'R CULTUURTECHNIEK EN WATERHUISHOUDING

NOTA no 297, d.d. 6 april 1965

Het inverteren van een machtreeks

Ph. Th. Stol

1. Inleiding

In numerieke bewerkingen wordt vaak gebruik gemaakt van de mogelijkheid een gegeven functie in een machtreeks te ontwikkelen. Bijvoorbeeld

$$y = f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \qquad (1)$$

Bij geschikte keuze van a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ kan $f(x)$ met de voorgestelde reeksontwikkeling door een eindig aantal termen, met een vooraf bepaalde nauwkeurigheid, worden benaderd, vooropgesteld dat aan alle benodigde voorwaarden van convergentie voldaan is. In het volgende zal er van uitgegaan worden dat dit steeds het geval is.

Opgemerkt wordt dat de ontwikkeling (1) éénduidig is, dat wil zeggen dat er voor gegeven $f(x)$ slechts één reeks a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ bestaat, (KNOPP, 1956, pag. 103).

Een volgend probleem bij een numerieke bewerking kan zijn de inverse functie te bepalen en (1) expliciet te maken in x, dus af te leiden

$$x = f^{-1}(y) = b_o + b_1y + b_2y^2 + \ldots + b_ny^n$$

en vast te stellen welke waarden aan de b's moeten worden gegeven bij gegeven a's uit (1).

In de numerieke wiskunde is dit probleem formeel opgelost. Ook nu is de oplossing éénduidig (KNOPP, pag. 120), waarbij slechts behoeft te worden aangenomen dat $a_1 \neq 0$. Voor het berekenen van de inversereeks wordt geen gebruik gemaakt van convergentievoorwaarden. Wil het eindresultaat betekenis hebben dan zal voor elk geval afzonderlijk een onderzoek naar de convergentie moeten worden uitgevoerd.

In deze nota zullen de oplossingsmethoden worden besproken en wordt een systematische wijze van werken gegeven voor het berekenen van de b_i's. In de bijlagen wordt de uitwerking tot en met b_{10} gegeven.

2. Oplossingen

Voor het gestelde probleem, het inverteren van een machtreeks, bestaat geen formule waarmee elke b direct in de gegeven a's kan worden uitgedrukt (KNOPP, pag. 122, voetnoot 2). Slechts indien alle voorgaande b's zijn opgelost kan de eerstvolgende b met een recursieformule worden uitgerekend. In symbolen is deze formule van een eenvoudige gedaante (15).

Achtereenvolgens wordt dus elke b uitgedrukt in de a's, dus

$$b_i = g\,(a_o, a_1, a_2, \ldots, a_n),\ i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Een modificatie van de gegeven formule maakt het expliciet schrijven van de b's iets eenvoudiger, doch bij het uitschrijven van de recursieformules ontstaan toch spoedig zeer lange vormen die dit type oplossing niet aantrekkelijk maken.

Aangetoond zal worden dat met behulp van enkele hulptabellen een wat prettiger verlopend oplossingssysteem kan worden verkregen waarbij geen later weer wegvallende termen behoeven te worden uitgeschreven.

Vermeld kan worden dat HÜTTE (1959) op pagina 96 de oplossing geeft tot en met de 5e graad. Indien de functie luidt

$$y = bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \ldots$$

dan zijn de co-factoren van y in $x = f^{-1}(y)$ achtereenvolgens

$$\begin{array}{ll}
y: & 1 \\
y^2: & -b \\
y^3: & (2b^2 - c) \\
y^4: & -(5b^3 - 5bc + d) \\
y^5: & (14b^4 - 21b^2c + 6bd + 3c^2 - e) \\
y^6: & -7\,(6b^5 - 12b^3c + 4b^2d + 4bc^2 - bc - cd + \frac{1}{7}f)
\end{array}$$

Alvorens de algemene oplossingen te behandelen wordt nog eerst een voorbeeld gegeven om de gang van zaken toe te lichten.

3. Het inverteren van een vierde graads polynomium

Stel gegeven

$$y = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

Dit gegeven kan worden herleid tot (verondersteld is dat $a_1 \neq 0$)

$$Y = \frac{y - a_o}{a_1} = x + \frac{a_2}{a_1}x^2 + \frac{a_3}{a_1}x^3 + \frac{a_4}{a_1}x^4 \qquad (2)$$

wat weer geschreven wordt tot

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \qquad (2a)$$

met

$$\begin{aligned} a_o &= 0 \\ a_1 &= 1 \end{aligned} \qquad (2b)$$

Gevraagd te bepalen

$$x = b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + b_4y^4$$

De gang van zaken is nu als volgt, waarbij de ontwikkeling tot de vierde macht beperkt blijft, daar het gegeven (2a) ook niet verder gaat.

$$\begin{aligned} y &= a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \\ y^2 &= a_1^2x^2 + (2a_1a_2)\,x^3 + (2a_1a_3 + a_2^2)\,x^4 \\ y^3 &= a_1^3x^3 + (3a_1^2a_2)\,x^4 \\ y^4 &= a_1^4x^4 \end{aligned} \qquad (3)$$

Deze ontwikkelingen worden nu in de volgende vorm geschreven ($a_1 = 1$)

$$\begin{aligned} x &= y - a_2x^2 - a_3x^3 - a_4x^4 \\ x^2 &= y^2 - (2a_1a_2)\ x^3 - (2a_1a_3 + a_2^2)\ x^4 \\ x^3 &= y^3 - (3a_1^2a_2)\ x^4 \\ x^4 &= y^4 \end{aligned} \tag{4}$$

Te beginnen met de eerste macht van x uit (4) wordt de oplossing als volgt gevonden

$$\boxed{x = y - a_2x^2 - a_3x^3 - a_4x^4} \tag{5}$$

elimineer x^2 door substitutie en neem $a_1 = 1$

$$x = y - a_2\ \{y^2 - (2a_2)\ x^3 - (a_2^2 + 2a_3)\ x^4\} - a_3x^3 - a_4x^4 \tag{5a}$$

