

NN31545.0732

FA 732

april 1973

Instituut voor Cultuurtechniek en Waterhuishouding
Wageningen

BIBLIOTHEEK DE HAAFF
Droevendaalsesteeg 3a
Postbus 241
6700 AE Wageningen

HET INTERPOLEREN VAN SEIZOEN-AFHANKELIJKE FACTOREN II

Mej. M.G. van Steenbergen

**BIBLIOTHEEK
STARINGGEBOUW**

Nota's van het Instituut zijn in principe interne communicatiemiddelen, dus geen officiële publikaties. Hun inhoud varieert sterk en kan zowel betrekking hebben op een eenvoudige weergave van cijferreeksen, als op een concluderende discussie van onderzoeksresultaten. In de meeste gevallen zullen de conclusies echter van voorlopige aard zijn omdat het onderzoek nog niet is afgesloten. Bepaalde nota's komen niet voor verspreiding buiten het Instituut in aanmerking



CENTRALE LANDBOUWCATALOGUS
0000 0672 9228

I N H O U D

	Biz.
1. INLEIDING	1
2. PROBLEEMSTELLING	1
3. BESCHRIJVING VAN DE TE VOLGEN METHODE	2
4. UITWERKING VAN DE METHODE	3
5. INVLOED VAN DE KEUZE VAN P (EXTREEM)	7
6. TOEPASSING OP EEN FICTIEF VOORBEELD	9

1. INLEIDING

In ICW-nota 544 (STOL, 1970) wordt aan de orde gesteld welke problemen zich voordoen bij het interpoleren van factoren die afhankelijk zijn van het seizoen en hoe deze interpolatie kan worden uitgevoerd. Omdat het in de praktijk voorkomt dat de verzameling waarden die een factor kan aannemen begrensd is, blijkt het van belang de probleemstelling uit te breiden en als extra voorwaarde aan het model toe te voegen dat de geïnterpoleerde factor het extremum niet overschrijdt. Voor het geval dat de waardenverzameling éénzijdig begrensd is werd een oplossing uitgewerkt.

2. PROBLEEMSTELLING

Voor opeenvolgende perioden (bijv. maanden) zijn bekend de som van een grootheid S_j (bijv. een neerslagsom) en een factor P_j , afhankelijk van het seizoen, waarmee de grootheid S_j wordt vermenigvuldigd.

Verfijnen van de tijdschaal, wat mogelijk is als de waarden van de betreffende grootheid ook bekend zijn per kleinere tijdseenheid, maakt het wenselijk voor de factor geïnterpoleerde waarden te gebruiken die zijn aangepast aan de factoren van de voorgaande en volgende periode.

In de nieuwe tijdseenheid (bijv. decaden) wordt de grootheid voorgesteld door deeltotalen d_i en de factor door p_i , waarbij i de waarden 1 tot en met n doorloopt als elke periode in n delen wordt gesplitst.

Duidelijk is dat voor elke periode geldt

$$\sum_{i=1}^n d_i = S_j \quad (2.1)$$

terwijl als eis moet worden gesteld

$$\sum_{i=1}^n d_i p_i = S_j P_j \quad (2.2)$$

Hieraan wordt toegevoegd de eis dat p_i het extremum niet overschrijdt, dus in geval van een maximum

$$p_i \leq P_{\max}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

en in geval van een minimum

$$p_i \geq P_{\min}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

3. BESCHRIJVING VAN DE TE VOLGEN METHODE

Bij het berekenen van de waarden p_i voor periode j werd in nota 544 uitgegaan van de waarden π_i welke gevonden worden door lineaire interpolatie tussen P_{j-1} , P_j en P_{j+1} .

