

10/11/1963

NN31545.0230

TIJDTUUT VOOR CULTUURTECHNIEK EN WATERHUISHOUDING
NOTA no.230 d.d. 24 december 1963

Orthogonale polynomia en de bijbehorende variantie-analyse
voor het numeriek weergeven van onderzoeksresultaten

ir. Ph.Th.Stol

BIBLIOTHEEK DE HAARF

Droevendaalssteeg 3a
Postbus 241
6700 AE Wageningen

	pagina
1. Inleiding	1
2. Orthogonale polynomia	1
3. Het orthogonaliseren van de basisvectoren	4
4. Vereffening met orthogonale polynomia	6
5. Vereenvoudigingen in de berekening	9
6. Terugrekening naar de oorspronkelijke variabelen	11
Appendix 1. De som van een aantal termen van hogere rekenkundige reeksen	15
Appendix 2. De variantie-analyse	17
Literatuur	49
Figuren	

202/1263/25



1705786

1. The first part of the document is a list of names and addresses.

2. The second part of the document is a list of names and addresses.

3. The third part of the document is a list of names and addresses.

1. Inleiding

Bij gebruik van elektronische hulpmiddelen voor het doorrekenen van onderzoeksresultaten is een eerste voorwaarde dat het gehele te bewerken materiaal in numerieke uitkomsten beschikbaar is. Speciaal bij onderzoeksresultaten die in grafiekvorm zijn vastgelegd doet zich het probleem voor een presentatie te vinden die in het rekenproces kan worden opgenomen.

Wanneer voor verdere berekening waarden aan een gegeven grafiek moeten worden ontleend zou men bijvoorbeeld een tabel in het geheugen van een computer kunnen opnemen waarmee bij een bepaalde abscis-waarde de ordinaatwaarde kan worden opgezocht. Een dergelijke tabel zal echter zeer veel geheugenruimte vergen, vooral als de abscis-waarden een continu verloopende reeks vormen zodat voor een goede benadering van de gegeven functie (interpolatie) een uitgebreide reeks getallen moet worden opgenomen.

In plaats van een dergelijke omvangrijke tabel wordt gewoonlijk een benaderingsfunctie in het programma verwerkt, zodat bij elke abscis-waarde de bijbehorende ordinaat kan worden berekend.

In het volgende wordt er van uitgegaan dat een grafische voorstelling goed door een polynoom kan worden benaderd. Door gebruik te maken van zogenaamde "orthogonale polynomia" wordt het rekenwerk tot vaststelling van de benaderingsfunctie aanmerkelijk vereenvoudigd, terwijl tevens gemakkelijk kan worden getest welke termen statistisch van wezenlijk belang zijn, waarmee een zo laag mogelijke graad en een zo eenvoudig mogelijke gedaante van het polynoom kan worden vastgesteld.

2. Orthogonale polynomia

Er wordt uitgegaan van het verband tussen twee variabelen voorgesteld door de betrekking

$$q = f(X) \tag{2.1}$$

Van deze betrekking wordt verondersteld dat een aantal (n) gegevens ter beschikking staat met de eigenschap dat de X -waarden equidistant zijn.

Uit deze voorwaarde volgt reeds dat bijvoorbeeld tijdreeksen zich zeer goed lenen om met de te beschrijven werkwijze te worden benaderd [VAN DER LAAN en IGNATIUS].

Is (2.1) als grafische voorstelling gegeven dan kan hieraan gemakkelijk worden voldaan door op een aantal (n) gelijke afstanden op de X -as de bijbehorende q -waarde af te lezen.

De X -waarden krijgen vervolgens een rangnummer $x = 1, 2, 3, \dots, n$, zodat een tabel met bijvoorbeeld $n = 6$ uitkomsten kan worden voorgesteld met de volgende symbolen aangegeven in tabel 1.

Tabel 1 Overgang van equidistante waarden X op rangnummers x

X	x	q
X_1	1	q_1
X_2	2	q_2
X_3	3	q_3
X_4	4	q_4
X_5	5	q_5
X_6	6	q_6

(2.2)

Zonder dat de X -waarden bekend hoeven te zijn kan een verdere numerieke uitwerking van het probleem volgen door gebruik te maken van de x -waarden. Omrekening in de oorspronkelijke gegevens kan namelijk steeds

1. Introduction

2. Methodology

3. Results

4. Discussion

5. Conclusion

6. References

7. Appendix

8. Acknowledgements

9. Author Biographies

10. Correspondence

11. Contact Information

12. Declaration of Interest

13. Funding Sources

14. Data Availability

15. Ethics Statement

16. Conflict of Interest

17. Keywords

18. Abstract

19. Summary

plaatsvinden met de volgende lineaire betrekking:

$$\frac{X - X_i}{X_j - X_i} = \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad j > i$$

wat bijvoorbeeld wordt met $i = 1$ en $j = 2$

$$X = (X_2 - X_1)x - (X_2 - 2X_1) \quad (2.3)$$

en, omgekeerd,

$$x = \frac{1}{X_2 - X_1} X + \frac{X_2 - 2X_1}{X_2 - X_1} \quad (2.4)$$

Uit (2.3) en (2.4) zijn x en X eenduidig in elkaar om te rekenen zodat in het volgende alleen met x als variabele verder behoeft te worden gewerkt.

Vervolgens wordt nu een polynoom aan (2.2) aangepast, waarvoor als voorbeeld een van de derde graad wordt gekozen met algemene gedaante

$$y = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (2.5)$$

Hierin zijn nu de in te vullen x -waarden bekend uit (2.2) en er rest nog het probleem de constanten a_i ($i = 0, 1, 2, 3$) te berekenen.

Overzichtelijkheidshalve wordt (2.5) geschreven in vectoren, zodat uit (2.2) de tabel 2 ontstaat

Tabel 2 Kentallen van vectoren gebaseerd op een polynoom van de derde graad

Functie voor het berekenen van de kengetallen	x^0	x^1	x^2	x^3	
Vectoren uitgeschreven	$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix}$	$=$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}$	
Vectoren in symbolen	y	$=$	$(v_0 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3)$	a	