Verzamel naar de derde machten van x

$$\boxed{x = y - a_2y^2 + (2a_2^2 - a_3)\ x^3 + (a_2^3 + 2a_2a_3 - a_4)\ x^4} \tag{6}$$

elimineer x^3 door substitutie van de derde gelijkheid in (4):

$$x = y - a_2y^2 + (2a_2^2 - a_3)\ \{y^3 - (3a_2)\ x^4\} + (a_2^3 + 2a_2a_3 - a_4)\ x^4 \tag{6a}$$

verzamel naar de vierde machten van x

$$\boxed{x = y - a_2y^2 + (2a_2^2 - a_3)\ y^3 - (5a_2^3 - 5a_2a_3 + a_4)\ x^4} \tag{7}$$

elimineer x^4 door substitutie, waarmee de oplossing wordt verkregen

$$\boxed{x = y - a_2y^2 + (2a_2^2 - a_3)\ y^3 - (5a_2^3 - 5a_2a_3 + a_4)\ y^4} \tag{8}$$

zodat dus

$$
\begin{aligned}
b_o &= 0 \\
b_1 &= 1 \\
b_2 &= -a_2 \\
b_3 &= 2a_2^2 - a_3 \\
b_4 &= -(5a_2^3 - 5a_2a_3 + a_4)
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

(zie oplossing uit HÜTTE in vorige paragraaf)

Een algemene oplossing kan bijvoorbeeld gebruik maken van machtverheffingsformules waardoor de co-factoren van y, y^2, y^3, y^4, ... in (3) rechtstreeks gevonden kunnen worden. Het gecompliceerde van de oplossingen vindt zijn oorzaak in het feit dat deze co-factoren steeds met de reeds verkregen oplossingen moeten worden vermenigvuldigd. Dit is duidelijk in te zien door aan het voorbeeld de oplossing voor de vijfde macht alsnog toe te voegen, wat in de volgende paragraaf wordt uitgewerkt.

4. De inverse van een 5e graads polynoom als die van de 4e graad bekend is

De volgende bewerkingen moeten nu worden uitgevoerd

4.1. Berekeningen co-factoren van x^5 uit (3), welke zijn voor

y :	a_5	stel $a_{1,5}$
y^2:	$a_1a_4 + a_2a_3 + a_3a_2 + a_4a_1$	stel $a_{2,5}$
y^3:	$a_1\ (a_1a_3+a_2a_2+a_3a_1) + a_2\ (a_1a_2+a_2a_1) + a_3\ (a_1a_1)$	
of	$a_1\ (a_{2,4}) + a_2\ (a_{2,3}) + a_3\ (a_{2,2})$	stel $a_{3,5}$
y^4:	$a_1\ (a_{3,4}) + a_2\ (a_{3,3})$	stel $a_{4,5}$
y_5:	$a_1\ (a_{4,4})$	stel $a_{5,5}$

Het samenvattend symbool voor deze ontwikkelingen is dus als volgt gedefinieerd:

$$a_{\text{macht van y, som indices}} \quad \text{of} \quad a_{\text{aantal a's, som indices}} \tag{10}$$

4.2. Vermenigvuldiging met voorgaande oplossingen

Aan (5) wordt dus toegevoegd uit de ontwikkelingen van y^1 de term

$$- a_5 x^5 \quad \text{of, uitvoeriger, (zie (9)),} \quad - b_1 \, (a_{1,5}) \, x^5$$

Aan (5a) wordt bovendien toegevoegd uit de ontwikkeling van y^2 de term

$$(- a_2) \, \{- (a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_3 a_2 + a_4 a_1) \, x^5\}$$

zodat aan (6) verder wordt toegevoegd (zie(10))

$$+ a_2 \, (a_{2,5}) \quad \text{of, (zie (9)),:} \quad - b_2 \, (a_{2,5}) \, x^5$$

Aan(6a) wordt dan weer toegevoegd uit y^3, de co-factor voor x^5

$$(2a_2^2 - a_3) \, [\, \{a_1(a_{2,4}) + a_2(a_{2,3}) + a_3(a_{2,2})\} \,] \, x^5, \quad \text{of} \quad -b_3(a_{3,5}) \, x^5$$

zodat aan (7) al toegevoegd is

$$- b_3 \, (a_{3,5}) - b_2 \, (a_{2,5}) - b_1 \, (a_{1,5})$$

Aan (8) wordt toegevoegd uit y^4, de co-factor voor x^5

$$- (5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4) \, \{- (a_{4,5})\} \, x^5, \quad \text{of} \quad - b_4 \, (a_{4,5}) \, x^5$$

Uit (8) wordt dan tenslotte de co-factor b_5 gevonden door te verzamelen

naar 5e machten van x dus

$$b_5 = - a_5 - b_2 a_{2,5} - b_3 a_{3,5} - b_4 a_{4,5} \qquad (11)$$

Een symmetrische uitdrukking is dan tenslotte

$$\boxed{b_5 a_{5,5} + b_4 a_{4,5} + b_3 a_{3,5} + b_2 a_{2,5} + b_1 a_{1,5} = 0} \qquad (12)$$

Alvorens hieruit b_5 op te lossen enkele opmerkingen over het symbool $a_{i,j}$

5. Het gebruik van het symbool $a_{i,j}$

In (10) is het symbool $a_{i,j}$ gedefinieerd als een som van al die producten die uit i elementen a bestaan waarvan de som van de indices j is. De reeks is gebracht in een vorm (2) of (2a) waarvoor geldt dat

$$a_o = 0 \qquad \text{en} \qquad a_1 = 1$$

Uit (9) volgt dan nog bovendien dat

$$b_o = 0 \qquad \text{en} \qquad b_1 = 1$$

Voor het symbool $a_{i,j}$ gelden nu de volgende eigenschappen

5.1. $a_{i,j} = 1$ Namelijk voeg die aantallen van i elementen a samen waarvan de som van de indices i is. Bijvoorbeeld voor $a_{4,4}$ is er alvast één term die hiermee voldoet

$$a_1 a_1 a_1 a_1 = 1, \qquad \sum i = 4$$

Voor het verkrijgen van de overige moet er dan minstens één element met index 0 bij zijn doch $a_o = 0$ en deze termen leveren geen bijdrage meer in de som van de producten.