Om de verhouding tussen de π_i 's onderling voor de te berekenen factoren te handhaven werden de p_i 's berekend uit de vergelijkingen

$$p_i = p_0 \cdot \pi_i \quad \text{voor } i = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

waarbij p_0 zodanig wordt bepaald dat aan voorwaarde (2.2) is voldaan. Deze werkwijze heeft het voordeel dat, in geval de P_j 's positief zijn, ook voor p_i positieve waarden worden gevonden. De waarde $P = 0$ treedt dus op als een minimum. Dit nu geeft een aanwijzing hoe aan voorwaarde (2.3) of voorwaarde (2.4) kan worden voldaan. Hiertoe moeten niet de waarden van π_i met een (positieve) factor worden vermenigvuldigd, maar de verschillen van π_i met P_{extreem} . Wat hiervan de consequenties zijn kan het beste meetkundig worden duidelijk gemaakt. In elk geval is zonder meer in te zien dat de verschillen van

p_i met P_{extreem} hetzelfde teken zullen hebben als die van π_i met P_{extreem} , met andere woorden de berekende p_i 's zullen de grenswaarde P_{extreem} niet overschrijden.

4. UITWERKING VAN DE METHODE

Bij de uitwerking zal ter vereenvoudiging van de notatie $j = 1$ worden genomen. In fig. 4.1 is de factor P uitgezet tegen de tijd. De horizontale schaal is z6 gekozen dat de index i de waarden 1, 2, ..., n aanneemt. De figuur is getekend voor $n = 4$. De rechte l_1 door de punten