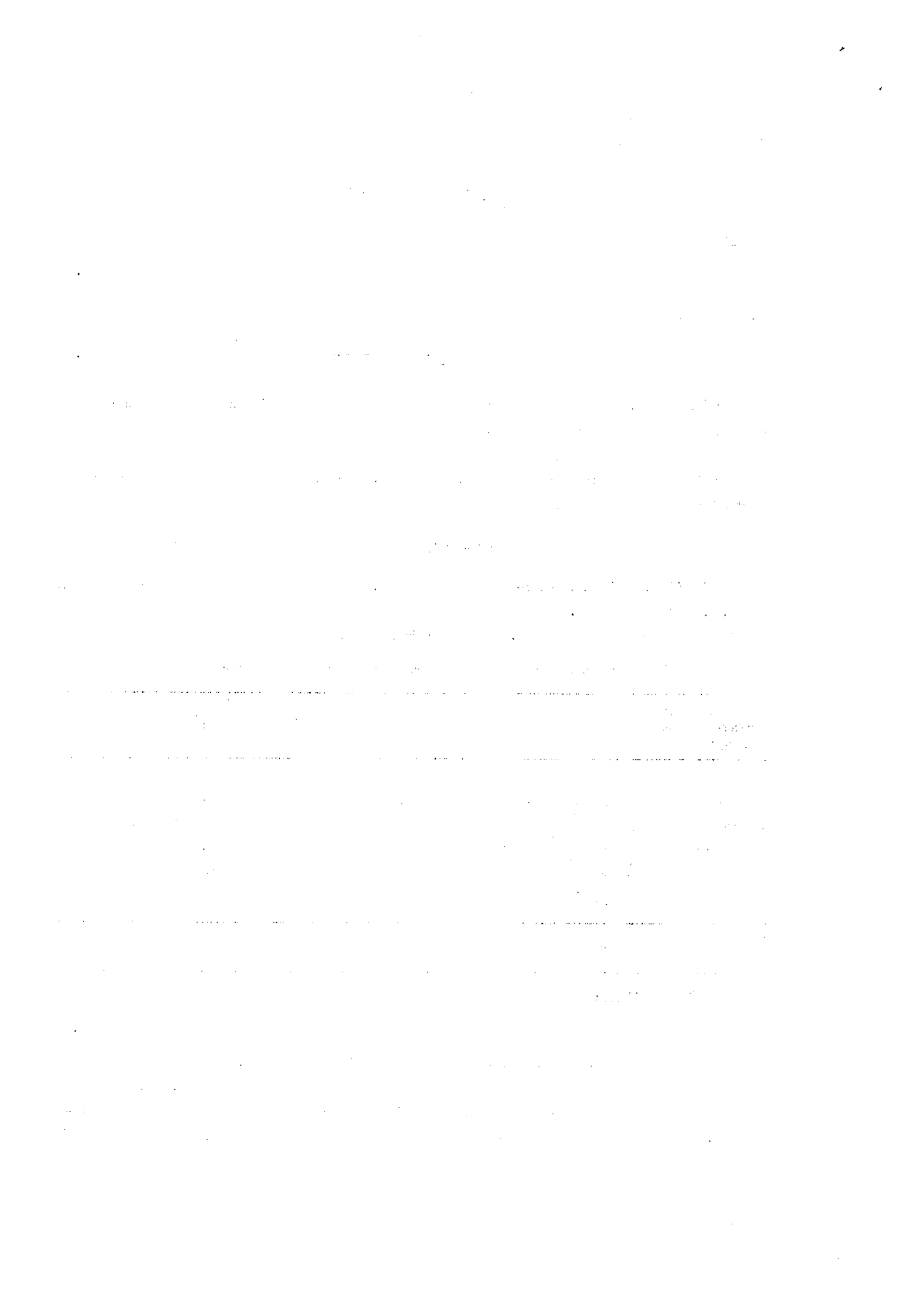
en als matrixvergelijking:

$$y = Ma \quad (2.6)$$

waarin nu v_i , ($i = 0, 1, 2, 3$) de kolomvectoren van de matrix M zijn (figuur 2).

Deze vectorvoorstelling wordt in figuur 1 nog eens toegelicht [zie ook STOL, NOTA no.147]. Opgemerkt wordt dat in een figuur slechts een driedimensionale ruimte kan worden afgebeeld en dan nog alleen in perspectief. De uitbreiding naar hogere dimensies verloopt echter steeds geheel analoog.

Uit de figuur volgt dat de waarnemingsuitkomsten q over het algemeen niet aan de vergelijking van het



polynomium zullen voldoen. Er ontstaat dus het probleem de vector

$$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_6 \end{pmatrix}$$

zo te schatten (berekenen) dat met de y van (2.6) zo goed mogelijk aan q is voldaan. Als schattingsmethode wordt hiertoe het minimaliseren van de kwadraatsom van de afwijkingen toegepast.

Meetkundig betekent dit dat de verschilvector $(q - y)$ loodrecht op het vlak, opgespannen door de vectoren v_i moet staan om zo klein mogelijk te zijn (figuur 1) dus

$$(q - y) \perp M$$

of, in verband met (2.6),

$$(q - Ma) \perp M$$

zodat het inproduct nul moet zijn wat de voorwaarden geeft

$$M'q - M'Ma = 0$$

waarin de accenten aanduiden dat de betreffende matrix is getransponeerd. De normaalvergelijkingen zijn dus

$$M'Ma = M'q$$

of, uitgeschreven

$$\begin{aligned} (v_0 v_0) a_0 + (v_0 v_1) a_1 + (v_0 v_2) a_2 + (v_0 v_3) a_3 &= v_0 q \\ \vdots & \\ (v_3 v_0) a_0 + (v_3 v_1) a_1 + (v_3 v_2) a_2 + (v_3 v_3) a_3 &= v_3 q \end{aligned} \tag{2.7}$$

een systeem van 4 vergelijkingen met 4 onbekenden.

Het liefst zou men willen dat alle gemengde inproducten zouden wegvallen daar dan

$$v_0 v_1 = v_0 v_2 = \dots = v_3 v_2 = 0 \tag{2.8}$$

en (2.7) overgaat in 4 maal één vergelijking met één onbekende. Dan is namelijk

$$a_i = \frac{v_i q}{v_i v_i}, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

Nu zijn de inproducten (2.8) nul wanneer de samenstellende vectoren loodrecht op elkaar staan dus als voldaan is aan

$$v_1 \perp v_0, v_2 \perp v_0, \dots, v_2 \perp v_3$$

Om deze situatie te bereiken moeten de kolomvectoren v_i van de matrix M in (2.6) georthogonaliseerd worden (figuur 3).

Het polynomium (2.5) zal dus zodanig moeten worden getransformeerd dat de kolommen voor elke x^i in tabel 2 de eigenschap hebben onderling loodrecht te zijn. In dat geval spreekt men van een orthogonaal polynomium.

... ..

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

$$\begin{aligned} & \dots \\ & \dots \\ & \dots \\ & \dots \\ & \dots \end{aligned}$$

...

...

...

$$\dots$$

...

$$\dots$$

...

...

...

...

$$\dots$$

...

...

...

...

3. Het orthogonaliseren van de basisvectoren

In Nota no. 147 [STOL, 1962] is aangegeven op welke wijze in het algemeen orthogonalisatie van kolomvectoren in een matrix kan plaatsvinden. In het volgende zal voor het bijzondere geval dat met rangnummers volgens (2.2) wordt gewerkt de afleiding nog eens worden gegeven.

Zoals in figuur 3 staat aangegeven kan de eerste basisvector als uitgangspunt dienen. Deze vector heeft kentallen die alle gelijk zijn aan $x^0 = 1$, zodat wordt gesteld in het orthogonale stelsel

$$\xi_0 = v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Vervolgens wordt nu in het vlak door v_0 en v_1 (figuur 2) een nieuwe vector gekozen zodanig dat deze loodrecht op de eerste vector ξ_0 staat (figuur 3). Deze vector is uiteraard te schrijven als een lineaire combinatie van de vectoren v_0 en v_1 zodat

$$\xi_1 = v_1 + \alpha \xi_0$$

met als voorwaarde $\xi_1 \perp \xi_0$ en dus

$$\xi_0 \xi_1 = \xi_0 v_1 + \alpha \xi_0 \xi_0 = 0$$

en dus

$$\alpha = - \frac{\xi_0 v_1}{\xi_0 \xi_0}$$

De bijzondere vorm van de vector ξ_0 , namelijk een kolom van énen (3.1) maakt de volgende uitwerking mogelijk:

$$\alpha = - \frac{\sum x}{n} = - \bar{x} \quad (3.2)$$

zodat de kentallen van de eerste orthogonale vector steeds worden berekend uit

$$(x - \bar{x})$$

en voor $n = 6$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{7}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ter verrijding van gebroken waarden in de kentallen van de vectoren worden als basisvectoren de vectoren met de kleinste gehele getallen gekozen. Algemeen wordt dan gesteld:

$$\xi_i^* = \lambda_i \xi_i \quad (3.2a)$$

In het bijzonder is dan

$$\xi_0^* = 1 \cdot \xi_0 = v_0$$

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

Vervolgens dus

$$\xi_1' = 2 \xi_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

met $\lambda_1 = 2$. Deze waarde van λ is dus de kleinste waarmee de kentallen geheel worden. Gemakkelijk valt na te gaan dat ook $\xi_1' \perp \xi_0'$.

