

NN31545.0474

INSTITUUT VOOR CULTUURTECHNIEK EN WATERHUISHOUDING

NOTA 474, d.d. 5 juli 1968

Berekening van grondwaterstanden door middel van
het numeriek oplossen van een
differentiaalvergelijking

W. van Doorne

BIBLIOTHEEK
STARINGGEBOUW

Nota's van het Instituut zijn in principe interne communicatiemid-
delen, dus geen officiële publikaties.

Hun inhoud varieert sterk en kan zowel betrekking hebben op een
eenvoudige weergave van cijferreeksen, als op een concluderende
discussie van onderzoeksresultaten. In de meeste gevallen zullen
de conclusies echter van voorlopige aard zijn omdat het onderzoek
nog niet is afgesloten.

Bepaalde nota's komen niet voor verspreiding buiten het Instituut
in aanmerking.



1707738

Page 1 of 2

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

Page 2 of 2

Item	Description	Quantity	Unit
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

<u>Inhoudsopgave</u>	<u>Pag.</u>
1. Inleiding	1
2. De differentiaalvergelijking	2
3. Een numerieke oplossing	2
4. Opmerkingen over de nauwkeurigheid van de numerieke oplossing	8
5. Een methode om de onnauwkeurigheid van de numerieke oplossing te schatten	10
6. Toepassingen van het voorgaande wanneer de factor tijd weinig of geen invloed heeft; een voorbeeld	13

1941

1941

1

1941

2

1941

3

1941

4

1941

5

1941

6

1941

1. Inleiding

De grondwaterstand in de omgeving van een put, waar water wordt onttrokken kan blijkens ERNST (I.C.W.-nota 353) worden beschreven door middel van de differentiaalvergelijking:

$$kD \cdot \left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \right) = \mu(h) \cdot \frac{\partial h}{\partial t} + A(h) + E(h) - N(t) + A_0 \quad (1)$$

waarin de genoemde grootheden de volgende betekenis hebben:

- h : hoogte grondwater, gemeten ten opzichte van maaiveld;
- r : afstand tot de put;
- t : tijd;
- $\mu(h)$: bergingscoëfficiënt, afhankelijk van h;
- A(h): afvoer, afhankelijk van h;
- E(h): verdamping, afhankelijk van h;
- N(t): neerslag, afhankelijk van t (seizoen);
- A₀ : constante grondwaterstroom.

In de praktijk blijkt het in het algemeen niet mogelijk uit een dergelijke vergelijking met twee of meer onafhankelijke variabelen (r en t) en hogere afgeleiden, de functie h (die van r en t afhangt) te bepalen. Daarom wordt meestal volstaan met een zogenoemde 'numerieke oplossing'. Deze bestaat uit een stel benaderde waarden voor h bij een aantal van te voren gekozen combinaties van r- en t-waarden. Exacte oplossingen voor h blijken alleen mogelijk wanneer de differentiaalvergelijking wordt vereenvoudigd, bijvoorbeeld door te veronderstellen dat $\mu(h)$ constant is, dat A(h) lineair is in h, of door veronderstellingen te maken omtrent het 'neerslag-overschot' $N(t) - E(h)$.

In het volgende is een methode voor het berekenen van een numerieke oplossing gegeven, gevolgd door enkele beschouwingen betreffende de nauwkeurigheid van deze numerieke oplossing.

...the
... ..
... ..

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} \right) = m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} = m v \frac{d^2x}{dt^2}$$

... ..
... ..
... ..
... ..
... ..
... ..
... ..

... ..
... ..
... ..
... ..
... ..
... ..
... ..
... ..
... ..

... ..
... ..
... ..
... ..

2. De differentiaalvergelijking

Het is dus de bedoeling de functie $h(t, r)$ uit vergelijking (1) op te lossen. Hierbij wordt de eis gesteld dat de oplossing van een gedaante is, als aangeduid in figuur 1: bij grote afstanden tot de put dient de invloed van de put op de grondwaterstand onmerkbaar klein te worden en moet een bepaalde evenwichtstoestand worden bereikt.

In verband met de numerieke oplossing biedt het voordelen de variabele x in te voeren door de substitutie $r = \sqrt{kD} \cdot e^x$ waardoor vergelijking (1) overgaat in

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = e^{2x} \left[\mu(h) \frac{\partial h}{\partial t} + A(h) + E(h) - N(t) + A_0 \right] \quad (2)$$

Er wordt verondersteld dat de waarden van de grootheden $\mu(h)$, $A(h)$, enz. op een of andere wijze kunnen worden vastgesteld wanneer hun argumenten (t of h) bekend zijn, bijvoorbeeld via één of meer formules of uit tabellen.

In het algemeen zijn er vele oplossingen van (2) mogelijk, hoewel ze vrijwel nooit expliciet te bepalen zijn. Om een eenduidige (numerieke) oplossing te vinden is het dus nodig aan h enkele beperkingen op te leggen. In het volgende is dan ook gewerkt met de volgende randvoorwaarden:

1. de waarden $h(t, x_0)$ worden voor alle t en bij te voren gekozen vaste x_0 bekend verondersteld;
2. hetzelfde wordt gedaan voor $h(t_0, x)$ voor alle x en vaste t_0 , die ook te voren wordt gekozen;
3. bovendien wordt de waarde h_1 vastgesteld en wordt aangenomen dat $\lim_{x \rightarrow \infty} h(t, x) = h_1$ ongeacht de waarde van t .

Een en ander wordt in het volgende nader uitgewerkt.

3. Een numerieke oplossing

Een numerieke oplossing van (2) bestaat uit een stel waarden berekend uit t en x die een goede schatting zijn voor de exacte waarden van $h(t, x)$. Voor x werd genomen $x_j = x_0 + j \cdot \Delta x$ waarin $j = 0, 1, 2, \dots$ terwijl

2. Die Differentialrechnung

Die Differentialrechnung ist ein Teil der Mathematik, der sich mit den Ableitungen von Funktionen beschäftigt. Sie ist ein wichtiges Werkzeug in der Physik, der Ingenieurwissenschaften und der Wirtschaft. In der Physik wird die Differentialrechnung verwendet, um die Geschwindigkeit und die Beschleunigung eines Körpers zu berechnen. In der Ingenieurwissenschaft wird sie zur Berechnung der Kräfte und Momente in einem System verwendet. In der Wirtschaft wird sie zur Berechnung der Grenzerträge und der Grenzkosten verwendet.

Die Differentialrechnung ist ein Teil der Mathematik, der sich mit den Ableitungen von Funktionen beschäftigt. Sie ist ein wichtiges Werkzeug in der Physik, der Ingenieurwissenschaften und der Wirtschaft. In der Physik wird die Differentialrechnung verwendet, um die Geschwindigkeit und die Beschleunigung eines Körpers zu berechnen. In der Ingenieurwissenschaft wird sie zur Berechnung der Kräfte und Momente in einem System verwendet. In der Wirtschaft wird sie zur Berechnung der Grenzerträge und der Grenzkosten verwendet.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

Die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ist $f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$. Die Ableitung einer Potenzfunktion $f(x) = x^n$ ist $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$. In diesem Fall ist $n = -2$, daher ist $f'(x) = -2 \cdot x^{-2-1} = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$. Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 ist $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. In diesem Fall ist $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x_0+h)^2} - \frac{1}{x_0^2}}{h}$.