$$\left(\frac{1}{2}(n+1) - n, P_0\right)$$

en

$$\left(\frac{1}{2}(n+1), P_1\right)$$

heeft als vergelijking

$$y = \frac{2x + n - 1}{2n}(P_1 - P_0) + P_0 \quad (4.1)$$

De rechte l_2 door de punten

$$\left(\frac{1}{2}(n+1), P_1\right)$$

en

$$\left(\frac{1}{2}(n+1) + n, P_2\right)$$

heeft als vergelijking

$$y = \frac{2x - n - 1}{2n}(P_2 - P_1) + P_1 \quad (4.2)$$

Voor de geïnterpoleerde waarden π_i kan dus worden geschreven

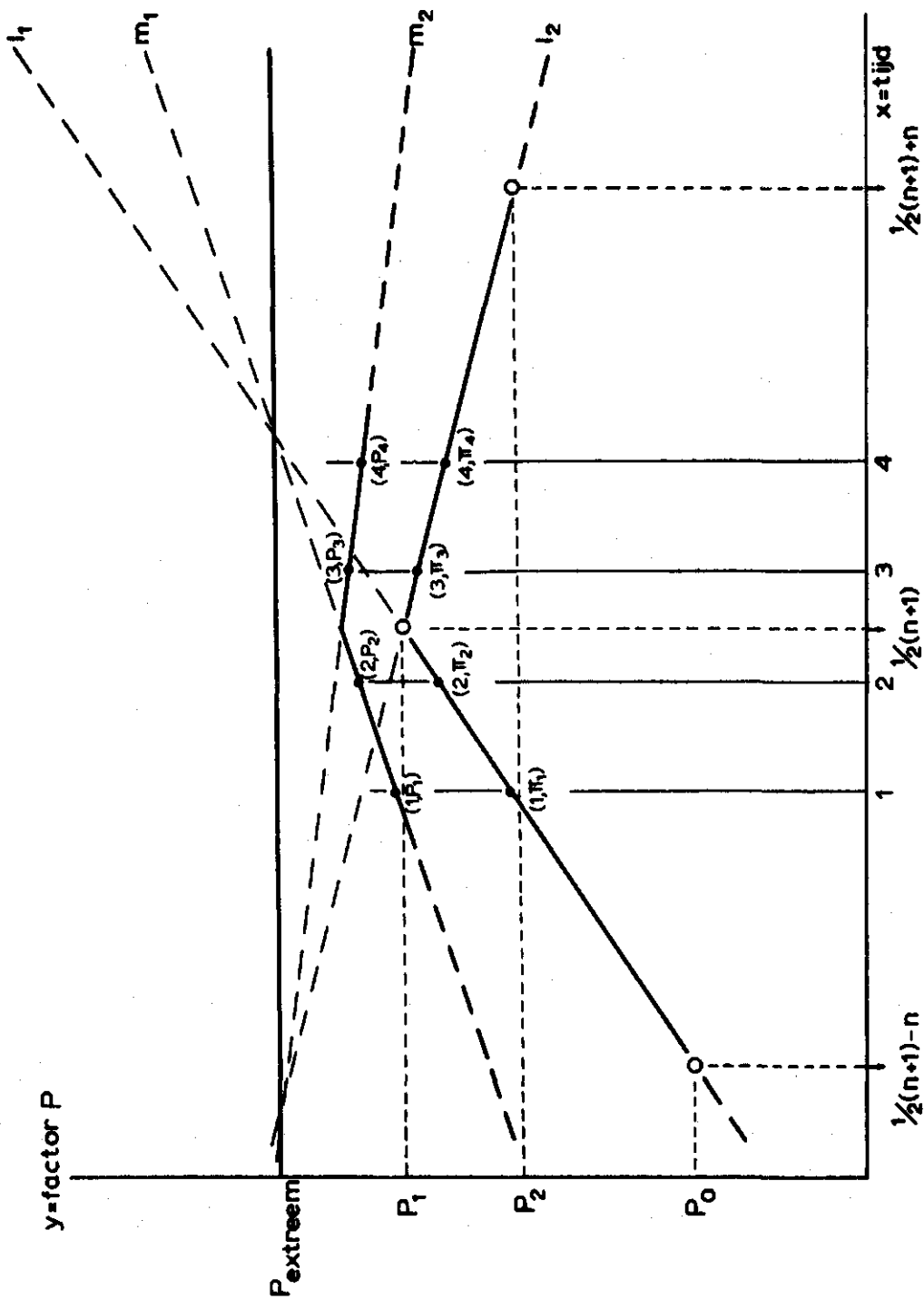


Fig. 4.1. Meetkundige voorstelling van de interpolatie-methode

$$\pi_i = \frac{2i + n - 1}{2n}(P_1 - P_0) + P_0 \quad \text{voor} \quad 1 \leq i \leq \frac{1}{2}(n + 1) \quad (4.3)$$

en

$$\pi_i = \frac{2i - n - 1}{2n}(P_2 - P_1) + P_1 \quad \text{voor} \quad \frac{1}{2}(n + 1) \leq i \leq n \quad (4.4)$$

Nu passen we op de rechten l_1 en l_2 een lijnvermenigvuldiging toe met de lijn $y = P_{\text{extreem}}$ als as en met een factor $q_0 \geq 0$. De beelden van l_1 en l_2 zijn de rechten m_1 en m_2 . Snijden we m_1 respectievelijk m_2 met de rechten $x = i$ dan vinden we de snijpunten (i, p_i) .

Om de formule voor het berekenen van p_i te vinden is het aantrekkelijk om, in plaats van de beschreven lijnvermenigvuldiging, achtereenvolgens drie transformaties uit te voeren die uiteindelijk hetzelfde beeld geven. Deze transformaties zijn:

T_1 : een translatie over de vector $(0, -P_{\text{extreem}})$

T_2 : een lijnvermenigvuldiging met de lijn $P = 0$
als as en met factor q_0

T_3 : een translatie over de vector $(0, P_{\text{extreem}})$

Het beeld van (i, π_i) is

$$\begin{aligned} T_3 \cdot T_2 \cdot T_1(i, \pi_i) &= T_3 \cdot T_2(i, \pi_i - P_{\text{extreem}}) \\ &= T_3(i, q_0(\pi_i - P_{\text{extreem}})) \\ &= (i, P_{\text{extreem}} + q_0(\pi_i - P_{\text{extreem}})) \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$p_i = P_{\text{extreem}} + q_0(\pi_i - P_{\text{extreem}})$$

ofwel

$$p_i = q_0 \pi_i + (1 - q_0) P_{\text{extreem}} \quad (4.5)$$

De vermenigvuldigingsfactor q_0 moet hier z6 gekozen worden dat aan voorwaarde (2.2) is voldaan. Substitutie van (4.5) in de vergelijking

$$\sum_{i=1}^n p_i d_i = P_1 S_1$$

geeft

$$\sum_{i=1}^n d_i q_0 \pi_i + d_i (1 - q_0) P_{\text{extreem}} = P_1 S_1$$

waaruit q_0 wordt opgelost:

$$q_0 = \frac{S_1 (P_{\text{extreem}} - P_1)}{P_{\text{extreem}} S_1 - \sum \pi_i d_i} \quad (4.6)$$