De lengtekwaadmaat van de orthogonale vectoren die tot nu toe bekend zijn heeft de waarde

$$\xi_0' \xi_0' = 6$$

en

$$\xi_1' \xi_1' = 70$$

De procedure herhalend wordt verkregen:

$$\xi_2 = v_2 + \alpha \xi_0' + \beta \xi_1' \quad (3.3)$$

met de eis

$$\xi_2 \perp \xi_0' \text{ en } \xi_1'$$

zodat

$$\xi_0' v_2 + \alpha \xi_0' \xi_0' + \beta \xi_0' \xi_1' = 0$$

en

$$\xi_1' v_2 + \alpha \xi_1' \xi_0' + \beta \xi_1' \xi_1' = 0$$

waarin $\xi_i' \xi_j'$ voor $i \neq j$ reeds = 0, zodat

$$\alpha = -\frac{\xi_0' v_2}{\xi_0' \xi_0'} = -\frac{\sum x^2}{n} = -\frac{91}{6} \quad (3.4)$$

en

$$\beta = -\frac{\xi_1' v_2}{\xi_1' \xi_1'} = -\frac{245}{70} = -\frac{7}{2}$$

Er komt dus uit (3.3)

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \\ 25 \\ 36 \end{pmatrix} - \frac{91}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{7}{2} \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions.

2. It is essential to ensure that all entries are supported by appropriate documentation.

3. The following table provides a summary of the key findings from the audit.

4. The audit identified several areas where the company's internal controls need to be strengthened.

5. The management team has agreed to implement the following corrective actions:

6. The first action is to review the current internal control policies and procedures.

7. The second action is to conduct a detailed review of the financial reporting process.

8. The third action is to provide training to all staff on the updated internal control policies.

9. The management team is committed to ensuring that all identified issues are resolved promptly.

10. The audit report will be presented to the board of directors for their review and approval.

zodat

$$\frac{3}{2} \xi_2' = \xi_2' = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -4 \\ -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda_2 \xi_2 \quad (3.5a)$$

Zo voortgaande ontstaat tenslotte tabel 3.

Tabel 3 Orthogonale polynomia voor n = 6 waarnemingen

n	ξ_0'	ξ_1'	ξ_2'	ξ_3'	ξ_4'	ξ_5'	q
1	1	-5	5	-5	1	-1	q ₁
2	1	-3	-1	7	-3	5	q ₂
3	1	-1	-4	4	2	-10	q ₃
4	1	1	-4	-4	2	10	q ₄
5	1	3	-1	-7	-3	-5	q ₅
6	1	5	5	5	1	1	q ₆
$\xi_i' \xi_i'$	6	70	84	180	28	252	qq
λ_i	1	2	3/2	5/3	7/12	21/10	

Daar in (3.2) en ook in (3.4) het aantal waarnemingen n als rekengrootheid voorkomt zijn de kentallen in de tabel van n afhankelijk. Voor elke waarde van n zou dus een dergelijke tabel kunnen worden vervaardigd. In uitgebreide tabellenboeken worden dan ook de kentallen van orthogonale polynomia gegeven. Zo bijvoorbeeld door FISHER en YATES [1957] die voor n = 3, 4, 5, ..., 75 orthogonale polynomia tot en met de vijfde graad op deze wijze geven en ANDERSON en HOUSEMAN [1942] die tabellen geven tot n = 104.

Voorts wordt steeds vermeld het kwadraat van de lengte van elke vector ($\xi_i' \xi_i'$) en de kleinste factor λ_i , die elke vector op gehele waarden van de kentallen herleid (zie bijvoorbeeld (3.5) en (3.5a)).

Met behulp van deze tabellen kan op eenvoudige wijze, met een minimum aan rekenwerk, een polynomium worden aangepast.

4. Vereffening met orthogonale polynomia

Indien nu wordt gevraagd een polynomium van de 5e graad aan n equidistante waarnemingen aan te passen, luidt de functie

$$y = A_0 \xi_0' + A_1 \xi_1' + A_2 \xi_2' + \dots + A_5 \xi_5' \quad (4.1)$$

Overeenkomstig de in paragraaf 2 gegeven afleiding worden nu de normaalvergelijkingen:

$$\begin{aligned} (\xi_0' \xi_0') A_0 &= \xi_0' q & (4.1a) \\ (\xi_1' \xi_1') A_1 &= \xi_1' q \\ &\vdots \\ (\xi_5' \xi_5') A_5 &= \xi_5' q \end{aligned}$$

Alle termen buiten de diagonaal zijn door het orthogonaliseren verdwenen zodat de coëfficiënten A_i volgen uit:

$$A_0 = \frac{\xi_0' q}{\xi_0' \xi_0'} \quad (4.2)$$

$$A_1 = \frac{\xi_1' q}{\xi_1' \xi_1'}$$

$$\vdots$$

$$A_5 = \frac{\xi_5' q}{\xi_5' \xi_5'}$$

Van deze uitdrukkingen behoeft slechts de teller in elk afzonderlijk geval te worden uitgerekend waartoe tabel 3, waarin dan voor q de gemeten waarden zijn ingevuld, als uitgangstabel kan dienen; de noemers worden in de tabellenboeken vermeld [FISHER and YATES] voor elke waarde van n zoals voor $n = 6$ in tabel 3 is gedaan.

De berekening met orthogonale polynomia maakt het mogelijk op eenvoudige wijze na te gaan tot welke graad het polynomium moet worden genomen om een zo goed mogelijke splitsing te maken tussen systematische en toevallige effecten (zie figuur 4).

De hiertoe uit te voeren variantie-analyse kan in het orthogonale systeem eenvoudig als volgt plaatsvinden. In figuur 4 stelt ξ_0 de vector van het niveau voor, ξ_1 de vector die de lineaire component vertegenwoordigt, en op analoge wijze kunnen hogere graadscomponenten in de beschouwing worden opgenomen. Alle basisvectoren zijn orthogonaal (gemaakt). De vector y is nu dus orthogonaal ontbonden met componenten $A_0 \xi_0$ en $A_1 \xi_1$. Er geldt nu dus achtereenvolgens:

$$\xi_1 \perp \xi_0$$

$$(y - A_0 \xi_0) \parallel \xi_1$$

dus

$$(y - A_0 \xi_0) \perp \xi_0$$

en daar

$$(q - y) \perp \xi_0$$

geldt ook

$$(q - A_0 \xi_0) \perp \xi_0$$

Dit houdt in dat kwadraten van lengten zonder meer mogen worden samengevoegd of afgesplitst volgens de stelling van Pythagoras.

De totale kwadraatsom is qq . De bijdrage tengevolge van "niveau" is $(A_0 \xi_0)^2$ en de overblijvende rest,

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions.