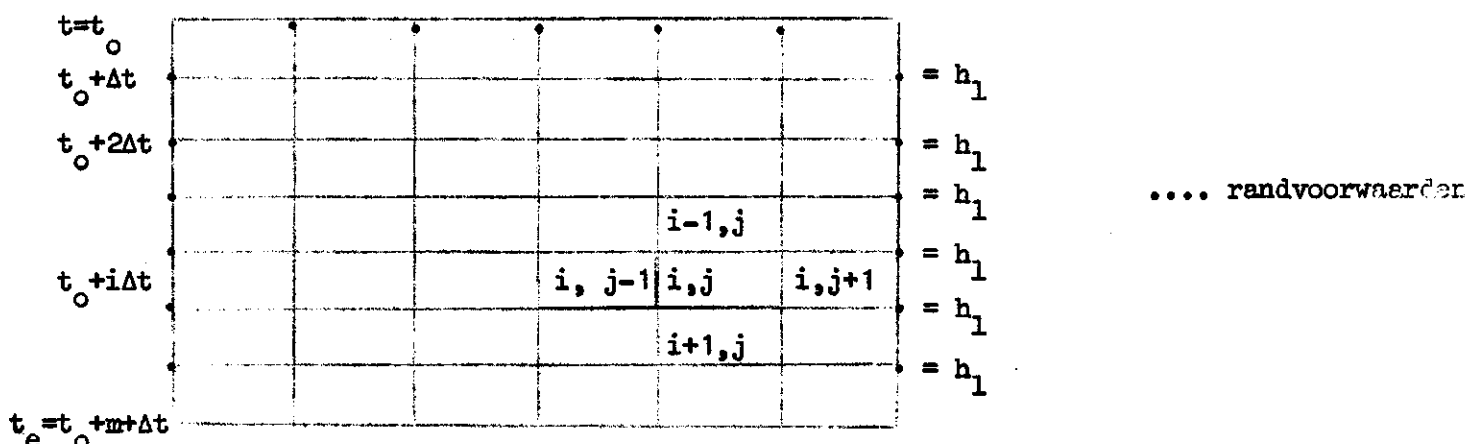
Die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ist $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$. Die Ableitung einer Potenzfunktion $f(x) = x^n$ ist $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$. In diesem Fall ist $n = -2$, daher ist $f'(x) = -2 \cdot x^{-2-1} = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$. Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 ist $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. In diesem Fall ist $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x_0+h)^2} - \frac{1}{x_0^2}}{h}$.

Die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ist $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$. Die Ableitung einer Potenzfunktion $f(x) = x^n$ ist $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$. In diesem Fall ist $n = -2$, daher ist $f'(x) = -2 \cdot x^{-2-1} = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$. Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 ist $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. In diesem Fall ist $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x_0+h)^2} - \frac{1}{x_0^2}}{h}$.

$t_i = t_0 + i \cdot \Delta t$ waarin $i = 0, 1, 2, \dots$. De stapgrootten Δx en Δt zijn hierbij vaste bedragen. De grootste waarde van t respectievelijk x wordt aangegeven met t_e respectievelijk x_e . Het aantal stappen van t respectievelijk x bedraagt m respectievelijk n .

In onderstaand tableau zijn de gebruikte t - en x -waarden aangeduid, evenals de bekend veronderstelde waarden van h (in overeenstemming met de randvoorwaarden uit de vorige paragraaf, waarbij uiteraard de waarde h_1 wordt toegekend bij een waarde van r , die voldoende groot wordt geacht om $r = \infty$ te representeren).

$$x = x_0 \quad x_0 + \Delta x \quad x_0 + 2\Delta x \quad x_0 + j \cdot \Delta x \quad x_e = x_0 + n \cdot \Delta x$$



Om een numerieke oplossing te verkrijgen worden de differentiaalquotiënten in (2) door quotiënten van differenties vervangen. In plaats van $\frac{\partial h}{\partial t}$ in een punt (t_i, x_j) komt er

$$\frac{1}{\Delta t} \cdot [\bar{h}_{ij} - h_{i-1, j}]$$

en in plaats van $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} \cdot [\bar{h}_{i, j+1} - 2h_{ij} + h_{i, j-1}]$$

Deze substituties vinden plaats voor alle punten binnen het tableau

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry should be supported by a valid receipt or invoice. The text also mentions the need for regular audits to ensure the integrity of the financial data.

$$\frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow \frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

The second part of the document provides a detailed explanation of the accounting cycle. It lists the eight steps: 1. Analyze transactions, 2. Journalize, 3. Post to ledger, 4. Prepare trial balance, 5. Adjusting entries, 6. Adjusted trial balance, 7. Financial statements, and 8. Closing entries. Each step is described with its purpose and the accounts involved.

The third part of the document discusses the classification of assets and liabilities. It explains how to distinguish between current and long-term assets, and between current and long-term liabilities. The text also touches upon the concept of equity and how it is calculated.

$$\frac{1}{x^3} = x^{-3} \Rightarrow \frac{d}{dx} x^{-3} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^4} = \frac{d}{dx} x^{-4} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^5} = \frac{d}{dx} x^{-5} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$$

The final part of the document summarizes the key points discussed throughout the document. It reiterates the importance of accuracy in accounting and the role of each step in the accounting cycle.

dus voor alle combinaties (i, j) , waarbij $i = 1, 2, \dots, m-1$ en $j = 1, 2, \dots, n-1$. Op deze wijze wordt steeds een viertal naburige waarden van h in elkaar uitgedrukt (zie tableau). Het aantal van deze waarden komt overeen met het aantal vergelijkingen dat uiteindelijk ontstaat en bedraagt $(m-1)(n-1)$. Directe oplossing van een dergelijk stel vergelijkingen is in het algemeen alleen mogelijk, wanneer de onbekenden lineair voorkomen, hetgeen hier alleen het geval kan zijn wanneer in (2) het gedeelte vanaf $A(h)$ lineair is in h . Daarom wordt overgegaan tot iteratieve oplossing van het stel vergelijkingen. Hiertoe wordt h_{ij} uitgedrukt in de drie naburige h -waarden, waarbij enkele hulpgrootheden U, V, W en Z worden ingevoerd. Wanneer wordt gesteld

$$U = h_{i, j+1} + h_{i, j-1}$$

$$V = (e^{x_j} \cdot \Delta x)^2$$

$$W = \frac{\mu(h_{ij})}{\Delta t}$$

$$Z = A(h_{ij}) + E(h_{ij}) - N(t_i) + A_0$$

dan blijkt uit (2) dat

$$h_{ij} = \frac{U + V \cdot (W \cdot h_{i-1, j} - Z)}{2 + V \cdot W} \quad (3)$$

naar aanleiding waarvan de volgende werkwijze wordt voorgesteld ter bepaling van een numerieke oplossing van differentiaalvergelijking (2):

1. Stel t_0, x_0, t_e, x_e, m en n vast en bepaald Δt en Δx door middel van

$$\Delta t = \frac{t_e - t_0}{m} \text{ en } \Delta x = \frac{x_e - x_0}{n}; \text{ stel } h_1 \text{ vast}$$

Die vorliegende Arbeit ist eine Fortsetzung der Arbeit von
 [Name], die sich mit der Untersuchung der Eigenschaften
 von [Thema] beschäftigt. In der vorliegenden Arbeit wird
 die Fragestellung [Fragestellung] untersucht. Die
 Ergebnisse der Untersuchung sind in den folgenden
 Kapiteln dargestellt.

$$\begin{aligned}
 & \text{[Equation 1]} \\
 & \text{[Equation 2]} \\
 & \text{[Equation 3]}
 \end{aligned}$$

$$\text{[Equation 4]}$$

Die Ergebnisse der Untersuchung sind in den folgenden
 Kapiteln dargestellt.

Die vorliegende Arbeit ist eine Fortsetzung der Arbeit von
 [Name], die sich mit der Untersuchung der Eigenschaften
 von [Thema] beschäftigt. In der vorliegenden Arbeit wird
 die Fragestellung [Fragestellung] untersucht. Die
 Ergebnisse der Untersuchung sind in den folgenden
 Kapiteln dargestellt.