Als we voor het met de deeltotalen gewogen gemiddelde van de π_i 's het symbool $\bar{\pi}$ invoeren, dat wil zeggen

$$\bar{\pi} = \frac{\sum_{i=1}^n \pi_i d_i}{\sum_{i=1}^n d_i} \quad (4.7)$$

en we substitueren hierin nog vergelijking (2.1) dan kan vergelijking (4.6) worden vereenvoudigd tot

$$q_0 = \frac{P_{\text{extreem}} - P_1}{P_{\text{extreem}} - \bar{\pi}} \quad (4.8)$$

Resumé

$$p_i = q_0 \pi_i + (1 - q_0) P_{\text{extreem}}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$q_0 = \frac{P_{\text{extreem}} - P_1}{P_{\text{extreem}} - \bar{\pi}}$$

5. INVLOED VAN DE KEUZE VAN P(EXTREEM)

In overeenstemming met wat in nota 544 werd afgeleid voor P_0 blijkt dat vergelijking (4.8) voor $P_{\text{extreem}} = 0$ overgaat in

$$q_0 = \frac{P_1}{\pi} \quad (5.1)$$

Het is van belang om na te gaan of de keuze van P_{extreem} het resultaat van de berekening erg beïnvloedt. Hiertoe is een fictief voorbeeld uitgewerkt voor verschillende waarden van P_{extreem} . De gegevens zijn:

$n = 4$	$d_1 = 15$
$S = 100$	$d_2 = 35$
$P_0 = -0,52$	$d_3 = 18$
$P_1 = 0,52$	$d_4 = 32$
$P_2 = -0,06$	$\sum d_i = 100$