2. This section outlines the various methods used to collect and analyze data.

3. The following table provides a summary of the key findings from the study.

4. The results indicate that there is a significant correlation between the variables studied.

5. Further research is needed to explore the underlying mechanisms of these relationships.

6. The data shows that the majority of participants reported a positive impact on their well-being.

7. It is important to note that these findings are based on self-reported data.

8. The study was limited by its cross-sectional design, which does not allow for causal inferences.

9. Despite these limitations, the study provides valuable insights into the topic.

10. The authors would like to thank the funding agency for their support.

11. The study was conducted in accordance with the ethical guidelines of the institution.

12. All participants provided informed consent before the start of the study.

13. The data was analyzed using statistical software.

14. The results are consistent with previous research in the field.

15. The authors have no conflicts of interest to declare.

toe te schrijven aan toevallige afwijkingen bedraagt (figuur 4):

$$(q - A_0 \xi_0)^2 = qq - (A_0 \xi_0)^2$$

De kwadraatsom uit het linkerlid bevat echter niet alleen toevalstermen, de lineaire component dient eveneens nog te worden afgesplitst. Uit de figuur volgt reeds zonder meer dat de uiteindelijke toevalsrest wordt verkregen uit:

$$(q - A_0 \xi_0)^2 - (A_1 \xi_1)^2 = (q - y)^2$$

Van deze laatste term kan, in het geval van een lineaire betrekking, geen kwadraatsom meer worden afgesplitst doch op analoge wijze kan de analyse worden voortgezet voor hogere graadstermen indien deze aanwezig zijn. In dat geval wordt dan weer eerst de invloed van een tweede-gradseffect in rekening gebracht en zo vervolgens.

Tenslotte resteert dus steeds als toevalsvector de vector $(q - y)$ namelijk de verschillen tussen gemeten (q) en berekende uitkomsten (y) .

Opgemerkt wordt vervolgens dat een som van kwadraten steeds positief is en dat door toevoeging van termen de bereikte kwadraatsom in ieder geval gelijk blijft doch in het algemeen reeds door kleine toevalsafwijkingen, zal toenemen. Om kwadraatsommen onderling te kunnen vergelijken worden deze dan ook per dimensie uitgedrukt waarmee de zogenaamde varianties worden verkregen. Het aantal dimensies waarop een kwadraatsom betrekking heeft wordt het aantal vrijheidsgraden genoemd.

Stel dat in figuur 4 de vectoren 6 kentallen hebben ($n = 6$ waarnemingen), dan is de gehele figuur gelegen in een 6-dimensionale ruimte. Elk van de effecten (ξ_0' , respectievelijk ξ_1')^{*} spant een ééndimensionale deelruimte op zodat de variantie-analyse wordt zoals in table 4 staat aangegeven.

Tabel 4 Variantie-analyse van de aanpassing aan een polynomium

Effect	Kwadraatsom	Dimensie	Variantie
Waarnemingen	qq	6	
Niveau	$(A_0 \xi_0')^2$	1	
	Rest	5	
Lineair	$(A_1 \xi_1')^2$	1	$\frac{(A_1 \xi_1')^2}{1}$
Toevalsrest	Rest $(q - y)^2$	4	$\frac{(q - y)^2}{4}$

Tengevolge van toevallige afwijkingen ontstaat een variantie (lengtekwaadraat per dimensie) ter grootte $(q - y)^2/4$. Indien een werkelijk (lineair) effect aanwezig is zal de bijbehorende variantie minstens deze

^{*} De accenten duiden er op dat in de richting ξ_0 respectievelijk ξ_1 een kleinste vector met niet-gebroken kentallen als basis is gekozen. Het onderscheid is dus verder niet essentieel.

waarde moeten bereiken om van het toeval te onderscheiden te zijn. Dit houdt in dat de grootheid

$$F_4^1 = \frac{(A_1 \xi_1')^2 / 1}{(q - y)^2 / 4} \quad (4.3)$$

de waarde 1 zal moeten overtreffen. Daar de toetsingsgrootheid F zelf eveneens een stochastische grootheid is zullen ook waarden die iets groter zijn dan 1 nog uit toevallige afwijkingen kunnen worden verklaard. Hoe groot F_4^1 moet zijn om van een significante uitkomst te spreken hangt af van de dimensies ("vrijheidsgraden") van teller en noemer p en q en van het risicopercentage α . Tabel 5 geeft een overzicht van waarden die uit een F-tabel worden gevonden [DE JONGE, 1963 en uitbreider HALD, 1960].

Tabel 5 Enkele waarden van de F-toets voor verschillende risicopercentages α bij eenzijdige toetsing

	α in %								
	50	30	10	5	2.5	1	0.5	0.1	0.05
F_4^1	.549	1.42	4.54	7.71	12.2	21.2	31.3	74.1	106

Dit zijn dus waarden die (4.3) minstens moet aannemen om significant te zijn, met een risico α dat dit niet het geval is. Veelal wordt $\alpha = 5\%$ gekozen.

Door nu op de in tabel 4 aangegeven wijze voor elke ξ_i' het effect te toetsen tegen de toevalsrest kan worden nagegaan welke effecten van belang zijn en welke niet van toevallige afwijkingen te onderscheiden zijn.

Tot slot wordt er nog op gewezen dat de toevalsresten steeds door de projecterende vectoren buiten het in figuur 4 geschetste vlak gerepresenteerd worden. De effecten zelf worden voorgesteld door de basisvectoren ξ_i . In Appendix 2 wordt hierop nog iets nader ingegaan.

5. Vereenvoudigingen in de berekening

Het besproken systeem biedt nog een paar mogelijkheden om tot vereenvoudiging van de berekeningen te komen.

In de eerste plaats kunnen de kwadratsommen van de effecten nog op de volgende wijze uit reeds bekende deelresultaten worden berekend

$$\begin{aligned} (A_i \xi_i')^2 &= A_i A_i (\xi_i' \xi_i') \\ &= A_i \left(\frac{\xi_i' q}{\xi_i' \xi_i'} \right) (\xi_i' \xi_i') \\ &= A_i (\xi_i' q) \end{aligned}$$

De kwadratsommen worden dus verkregen door vermenigvuldiging van de factoren A_i met de bekende termen uit de normaalvergelijkingen (4.1a).

In het bijzonder geldt nog voor $i = 0$

$$A_0(\xi_0' q) = \frac{\xi_0 q}{\xi_0 \xi_0} \xi_0 q$$

$$= \frac{(\sum q)^2}{n}$$

Dit is de zogenaamde correctieterm waarmee de oorspronkelijke gegevens op hun gemiddelde worden herleid volgens de bekende formule

$$\sum (q - \bar{q})^2 = \sum q^2 - \frac{(\sum q)^2}{n}$$

In de tweede plaats kan gebruik worden gemaakt van de symmetrie die zich in tabel 3 voordoet.

Uitgaande van tabel 3 op pagina 6 valt gemakkelijk te verifiëren dat het voldoende is slechts de onderste helft van het aantal kentallen van de basisvectoren te gebruiken, zoals in tabel 6 is gedaan. Hiermee wordt dan tabel 6 verkregen. FISHER en YATES [1957] geven voor $n > 8$ ook slechts de onderste helft van het aantal kentallen. Op dezelfde wijze als in tabel 6 gebeurt kan de berekening met dit deel van de basisvectoren worden uitgevoerd.

Tabel 6 Vereenvoudigd rekenschema voor het geval n even is

q	s	η_0	η_2	η_4	d	η_1	η_3	η_5
$q_4 \quad q_3$	$q_4 + q_3$	1	-4	2	$q_4 - q_3$	1	-4	10
$q_5 \quad q_2$	$q_5 + q_2$	1	-1	-1	$q_5 - q_2$	3	-7	-5
$q_6 \quad q_1$	$q_6 + q_1$	1	5	3	$q_6 - q_1$	5	5	1
$\xi_i' \xi_i'$		6	84	28		70	180	252
λ_i		1	3/2	7/12		2	5/3	21/10

Een onderscheid in bewerking is nu dus gemaakt voor de basisvectoren met even indices waarbij géén en voor die met oneven indices waarbij wél tekenverwisseling plaatsvindt [VAN DER LAAN en IGNATIUS].