5.2. $a_{i,j} = 0$ indien $j < i$

Namelijk voeg i elementen a samen zodat de som van de indices j is. Daar j kleiner is dan i is er steeds minstens één element met index 0 bij doch $a_o = 0$ en de som van producten dientengevolge ook.

6. De berekening van b_5 uit (11)

De berekening verloopt het vlotst door na uitschrijven van de samenvattende symbolen over te gaan op $a_1 = 1$, $a_2 = b$, $a_3 = c$, $a_4 = d$, enz.

Achtereenvolgens komt er dus

$$a_{1,5} = a_5 = e$$

$$a_{2,5} = a_1a_4 + a_2a_3 + a_3a_2 + a_4a_1 = 2bc + 2d$$

$$a_{3,5} = a_1\,(a_{2,4}) + a_2\,(a_{2,3}) + a_3\,(a_{2,2})$$

waarin

$$a_{2,4} = a_1a_3 + a_2a_2 + a_3a_1 = b^2 + 2c$$

$$a_{2,3} = a_1a_2 + a_2a_1 = 2b$$

$$a_{2,2} = 1$$

$$= (b^2 + 2c) + b\,(2b) + c = 3b^2 + 3c$$

$$a_{4,5} = a_1\,(a_{3,4}) + a_2\,(a_{3,3})$$

waarin

$$a_{3,4} = a_1\,(a_{2,3}) + a_2\,(a_{2,2})$$

$$= a_1\,(a_1a_2+a_2a_1) + a_2 = 3b$$

$$a_{3,3} = 1$$

$$= 3b + b = 4b$$

Met de reeds gevonden waarden van b uit (9) namelijk

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = -b$$

$$b_3 = 2b^2 - c$$

$$b_4 = -(5b^3 - 5bc + d)$$

komt er dus voor (11) of (12):

$$b_5 = -e + b(2bc + 2d) - (2b^2 - c)(3b^2 + 3c) + (5b^3 - 5bc + d)(4b)$$

Wat in schema wordt uitgewerkt tot

e	b^2c	bd	b^4	c^2
-1				
	$+2$	$+2$		
	$-6+3$		-6	$+3$
	-20	$+4$	$+20$	
-1	-21	$+6$	$+14$	$+3$

en dus

$$\boxed{b_5 = 14b^4 - 21b^2c + 6bd + 3c^2 - e}$$

6. De algemene oplossing

Uit (12) volgt dat de algemene oplossing de volgende gedaante zal hebben:

$$\boxed{b_n + b_{n-1}\, a_{n-1,n} + b_{n-2}\, a_{n-2,n} + \dots + b_3 a_{3,n} + b_2 a_{2,n} + a_n = 0} \qquad (13)$$

Deze oplossing is een modificatie van die van KNOPP die de volgende af-

leiding geeft (pag. 121).

Stel gegeven

$$y = x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

met inverse

$$x = y + b_2y^2 + b_3y^3 + \dots$$

zodat geschreven kan worden

$$y = (y + b_2y^2 + b_3y^3 + \dots) + a_2\,(y + b_2y^2 + b_3y^3 + \dots)^2 + \dots \qquad (14)$$

waaruit volgt dat in het rechterlid alleen de term y moet overblijven en de co-factoren, verzameld naar gelijke machten van y, moeten dan de waarde 0 opleveren. Hieruit volgt nu dat zal moeten gelden voor de co-factor van

y^2: $\quad b_2 + a_2 = 0$

y^3: $\quad b_3 + a_2\,(b_1b_2 + b_2b_1) + a_3 = 0$

.

.

.

$$y^n: \boxed{b_n + a_2b_{2,n} + a_3b_{3,n} + \dots + a_{n-1}\,b_{n-1,n} + a_n = 0} \qquad (15)$$

Ook uit deze recursie formule volgt de waarde van b_n indien die van de (n-1) voorafgaande b's bekend zijn.

Opgemerkt wordt dat in (13) de omgekeerde substitutie heeft plaatsgevonden. Daar de b's weer in de a's moeten worden uitgedrukt verloopt de oplossing volgens (13) eenvoudiger, zoals kan worden geconcludeerd door de volgende uitwerking te vergelijken met de berekening van b_5 in paragraaf 5.

7. De berekening van b_5 uit (15)

De berekening verloopt als volgt:

$$b_5 = - a_2 b_{2,5} - a_3 b_{3,5} - a_4 b_{4,5} - a_5$$

afgeleid werd de ontwikkeling voor de $a_{i,j}$ in paragraaf 6 die nu dus voor $b_{i,j}$ wordt

$$b_{2,5} = 2b_2 b_3 + 2b_4$$

$$b_{3,5} = 3b_2^2 + 3b_3$$

$$b_{4,5} = 4b_2$$

en dus

$$b_5 = - a_2 \ (2b_2 b_3 + 2b_4) - a_3 \ (3b_2^2 + 3b_3^3) - a_4 \ (4b_2) - a_5$$

Invullen van de voorgaande oplossingen van b_i uit (9) en het noteren in enkele letters leidt tot

$$b_5 = - b\{2(-b)(2b^2-c) + 2(-5b^3+5bc-d)\} - c\{3(-b)^2 + 3(2b^2-c)\} + \\ - d\{4(-b)\} - e$$

Het vormen van producten van voorgaande oplossingen kan iets meer rekenwerk vergen dan in de vorige oplossing. De uitwerking wordt

$$b_5 = - b \ \{- 14b^3 + 12bc - 2d\} - c \ \{9b^2 - 3c\} + 4bd - e$$

en dus weer

$$\boxed{b_5 = 14b^4 - 21b^2c + 6bd + 3c^2 - e}$$

De beide type oplossingen kunnen dienen voor het uitvoeren van een controle op de uitgevoerde berekeningen.