zodat

$$q_0 = \frac{P_{\text{extreem}} - 0.52}{P_{\text{extreem}} - 0.33335}$$

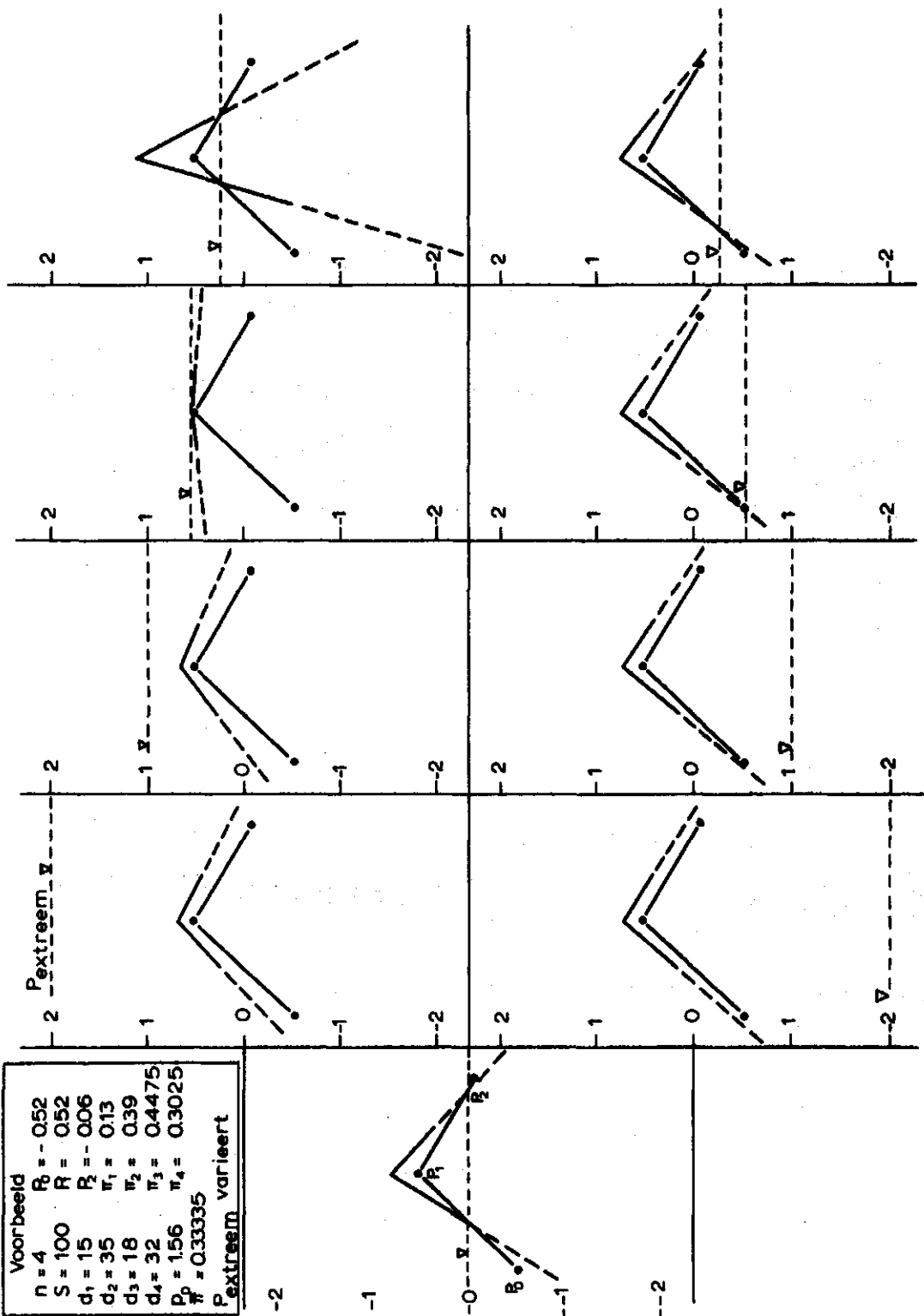
Het construeren van de lijnen l_1 , l_2 , m_1 en m_2 geeft een duidelijker beeld van de uitkomsten dan een tabel van waarden voor q_0 en p_i kan doen, daarom wordt volstaan met een tekening (fig. 5.1).

Voor P_{extreem} kiezen we achtereenvolgens de waarden 2; 1; 0,54; 0,25; 0; -2; -1; -0,54; -0,25.

Uit de figuur komen nu twee opmerkelijke dingen naar voren. In de eerste plaats gaat het model als P_{extreem} naar ∞ gaat, over in een additief model, zoals genoemd in nota 544. Als vergelijking (4.8) geschreven wordt in de vorm

$$q_0 = \frac{1 - \frac{P_1}{P_{\text{extreem}}}}{1 - \frac{\pi}{P_{\text{extreem}}}}$$

Voorbeeld
 $n = 4$ $R_1 = -0.52$
 $S = 100$ $R = 0.52$
 $d_1 = 15$ $R_2 = -0.06$
 $d_2 = 35$ $r_1 = 0.13$
 $d_3 = 18$ $r_2 = 0.39$
 $d_4 = 32$ $r_3 = 0.4475$
 $P_1 = 1.56$ $r_4 = 0.3025$
 $P = 0.33335$
 Pextreem varieert



is direct te zien dat

$$\lim_{P_{\text{extr}} \rightarrow \infty} q_0 = 1 \quad (5.2)$$

Wat de consequenties hiervan zijn voor vergelijking (4.5) is minder doorzichtig. Gebruikmakend van de regel van de l'Hôpital kunnen we afleiden dat

$$\lim_{P_{\text{extr}} \rightarrow \infty} (1 - q_0) P_{\text{extr}} = P_1 - \bar{\pi}$$

Hieruit volgt dat vergelijking (4.5) voor $P_{\text{extreem}} \rightarrow \infty$ overgaat in

$$P_i = \pi_i + P_1 - \bar{\pi} \quad (5.3)$$

Deze vergelijking komt overeen met wat we vinden als voorwaarde (2.2) wordt gecombineerd met de voorwaarde dat de verschillen tussen de p_i 's gelijk zijn aan die tussen de π_i 's (het kenmerk van het additief model).