2. Stel de randwaarden vast, dus $h(t_i, x_0)$ met $i = 1, 2, \dots, m-1$ en $h(t_0, x_j)$ met $j = 1, 2, \dots, n-1$; stel verder $h(t_i, x_e) = h_1$ waarbij $i = 1, 2, \dots, m-1$. De juistgenoemde waarden van h ondergaan in de loop der berekeningen geen wijziging, maar wel beïnvloeden ze de te vinden oplossing.
3. Bepaal voorlopige waarden voor $h(t_i, x_j)$ waarin $i = 1, 2, \dots, m-1$ en $j = 1, 2, \dots, n-1$; zo goed mogelijke schattingen verdienen de voorkeur.
4. Gebruik (3) om uit de huidige h_{ij} -waarden via U, V, W en Z nieuwe h_{ij} 's te berekenen; pas hierbij (3) systematisch toe, bijvoorbeeld door het tableau via rijen of kolommen te doorlopen. Noteer bij elke nieuw berekende h_{ij} ook zijn oude waarde.
5. Vergelijk de nieuwe h_{ij} -tabel met de vorige of met een aantal vorige tabellen; blijkt de nieuwste tabel voldoende constant, dan kan deze als numerieke oplossing van (2) geaccepteerd worden.
6. Indien opeenvolgende tabellen $\{h_{ij}\}$ niet naar een stabiele tabel convergeren, of dat niet voldoende snel doen, kan worden getracht dit te verhelpen door Δt en/of Δx te verkleinen en/of de aanvangsschattingen, genoemd onder punt 3 te wijzigen en dan bij punt 4 te beginnen. Een indruk van de nauwkeurigheid waarmee de numerieke oplossing de exacte benadert, kan worden verkregen door de eindresultaten bij verschillende Δt en Δx te vergelijken: heeft verkleining van Δt en/of Δx weinig effect, dan is de numerieke oplossing nauwkeurig genoeg.

Bij het werken met differenties zou het beter geweest zijn $\frac{\partial h}{\partial t}$ te vervangen door een verschil symmetrisch rondom (i, j) , bijvoorbeeld

$\frac{1}{2\Delta t} \cdot [\bar{h}_{i+1, j} - \bar{h}_{i-1, j}]$ en met behulp hiervan een formule in de trant van (3) af te leiden. Dit heeft het nadeel dat bij de berekening van $h_{m-1, j}$ ook $h_{m, j}$ gebruikt zou moeten worden, zodat extra voorwaarden nodig zouden zijn om $h_{m, j}$ vast te leggen (laatste regel in het tableau). Dit bezwaar is door de keuze van een asymmetrisch verschil vermeden.

Een rekentechniek als boven beschreven, werd toegepast op de vergelijking

1. Die Funktionen f_1, \dots, f_n sind in D definiert und es gilt $f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0$ für alle $x \in D$.
 Dann ist $f(x) = 0$ für alle $x \in D$.

2. Die Funktionen f_1, \dots, f_n sind in D definiert und es gilt $f_1(x) = \dots = f_n(x) = 1$ für alle $x \in D$.
 Dann ist $f(x) = 1$ für alle $x \in D$.

3. Die Funktionen f_1, \dots, f_n sind in D definiert und es gilt $f_1(x) = \dots = f_n(x) = c$ für alle $x \in D$.
 Dann ist $f(x) = c$ für alle $x \in D$.

4. Die Funktionen f_1, \dots, f_n sind in D definiert und es gilt $f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0$ für alle $x \in D$.
 Dann ist $f(x) = 0$ für alle $x \in D$.

5. Die Funktionen f_1, \dots, f_n sind in D definiert und es gilt $f_1(x) = \dots = f_n(x) = 1$ für alle $x \in D$.
 Dann ist $f(x) = 1$ für alle $x \in D$.

6. Die Funktionen f_1, \dots, f_n sind in D definiert und es gilt $f_1(x) = \dots = f_n(x) = c$ für alle $x \in D$.
 Dann ist $f(x) = c$ für alle $x \in D$.

7. Die Funktionen f_1, \dots, f_n sind in D definiert und es gilt $f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0$ für alle $x \in D$.
 Dann ist $f(x) = 0$ für alle $x \in D$.

8. Die Funktionen f_1, \dots, f_n sind in D definiert und es gilt $f_1(x) = \dots = f_n(x) = 1$ für alle $x \in D$.
 Dann ist $f(x) = 1$ für alle $x \in D$.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = e^{2x} \left[0,1 \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{4h}{1250} + \frac{3h}{1250} \sin \frac{2\pi t}{360} \right] \quad (4)$$

die uit (2) ontstaat door $\mu(h) = 0,1$ te stellen en door de laatste vier termen in (2) te vervangen door de laatste twee termen in (4). Verder werd gewerkt met de volgende gegevens

kD	=	2500		
t_0	=	0	x_0	= - 4.5 kleinste waarde van t resp. x
t_e	=	375	x_e	= + 4.5 grootste waarde van t resp. x
m	=	25	n	= 18 aantal stappen van t resp. x
Δt	=	15	Δx	= 0.5 stapgrootte van t resp. x
h_1	=	0		grondwaterstand op grote afstand

De uiterste waarden van r bedragen dus $50 e^{-4.5}$ en $50 e^{4.5}$ meter, zodat r varieert van 0,56 m tot 4500,86 m.

Onderstaande tabel bevat de gebruikte randwaarden en de berekende numerieke oplossing. De aanvangswaarden van $h(t_i, x_j)$ waren per kolom gelijk, en wel gelijk aan de randwaarde $h(t_0, x_j)$. Er moesten ongeveer 20 tabellen worden berekend voordat de uitkomsten voldoende stabiel geacht werden; als norm werd genomen, dat de berekende waarden van h in millimeters constant moesten zijn. De berekeningen, uitgevoerd met behulp van de computer IBM 1130 vergden ongeveer 10 minuten tijd. Het eindresultaat is de volgende tabel, waarin de grondwaterstanden in centimeters beneden maaiveld zijn vermeld. Ter illustratie van het verloop van de berekende grondwaterstand kan figuur 2 dienen: voor enkele waarden van t is hierin de grondwaterstand h uit de tabel tegen de afstand r uitgezet.

(e)
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) \cdot \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{dt}{dx} \right)$$

Using the chain rule, we can write $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) \cdot \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{dt}{dx} \right)$. This is the general formula for the second derivative of y with respect to x when x and y are functions of t.

Order of Derivative	Formula	Notes
First Derivative	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$	Chain rule
Second Derivative	$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) \cdot \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{dt}{dx} \right)$	General formula

The above formula is used to find the second derivative of y with respect to x when x and y are functions of t. For example, if $y = t^2$ and $x = t^3$, then $\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{3t^2} = \frac{2}{3t}$. To find $\frac{d^2y}{dx^2}$, we use the formula: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{3t} \right) \cdot \left(\frac{1}{3t^2} \right)^2 + \frac{2}{3t} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3t^2} \right)$. This simplifies to $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{3t} \right) \cdot \frac{1}{9t^4} + \frac{2}{3t} \cdot \left(-\frac{2}{3t^3} \right) \cdot \frac{1}{3t^2}$. The final result is $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{9t^5} - \frac{4}{9t^5} = -\frac{6}{9t^5} = -\frac{2}{3t^5}$.

