

Het inverteren van een machtreeks

Ph. Th. Stol

Nota's van het Instituut zijn in principe interne communicatiemid-
delen, dus geen officiële publikaties.

Hun inhoud varieert sterk en kan zowel betrekking hebben op een
eenvoudige weergave van cijferreeksen, als op een concluderende
discussie van onderzoeksresultaten. In de meeste gevallen zullen
de conclusies echter van voorlopige aard zijn omdat het onder-
zoek nog niet is afgesloten.

Aan gebruikers buiten het Instituut wordt verzocht ze niet in pu-
blikaties te vermelden.

Bepaalde nota's komen niet voor verspreiding buiten het Instituut
in aanmerking.

① 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.

1. Inleiding

In numerieke bewerkingen wordt vaak gebruik gemaakt van de mogelijkheid een gegeven functie in een machtreeks te ontwikkelen. Bijvoorbeeld

$$y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \quad (1)$$

Bij geschikte keuze van a_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) kan $f(x)$ met de voorgestelde reeksontwikkeling door een eindig aantal termen, met een vooraf bepaalde nauwkeurigheid, worden benaderd, vooropgesteld dat aan alle benodigde voorwaarden van convergentie voldaan is. In het volgende zal er van uitgegaan worden dat dit steeds het geval is.

Opgemerkt wordt dat de ontwikkeling (1) éénduidig is, dat wil zeggen dat er voor gegeven $f(x)$ slechts één reeks a_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) bestaat, (KNOPP, 1956, pag. 103).

Een volgend probleem bij een numerieke bewerking kan zijn de inverse functie te bepalen en (1) expliciet te maken in x , dus af te leiden

$$x = f^{-1}(y) = b_0 + b_1y + b_2y^2 + \dots + b_ny^n$$

en vast te stellen welke waarden aan de b 's moeten worden gegeven bij gegeven a 's uit (1).

In de numerieke wiskunde is dit probleem formeel opgelost. Ook nu is de oplossing éénduidig (KNOPP, pag. 120), waarbij slechts behoeft te worden aangenomen dat $a_1 \neq 0$. Voor het berekenen van de inversereeks wordt geen gebruik gemaakt van convergentievoorwaarden. Wil het eindresultaat betekenis hebben dan zal voor elk geval afzonderlijk een onderzoek naar de convergentie moeten worden uitgevoerd.

In deze nota zullen de oplossingsmethoden worden besproken en wordt een systematische wijze van werken gegeven voor het berekenen van de b_i 's. In de bijlagen wordt de uitwerking tot en met b_{10} gegeven.

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...

2. Oplossingen

Voor het gestelde probleem, het inverteren van een machtreeks, bestaat geen formule waarmee elke b direct in de gegeven a 's kan worden uitgedrukt (KNOPP, pag. 122, voetnoot 2). Slechts indien alle voorgaande b 's zijn opgelost kan de eerstvolgende b met een recursieformule worden uitgerekend. In symbolen is deze formule van een eenvoudige gedaante (15).

Achtereenvolgens wordt dus elke b uitgedrukt in de a 's, dus

$$b_i = g(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Een modificatie van de gegeven formule maakt het expliciet schrijven van de b 's iets eenvoudiger, doch bij het uitschrijven van de recursieformules ontstaan toch spoedig zeer lange vormen die dit type oplossing niet aantrekkelijk maken.

Aangetoond zal worden dat met behulp van enkele hulptabellen een wat prettiger verloopend oplossingsstelsel kan worden verkregen waarbij geen later weer wegvallende termen behoeven te worden uitgeschreven.

Vermeld kan worden dat HÜTTE (1959) op pagina 96 de oplossing geeft tot en met de 5e graad. Indien de functie luidt

$$y = bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \dots$$

dan zijn de co-factoren van y in $x = f^{-1}(y)$ achtereenvolgens

$$\begin{aligned} y &: && 1 \\ y^2 &: && -b \\ y^3 &: && (2b^2 - c) \\ y^4 &: && -(5b^3 - 5bc + d) \\ y^5 &: && (14b^4 - 21b^2c + 6bd + 3c^2 - e) \\ y^6 &: && -7(6b^5 - 12b^3c + 4b^2d + 4bc^2 - bc - cd + \frac{1}{7}f) \end{aligned}$$

Alvorens de algemene oplossingen te behandelen wordt nog eerst een voorbeeld gegeven om de gang van zaken toe te lichten.

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. This is essential for ensuring transparency and accountability in the organization's operations.

2. The second part of the document outlines the specific procedures and protocols that must be followed when conducting financial transactions. These procedures are designed to minimize the risk of errors and fraud.

3. The third part of the document provides a detailed overview of the organization's financial reporting requirements. This includes information on the frequency and format of reports, as well as the responsibilities of various departments.

4. The fourth part of the document discusses the role of internal controls in ensuring the integrity of the organization's financial data. Internal controls are designed to detect and prevent errors and fraud before they occur.

5. The fifth part of the document provides a summary of the key points discussed in the document. This summary is intended to provide a clear and concise overview of the document's content.

6. The sixth part of the document contains a list of references and sources used in the document. This list is provided to allow readers to access the original sources of the information presented in the document.

7. The seventh part of the document contains a list of appendices and supplementary materials. These materials provide additional information and data that are relevant to the document's content.

8. The eighth part of the document contains a list of contact information for the organization's management and staff. This information is provided to allow readers to reach out to the organization for more information or assistance.

9. The ninth part of the document contains a list of frequently asked questions and their answers. This list is provided to help readers understand the document's content and address any common questions or concerns.

10. The tenth part of the document contains a list of other related documents and resources. These documents and resources provide additional information and data that are relevant to the document's content.

11. The eleventh part of the document contains a list of other related documents and resources. These documents and resources provide additional information and data that are relevant to the document's content.

12. The twelfth part of the document contains a list of other related documents and resources. These documents and resources provide additional information and data that are relevant to the document's content.

13. The thirteenth part of the document contains a list of other related documents and resources. These documents and resources provide additional information and data that are relevant to the document's content.

14. The fourteenth part of the document contains a list of other related documents and resources. These documents and resources provide additional information and data that are relevant to the document's content.

15. The fifteenth part of the document contains a list of other related documents and resources. These documents and resources provide additional information and data that are relevant to the document's content.

16. The sixteenth part of the document contains a list of other related documents and resources. These documents and resources provide additional information and data that are relevant to the document's content.

3. Het inverteren van een vierde graads polynoom

Stel gegeven

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

Dit gegeven kan worden herleid tot (verondersteld is dat $a_1 \neq 0$)

$$Y = \frac{y - a_0}{a_1} = x + \frac{a_2}{a_1} x^2 + \frac{a_3}{a_1} x^3 + \frac{a_4}{a_1} x^4 \quad (2)$$

wat weer geschreven wordt tot

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \quad (2a)$$

met

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \end{aligned} \quad (2b)$$

Gevraagd te bepalen

$$x = b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + b_4y^4$$

De gang van zaken is nu als volgt, waarbij de ontwikkeling tot de vierde macht beperkt blijft, daar het gegeven (2a) ook niet verder gaat.

$$\begin{aligned} y &= a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \\ y^2 &= a_1^2x^2 + (2a_1a_2) x^3 + (2a_1a_3 + a_2^2) x^4 \\ y^3 &= a_1^3x^3 + (3a_1^2a_2) x^4 \\ y^4 &= a_1^4x^4 \end{aligned} \quad (3)$$

Deze ontwikkelingen worden nu in de volgende vorm geschreven ($a_1 = 1$)

$$\begin{aligned}x &= y - a_2 x^2 - a_3 x^3 - a_4 x^4 \\x^2 &= y^2 - (2a_1 a_2) x^3 - (2a_1 a_3 + a_2^2) x^4 \\x^3 &= y^3 - (3a_1^2 a_2) x^4 \\x^4 &= y^4\end{aligned}\tag{4}$$