In de tweede plaats blijkt dat de waarden van p_i sterk af gaan wijken van de waarden van π_i als P_{extreem} ligt tussen P_0 en P_1 , respectievelijk P_1 en P_2 . Dit lijkt een irreële situatie, maar indien de factor P zowel negatieve als positieve waarden kan aannemen doet deze situatie zich voor zodra de procedure van nota 544 wordt gevolgd.

Opgemerkt moet hier natuurlijk worden dat de waarde van P_{extreem} in de praktijk veelal niet vrij gekozen wordt, maar vastligt op bijvoorbeeld fysisch-theoretische gronden.

6. TOEPASSING OP EEN FICTIEF VOORBEELD

De in het voorgaande besproken methode zal nu op een voorbeeld worden toegepast. Tabel 6.1 vermeldt zowel de gegeven als de berekende grootheden. Ter vergelijking zijn de factoren op twee manieren aangepast, namelijk met $P_{\text{extreem}} = 0$ (dat wil zeggen met behulp van de parameter p_0) en met $P_{\text{extreem}} = 1$ (met de parameter q_0).

Tabel 6.1. Fictief voorbeeld

Periode	P _{extreem} = 0						P _{extreem} = 1					
	S	d	P	π	P ₀	P'	q ₀	P''	P'd	P''d	PS	
0			0.20									
1	93	31	0.80	0.575	1.393	0.801	0.470	0.800	24.8	24.8	74.4	74.4
		15		0.725		1.010		0.871	15.1	13.1		
		6		0.700		0.975		0.859	5.9	5.2		
		41		0.500		0.697		0.765	28.6	31.4		
2	43	3	0.00	0.300	0	0	1.225	0.142	0	0.4	0	0
		17		0.100		0		-0.103	0	-1.7		
		8		0.100		0		-0.103	0	-0.8		
		15		0.300		0		0.142	0	2.1		
3	50	9	0.80	0.500	1.303	0.652	0.518	0.741	5.9	6.7	40.0	40.0
		21		0.700		0.912		0.845	19.2	17.7		
		6		0.706		0.920		0.848	5.5	5.1		
		14		0.519		0.676		0.751	9.5	10.5		
4	44	8	0.05	0.331	0.205	0.068	1.257	0.159	0.5	1.3	2.2	2.2
		12		0.144		0.029		-0.076	0.4	-0.9		
		13		0.162		0.033		-0.053	0.4	-0.7		
		11		0.388		0.079		0.230	0.9	2.5		
5	72	22	0.95	0.612	1.279	0.783	0.194	0.925	17.2	20.3	68.4	68.4
		8		0.838		1.071		0.968	8.6	7.7		
		32		0.844		1.079		0.970	34.5	31.0		
		10		0.631		0.807		0.928	8.1	9.3		
6			0.10									

De fig. 6.1 en 6.2 laten zien hoe in beide gevallen de factor P een meer vloeiend verloop krijgt.

O p m e r k i n g

Zoals in de inleiding al is gezegd werd alleen een methode uitgewerkt voor het geval dat de waardenverzameling van P éézijdig begrensd is. Bij een tweezijdige begrenzing lijkt het niet mogelijk een eenvoudige methode aan te geven. Een compromis-oplossing zou kunnen zijn de waarde van P_{extreem} per periode vast te stellen en wel zó, dat voor P_{extreem} gekozen wordt het extremum dat het dichtst ligt bij de waarde van de factor P zoals die voor de betreffende periode is gegeven.

