INSTITUUT VOOR CULTUURTECHNIEK EN WATERHUISHOUDING

NOTA 263, d.d. 15 juni 1964

Eenvoudige proefschema's ten behoeve van de Sinderhoeve met de bijbehorende analyses

I. G. M. Brück

Eenvoudige proefschema's ten behoeve van de Sinderhoeve met de bijbehorende analyses

I.G.M. Brück

Inleiding

Bij het ontwerpen van een proefschema wordt rekening gehouden met de wisselvalligheid, die de resultaten ook onder overigens gelijke proefomstandigheden vertonen. De proef levert volgens een goed opgezet proefschema waarnemingscijfers, die een statistische verwerking toelaten. Deze statistische verwerking is nuttig, als het te beoordelen effect klein is en niet zonder meer van toevallige variatie valt te onderscheiden. De berekening maakt het mogelijk het risico, waarmee een verkeerde conclusie onder deze omstandigheden zou worden getrokken, vast te stellen.

Is het effect daarentegen groot, dan kan vergelijking van gemiddelden reeds overtuigend zijn.

Voor de statistische verwerking van de waarnemingsuitkomsten, volgens de variantie-analyse, wordt verondersteld, dat alle waarnemingsuitkomsten onafhankelijke trekkingen zijn uit normale verdelingen met gelijke spreiding.

De belangrijkste kenmerken van ligging van een normale verdeling zijn:

1. het gemiddelde of de verwachtingswaarde μ
2. de variantie σ^2, die het kwadraat is van de spreiding σ

Meestal zijn van een populatieverdeling de grootte van μ en σ^2 onbekend, doch door trekking van een aselecte steekproef van n waarnemingen uit deze populatie, dus door het doen van een proef, verkrijgt men zuivere schattingen van μ en σ^2, aangeduid met S (μ) en S (σ^2) of s^2. Deze schattingen worden als volgt berekend:

$$S(\mu) = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$S(\sigma^2) = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

Voorbeeld:

Stro-opbrengsten in kg, per veld van 20 m^2, wintertarwe 1963, gegevens verstrekt door Sinderhoeve.

$$x_1 = 13.15$$
$$x_2 = 13.85$$
$$x_3 = 13.58$$
$$x_4 = 13.30$$
$$x_5 = 14.47$$
$$x_6 = 12.55$$
$$x_7 = 12.90$$
$$x_8 = 12.96$$
$$x_9 = 13.24$$

$$\sum_{i=1}^{9} x_i = 120.00$$

De proef wordt opgevat als een aselecte steekproef van 9 waarnemingen uit een populatie met normale verdeling en onbekende μ en σ^2.

$$S\ (\mu) = \bar{x} = \frac{120.00}{9} = 13.33$$

$$S\ (\sigma^2) = s_x^2 = \frac{13.15^2+13.85^2+\ldots+13.24^2 - \frac{120.00^2}{9}}{8} = 0,3255$$

$$S\ (\sigma) = s_x = \sqrt{0,3255} = 0.571$$

s_x is een maat voor de spreiding. die wordt gebruikt om een betrouwbaarheidsinterval vast te stellen. waarbinnen kan worden verwacht dat bijvoorbeeld 95% van de waarnemingen zal liggen.

De grootheid $s_{\bar{x}}$ is belangrijk voor het vaststellen van een betrouwbaarheidsinterval van de verwachtingswaarde μ.

$s_{\bar{x}}$ wordt berekend uit:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \frac{0.571}{3} = 0.190$$

Zo is bijvoorbeeld het 95% betrouwbaarheidsinterval van μ:

$$13.33 - 0.190 \times 2.306 < \mu < 13.33 + 0.190 \times 2.306$$

$$12.892 < \mu < 13.768$$

waarin 2.306 de waarde is uit een t-tabel met $n-1=8$ vrijheidsgraden en $\alpha = 0.025$, tweezijdig. (Biometrika Tables for statisticians, volume I, bldz. 138)

Met een risico dus van 5% kan worden beweerd, dat de onbekende μ van de populatie verdeling tussen de grenzen 12.892 en 13.768 zal liggen.

De éénklasse indeling

Een aantal aselecte steekproeven van dezelfde grootte n uit k normaal verdeelde populaties met gelijke spreiding σ vormen een schema met een éénklasse indeling, het meest eenvoudige proefschema.

Door middel van een variantie-analyse kan men op basis van deze k aselecte steekproeven de hypothese H_o toetsen, dat alle populatie gemiddelden gelijk zijn aan μ, dus

$$H_o: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k = \mu$$

met als alternatief, de hypothese:

H_a: minstens één van de populatie gemiddelden wijkt van de andere af.