Te beginnen met de eerste macht van x uit (4) wordt de oplossing als volgt gevonden

$$\boxed{x = y - a_2 x^2 - a_3 x^3 - a_4 x^4}\tag{5}$$

elimineer x^2 door substitutie en neem $a_1 = 1$

$$x = y - a_2 \{y^2 - (2a_2) x^3 - (a_2^2 + 2a_3) x^4\} - a_3 x^3 - a_4 x^4\tag{5a}$$

Verzamel naar de derde machten van x

$$\boxed{x = y - a_2 y^2 + (2a_2^2 - a_3) x^3 + (a_2^3 + 2a_2 a_3 - a_4) x^4}\tag{6}$$

elimineer x^3 door substitutie van de derde gelijkheid in (4):

$$x = y - a_2 y^2 + (2a_2^2 - a_3) \{y^3 - (3a_2) x^4\} + (a_2^3 + 2a_2 a_3 - a_4) x^4\tag{6a}$$

verzamel naar de vierde machten van x

$$\boxed{x = y - a_2 y^2 + (2a_2^2 - a_3) y^3 - (5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4) x^4}\tag{7}$$

elimineer x^4 door substitutie, waarmee de oplossing wordt verkregen

$$\boxed{x = y - a_2 y^2 + (2a_2^2 - a_3) y^3 - (5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4) y^4}\tag{8}$$

1. The first part of the document

is a list of the names of the

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

zodat dus

$$\begin{aligned}
b_0 &= 0 \\
b_1 &= 1 \\
b_2 &= -a_2 \\
b_3 &= 2a_2^2 - a_3 \\
b_4 &= -(5a_2^3 - 5a_2a_3 + a_4)
\end{aligned} \tag{9}$$

(zie oplossing uit HÜTTE in vorige paragraaf)

Een algemene oplossing kan bijvoorbeeld gebruik maken van machtverheffingsformules waardoor de co-factoren van y, y^2, y^3, y^4, \dots in (3) rechtstreeks gevonden kunnen worden. Het gecompliceerde van de oplossingen vindt zijn oorzaak in het feit dat deze co-factoren steeds met de reeds verkregen oplossingen moeten worden vermenigvuldigd. Dit is duidelijk in te zien door aan het voorbeeld de oplossing voor de vijfde macht alsnog toe te voegen, wat in de volgende paragraaf wordt uitgewerkt.

4. De inverse van een 5e graads polynoom als die van de 4e graad bekend is

De volgende bewerkingen moeten nu worden uitgevoerd

4.1. Berekeningen co-factoren van x^5 uit (3), welke zijn voor

$$\begin{array}{lll}
y : & a_5 & \text{stel } a_{1,5} \\
y^2 : & a_1a_4 + a_2a_3 + a_3a_2 + a_4a_1 & \text{stel } a_{2,5} \\
y^3 : & a_1 (a_1a_3 + a_2a_2 + a_3a_1) + a_2 (a_1a_2 + a_2a_1) + a_3 (a_1a_1) & \\
\text{of} & a_1 (a_{2,4}) + a_2 (a_{2,3}) + a_3 (a_{2,2}) & \text{stel } a_{3,5} \\
y^4 : & a_1 (a_{3,4}) + a_2 (a_{3,3}) & \text{stel } a_{4,5} \\
y^5 : & a_1 (a_{4,4}) & \text{stel } a_{5,5}
\end{array}$$

(1)

10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

April 1951
The first of these is the fact that the
government has been unable to
bring about a general agreement
on the part of the public
regarding the need for a
new constitution. This is
due to the fact that the
government has failed to
take account of the views
of the people. It has
been too busy with its
own interests to listen
to the people. It has
been too busy with its
own interests to listen
to the people. It has
been too busy with its
own interests to listen
to the people.

101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200

The second of these is the fact that the
government has failed to
bring about a general agreement
on the part of the public
regarding the need for a
new constitution. This is
due to the fact that the
government has failed to
take account of the views
of the people. It has
been too busy with its
own interests to listen
to the people. It has
been too busy with its
own interests to listen
to the people. It has
been too busy with its
own interests to listen
to the people.

Het samenvattend symbool voor deze ontwikkelingen is dus als volgt gedefinieerd:

$$a^{\text{macht van } y, \text{ som indices}} \quad \text{of} \quad a^{\text{aantal } a\text{'s, som indices}} \quad (10)$$

4.2. Vermenigvuldiging met voorgaande oplossingen

Aan (5) wordt dus toegevoegd uit de ontwikkelingen van y^1 de term

$$- a_5 x^5 \quad \text{of, uitvoeriger, (zie (9)),} \quad - b_1 (a_{1,5}) x^5$$

Aan (5a) wordt bovendien toegevoegd uit de ontwikkeling van y^2 de term

$$(- a_2) \{ - (a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_3 a_2 + a_4 a_1) x^5 \}$$

zodat aan (6) verder wordt toegevoegd (zie(10))

$$+ a_2 (a_{2,5}) \quad \text{of, (zie (9)),:} \quad - b_2 (a_{2,5}) x^5$$

Aan(6a) wordt dan weer toegevoegd uit y^3 , de co-factor voor x^5

$$(2a_2^2 - a_3) \{ a_1 (a_{2,4}) + a_2 (a_{2,3}) + a_3 (a_{2,2}) \} x^5, \quad \text{of} \quad -b_3 (a_{3,5}) x^5$$

zodat aan (7) al toegevoegd is

$$- b_3 (a_{3,5}) - b_2 (a_{2,5}) - b_1 (a_{1,5})$$

Aan (8) wordt toegevoegd uit y^4 , de co-factor voor x^5

$$- (5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4) \{ - (a_{4,5}) \} x^5, \quad \text{of} \quad - b_4 (a_{4,5}) x^5$$

Uit (8) wordt dan tenslotte de co-factor b_5 gevonden door te verzamelen

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

naar 5e machten van x dus

$$b_5 = -a_5 - b_2 a_{2,5} - b_3 a_{3,5} - b_4 a_{4,5} \quad (11)$$

Een symmetrische uitdrukking is dan tenslotte

$$\boxed{b_5 a_{5,5} + b_4 a_{4,5} + b_3 a_{3,5} + b_2 a_{2,5} + b_1 a_{1,5} = 0} \quad (12)$$

Alvorens hieruit b_5 op te lossen enkele opmerkingen over het symbool $a_{i,j}$

5. Het gebruik van het symbool $a_{i,j}$

In (10) is het symbool $a_{i,j}$ gedefinieerd als een som van al die producten die uit i elementen a bestaan waarvan de som van de indices j is. De reeks is gebracht in een vorm (2) of (2a) waarvoor geldt dat

$$a_0 = 0 \quad \text{en} \quad a_1 = 1$$

Uit (9) volgt dan nog bovendien dat

$$b_0 = 0 \quad \text{en} \quad b_1 = 1$$

Voor het symbool $a_{i,j}$ gelden nu de volgende eigenschappen

5.1. $a_{i,j} = 1$ Namelijk voeg die aantallen van i elementen a samen waarvan de som van de indices i is. Bijvoorbeeld voor $a_{4,4}$ is er alvast één term die hieraan voldoet

$$a_1 a_1 a_1 a_1 = 1, \quad \sum i = 4$$

Voor het verkrijgen van de overige moet er dan minstens één element met index 0 bij zijn doch $a_0 = 0$ en deze termen leveren geen bijdrage meer in de som van de producten.

5.2. $a_{i,j} = 0$ indien $j < i$

Namelijk voeg i elementen a samen zodat de som van de indices j is. Daar j kleiner is dan i is er steeds minstens één element met index 0 bij doch $a_0 = 0$ en de som van producten dientengevolge ook.