Er geldt dan namelijk met

$$i = 0, i \text{ even}$$

$$A_i = \frac{s \eta_i}{\xi_i' \xi_i'}, \quad (A_i \xi_i')^2 = A_i (s \eta_i)$$

en voor de gevallen met

$$i \text{ oneven}$$

$$A_i = \frac{d \eta_i}{\xi_i' \xi_i'}, \quad (A_i \xi_i')^2 = A_i (d \eta_i)$$

Voor het geval n oneven is verloopt de bewerking een weinig anders. VAN DER LAAN en IGNATIUS geven aan dat voor n oneven een oplossing is de middelste term tweemaal op te nemen dus in tabel 6 in de kolom voor q

QUESTION 1

(10 marks)

The following table shows the number of people who attended a concert in each of the five years from 2010 to 2014.

Table 1: Concert Attendance

The number of people who attended the concert in each of the five years is given by the random variable X . The probability distribution of X is given by the following table.

x	$P(X=x)$	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
1	0.2	1	1	1	1	1	1
2	0.3	4	8	16	32	64	128
3	0.4	9	27	81	243	729	2187
4	0.1	16	64	256	1024	4096	16384
5	0.03	25	125	625	3125	15625	78125

Use the information in the table to find the mean and standard deviation of X .

$$E(X) = \sum_{x=1}^5 x \cdot P(X=x)$$

Standard deviation = $\sqrt{E(X^2) - (E(X))^2}$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^5 x^2 \cdot P(X=x)$$

At all times, you should show your work and use appropriate units.

elke sub-kolom met de middelste term te laten beginnen en de eerstvolgende even reeksen te gebruiken.

De exacte oplossing voor $n = 7$ bijvoorbeeld wordt gegeven in tabel 7 [zie FISHER and YATES, pagina 90] waarbij deze kunstgreep niet is toegepast doch waarbij de middelste waarneming is gehalveerd [ANDERSON and HOUSEMAN, 1942]. Nu moeten echter de bijbehorende oneven reeksen worden gebruikt.

Tabel 7 Vereenvoudigd rekenschema voor het geval n oneven is

q	s	η_0	η_2	η_4	d	η_1	η_3	η_5
$\frac{1}{2}q_4$ $\frac{1}{2}q_4$	q_4	1	-4	6	0	0	0	0
q_5 q_3	$q_5 + q_3$	1	-3	1	$q_5 - q_3$	1	-1	5
q_6 q_2	$q_6 + q_2$	1	0	-7	$q_6 - q_2$	2	-1	-4
q_7 q_1	$q_7 + q_1$	1	5	3	$q_7 - q_1$	3	1	1
$\xi_i' \xi_i'$		7	84	154		28	6	84
λ_i		1	1	7/12		1	1/6	7/20

Er geldt weer

$i = 0, i \text{ even}$

$$A_i = \frac{s \eta_i}{\xi_i' \xi_i'}, \quad (A_i \xi_i')^2 = A_i (s \eta_i)$$

$i \text{ oneven}$

$$A_i = \frac{d \eta_i}{\xi_i' \xi_i'}, \quad (A_i \xi_i')^2 = A_i (d \eta_i)$$

6. Terugrekening naar de oorspronkelijke variabelen

De uitgevoerde transformaties hebben het voordeel opgeleverd dat een eenvoudig rekensysteem is verkregen waarmee een polynoom aan een reeks equidistante waarnemingen kan worden aangepast.

Voor het construeren van de bijbehorende grafische voorstelling kan dus eenvoudig als volgt te werk worden gegaan. Volgens (4.1) kunnen de berekende waarden van y worden verkregen uit

$$y = A_0 \xi_0' + A_1 \xi_1' + A_2 \xi_2' + A_3 \xi_3' + A_4 \xi_4' + A_5 \xi_5' \quad (6.1)$$

Door in (6.1), nog steeds met het voorbeeld $n = 6$, de waarden ξ_i' ($i = 0, 1, \dots, 5$) uit tabel 3, pagina 6, in te vullen worden y 's verkregen die het gehele traject van waarneming bestrijken.

Een volgend probleem ontstaat wanneer wordt gevraagd bij een gegeven waarde van X de bijbehorende y uit te rekenen. Dit probleem kan niet zonder meer door eenvoudige substituties worden opgelost.

Voor elke X volgt uit (2.2) respectievelijk (2.4) de bijbehorende waarde van x doch deze dient nu nog in ξ -waarden te worden omgerekend.

Uiteindelijk zal men (6.1) graag in X willen uitdrukken. Hiertoe zijn achtereenvolgens nodig de betrekkingen

$$\xi_i' = \lambda_i \xi_i \quad (6.2)$$

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry should be supported by a valid receipt or invoice. This ensures transparency and allows for easy verification of the data.

In the second section, the author details the process of reconciling bank statements with the company's internal records. This involves comparing the ending balance of the bank statement with the ending balance of the cash account in the general ledger. Any discrepancies are investigated and resolved.

The third section covers the preparation of financial statements. It outlines the steps for calculating net income, preparing the balance sheet, and the statement of cash flows. Each statement provides a different perspective on the company's financial performance and position.

$$\begin{aligned}
 & \text{Net Income} = \text{Revenue} - \text{Expenses} \\
 & \text{Revenue} = \sum (\text{Sales} + \text{Interest} + \text{Dividends}) \\
 & \text{Expenses} = \sum (\text{Cost of Goods Sold} + \text{Salaries} + \text{Rent} + \text{Utilities} + \text{Depreciation})
 \end{aligned}$$

Page 10 of 15

The final section discusses the importance of regular audits. An internal audit can help identify errors and prevent fraud. It also provides an opportunity to evaluate the effectiveness of internal controls and make necessary adjustments.

In conclusion, maintaining accurate financial records is essential for the success of any business. It provides the data needed to make informed decisions and ensures compliance with legal requirements.

$$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

$$\xi_i = f_i(x) \quad (6.3)$$

$$x = \frac{1}{x_2 - x_1} X + \frac{x_2 - 2x_1}{x_2 - x_1} \quad (6.4)$$

Door deze relaties achtereenvolgens te substitueren in (6.1) wordt verkregen

$$y = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \dots + b_5 X^5$$

Van de genoemde relaties is (6.2) reeds gegeven in (3.2a) en (6.4) in (2.4). Er resteert dus nog het verband (6.3) nader vast te stellen voor elke i , wat algemeen voor elke waarde van n kan plaatsvinden.

$$\boxed{i = 0}$$

Dit is het eenvoudigste geval. Er volgt namelijk uit de gegeven substituties (3.1) dat voor elk van de kentallen van ξ_0 , voorgesteld door $K(\xi_0)$, geldt

$$\boxed{K(\xi_0) = 1} \quad (6.5)$$

dus onafhankelijk van x en n

$$\boxed{i = 1}$$

Voor ξ_1 werd geschreven (paragraaf 3)

$$\xi_1 = v_1 + \alpha \xi_0$$

waarin bleek dat (3.2)

$$\alpha = -\bar{x}$$

zodat er komt met tabel 2 en (6.5) de betrekking tussen de kentallen van vectoren

$$\boxed{K(\xi_1) = (x - \bar{x})} \quad x = 1, 2, \dots, n \quad (6.6)$$

De waarde van deze kentallen is dus nog slechts onafhankelijk van n

$$\boxed{i = 2}$$

Ook dit geval zal nog apart worden afgeleid

Uit (3.3) en (3.4) volgt

$$\xi_2 = v_2 - \frac{\sum x^2}{n} \xi_0 - \frac{\xi_1' v_2}{\xi_1' \xi_1'} \xi_1'$$