t	x	-4,5	-4,0	-3,5	-3,0	-2,5	-2,0	-1,5	-1,0	-0,5	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	
0	o	555	612	568	524	480	437	393	349	305	262	219	175	133	94	59	30	12	3	0	
15	o	555	611	567	524	480	436	392	348	304	260	216	173	131	91	56	29	11	3	0	
30	o	555	611	567	523	479	435	391	346	302	258	214	170	128	88	53	26	10	2	0	
45	o	555	611	567	523	478	434	389	345	300	256	211	167	125	85	50	24	8	2	0	
60	o	555	611	567	522	477	433	388	344	299	254	209	165	122	82	48	22	7	2	0	
75	o	555	611	566	522	477	433	388	343	298	253	208	163	120	80	46	21	7	1	0	
90	o	555	611	566	522	477	432	388	343	297	252	207	163	120	80	45	20	6	1	0	
105	o	555	611	566	522	477	432	388	343	298	252	207	163	120	80	45	20	6	1	0	
120	o	555	611	566	522	477	433	388	343	298	253	208	163	120	80	46	21	6	1	0	
135	o	555	611	567	522	478	433	389	344	299	254	209	165	122	82	47	21	7	1	0	
150	o	555	611	567	523	478	434	390	345	300	256	211	167	124	84	49	23	7	1	0	
165	o	555	611	567	523	479	435	391	347	302	258	214	170	128	87	52	25	8	2	0	
180	o	555	611	568	524	480	436	392	348	304	261	217	174	131	91	56	27	9	2	0	
195	o	555	612	568	524	481	437	394	350	307	263	220	178	136	96	60	30	11	2	0	
210	o	555	612	568	525	482	439	395	352	309	266	224	182	140	101	64	34	13	3	0	
225	o	555	612	569	526	483	440	397	354	312	269	228	186	145	106	69	38	15	4	0	
240	o	555	612	569	526	484	441	398	356	314	272	231	190	150	111	74	42	18	5	0	
255	o	555	612	570	527	484	442	400	358	316	275	234	193	154	115	79	47	21	6	0	
270	o	555	613	570	527	485	442	400	359	317	276	236	196	156	118	82	50	23	7	0	
285	o	555	613	570	527	485	443	400	359	317	277	236	196	157	120	84	51	25	8	0	
300	o	555	612	570	527	485	442	400	358	317	276	235	196	157	119	83	51	25	8	0	
315	o	555	612	569	527	484	441	399	357	315	274	233	193	154	116	81	49	25	8	0	
330	o	555	612	569	526	483	440	398	355	313	271	230	189	149	111	76	46	22	7	0	
345	o	555	612	569	525	482	439	396	353	310	268	226	184	144	106	71	41	19	6	0	
360	o	555	612	568	525	481	437	394	351	307	264	222	180	139	100	65	36	16	5	0	
375	o																				

randwaarden

randwaarden

randwaarden

10/10/2010

Dear Sir,
I am writing to you regarding the matter of the
contract for the supply of goods to the
Government of Karnataka.

I am pleased to inform you that the
contract has been awarded to your
company. The contract value is
Rs. 100000000.00.

The contract is for the supply of
goods to the Government of Karnataka
for a period of 12 months. The
contract is subject to the terms and
conditions of the contract.

I am sure that your company will
fulfill the obligations of the contract
to the satisfaction of the Government
of Karnataka.

Yours faithfully,
[Signature]

4. Opmerkingen over de nauwkeurigheid van de numerieke oplossing

Om een indruk te krijgen van het effect van de keuze van de stapgrootten Δt en Δx op de nauwkeurigheid van de oplossing van differentiaalvergelijking (2), wordt (3) in beschouwing genomen. Als hierin h de waarde van een functie is, die in (t_i, x_j) exact aan (2) voldoet en h_{ij} de waarde die volgens (3) wordt berekend, dan geeft $\epsilon_{ij} = h_{ij} - h$ een aanwijzing omtrent de nauwkeurigheid van de berekende waarde h_{ij} . Daarom zal worden getracht ϵ_{ij} uit te drukken in Δt en Δx . Hiertoe worden de in (3) genoemde grootheden U en $h_{i-1, j}$ in machtreeksen rondom (t_i, x_j) ontwikkeld. Dus

$$h_{i, j+1} = h + \Delta x \cdot h' + \frac{(\Delta x)^2}{2} \cdot h'' + \frac{(\Delta x)^3}{6} \cdot h''' + \frac{(\Delta x)^4}{24} \cdot h'''' + \dots$$

$$h_{i, j-1} = h - \Delta x \cdot h' + \frac{(\Delta x)^2}{2} \cdot h'' - \frac{(\Delta x)^3}{6} \cdot h''' + \frac{(\Delta x)^4}{24} \cdot h'''' + \dots$$

waarna door het optellen van de termen die onder elkaar staan blijkt

$$U = 2h + (\Delta x)^2 \cdot h'' + \frac{(\Delta x)^4}{12} \cdot h'''' + \dots \quad (5)$$

waarin de accenten de afgeleiden naar x aanduiden.

Verder is, differentiërend naar t (aangeduid met $+$)

$$h_{i-1, j} = h - (\Delta t) \cdot h^+ + \frac{(\Delta t)^2}{2} \cdot h^{++} - \frac{(\Delta t)^3}{6} \cdot h^{+++} \dots$$

zodat

$$W \cdot h_{i-1, j} = \frac{\mu(h)}{\Delta t} \cdot h - \mu(h) \cdot \left[h^+ - \frac{\Delta t}{2} h^{++} + \frac{(\Delta t)^2}{6} h^{+++} - \dots \right] \quad (6)$$

Worden nu de gelijkheden (5) en (6) ingevuld in (3), en wordt hierbij tevens rekening gehouden met vergelijking (2):

$$h'' = e^{2x_i} \left[\underline{\mu(h)} \cdot h^+ + \underline{Z} \right]$$

dan blijkt

$$\epsilon_{ij} = \frac{P \cdot (\Delta x)^4 + Q \cdot V \cdot W \cdot (\Delta t)^2}{V \cdot W + 2} \quad (7)$$

waarin V en W dezelfde betekenis hebben als in (3) en waarin P en Q gedeel-
ten aan machtreeksen voorstellen. Omdat ϵ eindig verondersteld mag worden,
zijn P en Q begrensd. Er bestaan dus vaste positieve getallen M en N, zo,
dat $|P| < M$ en $|Q| < N$. Derhalve is

$$|\epsilon_{ij}| < \frac{M \cdot (\Delta x)^4 + N \cdot V \cdot W \cdot (\Delta t)^2}{V \cdot W + 2} \quad (8)$$

waaruit volgt^{*)}

$$|\epsilon_{ij}| < \frac{M \cdot (\Delta x)^4}{V \cdot W} + \frac{N \cdot V \cdot W \cdot (\Delta t)^2}{2} = \left[\frac{M}{e^{2x_i} \mu(h)} + \frac{N \cdot e^{2x_i} \cdot \mu(h)}{2} \right] \cdot (\Delta x)^2 \cdot \Delta t$$

De uitdrukking tussen vierkante haken is voor een bepaald waardenbereik
voor x en t eveneens begrensd. Er bestaat dus een vast positief getal E (dus
onder meer onafhankelijk van Δx en Δt), zo, dat

$$|\epsilon_{ij}| < E \cdot (\Delta x)^2 \cdot \Delta t \quad \text{voor alle } (i, j) \quad (9)$$

Dit houdt in dat een numerieke oplossing die blijkens de punten 5 en 6
van de oplossingsprocedure aan (3) voldoet willekeurig dicht bij een exacte
oplossing kan worden gebracht door de stapgrootte(n) voldoende klein te ma-
ken. De convergentie zelf is dus verzekerd, de snelheid van convergentie
echter, kan niet uit (9) worden afgeleid.

*) De tweede ongelijkheid volgt uit de eerste door de overweging dat bij A,
B, C en D ≥ 0

$$\frac{A+B}{C+D} - \frac{A}{C} - \frac{B}{D} = \frac{-(AD^2 + BC^2)}{(C+D) \cdot C \cdot D} \leq 0 \text{ zodat}$$

$$\frac{A+B}{C+D} \leq \frac{A}{C} + \frac{B}{D} \text{ waarbij het gelijkteken alleen geldt wanneer } A = B = 0$$

(3)
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \dots$$

... and ...

(4)
$$\dots$$

$$\dots$$

... and ...

(5)
$$\dots$$

... and ...

(6)
$$\dots$$

5. Een methode om de onnauwkeurigheid van de numerieke oplossing te schatten

De ongelijkheid (9) die in de vorige paragraaf werd afgeleid is meer van theoretisch belang, dan dat ze bruikbaar zou zijn om schattingen van de afwijkingen ε_{ij} te berekenen. Om in een concreet geval van de gegeven differentiaalvergelijking een schatting van de maximale waarde van $|\varepsilon_{ij}|$ te kunnen geven, dienen de grootheden P en Q beschouwd te worden. Op de in paragraaf 4 aangeduide wijze kan worden afgeleid dat

$$P \cdot (\Delta x)^4 = \frac{1}{12}(\Delta x)^4 h_{4x} + \frac{1}{360}(\Delta x)^6 h_{6x} + \frac{1}{20160}(\Delta x)^8 h_{8x} + \dots$$

en

$$Q \cdot (\Delta t)^2 = \frac{1}{2}(\Delta t)^2 h_{2t} - \frac{1}{6}(\Delta t)^3 \cdot h_{3t} + \frac{1}{24}(\Delta t)^4 \cdot h_{4t} - \frac{1}{120}(\Delta t)^5 h_{5t} + \dots$$

waarin bijvoorbeeld h_{4x} de vierde afgeleide naar x voorstelt en h_{2t} de tweede afgeleide naar t.