6. De berekening van b_5 uit (11)

De berekening verloopt het vlotst door na uitschrijven van de samenvattende symbolen over te gaan op $a_1 = 1$, $a_2 = b$, $a_3 = c$, $a_4 = d$, enz.

Achtereenvolgens komt er dus

$$\begin{aligned} a_{1,5} &= a_5 = e \\ a_{2,5} &= a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_3 a_2 + a_4 a_1 = 2bc + 2d \\ a_{3,5} &= a_1 (a_{2,4}) + a_2 (a_{2,3}) + a_3 (a_{2,2}) \end{aligned}$$

waarin

$$\begin{aligned} a_{2,4} &= a_1 a_3 + a_2 a_2 + a_3 a_1 = b^2 + 2c \\ a_{2,3} &= a_1 a_2 + a_2 a_1 = 2b \\ a_{2,2} &= 1 \\ &= (b^2 + 2c) + b(2b) + c = 3b^2 + 3c \\ a_{4,5} &= a_1 (a_{3,4}) + a_2 (a_{3,3}) \end{aligned}$$

waarin

$$\begin{aligned} a_{3,4} &= a_1 (a_{2,3}) + a_2 (a_{2,2}) \\ &= a_1 (a_1 a_2 + a_2 a_1) + a_2 = 3b \\ a_{3,3} &= 1 \\ &= 3b + b = 4b \end{aligned}$$

1. The first part of the document is a list of names.

2. The second part of the document is a list of names.

3. The third part of the document is a list of names.

4. The fourth part of the document is a list of names.

5. The fifth part of the document is a list of names.

6. The sixth part of the document is a list of names.

7. The seventh part of the document is a list of names.

8. The eighth part of the document is a list of names.

9. The ninth part of the document is a list of names.

10. The tenth part of the document is a list of names.

11. The eleventh part of the document is a list of names.

12. The twelfth part of the document is a list of names.

13. The thirteenth part of the document is a list of names.

14. The fourteenth part of the document is a list of names.

15. The fifteenth part of the document is a list of names.

16. The sixteenth part of the document is a list of names.

17. The seventeenth part of the document is a list of names.

18. The eighteenth part of the document is a list of names.

Met de reeds gevonden waarden van b uit (9) namelijk

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 \\ b_2 &= -b \\ b_3 &= 2b^2 - c \\ b_4 &= -(5b^3 - 5bc + d) \end{aligned}$$

komt er dus voor (11) of (12):

$$b_5 = -e + b(2bc + 2d) - (2b^2 - c)(3b^2 + 3c) + (5b^3 - 5bc + d)(4b)$$

Wat in schema wordt uitgewerkt tot

e	b^2c	bd	b^4	c^2
- 1				
	+ 2	+ 2		
	- 6 + 3		- 6	+ 3
	- 20	+ 4	+ 20	
- 1	- 21	+ 6	+ 14	+ 3

en dus

$$b_5 = 14b^4 - 21b^2c + 6bd + 3c^2 - e$$

6. De algemene oplossing

Uit (12) volgt dat de algemene oplossing de volgende gedaante zal hebben:

$$b_n + b_{n-1} a_{n-1,n} + b_{n-2} a_{n-2,n} + \dots + b_3 a_{3,n} + b_2 a_{2,n} + a_n = 0 \quad (13)$$

Deze oplossing is een modificatie van die van KNOPP die de volgende af-

STATE OF NEW YORK

IN SENATE

January 14, 1934

REPORT

OF THE COMMISSIONERS OF

THE STATE OFFICE OF THE STATE ENGINEER

FOR THE YEAR ENDING DECEMBER 31, 1933

ALBANY: J. B. WOODWARD, STATE PRINTER

1934

STATE OF NEW YORK

OFFICE OF THE

COMMISSIONERS OF THE STATE ENGINEER

ALBANY

10 110

STATE OF NEW YORK
OFFICE OF THE
COMMISSIONERS OF THE STATE ENGINEER
ALBANY

REPORT OF THE COMMISSIONERS OF THE STATE ENGINEER FOR THE YEAR ENDING DECEMBER 31, 1933

STATE OF NEW YORK
OFFICE OF THE
COMMISSIONERS OF THE STATE ENGINEER
ALBANY

STATE OF NEW YORK
OFFICE OF THE
COMMISSIONERS OF THE STATE ENGINEER
ALBANY

leiding geeft (pag. 121).

Stel gegeven

$$y = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

met inverse

$$x = y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \dots$$

zodat geschreven kan worden

$$y = (y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \dots) + a_2 (y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \dots)^2 + \dots \quad (14)$$

waaruit volgt dat in het rechterlid alleen de term y moet overblijven en de co-factoren, verzameld naar gelijke machten van y , moeten dan de waarde 0 opleveren. Hieruit volgt nu dat zal moeten gelden voor de co-factor van

$$\begin{aligned} y^2: & \quad b_2 + a_2 = 0 \\ y^3: & \quad b_3 + a_2 (b_1 b_2 + b_2 b_1) + a_3 = 0 \\ & \quad \cdot \\ & \quad \cdot \\ & \quad \cdot \\ y^n: & \quad \boxed{b_n + a_2 b_{2,n} + a_3 b_{3,n} + \dots + a_{n-1} b_{n-1,n} + a_n = 0} \end{aligned} \quad (15)$$

Ook uit deze recursie formule volgt de waarde van b_n indien die van de $(n-1)$ voorafgaande b 's bekend zijn.

Opgemerkt wordt dat in (13) de omgekeerde substitutie heeft plaatsgevonden. Daar de b 's weer in de a 's moeten worden uitgedrukt verloopt de oplossing volgens (13) eenvoudiger, zoals kan worden geconcludeerd door de volgende uitwerking te vergelijken met de berekening van b_5 in paragraaf 5.

101

101

101

101

101

101

101

101

101

101

101

101

101

101

101

101

101

101

101

101

101

101

101

101

101

7. De berekening van b_5 uit (15)

De berekening verloopt als volgt:

$$b_5 = - a_2 b_{2,5} - a_3 b_{3,5} - a_4 b_{4,5} - a_5$$

afgeleid werd de ontwikkeling voor de $a_{i,j}$ in paragraaf 6 die nu dus voor $b_{i,j}$ wordt

$$b_{2,5} = 2b_2 b_3 + 2b_4$$

$$b_{3,5} = 3b_2^2 + 3b_3$$

$$b_{4,5} = 4b_2$$

en dus

$$b_5 = - a_2 (2b_2 b_3 + 2b_4) - a_3 (3b_2^2 + 3b_3) - a_4 (4b_2) - a_5$$

Invullen van de voorgaande oplossingen van b_i uit (9) en het noteren in enkele letters leidt tot

$$b_5 = - b \{ 2(-b)(2b^2 - c) + 2(-5b^3 + 5bc - d) \} - c \{ 3(-b)^2 + 3(2b^2 - c) \} + \\ - d \{ 4(-b) \} - e$$

Het vormen van producten van voorgaande oplossingen kan iets meer rekenwerk vergen dan in de vorige oplossing. De uitwerking wordt

$$b_5 = - b \{ - 14b^3 + 12bc - 2d \} - c \{ 9b^2 - 3c \} + 4bd - e$$

en dus weer

$$\boxed{b_5 = 14b^4 - 21b^2c + 6bd + 3c^2 - e}$$

PHILOSOPHY DEPARTMENT

PHILOSOPHY 301

PROFESSOR [Name]

[Faded text]

1998

[Faded text]

[Faded text]

[Faded text]

[Faded text]

[Faded text]

[Faded text]

[Faded text]

De beide type oplossingen kunnen dienen voor het uitvoeren van een controle op de uitgevoerde berekeningen.