Een derde berekeningsmogelijkheid wordt in de volgende paragrafen voorgesteld. Het uitwerken van de symbolen $a_{i,j}$ of $b_{i,j}$ is dan niet meer nodig, met enkele hulptabellen kan dit schematisch vooraf plaatsvinden. Wel blijft het noodzakelijk vermenigvuldiging met voorgaande oplossingen toe te passen.

8. Enkele hulpstellingen en definities

Per definitie geldt voor het volgende symbool

$$\binom{m}{r_1\ r_2\ r_3} = \frac{m!}{r_1!\ r_2!\ r_3!}$$

Een macht van een som van twee termen wordt nu als volgt ontwikkeld

$$(x + y)^3 = \sum_{r_1,r_2}^{3} \binom{3}{r_1\ r_2} x^{r_1} y^{r_2}, \quad \sum_{i=1}^{n=2} r_i = 3$$

uitgewerkt

$$\binom{3}{0\ 3} x^o y^3 + \binom{3}{1\ 2} x^1 y^2 + \binom{3}{2\ 1} x^2 y^1 + \binom{3}{3\ 0} x^3 y^o$$

$$= y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3$$

Nu nog eens voor een som van 4 termen van de volgende specifieke gedaante

$$(ax + bx^2 + cx^3 + dx^4)^3$$

$$= \sum_{r_1,r_2,r_3,r_4}^{3} \binom{3}{r_1\ r_2\ r_3\ r_4} (ax)^{r_1} (bx^2)^{r_2} (cx^3)^{r_3} (dx^4)^{r_4}, \quad \sum_{i=1}^{n=4} r_i = 3$$

of

$$= \sum_{r_1,r_2,r_3,r_4}^{3} \binom{3}{r_1\ r_2\ r_3\ r_4} a^{r_1} b^{r_2} c^{r_3} d^{r_4}\ x^{r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 4r_4}$$

In het algemeen kan een dergelijke ontwikkeling als volgt worden geformuleerd.

$$\sum_{r_1,r_2,\ldots,r_n}^{m} \binom{m}{r_1\ r_2 \ldots r_n} (a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_n^{r_n})\ x^{r_1+2r_2+\ \ldots\ +nr_n},\ \sum_{i=1}^{n} r_i = m$$

9. Uitwerking van de inversie

Het inverteren van de reeks (1) verloopt zoals in paragraaf 3 is aangegeven. Achtereenvolgens worden berekend

$$y,\ y^2,\ y^3,\ \ldots,\ y^m$$

Uit deze uitdrukkingen worden dan achtereenvolgens gelijke machten van x afgeplitst. Zo bevat

y	de volgende machten van x:	1, 2, 3, 4, ..., n
y^2	de volgende machten van x:	2, 3, 4, ..., n, ...
y^3	de volgende machten van x:	3, 4, ..., n, ...
y^4	de volgende machten van x:	4, ..., n, ...
.	.	.
.	.	.
.	.	.
y^n	de volgende machten van x:	n, ...

waarbij de machten van x tot en met de n-de in rekening worden gebracht.

Bij ontwikkeling boven de vierde macht zijn dus onder andere alle co-fac-

toren van de vierde graads termen nodig. Deze worden als volgt verkregen

Uit y^1

$$\sum_{r_1,r_2,\ldots}^{1} \binom{1}{r_1\ r_2\ \ldots} \binom{r_1\ r_2}{a_1\ a_2\ \ldots} x^{r_1+2r_2+\ldots}, \sum_1^n r_i = 1 \tag{16}$$

met als nevenvoorwaarde

$$r_1 + 2r_2 + \ldots + nr_n = 4 \tag{17}$$

dit geeft de bijdrage

$$\binom{1}{0\ 0\ 0\ 1} a_4x^4 = \boxed{a_4x^4}$$

Vervolgens uit y^2

$$\sum_{r_1,r_2,\ldots}^{2} \binom{2}{r_1\ r_2\ \ldots} \binom{r_1\ r_2}{a_1\ a_2\ \ldots} x^{r_1+2r_2+\ldots}, \sum_1^n r_i = 2$$

weer met de nevenvoorwaarde dat de exponent van x gelijk aan 4 is

$$\binom{2}{0\ 2\ 0\ 0} a_2^2x^4 + \binom{2}{1\ 0\ 1\ 0} a_1a_3x^4 = \boxed{(a_2^2 + 2a_1a_3)x^4}$$

Vervolgens uit y^3 weer slechts één term

$$\binom{3}{2\ 1\ 0\ 0} a_1^2a_2x^4 = \boxed{3a_1^2a_2x^4}$$

Tenslotte uit y^4 de term

$$\binom{4}{4\ 0\ 0\ 0} a_1^4x^4 = \boxed{a_1^4x^4}$$

Het blijkt dat de cofactoren hiermede vrij gemakkelijk kunnen worden verkregen en wel zonder het uitschrijven van alle samenstellende factoren. In feite wordt dit gedaan in de polynomiaal coëfficiënten. De uitwerking hiervan kan heel geschikt in tabelvorm plaatsvinden, hetgeen zelfs aanbeveling verdient daar op den duur de beide voorwaarden (16) en (17) tot een groot aantal mogelijkheden voert.