Voorbeeld:

Stro-opbrengsten in kg, per veld van 20 m^2, wintertarwe 1963, gegevens verstrekt door Sinderhoeve.

i	Beregend $j=1$	Onberegend $j=2$	Totaal
1	13.15	12.26	
2	13.85	11.37	
3	13.58	11.11	
4	13.30	12.11	
5	14.47	10.77	
6	12.55	12.34	
7	12.90	12.13	
8	12.96	9.99	
9	13.24	10.35	
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	120.00	102.43	222.43
$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	1602.6040	1171.9967	2774.6007
$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}$	1600.0000	1165.7672	2765.7672
$\bar{x}_j$	13.33	11.38	$\bar{\bar{X}} = \frac{222.43}{18} = 12.36$

Hier geldt nu:

$$H_o: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$$

$$n = 9$$

$$k = 2$$

Onder de nulhypothese, namelijk wanneer inderdaad alle populatie gemiddelden gelijk zijn, volgen de steekproefgemiddelden $\bar{x}_j$ $(j = 1,2,\ldots,k)$ een normale kansverdeling met verwachtingswaarde μ en variantie $\sigma^2_{\bar{x}}$.

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2_x}{n}$$

Met behulp van deze formule kan men uit de waargenomen k steekproefgemiddelden de variantie σ^2_x van de enkele waarneming berekenen. Een zuivere schatter van $\sigma^2_{\bar{x}}$ volgt uit:

$$S\,(\sigma^2_{\bar{x}}) = s^2_{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k} (\bar{x}_j - \bar{X})^2}{k-1}$$

en dus

$$s^2_x = n\, s^2_{\bar{x}}$$

waarin $\bar{X}$ = algemeen gemiddelde of niveau van alle k x n waarnemingen.

<u>Voorbeeld</u>:

$$\bar{X} = \frac{222.43}{18} = 12.36$$

Een zuivere schatter van σ^2_x is de uitdrukking $n\, s^2_{\bar{x}}$, die wordt berekend uit:

$$n\, s^2_{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k} (\bar{x}_j - \bar{X})^2}{k-1}$$

waarvan de teller kan worden herleid tot:

$$n\left[\sum_{j=1}^{k}\bar{x}_j^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^{k}\bar{x}_j\right)^2}{k}\right] =$$

$$= \frac{\left(\sum x_1\right)^2}{n} + \frac{\left(\sum x_2\right)^2}{n} + \dots + \frac{\left(\sum x_k\right)^2}{n} - \frac{\left(\sum x_1 + \sum x_2 + \dots + \sum x_k\right)^2}{nk}$$

= netto kwadraatsom tussen de steekproeven met (k-1)vrijheidsgraden.

Hierin is $\frac{\left(\sum x_1 + \sum x_2 + \dots + \sum x_k\right)^2}{nk}$ de correctieterm of som van kwadraten voor niveau.

De netto kwadraatsom tussen de steekproeven kan dus worden berekend uit de kolom totalen = som van de waarnemingen per steekproef, en is het niet noodzakelijk om alle $\bar{x}_j$'s afzonderlijk te berekenen.

Voorbeeld:

Netto kwadraatsom tussen de steekproeven is:

$$1600.0000 + 1165.7672 - \frac{222.43^2}{18} = 17.1503 \text{ met 1 vrijheidsgraad.}$$

Indien H_o juist is, is $n\sigma_{\bar{x}}^2$ dus een zuivere schatter van σ^2, ook wel aangeduid met s_t^2 of de variantie tussen de steekproeven .

$$s_t^2 = \frac{17.1503}{1}$$

Verondersteld is, dat alle k populatieverdelingen dezelfde σ bezitten. De steekproefvarianties s_j^2 ($j = 1,2, \dots ,k$) zijn dan alle schattingen van dezelfde σ^2, zodat men een tweede zuivere schatting van σ^2 verkrijgt uit het, met het aantal vrijheidsgraden van elke s_j^2, gewogen gemiddelde van s_j^2, of in formule:

$$s^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j - 1)\, s_j^2}{\sum_{j=1}^{k}(n_j - 1)} = s_b^2 \text{ of de variantie binnen de steekproeven.}$$

Zijn de n's alle gelijk, dan gaat s_b^2 over in het gewone gemiddelde van de varianties s_j^2 namelijk

$$s_b^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k} s_j^2}{k} = \frac{\sum x_1^2 + \sum x_2^2 + \ldots + \sum x_k^2 - \dfrac{\left(\sum x_1\right)^2 + \left(\sum x_2\right)^2 + \ldots + \left(\sum x_k\right)^2}{n}}{k\ (n-1)}$$

waarvan de teller = de netto kwadraatsom binnen de steekproeven of de som van kwadraten voor toeval met k (n-1) vrijheidsgraden.