Een derde berekeningsmogelijkheid wordt in de volgende paragrafen voorgesteld. Het uitwerken van de symbolen $a_{i,j}$ of $b_{i,j}$ is dan niet meer nodig, met enkele hulptabellen kan dit schematisch vooraf plaatsvinden. Wel blijft het noodzakelijk vermenigvuldiging met voorgaande oplossingen toe te passen.

8. Enkele hulpstellingen en definities

Per definitie geldt voor het volgende symbool

$$\binom{m}{r_1 \ r_2 \ r_3} = \frac{m!}{r_1! \ r_2! \ r_3!}$$

Een macht van een som van twee termen wordt nu als volgt ontwikkeld

$$(x + y)^3 = \sum_{r_1, r_2}^3 \binom{3}{r_1 \ r_2} x^{r_1} y^{r_2}, \quad \sum_{i=1}^{n=2} r_i = 3$$

uitgewerkt

$$\begin{aligned} & \binom{3}{0 \ 3} x^0 y^3 + \binom{3}{1 \ 2} x^1 y^2 + \binom{3}{2 \ 1} x^2 y^1 + \binom{3}{3 \ 0} x^3 y^0 \\ & = y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3 \end{aligned}$$

Nu nog eens voor een som van 4 termen van de volgende specifieke gedaante

$$\begin{aligned} & (ax + bx^2 + cx^3 + dx^4)^3 \\ & = \sum_{r_1, r_2, r_3, r_4}^3 \binom{3}{r_1 \ r_2 \ r_3 \ r_4} (ax)^{r_1} (bx^2)^{r_2} (cx^3)^{r_3} (dx^4)^{r_4}, \quad \sum_{i=1}^{n=4} r_i = 3 \end{aligned}$$

... ..

... ..

... ..

... ..

$$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

... ..

$$= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^4}$$

... ..

$$\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^4}$$

$$\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^4}$$

... ..

$$\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^4}$$

$$\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^4}$$

of

$$= \sum_{r_1, r_2, r_3, r_4}^3 \binom{3}{r_1 \ r_2 \ r_3 \ r_4} a_1^{r_1} a_2^{r_2} a_3^{r_3} a_4^{r_4} x^{r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 4r_4}$$

In het algemeen kan een dergelijke ontwikkeling als volgt worden geformuleerd.

$$\sum_{r_1, r_2, \dots, r_n}^m \binom{m}{r_1 \ r_2 \ \dots \ r_n} (a_1^{r_1} a_2^{r_2} \dots a_n^{r_n}) x^{r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n}, \quad \sum_{i=1}^n r_i = m$$

9. Uitwerking van de inversie

Het inverteren van de reeks (1) verloopt zoals in paragraaf 3 is aangegeven. Achtereenvolgens worden berekend

$$y, y^2, y^3, \dots, y^m$$

Uit deze uitdrukkingen worden dan achtereenvolgens gelijke machten van x afgeplitst. Zo bevat

y	de volgende machten van x:	1, 2, 3, 4, ..., n
y^2	de volgende machten van x:	2, 3, 4, ..., n, ...
y^3	de volgende machten van x:	3, 4, ..., n, ...
y^4	de volgende machten van x:	4, ..., n, ...
.	.	.
.	.	.
.	.	.
y^n	de volgende machten van x:	n, ...

waarbij de machten van x tot en met de n-de in rekening worden gebracht.

Bij ontwikkeling boven de vierde macht zijn dus onder andere alle co-fac-

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

toren van de vierde graads termen nodig. Deze worden als volgt verkregen

Uit y^1

$$r_1, r_2, \dots \binom{1}{r_1 \ r_2 \ \dots} \binom{r_1 \ r_2 \ \dots}{a_1 \ a_2 \ \dots} x^{r_1+2r_2+\dots}, \sum_1^n r_i = 1 \quad (16)$$

met als nevenvoorwaarde

$$r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = 4 \quad (17)$$

dit geeft de bijdrage

$$\binom{1}{0 \ 0 \ 0 \ 1} a_4 x^4 = \boxed{a_4 x^4}$$

Vervolgens uit y^2

$$r_1, r_2, \dots \binom{2}{r_1 \ r_2 \ \dots} \binom{r_1 \ r_2 \ \dots}{a_1 \ a_2 \ \dots} x^{r_1+2r_2+\dots}, \sum_1^n r_i = 2$$

weer met de nevenvoorwaarde dat de exponent van x gelijk aan 4 is

$$\binom{2}{0 \ 2 \ 0 \ 0} a_2^2 x^4 + \binom{2}{1 \ 0 \ 1 \ 0} a_1 a_3 x^4 = \boxed{(a_2^2 + 2a_1 a_3) x^4}$$

Vervolgens uit y^3 weer slechts één term

$$\binom{3}{2 \ 1 \ 0 \ 0} a_1^2 a_2 x^4 = \boxed{3a_1^2 a_2 x^4}$$

Tenslotte uit y^4 de term

$$\binom{4}{4 \ 0 \ 0 \ 0} a_1^4 x^4 = \boxed{a_1^4 x^4}$$

(ii) $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$

(iv) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$

(v) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$

(vi) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$

(vii) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$



Het blijkt dat de cofactoren hiermede vrij gemakkelijk kunnen worden verkregen en wel zonder het uitschrijven van alle samenstellende factoren. In feite wordt dit gedaan in de polynomiaal coëfficiënten. De uitwerking hiervan kan heel geschikt in tabelvorm plaatsvinden, hetgeen zelfs aanbeveling verdient daar op den duur de beide voorwaarden (16) en (17) tot een groot aantal mogelijkheden voert.

10. De oplossing in tabelvorm

De voorwaarden waaraan de exponenten r_i moeten voldoen voor het vinden van alle termen die tezamen de co-factor van n^e macht van x bepalen; uit y^1, y^2, \dots, y^m , zijn

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + \dots + r_n = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 4r_4 + \dots + nr_n = n$$

Dit systeem van twee vergelijkingen kan, na aftrekken, worden geschreven als volgt, waarin wordt gevraagd alle oplossingen te bepalen die voldoen aan:

$$r_2 + 2r_3 + 3r_4 + \dots + (n-1)r_n = n-1, n-2, n-3, \dots, n-m \quad (18)$$

en

$$r_1 = m - \sum_{i=2}^n r_i \geq 0 \quad (19)$$

dus

$$m \geq \sum_{i=2}^n r_i \quad (20)$$

Het opstellen van alle oplossingen verloopt nu in principe als volgt. Allereerst worden die oplossingen van (18) bepaald die een constante som tot uitkomst hebben. Teneinde er voor zorg te dragen geen oplossingen over te slaan wordt met de kleinste gelijke sommen begonnen en de tabel van rechts ingevuld

1. The first part of the document is a list of names of people who have been involved in the project. The names are listed in alphabetical order.

APPENDIX A

The second part of the document is a list of names of people who have been involved in the project. The names are listed in alphabetical order.

APPENDIX B

APPENDIX C

The third part of the document is a list of names of people who have been involved in the project. The names are listed in alphabetical order.

APPENDIX D

The fourth part of the document is a list of names of people who have been involved in the project. The names are listed in alphabetical order.

The fifth part of the document is a list of names of people who have been involved in the project. The names are listed in alphabetical order.

The sixth part of the document is a list of names of people who have been involved in the project. The names are listed in alphabetical order.

(zie onderstaande hulptabel waarin de procedure wordt toegelicht). Bijvoorbeeld bij het bepalen van de r_i 's waarvoor de som $\sum ir_{i+1} = 6$ wordt onder r_7 begonnen, en daarna teruggewerkt. Wordt bijvoorbeeld ingevuld $r_4 = 1$, dan moet dit nog worden aangevuld met $r_2 + 2r_3 = 6 - 3r_4 = 3$. De oplossingen voor dit geval staan reeds eerder uitgewerkt en kan worden overgeschreven uit het voorgaande gedeelte van de tabel.