Daar deze afgeleiden in het algemeen niet bekend zullen zijn, worden ze in bovenstaande uitdrukkingen vervangen door hun geschatte waarden, die met behulp van differenties van waarden van h kunnen worden verkregen. Hiervoor wordt verwezen naar nota 255, hoofdstuk VII, volgens welke bijvoorbeeld geldt

$$(\Delta x)^4 \cdot h_{4x} = \Delta_x^4$$

en

$$(\Delta t)^2 \cdot h_{2t} = \Delta_t^2$$

De rechterleden stellen hierin respectievelijk het vierde verschil naar x en het tweede verschil naar t voor. De waarden van Δ worden berekend in een of ander punt, gelegen binnen het waardenbereik van x en t (nota 255). Dit punt is niet precies bekend, hetgeen in het volgende niet bezwaarlijk zal zijn.

Na substitutie verkrijgt men

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

...

... ..

$$P \cdot (\Delta x)^4 = \frac{1}{12} \Delta_x^4 + \frac{1}{360} \Delta_x^6 + \frac{1}{20160} \Delta_x^8 + \dots \quad (10)$$

en

$$Q \cdot (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} \Delta_t^2 - \frac{1}{6} \Delta_t^3 + \frac{1}{24} \Delta_t^4 - \frac{1}{120} \Delta_t^5 + \dots \quad (11)$$

Uit (10) en (11) kunnen vervolgens bovengrenzen worden bepaald voor de absolute waarden van de grootheden $M \cdot (\Delta x)^4$ en $N \cdot (\Delta t)^2$, die na invullen in (8) een bovengrens voor $|\epsilon_{ij}|$ leveren.

In dit verband wordt eerst (10) beschouwd en wordt overwogen dat h voor elke waarde van t een monotone, vertraagd-toenemende negatieve functie van x zal zijn. Zie hiervoor figuur 3, waarin bij één t -waarde, voor een dergelijke functie enkele waarden van $|\Delta_x^1|$ en $|\Delta_x^2|$ zijn aangeduid. Bij een dergelijke kromme is

$$|\Delta_x^1| > |\Delta_x^2| > |\Delta_x^3| > \dots$$

In verband waarmee uit (10) volgt dat in een punt (t, x) geldt

$$|P(\Delta x)^4| < |\Delta_x^1| \cdot \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{360} + \dots\right) = \frac{1}{12} |\Delta_x^1| \quad (12)$$

Wat betreft (11) wordt figuur 4 onder de aandacht gebracht. Hierin is een functie h getekend, die ten aanzien van (11) de meest ongunstige situatie weergeeft. Want zijn in dit geval de verschillen Δ_t^1 gelijk aan $+1$ of -1 , dan is $\Delta_t^2 = +2$, $\Delta_t^3 = +4$ enz, steeds tweemaal zo groot, terwijl echter voor een willekeurige functie van t de waarde van $|\Delta_t^{k+1}|$ niet groter kan zijn dan het dubbele van de absolute waarde van de grootste der twee verschillen Δ_t^k waaruit Δ_t^{k+1} is berekend. Wordt daarom bij één bepaalde x de grootste $|\Delta_t^1|$ aangegeven door D_{tx} , dan volgt uit (11):

$$|Q \cdot (\Delta t)^2| < D_{tx} \left(\frac{2^1}{2} + \frac{2^2}{6} + \frac{2^3}{24} + \frac{2^4}{120} + \frac{2^5}{720} \dots\right) = 2D_{tx} \quad (13)$$

zodat volgens (7) met behulp van (12) en (13) bij benadering blijkt

$$(21) \quad \dots \dots \frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} + \dots (1) . 9$$

$$(22) \quad \dots \dots \frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} + \dots (1) . 9$$

... ..

...

$$(23) \quad \dots \dots \frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} + \dots (1) . 9$$

... ..

$$(24) \quad \dots \dots \frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} + \dots (1) . 9$$

... ..

$$|\epsilon_{ij}| < \frac{\frac{1}{12}|\Delta x|^1 + 2V \cdot W \cdot D_{tx}}{2 + V \cdot W} = 2D_{tx} - \frac{4D_{tx} - \frac{1}{12}|\Delta x|^1}{2 + V \cdot W} \quad (14)$$

Volgens (3) is VW onder meer afhankelijk van $\mu(h)$. Worden alle grootte-
den in (14), uitgezonderd μ bekend verondersteld, dan is (14) een monotoon
dalende of stijgende functie van μ . Omdat echter μ tussen 0 en 1 ligt, zal
een bovengrens voor $|\epsilon_{ij}|$ worden gevonden, die onafhankelijk is van μ , door
 $\mu = 0$ of 1 in te vullen. Voor $\mu = 0$ is $VW = 0$; voor $\mu = 1$
is $VW = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \cdot e^{2x}$ waaruit via (14) blijkt dat $|\epsilon_{ij}|$ kleiner is dan de groot-
ste van de waarden

$$\frac{1}{24}|\Delta x|^1 \quad \text{en} \quad 2D_{tx} - \frac{4D_{tx} - \frac{1}{12}|\Delta x|^1}{2 + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \cdot e^{2x}} \quad (15)$$

Een en ander wordt nu toegepast op de tabel van uitkomsten. Hierbij is
 $\Delta x = \frac{1}{2}$, $\Delta t = 15$. Nemen we bijvoorbeeld $(t, x) = (180, 0)$, dan is $|\Delta x|^1 =$
 $= 261 - 217 = 44$ terwijl in de kolom $x = 0$ wordt gevonden $D_{tx} = 268 - 264 = 4$.
De waarden genoemd in (15) bedragen respectievelijk

$$\frac{1}{24} \cdot 44 = 1.8$$

en

$$2 \times 4 - \frac{4 \times 4 - \frac{1}{12} \times 44}{2 + \frac{1}{60} \cdot e^0} = 1.9 \approx 2$$

Bij $t = 180$ en $x = 0$ werd dus gevonden $h(t, x) = 261$ met een onnauwkeu-
righeid die volgens bovenstaande berekeningen geschat wordt op maximaal onge-
veer 2 eenheden. Bij grotere waarden van x zal μ kleiner worden, en daardoor
zal de tweede uitdrukking in (15) minder bruikbaar worden omdat ze juist is
verkregen door $\mu = 1$ in te vullen in (14). (15) is dus hoofdzakelijk te ge-
bruiken voor het middengedeelte van de tabel van uitkomsten, aan de rechter-
rand zal ze te hoge waarden voor $|\epsilon_{ij}|$ geven.

$$\frac{\frac{1}{100} \times 100}{100} = \frac{1}{100} \times \frac{100}{100} = \frac{1}{100} \times 1 = \frac{1}{100}$$

... in addition ...
 ... the ...
 ... the ...
 ... the ...

... the ...
 ... the ...

$$\frac{1}{100} \times \frac{100}{100} = \frac{1}{100} \times 1 = \frac{1}{100}$$

... the ...
 ... the ...
 ... the ...
 ... the ...

$$\frac{1}{100} \times \frac{100}{100} = \frac{1}{100} \times 1 = \frac{1}{100}$$

... the ...
 ... the ...
 ... the ...
 ... the ...

Indien het mogelijk is, scherpere grenzen voor μ te bepalen dan de waarden 0 en 1, ligt het voor de hand, deze in (14) in te vullen en de grootste waarde als $|\epsilon_{ij}|$ te gebruiken.