De scalaire grootheid λ_1 valt in de laatste term in teller en noemer weg en is voor $\lambda_0 = 1$, zodat kan worden geschreven:

$$\xi_2 = v_2 - \frac{\sum x^2}{n} \xi_0 - \frac{\xi_1 v_2}{\xi_1 \xi_1} \xi_1$$

Voor de kentallen van ξ_2 geldt nu dus, rekening houdend met (6.5) en (6.6) en tabel 2

$$K(\xi_2) = x^2 - \frac{\sum x^2}{n} - \frac{\sum (x - \bar{x}) x^2}{\sum (x - \bar{x})^2} (x - \bar{x}) \quad \text{met } x = 1, 2, \dots, n$$

Nu kan worden geschreven (zie Appendix 1)

$$\begin{aligned} \sum x &= \frac{1}{2}n(n+1) & \sum x^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ \sum x^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3} & \bar{x} &= \frac{\sum x}{n} = \frac{1}{2}(n+1) \end{aligned}$$

zodat

$$\begin{aligned} \sum (x - \bar{x})^2 &= \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{4}n(n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)}{12} \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \sum (x - \bar{x}) x^2 &= \sum x^3 - \bar{x} \sum x^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{1}{2}(n+1) \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)^2(n-1)}{12} \end{aligned}$$

tenslotte

$$\begin{aligned} K(\xi_2) &= x^2 - \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{12}{n(n+1)(n-1)} \frac{n(n+1)^2(n-1)}{12} (x - \bar{x}) \\ &= (x - \bar{x})^2 + 2x\bar{x} - \bar{x}^2 - \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - (n+1)(x - \bar{x}) \\ &= (x - \bar{x})^2 + (n+1)x - \frac{(n+1)^2}{4} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - (n+1)x + \frac{(n+1)^2}{2} \end{aligned}$$

zodat

$$K(\xi_2) = (x - \bar{x})^2 - \frac{n^2 - 1}{12}$$

Uit het bovenstaande blijkt dus achtereenvolgens dat voor ξ_0 alle kentallen onafhankelijk van x en n zijn en de waarde 1 aannemen. De kentallen van ξ_1 zijn onafhankelijk van n en bestaan uit de x -waarden verminderd met \bar{x} . Voor ξ_2 en volgenden geldt dat de kentallen afhankelijk zijn van x en n .

Voor ξ_3 zou verder gebruik moeten worden gemaakt van de betrekking

$$\sum x^4 = \frac{n}{30} (n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$$

FISHER en YATES [1957, pagina 31] geven een recursieformule waarmee de functies voor de kentallen worden gevonden, namelijk:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

.....

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

.....

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

.....

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$K(\xi_0) = 1$$

$$K(\xi_1) = (x - \bar{x}) \quad , \quad x = 1, 2, \dots, n$$

$$K(\xi_{r+1}) = K(\xi_1) K(\xi_r) - \frac{r^2(n^2 - r^2)}{4(4r^2 - 1)} K(\xi_{r-1}) \quad , \quad r = 1, 2, \dots$$

Achtereenvolgens ontstaan hieruit

$$K(\xi_0) = 1$$

$$K(\xi_1) = (x - \bar{x})$$

$$K(\xi_2) = (x - \bar{x})^2 - \frac{n^2 - 1}{12}$$

$$K(\xi_3) = (x - \bar{x})^3 - \frac{3n^2 - 7}{20} (x - \bar{x})$$

$$K(\xi_4) = (x - \bar{x})^4 - \frac{3n^2 - 13}{14} (x - \bar{x})^2 + \frac{3(n^2 - 1)(n^2 - 9)}{560}$$

$$K(\xi_5) = (x - \bar{x})^5 - \frac{5n^2 - 7}{18} (x - \bar{x})^3 + \frac{15n^4 - 230n^2 + 407}{1008} (x - \bar{x})$$

enz. .

Daar dus tevens uit (6.2) volgt dat

$$K(\xi_i') = \lambda_i K(\xi_i)$$

kan met behulp van (6.4) de vergelijking

$$y = A_0 + A_1 \xi_1' + A_2 \xi_2' + \dots + A_5 \xi_5'$$

worden omgerekend in

$$y = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \dots + b_5 X^5$$

waarmee y in de oorspronkelijke eenheden X is uitgedrukt. .

10

1. The function $f(x) = \frac{1}{x^2}$ is defined for $x > 0$. Find the area under the curve from $x = 1$ to $x = 4$.

2. The function $f(x) = \frac{1}{x^2}$ is defined for $x > 0$. Find the area under the curve from $x = 1$ to $x = 4$.

3. The function $f(x) = \frac{1}{x^2}$ is defined for $x > 0$. Find the area under the curve from $x = 1$ to $x = 4$.

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2} dx = \int_1^4 x^{-2} dx$$

$$= \left[-x^{-1} \right]_1^4$$

$$= \left[-\frac{1}{x} \right]_1^4 = \left(-\frac{1}{4} \right) - \left(-\frac{1}{1} \right)$$

$$= -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

ANSWER

1. The area under the curve is $\frac{3}{4}$.

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2} dx = \frac{3}{4}$$

2. The area under the curve is $\frac{3}{4}$.

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2} dx = \frac{3}{4}$$

3. The area under the curve is $\frac{3}{4}$.

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2} dx = \frac{3}{4}$$

4. The area under the curve is $\frac{3}{4}$.

Appendix 1. De som van een aantal termen van hogere rekenkundige reeksen

Bij het oplossen van differentie-vergelijkingen wordt gebruikgemaakt van de volgende operatoren [LEVY and LESSMAN, 1959]

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$$

$$E^m y_t = y_{t+m}$$

$$\Delta^{-1} y_t = \sum_1^{n-1} y_t + \text{Constante}$$

Met als bijzondere eigenschappen

$$\Delta \equiv E - 1$$

$$\Delta^{-1} \Delta \equiv 1$$

Indien,

$$S_n = \sum_1^n y_t$$

is in het bijzonder

$$\Delta S_n = y_{n+1}$$

Voor een rekenkundige reeks van de p^e orde geldt:

$$\Delta^{p+1} y_t \equiv 0 \tag{1}$$

Wordt nu gevraagd naar de som van n termen van een rekenkundige reeks van de p^e orde, dan kan deze som in de oorspronkelijke reeks worden uitgedrukt met

$$\Delta S_n = y_{n+1} \tag{2}$$

waarin n een (willekeurig) rangnummer van de termen voorstelt.

Er volgt nu dus uit (2)

$$\Delta S_n = E^n y_1 = (1 + \Delta)^n y_1$$

$$\Delta^{-1} \Delta S_n = \Delta^{-1} (1 + \Delta)^n y_1 + \text{Constante}$$

Daar de som van n = 0 termen ook gelijk is aan nul moet

$$S_0 = 0 = \Delta^{-1} y_1 + \text{Constante}$$

zodat tenslotte, na invulling van de waarde van de Constante, ontstaat

$$S_n = \Delta^{-1} [(1 + \Delta)^n y_1 - y_1]$$

hetgeen uitgeschreven wordt

$$S_n = \binom{n}{1} y_1 + \binom{n}{2} \Delta y_1 + \binom{n}{3} \Delta^2 y_1 + \dots + \binom{n}{p+1} \Delta^p y_1$$

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

waarna de volgende termen door (1) identiek 0 zijn.