10. De oplossing in tabelvorm

De voorwaarden waaraan de exponenten r_i moeten voldoen voor het vinden van alle termen die tezamen de co-factor van n^e macht van x bepalen; uit $y^1, y^2, \ldots, y^m$, zijn

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + \ldots + r_n = 1, 2, 3, \ldots, m$$

$$r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 4r_4 + \ldots + nr_n = n$$

Dit systeem van twee vergelijkingen kan, na aftrekken, worden geschreven als volgt, waarin wordt gevraagd alle oplossingen te bepalen die voldoen aan:

$$r_2 + 2r_3 + 3r_4 + \ldots + (n-1)\, r_n = n-1, n-2, n-3, \ldots, n-m \qquad (18)$$

en

$$r_1 = m - \sum_{i=2}^{n} r_i \geqslant 0 \qquad (19)$$

dus

$$m \geqslant \sum_{i=2}^{n} r_i \qquad (20)$$

Het opstellen van alle oplossingen verloopt nu in principe als volgt. Allereerst worden die oplossingen van (18) bepaald die een constante som tot uitkomst hebben. Teneinde er voor zorg te dragen geen oplossingen over te slaan wordt met de kleinste gelijke sommen begonnen en de tabel van rechts ingevuld

(zie onderstaande hulptabel waarin de procedure wordt toegelicht). Bijvoorbeeld bij het bepalen van de r_i's waarvoor de som $\sum ir_{i+1} = 6$ wordt onder r_7 begonnen, en daarna teruggewerkt. Wordt bijvoorbeeld ingevuld $r_4 = 1$, dan moet dit nog worden aangevuld met $r_2 + 2r_3 = 6 - 3r_n = 3$. De oplossingen voor dit geval staan reeds eerder uitgewerkt en kan worden overgeschreven uit het voorgaande gedeelte van de tabel.

In de bijlagen wordt een volledige tabel gegeven tot en met r_{12}.

Voorbeeld bepalen gelijke sommen $\Sigma\, ir_{i+1}$

gelijke som $\sum ir_{i+1}$	$r_2+2r_3+3r_4+4r_5$	$\sum r_i$	gelijke som ir_{i+1}	$r_2+2r_3+3r_4+4r_5+5r_6+6r_7$	$\sum r_i$
				0 0 0 0 1	
0	0	0	5	1 0 0 1	2
				0 1 1	2
1	1	1		2 0 1	3
				1 2	3
2	0 1	1		3 1	4
	2	2		5	5
3	0 0 1	1	6	0 0 0 0 0 1	1
	1 1	2		1 0 0 0 1	2
	3	3		0 1 0 1	2
				2 0 0 1	3
4	0 0 0 1	1		0 0 2	2
	1 0 1	2		1 1 1	3
	0 2	2		3 0 1	4
	2 1	3		2 2	4
	4	4		4 1	5
	4	4		6	6

Met behulp van deze tabel worden nog enkele volgende oplossingen voor b_i gegeven. Ter controle werden deze oplossingen ook met de eerder besproken methoden berekend. (Zie bijlagen)

Hoewel de hoeveelheid schrijfwerk voor het verkrijgen van verdere oplossingen aanmerkelijk toeneemt geeft de volgende rekenwijze de mogelijkheid op

een systematische wijze de co-factoren b van de inversereeks uit te drukken in de co-factoren a van de oorspronkelijke reeks.

Literatuur

KNOPP, K., 1956 - Infinite sequences and series. New York, Dover Publications (translated by F. Bagemihl)

HÜTTE, 1959 - Mathematische formeln und Tafeln. Berlin (I.C.W. 11/133, p.96)

Aantekeningen bij de bijlagen

Bijlage 1

Deze bijlage bevat alle gelijke sommen t/m 10 volgens vergelijking (18): pag. 15. Deze hulptabel geeft dadelijk alle combinaties en machten van de a_i (= b, c, d, ...) die in de inverse reeks voorkomen.

Bijlage 2

Deze bijlage bevat een schematisch rekenvoorbeeld voor het bepalen van b_6 met behulp van bijlage 1. De kolommen waarboven staat "Uit hulptabel, bijlage 1" worden het eerst ingevuld. Daarna wordt ingevuld de waarde van $(m - \Sigma r_i)$ en wordt het permutatiesymbool berekend volgens pag. 12 waarna de vorige oplossingen worden ingevuld. Tenslotte worden in tabelvorm de nieuwe termen met de voorgaande oplossingen vermenigvuldigd en vindt sommatie plaats.

Bijlage 3

Als bijlage 2 voor b_7.

Bijlage 4

De berekening van b_6 volgens de oplossing van KNOPP (formule (15), pag. 10). Bij het toepassen van dit type oplossing kunnen nog met voordeel de deelresultaten $b_{i,j}$ apart berekend en verzameld worden (zie bijlage 5).

Bijlage 5

Enkele uitgewerkte en in a_i (= b, c, d, ...) uitgedrukte ontwikkelingen van $b_{i,j}$.

Bijlage 6

In deze bijlage staan de co-factoren vermeld voor een inverse reeks tot en met y^{10}.

Ten einde de opsomming overzichtelijk te houden zijn de samenstellende termen in groepen bijeen gevoegd en wordt geschreven voor bijvoorbeeld b^3, bc en d de meer algemene reeks b^2b, bc, b^0d. Een zekere regelmaat in het geheel valt niet te ontkennen, doch er is vanaf gezien deze nader te onderzoeken. Wel blijkt steeds dat in de n^e co-factor alle termen van de (n-1)ste weer optreden, nu vermenigvuldigd met b en met andere constanten. Tevens komt dan weer een aantal nieuwe termen voor.

Deze bijlage geeft dus de oplossing van het probleem:

Indien gegeven is dat

$$\boxed{y = x + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + gx^7 + hx^8 + ix^9 + jx^{10}}$$

bepaal dan

$$\boxed{x = y + b_2\, y^2 + b_3\, y^3 + b_4\, y^4 + \ldots\ldots + b_{10}\, y^{10}}$$

waarin $b_i = f_i$ (b, c, d, e, ..., j) met i = 2, 3, 4, ..., 10.