In de bijlagen wordt een volledige tabel gegeven tot en met r_{12} .

Voorbeeld bepalen gelijke sommen $\sum ir_{i+1}$

gelijke som $\sum ir_{i+1}$	$r_2 + 2r_3 + 3r_4 + 4r_5$	$\sum r_i$	gelijke som $\sum ir_{i+1}$	$r_2 + 2r_3 + 3r_4 + 4r_5 + 5r_6 + 6r_7$	$\sum r_i$	
0	0	0	5	0 0 0 0 1	2	
				1 0 0 1		
				0 1 1		
1	1	1		2 0 1	3	
				1 2		
2	0 1	1		3 1	4	
	2			5		
3	0 0 1	1	6	0 0 0 0 0 1	1	
	1 1			1 0 0 0 1		2
	3			0 1 0 1		
4	0 0 0 1	1		2 0 0 1	3	
	1 0 1			0 0 2		2
	0 2			1 1 1		
	2 1			3 0 1		4
	4			2 2		
	4			4		4 1
	4	4	6	6		

Met behulp van deze tabel worden nog enkele volgende oplossingen voor b_i gegeven. Ter controle werden deze oplossingen ook met de eerder besproken methoden berekend. (Zie bijlagen)

Hoewel de hoeveelheid schrijfwerk voor het verkrijgen van verdere oplossingen aanmerkelijk toeneemt geeft de volgende rekenwijze de mogelijkheid op

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry should be supported by a valid receipt or invoice. This ensures transparency and allows for easy verification of the data.

The second part of the document details the various methods used to collect and analyze the data. It includes a list of the different types of surveys and interviews conducted, along with the specific questions asked.

The third part of the document presents the results of the data analysis. It shows the trends and patterns that emerged from the data, along with the statistical significance of the findings.

The fourth part of the document discusses the implications of the findings and provides recommendations for future research. It suggests that further studies should be conducted to explore the underlying causes of the observed trends and to develop effective strategies to address them.

Year	Q1	Q2	Q3	Q4	Total
2018	120	150	180	200	650
2019	130	160	190	210	690
2020	140	170	200	220	730
2021	150	180	210	230	770
2022	160	190	220	240	810
2023	170	200	230	250	850
2024	180	210	240	260	890
2025	190	220	250	270	930
2026	200	230	260	280	970
2027	210	240	270	290	1010
2028	220	250	280	300	1050
2029	230	260	290	310	1090
2030	240	270	300	320	1130

The fifth part of the document provides a summary of the key findings and conclusions. It highlights the most significant trends and the overall direction of the data over the period studied.

The sixth part of the document discusses the limitations of the study and the potential sources of error. It acknowledges that the data may not be perfectly representative of the entire population and that there may be some bias in the results.

The seventh part of the document provides a final conclusion and a list of references. It summarizes the main findings and provides a list of the sources used in the study.

een systematische wijze de co-factoren b van de inversereeks uit te drukken in de co-factoren a van de oorspronkelijke reeks.

Literatuur

KNOPP, K., 1956 - Infinite sequences and series. New York, Dover Publications
(translated by F. Bagemihl)

HÜTTE, 1959 - Mathematische formeln und Tafeln. Berlin (I.C.W. 11/133, p.96)

Aantekeningen bij de bijlagen

Bijlage 1

Deze bijlage bevat alle gelijke sommen t/m 10 volgens vergelijking (18): pag. 15. Deze hulptabel geeft dadelijk alle combinaties en machten van de a_i (= b, c, d, \dots) die in de inverse reeks voorkomen.

Bijlage 2

Deze bijlage bevat een schematisch rekenvoorbeeld voor het bepalen van b_6 met behulp van bijlage 1. De kolommen waarboven staat "Uit hulptabel, bijlage 1" worden het eerst ingevuld. Daarna wordt ingevuld de waarde van $(m - \sum r_i)$ en wordt het permutatiesymbool berekend volgens pag. 12 waarna de vorige oplossingen worden ingevuld. Tenslotte worden in tabelvorm de nieuwe termen met de voorgaande oplossingen vermenigvuldigd en vindt sommatie plaats.

Bijlage 3

Als bijlage 2 voor b_7 .

Bijlage 4

De berekening van b_6 volgens de oplossing van KNOPP (formule (15), pag. 10). Bij het toepassen van dit type oplossing kunnen nog met voordeel de deelresultaten $b_{i,j}$ apart berekend en verzameld worden (zie bijlage 5).

Bijlage 5

Enkele uitgewerkte en in a_i (= b, c, d, \dots) uitgedrukte ontwikkelingen van $b_{i,j}$.

... ..

...

... ..

... ..

...

...

... ..

...

... ..

...

...

...

... ..

...

... ..

...

Bijlage 6

In deze bijlage staan de co-factoren vermeld voor een inverse reeks tot en met y^{10} .

Ten einde de opsomming overzichtelijk te houden zijn de samenstellende termen in groepen bijeen gevoegd en wordt geschreven voor bijvoorbeeld b^3 , bc en d de meer algemene reeks b^2b , bc , b^0d . Een zekere regelmaat in het geheel valt niet te ontkennen, doch er is vanaf gezien deze nader te onderzoeken. Wel blijkt steeds dat in de n^e co-factor alle termen van de $(n-1)$ ste weer optreden, nu vermenigvuldigd met b en met andere constanten. Tevens komt dan weer een aantal nieuwe termen voor.

Deze bijlage geeft dus de oplossing van het probleem:

Indien gegeven is dat

$$y = x + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + gx^7 + hx^8 + ix^9 + jx^{10}$$

bepaal dan

$$x = y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + b_4 y^4 + \dots + b_{10} y^{10}$$

waarin $b_i = f_i$ (b, c, d, e, \dots, j) met $i = 2, 3, 4, \dots, 10$.

Voor elk speciaal geval zal nagegaan moeten worden of $x = x(y)$ convergeert en zo ja binnen welk interval dat het geval is. In deze nota is slechts de formele rekenwijze aangegeven.

1911

... ..

... ..

... ..

... ..

