverdeling niet te onderscheiden van de andere gevallen, zodat indien voor de <u>bovengrenzen</u> geldt

$$D_1 = D_2 \qquad \text{(bovengrenzen)}$$

onder andere de volgende betrekkingen tussen de <u>uitkomsten</u> nog mogelijk zijn

$$\left.\begin{array}{lcl} D_2 & \neq & D_1 \\ (D_2)_{3e} & = & (D_1)_{1e} \\ D_2 & = & D_1 \end{array}\right\} \text{ voor elk paar uitkomsten}$$

Het bovenstaande houdt verband met het feit dat in de frequentiebeschouwingen de werkelijke volgorde waarin de waarnemingen tot stand zijn gekomen wordt verstoord en de regelmaat van de naar grootte gerangschikte gegevens voor in de plaats treedt.

o - o - o - o - o

De betrekking tussen de kansverdelingen van $\underline{A}$ en $\underline{N}$ kan door de volgende afleiding worden gevonden:

Uitgaande van de eliminatie van P in (3.4) ontstaat de gelijkheid

$$\int_0^N f(u)du = \int_a^{bN+a} g(u)du$$

Differentiatie naar de parameter N [HÜTTE, pagina 127] geeft tot uitkomst

$$f(\underline{N}) = b\, g(b\underline{N} + a)$$

en dus, na verwisseling van beide leden en enige herleiding

$$g(\underline{A}) = \frac{1}{b} f(\underline{N}) \qquad (4.3)$$

Algemeen kan nog worden afgeleid dat met een willekeurige betrekking tussen A_g en N_g bijvoorbeeld

$$A_g = \phi\,(N_g)$$

zal gelden

$$g(\underline{A}) = \frac{f(\underline{N})}{\phi'(N_g)} \qquad (4.4)$$

De uitkomsten (4.3) en (4.4) zijn dus verkregen door alleen gebruik te maken van de relatie tussen de bovengrenzen, zodat nog steeds kan gelden voor het functionele verband

$$A \neq bN + a \qquad (4.5)$$

Het ligt echter voor de hand aan te nemen dat de grootheden afvoer en neerslag niet onafhankelijk van elkaar zijn, zodat het eveneens voor de hand liggend is elke relatie welke in het overschr.-diagram wordt gesuggereerd op zijn functionele betekenis te onderzoeken.

Nu wordt dus gesteld dat behalve

$$A_g = bN_g + a$$

ook geldt de functionele betrekking tussen de op chronologische wijze gerangschikte gegevens

$$A = bN + a$$

Voor elke waarde van N kan de bijbehorende waarde van A worden berekend, zodat A en bN + a dezelfde kansverdeling hebben en dus

$$\underline{A} \cong b\underline{N} + a$$

Er geldt nu voor het verband tussen de kansverdelingen [FRASER, pagina 184]

$$P(\underline{A} < A_g) = P(b\underline{N} + a < A_g)$$

$$= P(\underline{N} < (\frac{A - a}{b})_g)$$

zodat

$$\int_0^A g(u)du = \int_0^{\frac{A-a}{b}} f(u)du$$

waarna door differentiatie naar de parameter A volgt [HÜTTE, pagina 127]

$$g(\underline{A}) = \frac{1}{b} f(\frac{\underline{A} - a}{b}) = \frac{1}{b} f(\underline{N})$$

Hiermede is dezelfde uitkomst van (4.3) verkregen doch nu door gebruik te maken van het feit dat A en N functioneel zijn gebonden.

Inderdaad is dus aan de hand van de relatie in het overschr.-diagram niet na te gaan welk van de gevallen van toepassing is, te weten:

$$A_g = bN_g + a$$

met

$$A \neq bN + a$$

of:

$$A_g = bN_g + a$$

met

$$A = bN + a$$

In het eerste geval kunnen nog na-ijlingen een rol spelen, zodat indien $A \neq bN + a$ wèl zou kunnen zijn voldaan aan bijvoorbeeld

$$A = bN + bV_1 + bV_2 + \dots + a \qquad (4.6)$$

zoals uiteengezet in Nota no.166.

Het bovenstaande moge dienen om toe te lichten dat indien in het overschr.-diagram een duidelijke relatie wordt gevonden, het bewijs dat deze inderdaad aanwezig is, moet worden verricht aan de hand van de oorspronkelijke reeksen waarnemingsuitkomsten; dit te meer waar nog een aantal alternatieven mogelijk zijn.