In de proefberekening werd $\mu = 0.1$ gesteld. In dit geval ($\Delta x = \frac{1}{2}$, $\Delta t = 15$, $\mu = 0.1$) kan (15) worden vereenvoudigd tot

$$2D_{tx} = \frac{4D_{tx} - \frac{1}{12} \left| \frac{\Delta t}{\Delta x} \right|}{2 + \frac{1}{600} e^{2x}}$$

welke uitdrukking aanleiding geeft tot schattingen van $|\epsilon_{ij}|$ die voor geen enkele t en x meer dan 2 eenheden bedragen.

6. Toepassingen van het voorgaande wanneer de factortijd weinig of geen invloed heeft; een voorbeeld

Het voorgaande kan ook worden toegepast wanneer de factortijd wegvalt. Vergelijking (2) kan dan worden vereenvoudigd tot

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = e^{2x} [\underline{A}(h) + E(h) + \underline{C}] \quad (16)$$

waarin C een constante voorstelt.

Naar analogie met (3) luidt het rekenvoorschrift:

$$U = h_{j+1} + h_{j-1}$$

$$V = (e^{x_j} \cdot \Delta x)^2$$

$$Z = A(h) + E(h) + C$$

en

$$h_j = \frac{U - V \cdot Z}{2} \quad (17)$$

The first part of the document is a list of names and addresses, including:

 Mr. J. H. ...

 Mrs. ...

 Mr. ...

 Mrs. ...



The second part of the document contains a list of names and addresses, including:

 Mr. ...

 Mrs. ...

 Mr. ...

 Mrs. ...

The third part of the document contains a list of names and addresses, including:

 Mr. ...

 Mrs. ...

 Mr. ...

 Mrs. ...



The fourth part of the document contains a list of names and addresses, including:

 Mr. ...

 Mrs. ...

 Mr. ...

 Mrs. ...

...

...

Naar analogie met (7) en (12) is

$$\left| \epsilon_j \right| = \left| \frac{P \cdot (\Delta x)^4}{2} \right| = \frac{1}{24} \left| \Delta_x^1 \right| \quad (18)$$

Heeft men dus, na herhaalde toepassing van (17), een numerieke oplossing van de in figuur 3 aangeduide gedaante gevonden, dan kan via (18) een indruk worden verkregen van de maximale afwijking van elk punt van de numerieke oplossing ten opzichte van de exacte waarde.

De randvoorwaarden zullen het begin- en eindpunt van het deel van de curve $h(x)$ moeten vastleggen, dat wordt beschouwd. De aanvangswaarden h_j waarmee (17) moet werken kunnen op vele manieren gekozen worden, het meest voor de hand liggend is wellicht ze op de verbindingskoorde tussen begin- en eindpunt te kiezen.

De curven $A(h)$ en $E(h)$ hebben in het algemeen een kromlijngig verloop. Ter illustratie van het bovenstaande wordt een voorbeeld gegeven, waarin $A(h)$ en/of $E(h)$ kwadratisch met h verlopen. In dit geval wordt (16) van de vorm

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = e^{2x} \left[\underline{a} \cdot h^2 + bh + \underline{c} \right]$$

waarin a , b en c constanten voorstellen.

We beschouwen nu het voorbeeld waarin $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$, terwijl de randvoorwaarden luiden $(x = -3, h = -1)$ en $(x = 2, h = 0)$. In overeenstemming met figuur 5, zijn de aanvangswaarden h_j als volgt gekozen

j	x	h_j	
1	- 3	- 1	← randwaarden
2	- 2	- 0.8	
3	- 1	- 0.6	h_2, h_3, h_4 en h_5 te berekenen volgens (17)
4	0	- 0.4	
5	1	- 0.2	
6	2	0	← randwaarden

Handwritten text at the top of the page, possibly a title or header.

Handwritten text, possibly a date or reference number.

Main body of handwritten text, consisting of several lines of cursive script.

Second section of handwritten text, appearing as a separate paragraph.

Handwritten mathematical formula or equation.

Text block following the equation, containing further handwritten notes or explanations.

Handwritten table with multiple columns and rows of entries.

Uit (17) volgt in dit geval

$$h_{j-1} - 2h_j + h_{j+1} = e^{2x_j} \cdot (h_j^2 + 2h_j) \quad j = 2, 3, 4, 5$$

Uit deze vierkantsvergelijking is h_j te berekenen als h_{j-1} en h_{j+1} bekend zijn. Dit wordt zodanig toegepast dat als bijvoorbeeld h_2 is berekend, deze waarde direct wordt ingevuld en wordt gebruikt bij het berekenen van h_3 , enz.

Door de volledige berekening ($j = 2, 3, 4, 5$) een aantal keren te herhalen ontstaan enkele kolommen van h -waarden, die alle naar vaste waarden convergeren. Een aantal kolommen met tussenresultaten is hieronder vermeld, de laatste kolom bevat de volgens (18) verkregen schattingen van de maximale fout van de betreffende h_j .

j	x	h_j						Δ_x^1	ϵ_j
		aanvang	1e	3e	5e	7e	9e		
1	-3	-1	-1	-1	-1	-1	-1		
2	-2	-0.8	-0.791	-0.708	-0.666	-0.660	-0.660	0.324	0.013
3	-1	-0.6	-0.542	-0.370	-0.340	-0.336	-0.336	0.249	0.010
4	0	-0.4	-0.195	-0.097	-0.088	-0.087	-0.087	0.082	0.003
5	1	-0.2	-0.012	-0.006	-0.005	-0.005	-0.005	0.005	0.000
6	2	0	0	0	0	0	0		

... (11) ...

... (11) ...

... (11) ...

...
...
...
...
...