Voorbeeld:

Som van kwadraten voor toeval is:

1602.6040 + 1171.9967 - 1600.0000 - 1165.7672 = 8.8335

met 2 x 8 = 16 vrijheidsgraden.

dus

$$s_b^2 = \frac{8.8335}{16} = 0.5521$$

Uit alle k x n waarnemingen volgt nog een derde kwadraatsom namelijk de totale netto kwadraatsom:

$$\sum x_1^2 + \sum x_2^2 + \ldots + \sum x_k^2 - \frac{\left(\sum x_1 + \sum x_2 + \ldots + \sum x_k\right)^2}{nk}$$ met (nk-1) vrijheidsgraden.

Voorbeeld:

1602.6040 + 1171.9967 - 2748.6169 = 25.9838 met 18-1 = 17 vrijheidsgraden.

Tussen de drie behandelde kwadraatsommen bestaat de volgende betrekking:

totale netto kwadraatsom = netto kwadraatsom tussen de steekproeven + kwadraatsom voor toeval.

De kwadraatsom voor toeval wordt meestal verkregen door aftrekking van de netto kwadraatsom tussen de steekproeven van de totale netto kwadraatsom.

Voor de berekening van de variantie-analyse zijn dus nodig:

1. sommen per steekproef
2. totale som van alle waarnemingen
3. kwadraten van deze sommen
4. som van kwadraten van alle waarnemingen

Voorbeeld:

De kwadraatsom voor toeval is:

25.9838 - 17.1503 = 8.8335 met 17 - 1 = 16 vrijheidsgraden.

Men vindt dus 2 schattingen van σ^2 namelijk:

$$s_t^2 = 17.1503 \text{ en } s_b^2 = 0.5521,$$

zodat wanneer H_o geldt èn tevens beide schattingen van σ^2 onafhankelijk van elkaar zijn, de grootheid $\frac{s_t^2}{s_b^2}$ een $F_{v_2}^{v_1}$ verdeling volgt met $v_1 = k-1$ en $v_2 = k\ (n-1)$ vrijheidsgraden.

dus

$$\frac{s_t^2}{s_b^2} = \frac{17.1503}{0.5521} = 31.06 = F_{16}^{1}$$

De k populatieverdelingen bezitten dezelfde σ^2, dus ook indien H_o niet juist zou zijn, blijft s_b^2 een zuivere schatting van σ^2, de populatiegemiddelden zijn dan echter niet gelijk en de steekproefgemiddelden bezitten kansverdelingen, die niet alle dezelfde verwachtingswaarden hebben.

Dientengevolge zal s_t^2 systematisch hogere waarden aannemen s_b^2. Er dient dus rechts éénzijdig te worden getoetst.

Bij een drempelwaarde α zal H_o dan worden verworpen, indien:

$$P\left(F_{v_2}^{v_1} < \frac{s_t^2}{s_b^2}\right) < \alpha$$

Van de F verdeling bestaan tabellen met α = 0.001, 0.005, 0.010, 0.025, 0.05, 0.10 en 0.25.

Voorbeeld:

$$P(F_{16}^{1} < 31.06) < 0.001$$

men verkrijgt nu het volgende schema voor de variantie-analyse:

Bon van variantie	Kwadraat-som	Vrijheids-graden	s (σ^2)	F	P
Tussen de steekproeven	17.1503	1	17.1503	31.06	<0.001
Binnen de steekproeven	8.8335	16	0.5521		
Totaal	25.9838	17			

De nulpothese $\mu_1 = \mu_2$ wordt hier verworpen met een onbetrouwbaarheid, die kleiner is dan 0,1%.

Ofwel het beregeningseffect blijkt systematisch hoger te liggen met een risico van 0,1% (1 op 1000 gevallen).