$$\frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

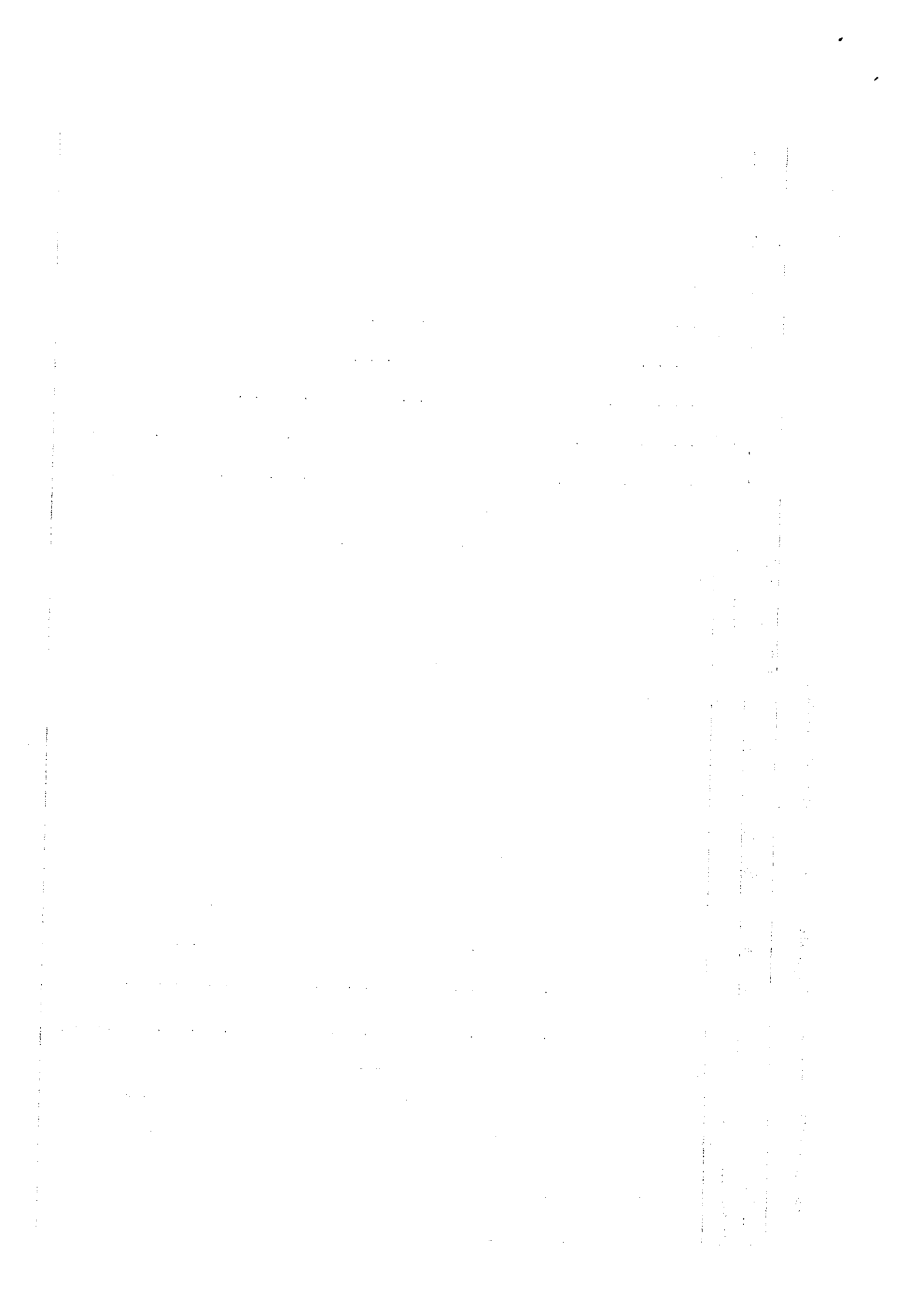
... ..

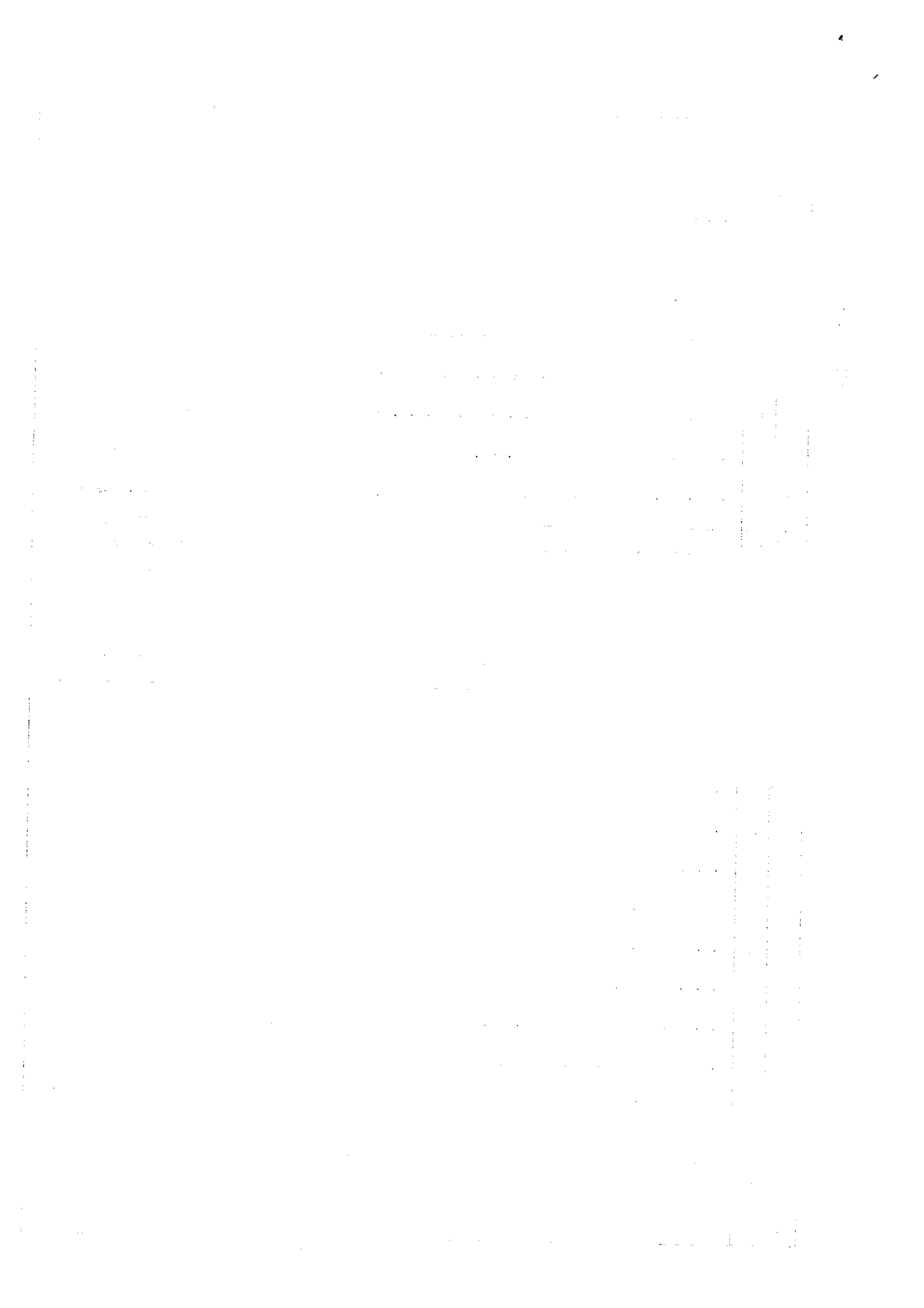
$$\frac{1}{x^3} = x^{-3} \Rightarrow -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

... ..

... ..

... ..





De berekening van de cofactor b_6 (d.n.v. tabellen)