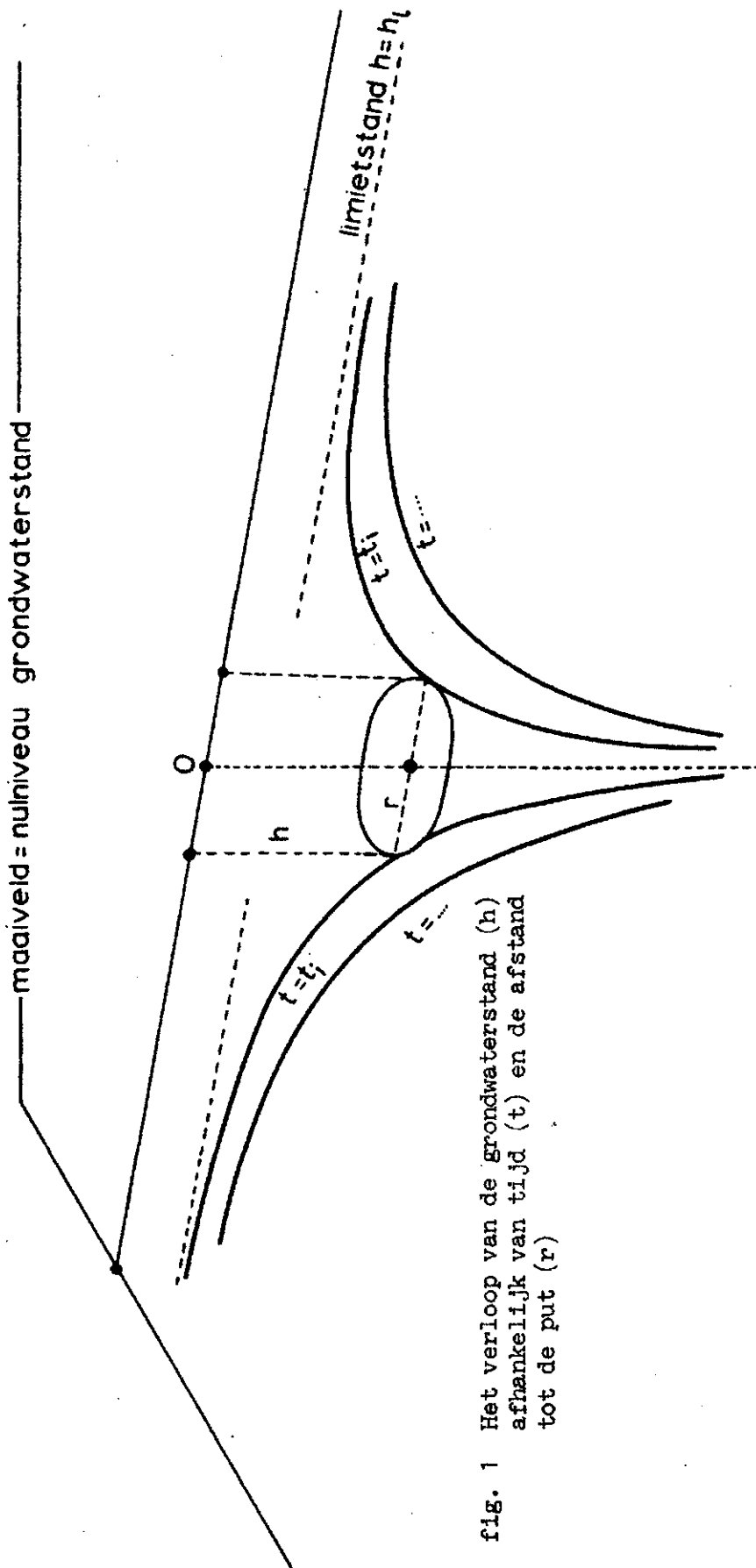


fig. 1 Het verloop van de grondwaterstand (h) afhankelijk van tijd (t) en de afstand tot de put (r)

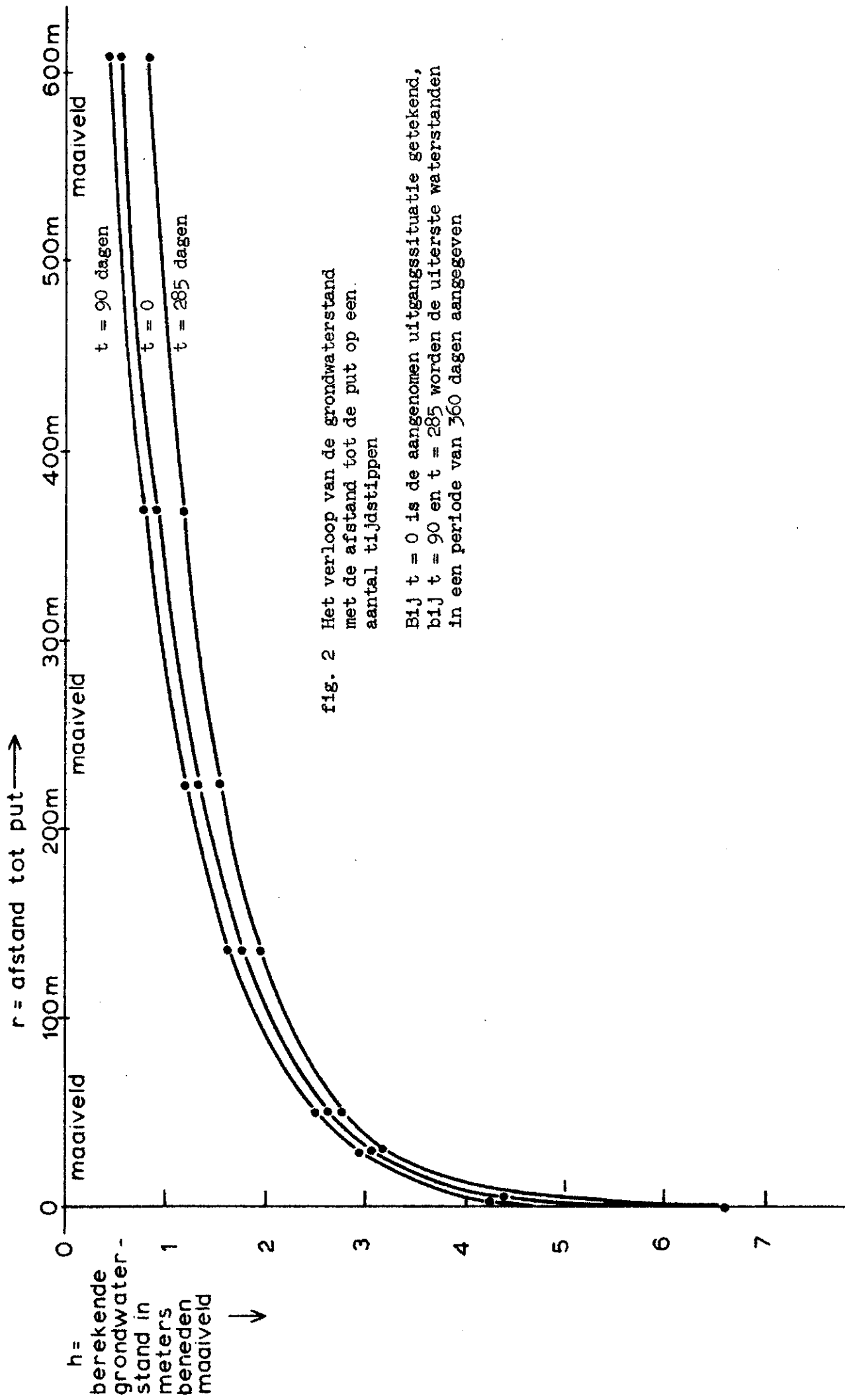


fig. 2 Het verloop van de grondwaterstand met de afstand tot de put op een aantal tijdstippen

Bij $t = 0$ is de aangenomen uitgangssituatie getekend, bij $t = 90$ en $t = 285$ worden de uiterste waterstanden in een periode van 360 dagen aangegeven

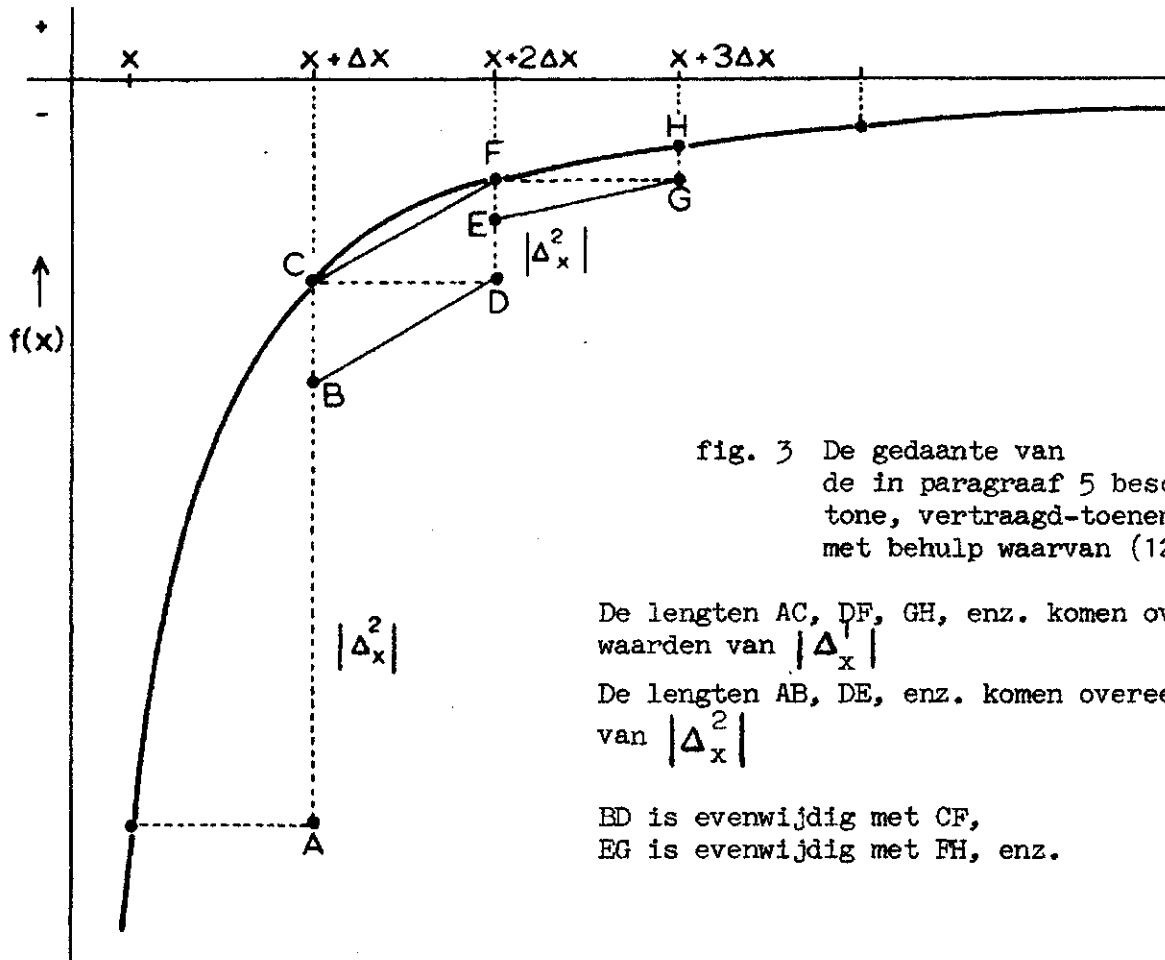


fig. 3 De gedaante van de in paragraaf 5 beschouwde monotone, vertraagd-toenemende functie, met behulp waarvan (12) is afgeleid