Vector voorstelling

De waarnemingscijfers in het schema van de éénklasse indeling kunnen ook worden opgevat als een vector in de k × n dimensionale ruimte, waarvan:

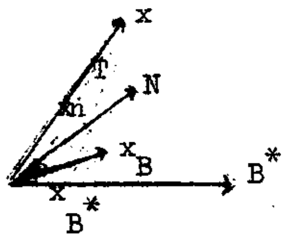
N = deelruimte van niveau met 1 dimensie

B^* = deelruimte van zuiver behandelingseffect met (k-1) dimensies

T = deelruimte van toeval met k (n-1) dimensies

zò, dat N, B^* en T onderling loodrechte ruimten zijn.

De waarnemingsvector $\underline{x}$ kan worden ontbonden in 3 onderling loodrechte componenten respectievelijk $\underline{x}_N$, $\underline{x}_{B^*}$ en $\underline{x}_T$, terwijl $\underline{x}_N + \underline{x}_{B^*} = \underline{x}_B$



Door projectie van $\underline{x}$ op de ruimten N en B^* verkrijgt men de som van kwadraten voor niveau en zuiver behandelingseffect (correctieterm en netto kwadraatsom tussen de steekproeven).

Vanwege de loodrechtheid geldt:

$$\underline{x}_T^2 = \underline{x}^2 - \underline{x}_N^2 - \underline{x}_{B^*}^2$$

<u>Voorbeeld</u>:

$$x = \begin{pmatrix} 13.15 & 12.26 \\ 13.85 & 11.37 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 13.24 & 10.35 \end{pmatrix}$$

$$x_N = \frac{222.43}{18}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } x_N^2 = \frac{222.43^2}{18^2} \times 18 = 2748.6169$$

$$x_B = \frac{120.00}{9}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \frac{102.43}{9}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{en } x_{B^*} = x_B - x_N = \frac{17.57}{18}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$x^2_{B^*} = \frac{17.57^2}{18^2} \times 18 = 17.1502$$

$$x^2 = 2774.6007$$

dus

$$x^2_T = 2774.6007 - 2748.6169 - 17.1502 = 8.8335$$

met dimensies 18 - 1 - 1 =16

Volgens de hoofdstelling van de variantie-analyse geldt:

$(\underline{x}_T - \mu_T)^2 \cong \sigma \chi^2_{dT}$, waarin dT = dimensie van ruimte T

maar van de toevalsruimte is de verwachtingswaarde = 0

dus

$$\mu_T = 0$$

en

$$\underline{x}^2_T \cong \sigma^2 \chi^2_{dT}$$

$$S\ (\sigma^2) = \frac{x^2_T}{dT} = \frac{8.8335}{16} = 0.5521$$

$$S\ (\sigma) = 0.743$$

Om te toetsen of de behandelingsgemiddelden significant verschillen stelt men de nulhypothese:

'er is geen behandelingseffect'

en indien H_o geldt, zal de ruimte B^* evenals T een toevalsruimte zijn en dan is:

$$\mu_{B^*} = 0,$$

maar $(\underline{x}_{B^*} - \mu_{B^*})^2 \cong \sigma^2 \underline{\chi}^2_{dB^*}$, waarin dB^* = dimensie van ruimte B^*

dus

$$\underline{x}^2_{B^*} \cong \sigma^2 \underline{\chi}^2_{dB^*}$$

Bovendien $\underline{x}^2_T \cong \sigma^2 \underline{\chi}^2_{dT}$

Omdat B^* en T loodrechte ruimten zijn, zijn B^* en T stochastisch onafhankelijk en geldt:

$$\frac{\underline{x}^2_{B^*}/dB^*}{\underline{x}^2_T\ /dT} \cong \frac{\sigma^2 \underline{\chi}^2_{dB^*}/dB^*}{\sigma^2 \underline{\chi}^2_{dT}\ /dT} = \underline{F}^{dB^*}_{dT}$$

De verhouding van de gemiddelde kwadraatsommen is onder H_o een verwezenlijking van de $\underline{F}$ stochastiek:

$$F^1_{16} = \frac{17.1502/\ 1}{8.8335/16} = 31.06$$

Uit S (σ^2) kan nog een variatiecoëfficiënt worden berekend, die vaak als maat voor de spreiding wordt gebruikt.

De variatiecoëfficiënt wordt berekend als volgt:

$$\text{Variatiecoëfficiënt} = \frac{100\ S\ (\sigma)}{x_n} = \frac{74.3}{12.36} = 6.01$$

Dit betekent dat de spreiding uitgedrukt in procenten van het niveau 6.01 bedraagt.

Bij gelijke aantallen waarnemingen per behandelingsklasse wordt de schatting van σ^2 minimaal, zodat dan een zo nauwkeurig mogelijke schatting van het behandelingseffect wordt verkregen.

\- - - - - -