Stellen we in bovenstaand voorbeeld de voorwaarde

$$0 \leq P \leq 1$$

dan zou hieraan voldaan zijn als we beurtelings $P_{\text{extreem}} = 1$ en $P_{\text{extreem}} = 0$ nemen. Daarmee blijven we voldoen aan voorwaarde (2.2).

Fig. 6.3 laat zien dat deze oplossing, hoewel niet elegant, toch alleszins bruikbaar is.

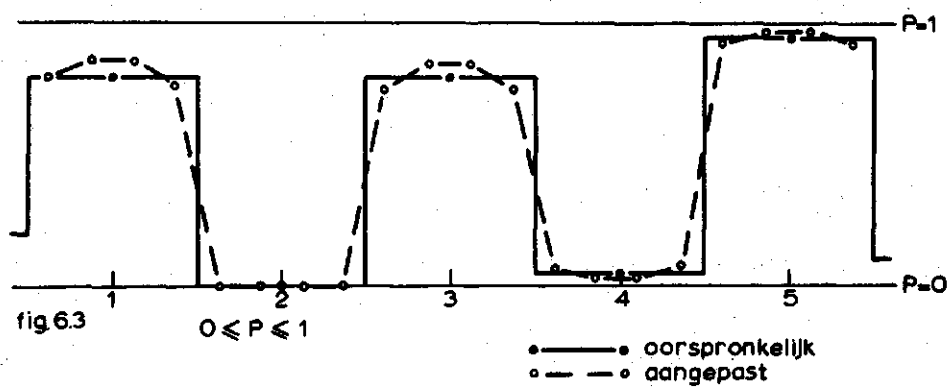
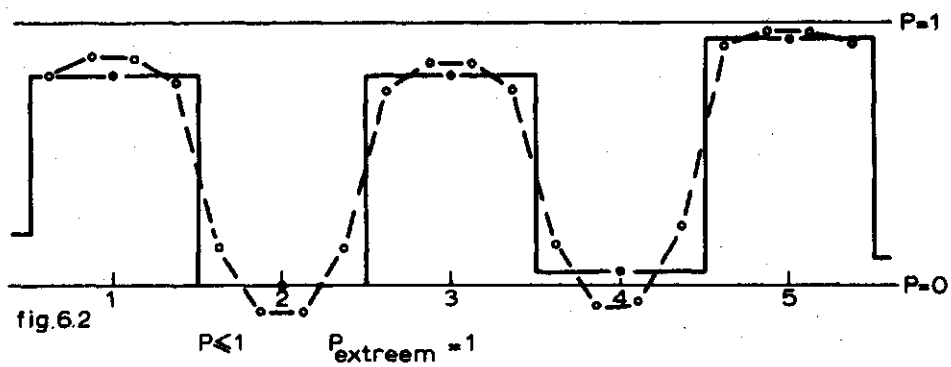
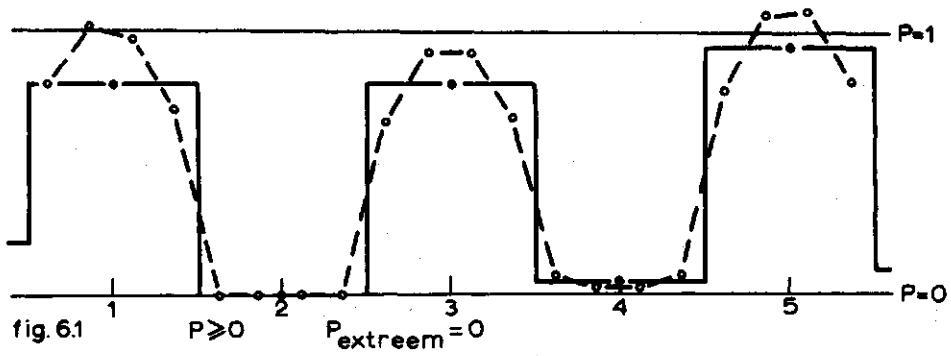


Fig. 6.1 t/m 6.3. Verloop van de seizoen-afhankelijke factor vóór en na aanpassing aan de deeltotalen (zie tabel 6.1)