De lengten AC, DF, GH, enz. komen overeen met waarden van $|\Delta_x|$

De lengten AB, DE, enz. komen overeen met waarden van $|\Delta_x^2|$

BD is evenwijdig met CF,
EG is evenwijdig met FH, enz.

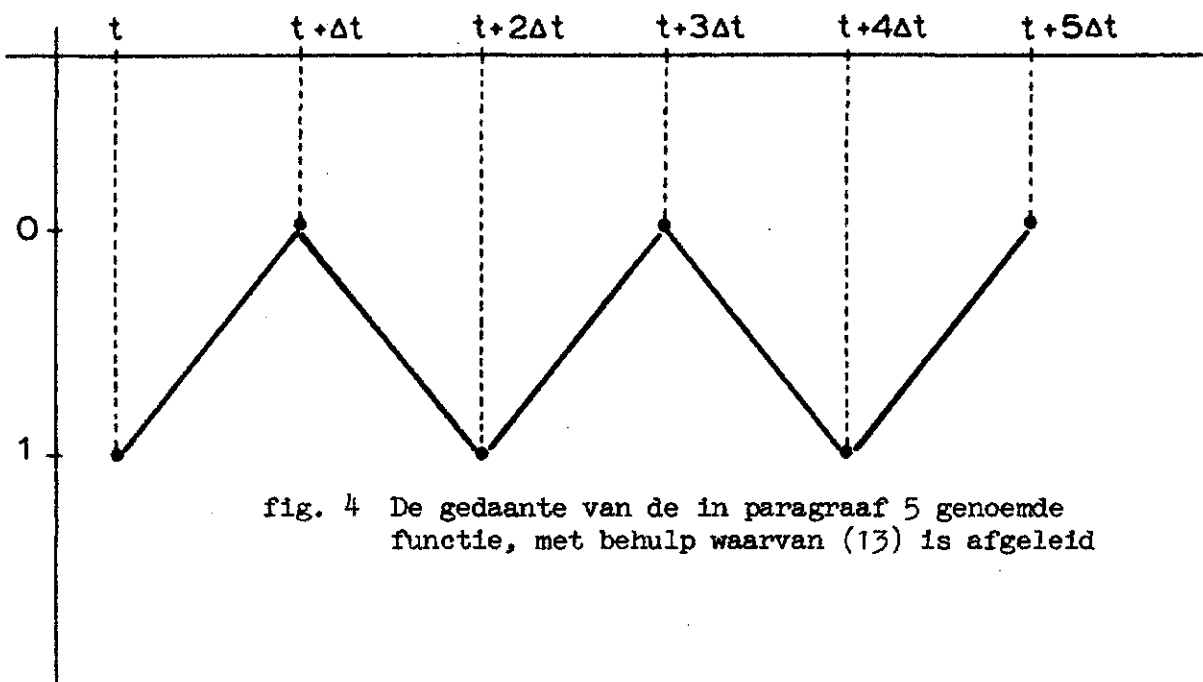


fig. 4 De gedaante van de in paragraaf 5 genoemde functie, met behulp waarvan (13) is afgeleid

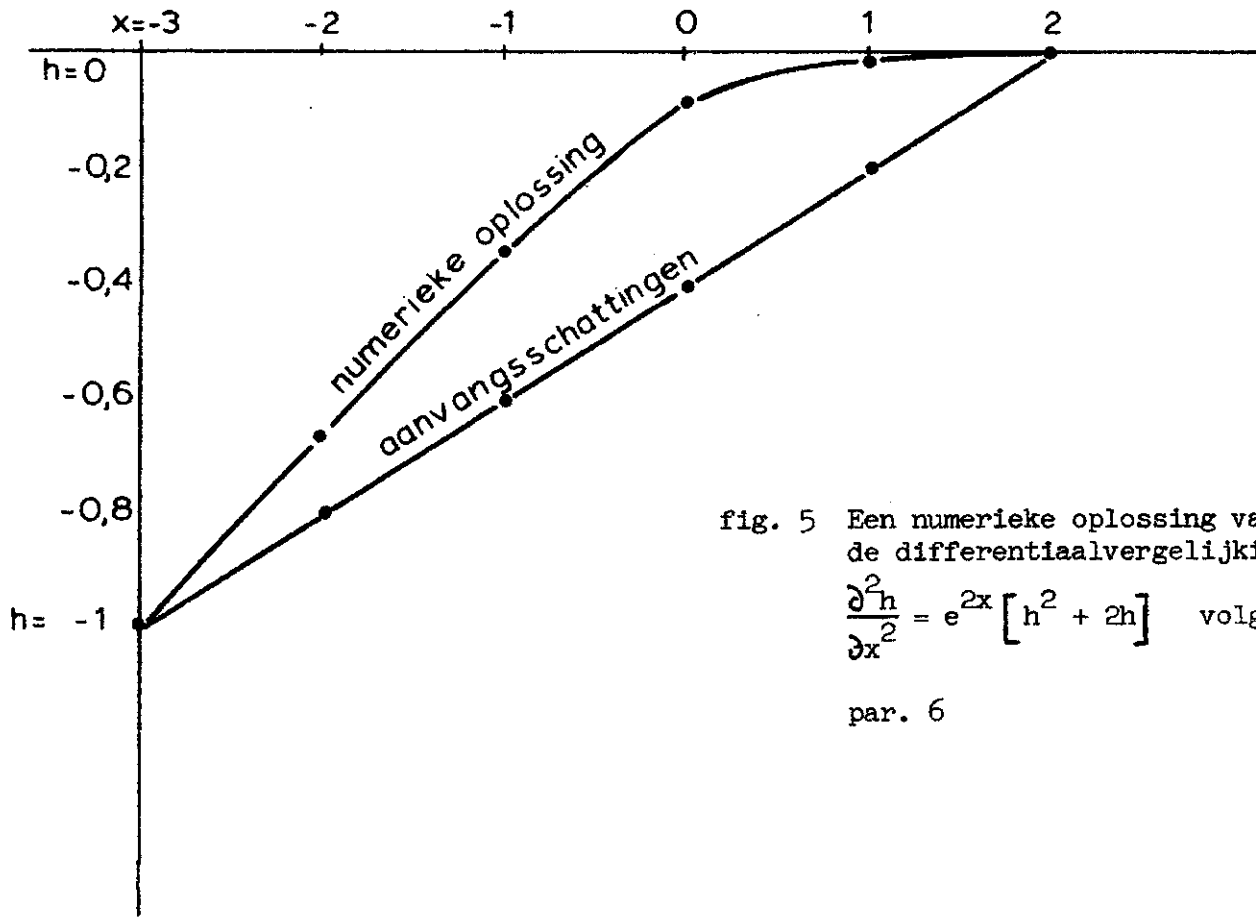


fig. 5 Een numerieke oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = e^{2x} [h^2 + 2h]$$
 volgens
 par. 6