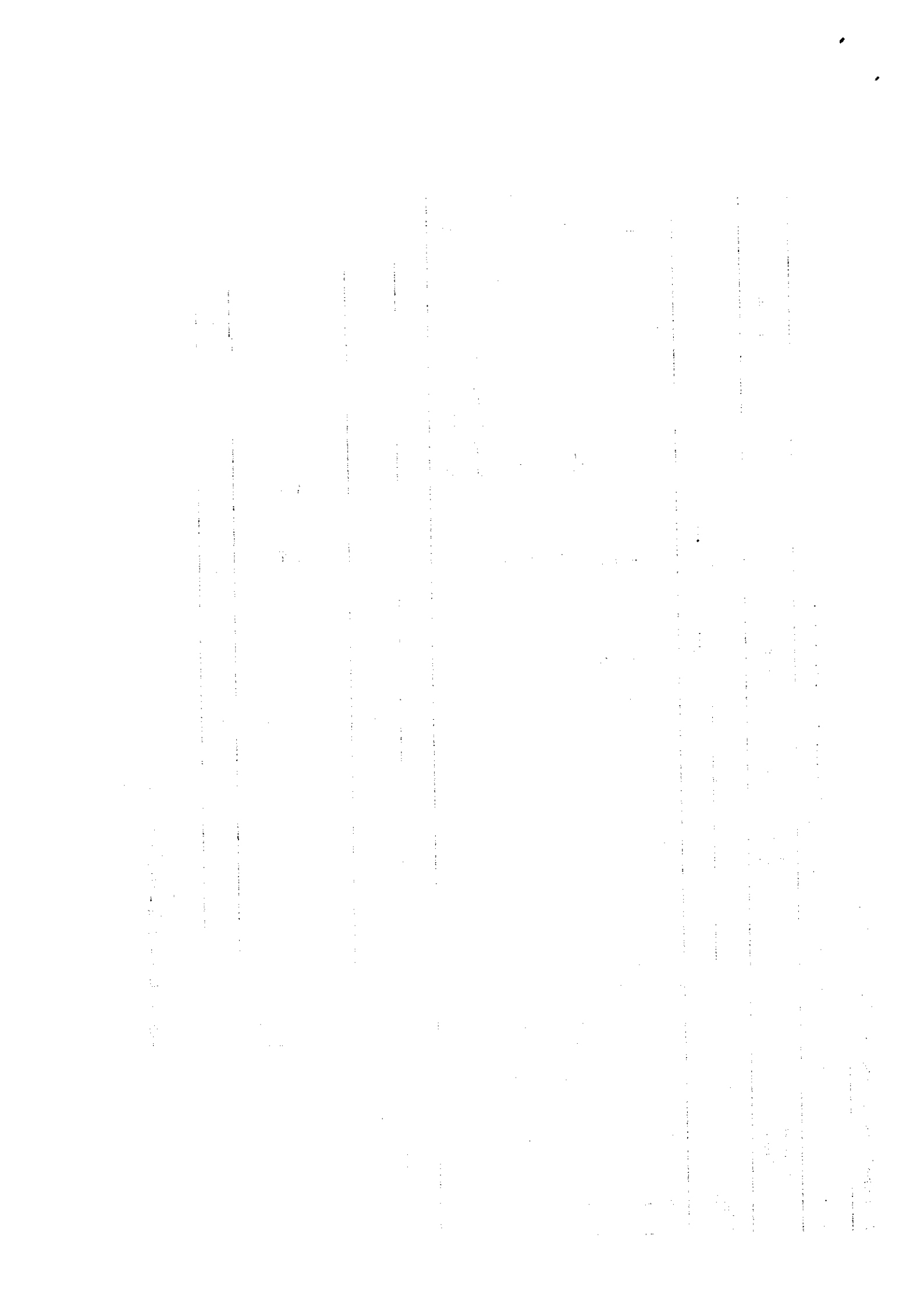
Bijlage 2.

$$(x^n):n = 6 \quad (y^n):m = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad \sum i r_{i+1} = n-1, r, \dots, n-m = 5, 4, 3, 2, 1, 0$$

$\sum i r_{i+1}$	Uit hulptabel bijlage 1		uit hulptabel bijlage 1						coeff.	termen (a = 1)	oplossingen	formule	symbol
	m	$\sum_{i=1}^m r_i$	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6					
5	1	1	a	b	c	d	e	f	1	f	1	b_1	
4	2	2	0	0	2	0	0	1	1	c^2	-b	b_2	
3	2	2	0	1	0	1	0	0	2	bd	$2b^2 - c$	b_3	
	1	1	1	0	0	0	1	0	2	e			
2	3	3	0	3	0	0	0	1	1	b^3	$-5b^3 + 5bc - d$	b_4	
	2	2	1	1	1	0	0	1	6	bc			
	1	1	2	0	0	1	0	0	3	d			
1	2	2	2	2	0	1	0	0	6	b^2	$14b^4 - 21b^2c + 6bd + 3c^2 - e$	b_5	
	1	1	4	1	1	0	0	0	4	c			
0	6	0	6	0	0	0	0	0	5	b	b_6 (gevraagd)	b_6	

uitwerking:											
nr.	f	bc^2	b^2d	be	b^5	b^3c	cd	b_6			
1	1										
2				-2							
3		-1	-2		2	12-1	-3				
4		-6	6		-30	30-20	-4				
5		20	-6		70	-105					
6		15	30	-5				1			
Σ	1	28	28	-7	42	-84	-7	1			= 0

en dus $b_6 = -42b^5 + 84b^3c - 28b^2d - 28bc^2 + 7be + 7cd - f$



D₉ berekening van de cofactor b₇ (d.m.v. tabellen)

Bijlage 3.

$(x^n)^n = 7$ $(y^m)^m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ $\sum ir_{i+1} = n-1, \dots, n-m = 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$

uit hulptabel bijlage 1		uit hulptabel bijlage 1							termen (a = 1)		oplossingen		
$\sum ir_{i+1}$	m	$\sum_{i=1}^m r_i$	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	coëff. ($r_1 r_2 \dots$)	$r_1 r_2$ a b ...	formule	symbool
		a	b	c	d	e	f	g	g				
6	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	g	1	b ₁
5	2	2	0	1	1	1	1	1		2	cd	-b	b ₂
	2	2	0	1	0	0	1			2	be		
	1	1	1	0	0	0	0	1		2	f		
4	3	3	0	2	1	1	1			3	b ² _c	2b ² -c	b ₃
	2	2	1	0	2					3	c ²		
	2	2	1	1	0	1				6	bd		
	1	1	2	0	0	0	1			3	e		
3	4	3	1	3	1	1	1			4	b ³	-5b ³ +5bc-d	b ₄
	2	2	2	1	1					12	bc		
	1	1	3	0	0	1				4	d		
2	5	2	3	2	2	1				10	b ²	14b ⁴ -21b ² c+6bd+3c ² -e	b ₅
	1	1	4	0	1					5	c		
1	6	1	5	1	1	1				6	b	-42b ⁵ +84b ³ c-28b ² d-28bc ² +7bc+7cb-f	b ₆
0	7	0	7	0						1		b ₇ (gevraagd)	

uitwerking:	nr.	g	bcd	b ² e	bf	b ⁴ bc	b ² c ²	c ³	ce	b ⁶	b ³ d	d ²	b ₇
	1	1											
	2		-2	-2	-2	6	-3+6	-3	-3		12		
	3		-6	6		20-60	60			-20	-4-20	-4	
	4		-12+20			-210+70	30-105	15	-5	140	60		
	5		30	-10		504	-168			-252	-168		
	6		42	42	-6								b ₇
	7												
	Σ	1	72	36	-8	330	-180	12	-8	-132	-120	-4	b ₇
													= 0

en dus

$$b_7 = 132b^6 - 330b^4c + 120b^3d - 36b^2e + 8bf + 180b^2c^2 - 72bcd - 12c^3 + 8ce + 4d^2 - g$$

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that this is essential for ensuring transparency and accountability in the organization's operations.

2. The second part of the document outlines the various methods and tools used to collect and analyze data. It highlights the need for consistent data collection practices and the use of advanced analytical techniques to derive meaningful insights from the data.

3. The third part of the document focuses on the role of technology in data management and analysis. It discusses how modern software solutions can streamline data collection, storage, and processing, thereby improving efficiency and accuracy.

4. The fourth part of the document addresses the challenges associated with data management, such as data quality, security, and privacy. It provides strategies to mitigate these risks and ensure that the data remains reliable and secure throughout its lifecycle.

5. The fifth part of the document concludes by summarizing the key findings and recommendations. It stresses the importance of a data-driven approach in decision-making and the need for continuous monitoring and improvement of data management processes.