Uitgeschreven wordt de betrekking [WILJENES, pagina 69]

$$S_n = ny_1 + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} \Delta y_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \Delta^2 y_1 + \dots$$

Is de y-reeks gegeven dan kan door het opstellen van een differentie-reeks elke benodigde $\Delta^i y_1$ worden berekend. Zonodig kan rechtstreekse berekening volgen uit

$$\Delta y_1 = (E - 1)y_1 = y_2 - y_1$$

$$\Delta^2 y_1 = (E - 1)^2 y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1$$

$$\Delta^3 y_1 = (E - 1)^3 y_1 = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1$$

enz.

Voor

$$S_n = \sum_1^n k^3$$

wordt dus verkregen

n	k^3	S_n	y_n	Δy_n	$\Delta^2 y_n$	$\Delta^3 y_n$
0		0	1			
1	1	1	8	7		
2	8	9	27	19	12	6
3	27	36	64	37	18	6
4	64	100	125	61	24	
5	125	225				

Zodat de algemene formule voor de somreeks luidt:

$$S_n = n \cdot 1 + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} \cdot 7 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 12 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 6$$

waaruit na enige herleiding volgt

$$S_n = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$$

Appendix 2. De variantie-analyse

In het choleski-schema ontstaat, door de gevolgde rekenwijze, een orthogonalisatie van de basisvectoren [STOL, 1962, pagina 4 e.v.]. Dit geschiedt dus zonder de basisvectoren zelf uit te rekenen. Daar in het algemeen de basisvectoren een willekeurige reeks getallen als kentallen hebben is dit een groot voordeel van de methode.

De basisvectoren van orthogonale polynomia hebben echter kentallen die aan bijzondere, voor elk probleem weer dezelfde, voorwaarden voldoen. Hierdoor biedt het voor deze gevallen juist voordeel de georthogonaliseerde vectoren zelf uit te rekenen.

Dat bij de variantie-analyse steeds van het georthogonaliseerde stelsel gebruik moet worden gemaakt volgt nog uit onderstaande beschouwing.

In figuur 5 wordt een door de basisvectoren v_0 en v_1 opgespannen grondvlak gegeven. De loodrechte projectie van de vector q op het effect voorgesteld door v_0 wordt weergegeven door y_1 . Die van q op het grondvlak door y_2 .

De effecten v_0 en v_1 zijn niet orthogonaal, zodat er een correlatie in het grondvlak optreedt, met correlatiecoëfficiënt $r = \cos \varphi$. Dit houdt dus in dat v_1 een component heeft langs v_0 en dus kan worden ontbonden in twee componenten waarvan er een loodrecht v_0 staat, namelijk ξ_{v_1} (zie figuur 5). De component die langs v_0 valt draagt niets bij aan de verklaring van de vector q daar dit reeds geheel door het effect v_0 zelf wordt gedaan, wat het voetpunt y_1 opleverde.

De projectie van q op het grondvlak (y_2) is ontbonden in

$$y_2 = A_0 v_0 + A_1 v_1$$

Door de correlatie is de afname van de kwadraatsom tengevolge van het effect v_1 niet $(A_1 v_1)^2$ doch minder namelijk

$$A_1^2 (v_1 v_1) (1 - r^2)$$

wat uit de meetkundige voorstelling van figuur 5 direct volgt.

De variantie-analyse is dus

$$qq = (A_0 v_0 + A_1 \sqrt{v_1 v_1} r)^2 + A_1^2 (v_1 v_1) \sin^2 \varphi + y_{\text{toeval}}^2$$

wat uitgewerkt weer oplevert

$$\begin{aligned} qq &= A_0^2 v_0 v_0 + 2A_0 A_1 \sqrt{v_0 v_0} \sqrt{v_1 v_1} \cos \varphi + A_1^2 v_1 v_1 + y_{\text{toeval}}^2 \\ &= (A_0 v_0 + A_1 v_1)^2 + y_{\text{toeval}}^2 \\ &= y_2^2 + y_{\text{toeval}}^2 \end{aligned}$$

Opgemerkt moet nogmaals worden dat de uitslag van de variantie-analyse in een georthogonaliseerd stelsel niet afhankelijk is van de volgorde waarin kwadraten worden afgesplitst (Pythagoras). In het niet-georthogonaliseerde stelsel is dit wel het geval.

Dit houdt dus in dat de volgorde waarin orthogonalisatie plaatsvindt, respectievelijk de volgorde van

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry should be supported by a valid receipt or invoice. This ensures transparency and allows for easy verification of the data.

In the second section, the author details the various methods used to collect and analyze the data. This includes both manual data entry and the use of specialized software tools. The goal is to ensure that the data is both accurate and easy to interpret.

The third part of the document provides a detailed breakdown of the results. It shows how the data was processed and what the key findings were. The author notes that the results are consistent with the initial hypotheses and provide valuable insights into the system's performance.

Finally, the document concludes with a summary of the findings and a list of recommendations for future work. The author suggests that further research should be conducted to explore the long-term effects of the system and to identify any potential areas for improvement.

The data was collected over a period of six months, during which time the system was used in a controlled environment. The results show that the system is capable of handling a large volume of data with high accuracy and efficiency.

Conclusion

The results of this study demonstrate that the proposed system is a viable solution for the problem at hand. It provides a clear and concise way of presenting the data and allows for easy comparison of the results.

The data was collected from a variety of sources, including direct observation and interviews with the users. This ensures that the data is comprehensive and representative of the real-world situation.

The results are consistent with the findings of previous studies in this area. This suggests that the proposed system is a sound and effective solution.

The data was analyzed using a variety of statistical techniques, including regression analysis and correlation analysis. This allows for a detailed and thorough examination of the data.

The results show that the system is capable of handling a large volume of data with high accuracy and efficiency.

The data was collected over a period of six months, during which time the system was used in a controlled environment.

The results of this study demonstrate that the proposed system is a viable solution for the problem at hand. It provides a clear and concise way of presenting the data and allows for easy comparison of the results.

The data was collected from a variety of sources, including direct observation and interviews with the users.

oplossen van de onbekenden uit het choleski-schema van belang is. Slechts een volledige analyse zal het juiste inzicht in de gezochte samenhangen opleveren.

Waar met hogere graadsbenaderingen wordt gewerkt wordt veelal, zoals bij Taylor-ontwikkelingen, aangenomen dat de hogere graadseffecten steeds minder invloed op het eindresultaat zullen hebben. Dit is dan ook de reden dat bij orthogonale polynomia de volgorde van orthogonalisatie zodanig is dat de machten opklimmen.