Voor elk speciaal geval zal nagegaan moeten worden of x = x(y) convergeert en zo ja binnen welk interval dat het geval is. In deze nota is slechts de formele rekenwijze aangegeven.

Hulptabel voor gelijke sommen van $\sum_1 ir_{i+1}$. Alle r_i rechts van laatste cijfer zijn 0

$\sum_1 ir_{i+1}$ =(n-1), ..., 0	$\sum_2 r_i \leq m$	x r_2 1	r_3 2	r_4 3	r_5 4	r_6 5	r_7 6	r_8 7	r_9 8	r_{10} 9
0	0	.								
1	1	1								
2	1	.	1							
	2	2								
3	1	.	.	1						
	2	1	1							
	3	3								
4	1	.	.	.	1					
	2	1	.	1						
	2	.	2							
	3	2	1							
	4	4								
5	1	.	.	.	.	1				
	2	1	.	.	1					
	2	.	1	1						
	3	2	.	1						
	3	1	2							
	4	3	1							
	5	5								
6	1	.	.	.	.	.	1			
	2	1	.	.	.	1				
	2	.	1	.	1					
	3	2	.	.	1					
	2	.	.	2						
	3	1	1	1						
	4	3	.	1						
	3	.	3							
	4	2	2							
	5	4	1							
	6	6								

$\sum_1 ir_{i+1}$ =(n-1),..., 0	$\sum_2 r_i \leq m$	x r_2 1	r_3 2	r_4 3	r_5 4	r_6 5	r_7 6	r_8 7	r_9 8	r_{10} 9
7	1	.	.	.	.	.	.	1		
	2	1	.	.	.	.	1			
	2	.	1	.	.	1				
	3	2	.	.	.	1				
	2	.	.	1	1					
	3	1	1	.	1					
	4	3	.	.	1					
	3	1	.	2						
	3	.	2	1						
	4	2	1	1						
	5	4	.	1						
	4	1	3							
	5	3	2							
	6	5	1							
	7	7								
8	1	.	.	.	.	.	.	.	1	
	2	1	.	.	.	.	.	1		
	2	.	1	.	.	.	1			
	3	2	.	.	.	.	1			
	2	.	.	1	.	1				
	3	1	1	.	.	1				
	4	3	.	.	.	1				
	2	.	.	.	2					
	3	1	.	1	1					
	3	.	2	.	1					
	4	2	1	.	1					
	5	4	.	.	1					
	3	.	1	2						
	4	2	.	2						
	4	1	2	1						
	5	3	1	1						
	6	5	.	1						
	4	.	4							
	5	2	3							
	6	4	2							
	7	6	1							
	8	8								

$\sum_{1} ir_{i+1}$ =(n-1),...,0	$\sum_{2} r_i \leq m$	x r_2 1	r_3 2	r_4 3	r_5 4	r_6 5	r_7 6	r_8 7	r_9 8	r_{10} 9	r_{11} 10
9	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	
	2	1	.	.	.	.	.	.	1		
	2	.	1	.	.	.	.	1			
	3	2	.	.	.	.	.	1			
	2	.	.	1	.	.	1				
	3	1	1	.	.	.	1				
	4	3	.	.	.	.	1				
	2	.	.	.	1	1					
	3	1	.	1	.	1					
	3	.	2	.	.	1					
	4	2	1	.	.	1					
	5	4	.	.	.	1					
	3	1	.	.	2						
	3	.	1	1	1						
	4	2	.	1	1						
	4	1	2	.	1						
	5	3	1	.	1						
	6	5	.	.	1						
	3	.	.	3							
	4	1	1	2							
	5	3	.	2							
	4	.	3	1							
	5	2	2	1							
	6	4	1	1							
	7	6	.	1							
	5	1	4								
	6	3	3								
	7	5	2								
	8	7	1								
	9	9									

$\sum_{1} ir_{i+1}$ =(n-1),...,0	$\sum_{2} r_i \leq m$	x r_2 1	r_3 2	r_4 3	r_5 4	r_6 5	r_7 6	r_8 7	r_9 8	r_{10} 9	r_{11} 10
10	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
	2	1	.	.	.	.	.	.	.	1	
	2	.	1	.	.	.	.	.	1		
	3	2	.	.	.	.	.	.	1		
	2	.	.	1	.	.	.	1			
	3	1	1	.	.	.	.	1			
	4	3	.	.	.	.	.	1			
	2	.	.	.	1	.	1				
	3	1	.	1	.	.	1				
	3	.	2	.	.	.	1				
	4	2	1	.	.	.	1				
	5	4	.	.	.	.	1				
	2	.	.	.	.	2					
	3	1	.	.	1	1					
	3	.	1	1	.	1					
	4	2	.	1	.	1					
	4	1	2	.	.	1					
	5	3	1	.	.	1					
	6	5	.	.	.	1					
	3	.	1	.	2						
	4	2	.	.	2						
	3	.	.	2	1						
	4	1	1	1	1						
	5	3	.	1	1						
	4	.	3	.	1						
	5	2	2	.	1						
	6	4	1	.	1						
	7	6	.	.	1						
	4	1	.	3							
	4	.	2	2							
	5	2	1	2							
	6	4	.	2							
	5	1	3	1							
	6	3	2	1							
	7	5	1	1							
	8	7	.	1							
	5	.	5								
	6	2	4								
	7	4	3								
	8	6	2								
	9	8	1								
	10	10									

De berekening van de cofactor b_6 (d.m.v. tabellen)

(x^n): $n = 6$ $\quad$ (y^m): $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ $\quad$ $\sum ir_{i+1} = n-1, \ldots, n-m = 5, 4, 3, 2, 1, 0$