De berekening van de cofactor $b_{6,6}$ uit $\sum_{i=1}^5 a_i b_{i,6} = 0$, $b_{i,i} = 1$, $b_{i,j} = 0$ voor $i > j$, $b_1 = 1$

$$b_{1,6} = b_6$$

$$\begin{aligned} b_{2,6} &= b_1(b_{1,5}) + b_2(b_{1,4}) + b_3(b_{1,3}) + b_4(b_{1,2}) + b_5(b_{1,1}) \\ &= b_1 b_5 + b_2 b_4 + b_3 b_3 + b_4 b_2 + b_5 b_1 \\ &= 2b_5 + 2b_2 b_4 + b_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{3,6} &= b_1(b_{2,5}) + b_2(b_{2,4}) + b_3(b_{2,3}) + b_4 \\ &= b_1(b_1 b_4 + b_2 b_3 + b_3 b_2 + b_4 b_1) + b_2(b_1 b_3 + b_2 b_2 + b_3 b_1) + b_3(b_1 b_2 + b_2 b_1) + b_4 \\ &= 2b_4 + 2b_2 b_3 + 2b_2 b_3 + b_3^2 + 2b_2 b_3 + b_4 \\ &= b_3^2 + 6b_2 b_3 + 3b_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{4,6} &= b_1(b_{3,5}) + b_2(b_{3,4}) + b_3 \\ &= b_1[b_1(b_{2,4}) + b_2(b_{2,3}) + b_3] + b_2[b_1(b_{2,3}) + b_2] + b_3 \\ &= b_1[b_1(b_1 b_3 + b_2 b_2 + b_3 b_1) + b_2(b_1 b_2 + b_2 b_1) + b_3] + b_2[b_1(b_1 b_2 + b_2 b_1) + b_2] + b_3 \\ &= 2b_3 + b_2^2 + 2b_2^2 + b_3 + 2b_2^2 + b_2^2 + b_3 \\ &= 6b_2^2 + 4b_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{5,6} &= b_1(b_{4,5}) + b_2 \\ &= b_1[b_1(b_{3,4}) + b_2] + b_2 \\ &= b_1\{b_1[b_1(b_{2,3}) + b_2] + b_2\} + b_2 \\ &= b_1\{b_1[b_1(b_1 b_2 + b_2 b_1) + b_2] + b_2\} + b_2 \\ &= 5b_2 \end{aligned}$$

$$b_{6,6} = 1$$

waaruit volgt $a_1 b_6 + a_2(2b_5 + 2b_2 b_4 + b_3^2) + a_3(b_2^2 + 6b_2 b_3 + 3b_4) + a_4(8b_2^2 + 4b_3) + a_5(5b_2) + a_6 = 0$
overgang op reeds verkregen oplossingen en enkele letters geeft

$$\begin{aligned} b_6 + b \left\{ 2(14b^4 - 21b^2 c + 6bd + 3c^2 - e) + 2(-b)(-5b^3 + 5bc - d) + (2b^2 - c)^2 \right\} + \\ + c \left\{ -b^3 - 6b(2b^2 - c) + 3(-5b^3 + 5bc - d) \right\} + d \left\{ 6b^2 + 4(2b^2 - c) \right\} - e(5b) + f = 0 \end{aligned}$$

dus

	b_6	b^5	$b^3 c$	$b^2 d$	bc^2	cd	be	f	
	1	28	-42	12	6		-2		
		10	-10	2					
		4	-4		1				
			-1-12		6				
			-15		15	-3			
				6+8		-4			
							-5	1	
Σ	1	+42	-84	28	+28	-7	-7	+1	= 0

... ..

...

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

...

... ..

... ..

... ..

... ..

...

... ..

... ..

Uitkomsten van deelberekeningen ten behoeve van de oplossing volgens formule (15) pag. 10.

$$b_{2,3} = -2b$$

$$b_{2,4} = 5b^2 - 2c$$

$$b_{3,4} = -3b$$

$$b_{2,5} = -14b^3 + 12bc - 2d$$

$$b_{3,5} = 9b^2 - 3c$$

$$b_{4,5} = -4b$$

$$b_{2,6} = 42b^4 - 56b^2c + 14bd + 7c^2 - 2e$$

$$b_{3,6} = -28b^3 + 21bc - 3d$$

$$b_{4,6} = 14b^2 - 4c$$

$$b_{5,6} = -5b$$

$$b_{2,7} = -132b^5 + 240b^3c - 72b^2d - 72bc^2 + 16cd + 16be - 2f$$

$$b_{3,7} = 90b^4 - 108b^2c + 24bd + 12c^2 - 3e$$

$$b_{4,7} = -48b^3 + 32bc - 4d$$

$$b_{5,7} = 20b^2 - 5c$$

$$b_{6,7} = -6b$$

enz.

Cofactoren b_i van de inverse machtreeks uitgedrukt in a_i (b, c, d, ..., j) van de oorspronkelijke reeks

i					
b_7	$+ 132 b^5 b$ $- 330 b^4 c$ $+ 120 b^3 d$ $- 36 b^2 e$ $+ 8 b f$ $- 1 b g$	$+ 180 b^2 c c$ $- 72 b c d$ $+ 8 b^0 c e$	$- 12 b^0 c^2 c$		$+ 4 b^0 d d$
b_8	$- 429 b^6 b$ $+ 1287 b^5 c$ $- 495 b^4 d$ $+ 165 b^3 e$ $- 45 b^2 f$ $+ 9 b g$ $- 1 b^0 h$	$- 990 b^3 c c$ $+ 495 b^2 c d$ $- 90 b c e$ $+ 9 b^0 c f$	$+ 165 b c^2 c$ $- 45 b^0 c^2 d$		$- 45 b d d$ $+ 9 b^0 d e$

b_1	1		
b_2	-1 b		
b_3	2 bb -1 b ⁰ c		
b_4	-5 b ² b + 5 bc -1 b ⁰ d		
b_5	+ 14 b ³ b - 21 b ² c + 6 b d - 1 b ⁰ e		+ 3 b ⁰ c c
b_6	- 42 b ⁴ b + 84 b ³ c - 28 b ² d + 7 b e - 1 b ⁰ f		- 28 b c c + 7 b ⁰ c d

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry should be supported by a valid receipt or invoice. This ensures transparency and allows for easy verification of the data.

In the second section, the author outlines the various methods used to collect and analyze the data. This includes both primary and secondary data collection techniques. The primary data was gathered through direct observation and interviews with key stakeholders. Secondary data was obtained from existing reports and databases.

The third section details the results of the data analysis. It shows a clear trend of increasing activity over the period studied. The data indicates that the majority of transactions occur during the middle of the day, with a significant peak in the afternoon.

Finally, the document concludes with a series of recommendations based on the findings. It suggests that the current reporting system should be updated to include more detailed tracking of individual transactions. Additionally, it recommends regular audits to ensure the accuracy of the records and to identify any potential areas of concern.

Bijlage 6, vervolg.

i											
b ⁹	+ 1430 b ⁷ - 5005 b ⁶ + 2002 b ⁵ - 715 b ⁴ + 220 b ³ - 55 b ² + 10 bh - 1 b ⁰ i	+ 5005 b ⁴ cc - 2000 b ³ cd + 660 b ² cc - 110 bcf + 10 b ⁰ ce	- 1450 b ² c ² e + 660 bc ² d - 55 b ⁰ c ² e	+ 55 b ⁰ cc + 55 b ⁰ cc	+ 330 b ² dd - 110 b ² de + 10 b ⁰ d ² f					+ 65 b ⁰ cc + 11 b ⁰ ef	+ 858 bcd ² - 132 b ⁰ cde
b ¹⁰	- 4862 b ⁸ + 19718 b ⁷ - 8008 b ⁶ + 3003 b ⁵ - 1001 b ⁴ + 205 b ³ - 66 b ² h + 11 bi - 1 b ⁰ j	- 24004 b ⁵ cc + 15015 b ⁴ cd - 4004 b ³ ce + 853 b ² cf - 132 beg + 11 b ⁰ ch	+ 10010 b ³ c ² e - 6006 b ² c ² d + 858 bc ² e - 66 b ⁰ c ² f	- 1001 bc ³ c + 286 b ⁰ c ² d	- 2002 b ³ dd + 858 b ² de - 132 b ⁰ df + 11 b ⁰ d ² g					- 65 b ⁰ cc + 11 b ⁰ ef	+ 858 bcd ² - 132 b ⁰ cde