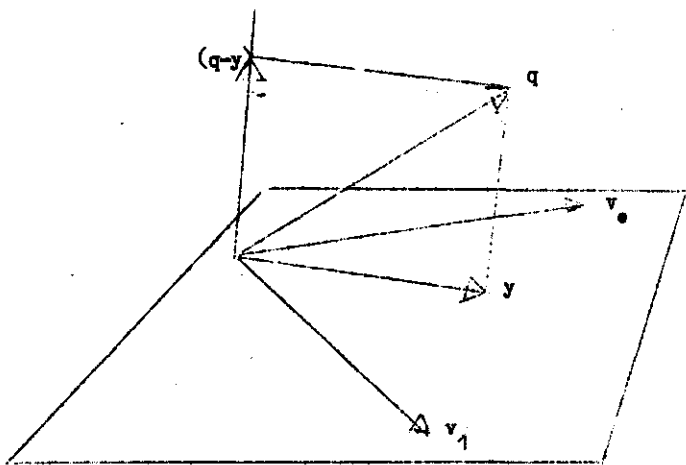
Literatuur

- ANDERSON, R.L. and E.E. HOUSEMAN, 1942 - Tables of orthogonal Polynomial Values extended to $N = 104$.
Research Bulletin 297, April 1942. Agr.Exp.Station Iowa State College of Agriculture and
Mechanic arts, Statistical Section. Ames, IOWA.
- FISHER, R.A. and F. YATES, 1957 - Statistical tables. Edinburgh.
(I.C.W. 11/105).
- HUETTE, 1959 - Mathematische Formeln und Tafeln. Berlin.
(I.C.W. 11/133).
- JONGE, H. DE, 1963 - Statische methoden voor psychologen en sociologen. Groningen.
(I.C.W. 11/220).
- LAAN, E. VAN DER en J.G.W. IGNATIUS - Lijnvereffening met behulp van orthogonale polynomia. Overdruk
uit Statistica Neerlandica.
(I.C.W. 11/19).
- STOL, Ph.Th., 1962 - Een meerkundige toelichting op het oplossen van normaalvergelijkingen.
I.C.W.-nota no.147).
- WIJDEWES, P. - Middel. Algebra, 7^e druk. Groningen.
(I.C.W. 11/5).
- LEVY, H. and F.LESSMAN, 1959 - Finite difference equations.-Londen. (I.C.W. 11/95).

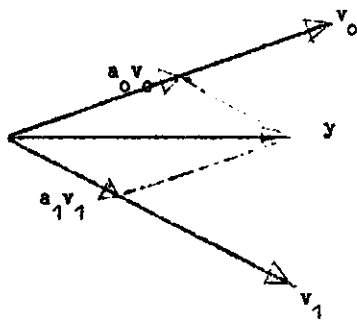
The following table shows the results of the experiment. The data indicates that the reaction rate is significantly higher at higher temperatures, which is consistent with the Arrhenius equation. The activation energy of the reaction was determined to be approximately 45 kJ/mol.

Temperature (K)	Rate Constant (s ⁻¹)
298	1.2 × 10 ⁻³
308	2.5 × 10 ⁻³
318	5.0 × 10 ⁻³
328	1.0 × 10 ⁻²
338	2.0 × 10 ⁻²

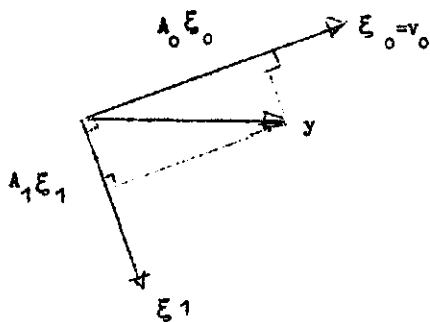
The linear relationship between the natural logarithm of the rate constant and the inverse of temperature is shown in the plot below. The slope of the line is negative, indicating an exothermic reaction.



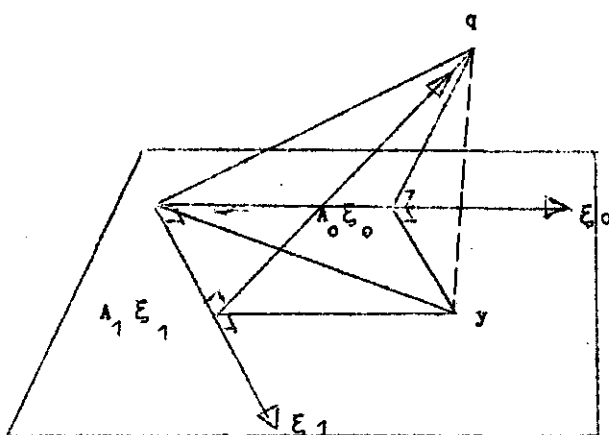
Figuur 1. De gegevens worden voorgesteld door de vector q . Het getekende vlak wordt opgespannen door de vectoren $M = (v_0 \ v_1)$. Een vector y in het vlak is een lineaire combinatie van de basis vectoren zodat $y = a_0 v_0 + a_1 v_1$ of met de vector $a = (a_0 \ a_1)$ in matrix vorm: $y = Ma$. Gezocht wordt naar die vector y waarvoor de afstand $(q - y)$ zo klein mogelijk is, wat het geval is wanneer $(q - y) \perp v_0$ en v_1 of samengevat $(q - y) \perp M$.



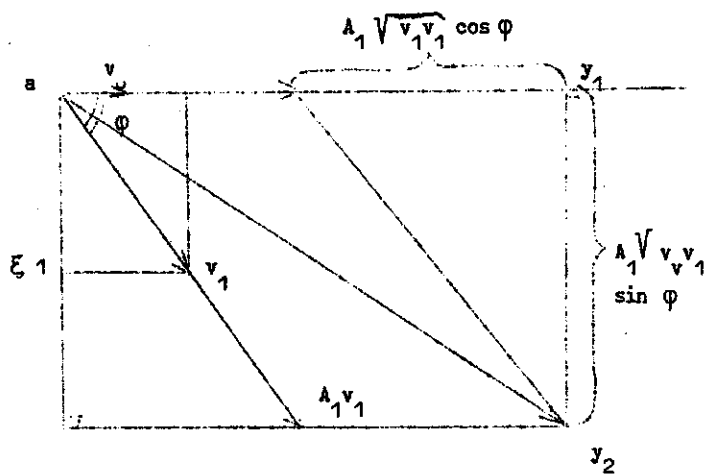
Figuur 2. De vector y is een lineaire combinatie van de basisvectoren v_0 en v_1 zodat $y = Ma$. De vector $a = (a_0 \ a_1)$ is de vector van regressie-coëfficiënten indien het eindpunt van y de loodrechte projectie van Y op het vlak is. De basisvectoren zijn niet orthogonaal.



Figuur 3. De basisvectoren zijn, in het vlak, georthogonaliseerd tot $E_0 (= v_0)$ en E_1 . De vector y is dezelfde gebleven, de regressie-coëfficiënten zijn veranderd. De vector y is nu ontbonden in de onafhankelijke (loodrechte) componenten $A_0 E_0$ en $A_1 E_1$.



Figuur 4. De vector Y is orthogonaal ontbonden zodat $(y - A_0 E_0) \perp E_0$ en daar tevens $(q - y) \perp E_0$ zal ook $(q - A_0 E_0) \perp E_0$. De lengte in het kwadraat van de vectoren kunnen nu zonder meer worden opgeteld. (Pythagoras). Op deze eigenschap berust de variantie-analyse. De totale kwadratsom is qq . Ten gevolge van "niveau" is de bijdrage $(A_0 E_0)^2$ en de rest (toeval) is dan $(q - A_0 E_0)^2$. Van deze kwadratsom is de bijdrage door lineaire regressie $(A_1 E_1)^2$, nu is de rest nog $(q - y)^2$. De projecterende vectoren buiten het vlak vormen dus steeds de toevalsresten.



Figuur 5. De figuur geeft het grondvlak weer van figuur 1. De vector y is ontbonden in de componenten $A_0 v_0$ en $A_1 v_1$. Het effect voorgesteld door de basisvector v_1 heeft een component langs v_0 , met andere woorden is met v_0 gesorrelerd met correlatie-coëfficiënt $\gamma = \cos \varphi$

- 1. The first step in the process of identifying a problem is to define the problem.
- 2. The second step is to identify the causes of the problem.
- 3. The third step is to identify the effects of the problem.
- 4. The fourth step is to identify the stakeholders who are affected by the problem.
- 5. The fifth step is to identify the resources that are available to solve the problem.