Uit hulptabel bijlage 1			$m-\sum r_i$	uit hulptabel bijlage 1					coeff.	termen (a = 1)	oplossingen	
$\sum ir_{i+1}$	m	$\sum_{\leq m} r_i$	r_1 / a	r_2 / b	r_3 / c	r_4 / d	r_5 / e	r_6 / f	$\binom{m}{r_1 r_2 \ldots}$	$a^{r_1} b^{r_2} \ldots$	formule	symbool
5	1	1	0	0	0	0	0	1	1	f	1	b_1
4	2	2	0	0	2				1	c^2	$-b$	b_2
		2	0	1	0	1			2	bd		
		1	1	0	0	0	1		2	e		
3	3	3	0	3					1	b^3	$2b^2-c$	b_3
		2	1	1	1				6	bc		
		1	2	0	0	1			3	d		
2	4	2	2	2					6	b^2	$-5b^3+5bc-d$	b_4
		1	3	0	1				4	c		
1	5	1	4	1					5	b	$14b^4-21b^2c+6bd+3c^2-e$	b_5
0	6	0	6	0					1		b_6(gevraagd)	b_6

uitwerking:

nr.	f	bc^2	b^2d	be	b^5	b^3c	cd	b_6	
1	1								
2		-1	-2	-2					
3		-6	6		2	12-1	-3		
4		20	-6		-30	30-20	-4		
5		15	30	-5	70	-105			
6								1	
Σ	1	28	28	-7	42	- 84	-7	1	= 0

en dus

$$\boxed{b_6 = -42b^5 + 84b^3c - 28b^2d - 28bc^2 + 7be + 7cd - f}$$

De berekening van de cofactor b_7 (d.m.v. tabellen)

(x^n): $n = 7$ (y^m): $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ $\Sigma\, ir_{i+1} = n-1, \ldots, n-m = 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$

uit hulptabel bijlage 1			$m-\Sigma r_i$	uit hulptabel bijlage 1						coëff.	termen (a = 1)	oplossingen	
Σir_{i+1}	m	$\sum_2 r_i \leq m$	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	$\binom{m}{r_1 r_2 \ldots}$	$a^{r_1} b^{r_2} \ldots$	formule	symbool
			a	b	c	d	e	f	g				
6	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	g	1	b_1
5	2	2	0	0	1	1				2	cd	$-b$	b_2
		2	0	1	0	0	1			2	be		
		1	1	0	0	0	0	1		2	f		
4	3	3	0	2	1					3	b^2c	$2b^2-c$	b_3
		2	1	0	2					3	c^2		
		2	1	1	0	1				6	bd		
		1	2	0	0	0	1			3	e		
3	4	3	1	3						4	b^3	$-5b^3+5bc-d$	b_4
		2	2	1	1					12	bc		
		1	3	0	0	1				4	d		
2	5	2	3	2						10	b^2	$14b^4-21b^2c+6bd+3c^2-e$	b_5
		1	4	0	1					5	c		
1	6	1	5	1						6	b	$-42b^5+84b^3c-28b^2d-28bc^2+7bc+7cb-f$	b_6
0	7	0	7	0						1		b_7 (gevraagd)	

uitwerking:	nr.	g	bcd	b^2e	bf	b^4c	b^2c^2	c^3	ce	b^6	b^3d	d^2	b_7	
	1	1												
	2		-2	-2	-2									
	3		-6	6		6	-3+6	-3	-3		12			
	4		-12+20			20-60	60			-20	-4-20	-4		
	5		30	-10		-210+70	30-105	15	-5	140	60			
	6		42	42	-6	504	-168			-252	-168			
	7												b_7	
	Σ	1	72	36	-8	330	-180	12	-8	-132	-120	-4	b_7	= 0

en dus

$$b_7 = 132b^6 - 330b^4c + 120b^3d - 36b^2e + 8bf + 180b^2c^2 - 72bcd - 12c^3 + 8ce + 4d^2 - g$$

De berekening van de cofactor b_6 uit $\sum_{i=1}^{5} a_i b_{i,6}=0$, $b_{i,i}=1$, $b_{i,j}=0$ voor $i > j$, $b_1 = 1$

$$b_{1,6} = b_6$$

$$\begin{aligned} b_{2,6} &= b_1(b_{1,5}) + b_2(b_{1,4}) + b_3(b_{1,3}) + b_4(b_{1,2}) + b_5(b_{1,1}) \\ &= b_1b_5 + b_2b_4 + b_3b_3 + b_4b_2 + b_5b_1 \\ &= 2b_5 + 2b_2b_4 + b_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{3,6} &= b_1(b_{2,5}) + b_2(b_{2,4}) + b_3(b_{2,3}) + b_4 \\ &= b_1(b_1b_4 + b_2b_3 + b_3b_2 + b_4b_1) + b_2(b_1b_3 + b_2b_2 + b_3b_1) + b_3(b_1b_2 + b_2b_1) + b_4 \\ &= 2b_4 + 2b_2b_3 + 2b_2b_3 + b_2^3 + 2b_2b_3 + b_4 \\ &= b_2^3 + 6b_2b_3 + 3b_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{4,6} &= b_1(b_{3,5}) + b_2(b_{3,4}) + b_3 \\ &= b_1\left[b_1(b_{2,4}) + b_2(b_{2,3}) + b_3\right] + b_2\left[b_1(b_{2,3}) + b_2\right] + b_3 \\ &= b_1\left[b_1(b_1b_3 + b_2b_2 + b_3b_1) + b_2(b_1b_2 + b_2b_1) + b_3\right] + b_2\left[b_1(b_1b_2 + b_2b_1) + b_2\right] + b_3 \\ &= 2b_3 + b_2^2 + 2b_2^2 + b_3 + 2b_2^2 + b_2^2 + b_3 \\ &= 6b_2^2 + 4b_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{5,6} &= b_1(b_{4,5}) + b_2 \\ &= b_1\left[b_1(b_{3,4}) + b_2\right] + b_2 \\ &= b_1\left\{b_1\left[b_1(b_{2,3}) + b_2\right] + b_2\right\} + b_2 \\ &= b_1\left\{b_1\left[b_1(b_1b_2 + b_2b_1) + b_2\right] + b_2\right\} + b_2 \\ &= 5b_2 \end{aligned}$$