Van belang is verder ook het inzicht dat tijdverschuivingen, zoals na-ijling, geëlimineerd worden. De relatie in het overschr.-diagram is dan duidelijker dan uit de functie $A = bN + a$ alleen wordt gevonden, waar deze verschuiving niet in rekening is gebracht. Alternatieve formules zouden dan kunnen worden geprobeerd, zoals die van het type (4.6) [Nota no.166], teneinde de spreiding in de betrekking tussen A en N te verlagen.

V. DE BERGING IN HET OVERSCHR.-DIAGRAM VAN AFVOER EN NEERSLAG

In het overschr.-diagram tussen neerslag- en afvoergegevens doet zich nog de volgende complicatie voor.

De waarnemingsreeksen van zowel afvoer als neerslag bevatten geen negatieve waarden (zie (3.1) en (3.2). Dit houdt in dat de waarden die dicht bij nul gelegen zijn een geringe onderschrijdingskans bezitten terwijl voor beide reeksen geldt

$$P(\underline{A} < 0) = P(\underline{N} < 0) = 0 \qquad (5.1)$$

zodat in het overschr.-diagram de relatie tussen de bovengrenzen zal eindigen in het punt waarvoor

$$A_g = N_g = 0$$

(figuur 4 tot en met 7).

Hier doet zich dus klaarblijkelijk steeds het geval voor dat de betrekking tussen de bovengrenzen niet over het gehele traject dezelfde lineaire functie kan zijn. In de figuren 4 tot en met 7 worden, in schema, enkele voorbeelden gegeven. De figuren 8 tot en met 10 illustreren voor een aantal gevallen de uit de gegevens afkomstige curven.

Enerzijds zou nu de uitkomst aanvaardbaar zijn dat voor N = 0 tevens A = 0, doch in de wintermaanden kan ook op neerslagloze dagen afvoer optreden en het naderen naar het eindpunt (0,0) wordt dan veroorzaakt door de eigenschap dat uiteindelijk de kans op het optreden van negatieve waarden gelijk aan 0 is (5.1).

In figuur 4 valt af te leiden dat voor januari, 1-daagse sommen, voor hoge waarden van N goed wordt voldaan aan de betrekking

$$A_g = bN_g + a$$

De berging a, hier opgevat als dat gedeelte van de met b gereduceerde neerslag dat niet tot afvoer komt, kan door extrapolatie worden gevonden indien wordt aangenomen, dat tevens voor hoge waarden van N zal gelden

$$A = bN + a$$

Een geval als weergegeven in figuur 6 bevat geen mogelijkheden voor het geven van een schatting van de berging aangezien

$$A_g = bN_g$$

VI. LITERATUUR

FRASER, D.A.S., 1958. Statistics, an Introduction. New York. (I.C.W. nr.11/109)

HÜTTE, 1959. Mathematische Formeln und Tafeln, Verfasser Prof.Dr.Ing. I.SZABO. Berlin. (I.C.W. nr.11/133)

STOL, Ph.Th., 1962. Het gebruik van frequentieverdelingen bij het onderzoek naar afvoercoëfficiënten. Nota no.165.

———, 1962. Een oriënterend onderzoek naar de invloed van de voorperiode op de betrekking tussen neerslag en afvoer. Nota no.166.

———, 1963. Cumulatieve Frequentieverdelingscurven (I). Het uitzetten van cumulatieve frequentieverdelingen. Nota no.186.

en een reductie b op de neerslag toegepast reeds de gewenste verklaring van de afvoer geeft. Mogelijk zou ook hier een afzonderlijke bewerking van lage en hoge N-waarden aan het licht kunnen brengen of bij verschillende niveaux van N verschillende waarden voor a worden gevonden; waarden die wegvallen bij een bewerking van het totale materiaal in de frequentiediagrammen, zie schema figuur 6a. In formule luidt deze hypothese

$$A = bN + a(N)$$

Een eerste onderzoek naar de mogelijkheid een dergelijke scheiding tot stand te brengen is in voorbereiding, doch opgemerkt moet worden dat de verwachtingen daaromtrent niet hoog gespannen kunnen zijn. Door het in rekening brengen van de voorperiode kan reeds een goede beschrijving van de afvoer uit neerslaggegevens worden verkregen, zoals voor de Schroeweg werd aangetoond [Nota no.166], bovendien lijkt het in dit stadium van onderzoek van meer waarde de voorgeschiedenis in de vorm van grondwaterstandsniveaux in de berekeningen op te nemen.

In dit geval zou dan een deel van de seizoenbeweging, thans nog voor elk jaar op dezelfde wijze voorgesteld door de kalendermaand, worden vervangen door een hydrologische maatstaf.