$$b_{6,6} = 1$$

waaruit volgt $a_1b_6 + a_2(2b_5 + 2b_2b_4 + b_3^2) + a_3(b_2^3 + 6b_2b_3 + 3b_4) + a_4(8b_2^2 + 4b_3) + a_5(5b_2) + a_6 = 0$

overgang op reeds verkregen oplossingen en énkele letters geeft

$$\begin{aligned} b_6 &+ b\left\{2(14b^4 - 21b^2c + 6bd + 3c^2 - e) + 2(-b)(-5b^3 + 5bc - d) + (2b^2 - c)^2\right\} + \\ &+ c\left\{-b^3 - 6b(2b^2-c) + 3(-5b^3 + 5bc - d)\right\} + d\left\{6b^2 + 4(2b^2 - c)\right\} - e(5b) + f = 0 \end{aligned}$$

dus

	b_6	b^5	b^3c	b^2d	bc^2	cd	be	f	
	1								
		28	-42	12	6		-2		
		10	-10	2					
		4	- 4		1				
			-1-12		6				
			-15		15	-3			
				6+8		-4			
							-5	1	
Σ	1	+42	-84	28	+28	-7	-7	+1	= 0

Uitkomsten van deelberekeningen ten behoeve van de oplossing volgens formule (15) pag. 10.

$b_{2,3} = -2b$

$b_{2,4} = 5b^2 - 2c$
$b_{3,4} = -3b$

$b_{2,5} = -14b^3 + 12bc - 2d$
$b_{3,5} = 9b^2 - 3c$
$b_{4,5} = -4b$

$b_{2,6} = 42b^4 - 56b^2c + 14bd + 7c^2 - 2e$
$b_{3,6} = -28b^3 + 21bc - 3d$
$b_{4,6} = 14b^2 - 4c$
$b_{5,6} = -5b$

$b_{2,7} = -132b^5 + 240b^3c - 72b^2d - 72bc^2 + 16cd + 16be - 2f$
$b_{3,7} = 90b^4 - 108b^2c + 24bd + 12c^2 - 3e$
$b_{4,7} = -48b^3 + 32bc - 4d$
$b_{5,7} = 20b^2 - 5c$
$b_{6,7} = -6b$

enz.

Cofactoren b_i van de inverse machtreeks uitgedrukt in a_i (b, c, d, ..., j) van de oorspronkelijke reeks

i		
b_1	1	
b_2	$-1\ b$	
b_3	$2\ bb$ $-1\ b^0c$	
b_4	$-5\ b^2b$ $+5\ bc$ $-1\ b^0d$	
b_5	$+14\ b^3b$ $-21\ b^2c$ $+6\ bd$ $-1\ b^0e$	$+3\ b^0cc$
b_6	$-42\ b^4b$ $+84\ b^3c$ $-28\ b^2d$ $+7\ be$ $-1\ b^0f$	$-28\ bcc$ $+7\ b^0cd$

i					
b_7	$+132\ b^5b$ $-330\ b^4c$ $+120\ b^3d$ $-36\ b^2e$ $+8\ bf$ $-1\ b^0g$	$+180\ b^2cc$ $-72\ bcd$ $+8\ b^0ce$	$-12\ b^0c^2c$		$+4\ b^0dd$
b_8	$-429\ b^6b$ $+1287\ b^5c$ $-495\ b^4d$ $+165\ b^3e$ $-45\ b^2f$ $+9\ bg$ $-1\ b^0h$	$-990\ b^3cc$ $+495\ b^2cd$ $-90\ bce$ $+9\ b^0cf$	$+165\ bc^2c$ $-45\ b^0c^2d$		$-45\ bdd$ $+9\ b^0de$

i								
b_9	$+ 1430\ b^7b$ $- 5005\ b^6c$ $+ 2002\ b^5d$ $- 715\ b^4e$ $+ 220\ b^3f$ $- 55\ b^2g$ $+ 10\ bh$ $- 1\ b^0i$	$+ 5005\ b^4cc$ $- 2860\ b^3cd$ $+ 660\ b^2ce$ $- 110\ bcf$ $+ 10\ b^0cg$	$- 1430\ b^2c^2c$ $+ 660\ bc^2d$ $- 55\ b^0c^2e$	$+ 55\ b^0c^3c$	$+ 330\ b^2dd$ $- 110\ bde$ $+ 10\ b^0df$		$+ 5\ b^0ce$	$- 55\ b^0cdd$
b_{10}	$- 4862\ b^8b$ $+19448\ b^7c$ $- 6008\ b^6d$ $+ 3003\ b^5e$ $- 1001\ b^4f$ $+ 286\ b^3g$ $- 66\ b^2h$ $+ 11\ bi$ $- 1\ b^0j$	$-24024\ b^5cc$ $+15015\ b^4cd$ $- 4004\ b^3ce$ $+ 858\ b^2cf$ $- 132\ bcg$ $+ 11\ b^0ch$	$+10010\ b^3c^2c$ $- 6006\ b^2c^2d$ $+ 858\ bc^2e$ $- 66\ b^0c^2f$	$- 1001\ bc^3c$ $+ 286\ b^0c^3d$	$- 2002\ b^3dd$ $+ 858\ b^2de$ $- 132\ bdf$ $+ 11\ b^0dg$	$- 22\ b^0d^2d$	$- 66\ bce$ $+ 11\ b^0ef$	$+ 858\ bcdd$ $- 132\ b^0cde$