

NOTA 760-^I

augustus 1973

voor Cultuurtechniek en Waterhuishouding
Wageningen

NN31545.0760

EEN METHODE TER BEPALING VAN DE INWENDIGE ROOSTERPUNTEN
VAN GEDEELTEN VAN HET PLATTE VLAK, ZOALS TE GEBRUIKEN
BIJ HET SAMENSTELLEN VAN EEN BEGROEIINGSKAART IN DE
LANDSCHAPS-ANALYSE

W. van Doorne

BIBLIOTHEEK
STARINGGEBOUW

Nota's van het Instituut zijn in principe interne communicatie-
middelen, dus geen officiële publikaties.
Hun inhoud varieert sterk en kan zowel betrekking hebben op een
eenvoudige weergave van cijferreeksen, als op een concluderende
discussie van onderzoeksresultaten. In de meeste gevallen zullen
de conclusies echter van voorlopige aard zijn omdat het onderzoek
nog niet is afgesloten.
Bepaalde nota's komen niet voor verspreiding buiten het Instituut
in aanmerking

25N. 196621-01

I N H O U D

	Blz.
1. INLEIDING	1
2. DE AARD VAN DE GEGEVENS	6
3. INLEIDENDE BEWERKINGEN, ORDENING DER GEGEVENS	8
4. BEREKENING VAN OPPERVLAKTEN	10
5. ALGEMENE METHODE VOOR HET DETERMINEREN VAN EEN PUNT	11
6. BEGRENZING VAN EEN BEGROEIINGSELEMENT	14
7. DE HORIZONTALE DOORSNIJDING VAN EEN ELEMENT	15
8. DE KRITIEKE ROOSTERPUNTEN OP EEN HORIZONTALE RASTERLIJN	16
9. DE A-SELECTE HERDEFINITIE VAN RANDPUNTEN	18
10. SAMENVATTING	20
BIJLAGE: AFLEIDING VAN DE OPPERVLAKTE-FORMULE	24

1. INLEIDING

In de landschapsanalyse zoals beschreven en toegepast in de nota's 650, 659, 667, 699, 720 en 730 bestaat een van de aspecten uit het kwantificeren van diverse vormen van begroeiing. Hierbij wordt onderscheid gemaakt (MENZINGA-WAALJENBERG, nota 650) tussen:

1. vlakvormige elementen (bos, boomgaard)
2. lijnvormige elementen (houtwallen, heggen, lanen, bomenrijen)
3. puntvormige elementen (solitair, groepen struiken)

Als eerste stap naar een computerverwerking van begroeiingsgegevens is daarom in het volgende aangegeven op welke wijze een inventarisatie en analyse van de vlakvormige elementen kan plaatsvinden. Hierbij gaat het er in de eerste plaats om, de gedaanten van alle (vlakvormige) elementen in de computer te registreren in de vorm van een 'begroeiingskaart', welke als basiskaart voor andere berekeningen kan dienen.

Een voorlopig computerprogramma POLYGON (fig. 1, 1A, B, C), geschreven in FORTRAN, werd ontwikkeld voor het samenstellen van een kaart waarin één aspect van onderzoek (in het volgende is dit steeds de begroeiing) wordt weergegeven. Deze computerkartering vindt plaats aan de hand van een netwerk dat over de kaart van het te onderzoeken terrein wordt aangebracht. Van elk roosterpunt (snijpunt der netlijnen) wordt vastgesteld of het wel of niet tot een begroeiingselement behoort. Het huidige programma (augustus, 1973) is geschikt voor een netwerk van 115 x 115 mazen. Bij gebruik van een maaswijdte van ca. 2,50 meter, wat ongeveer overeenkomt met de standaardafwijking van de geregistreerde gegevens^{x)} (zie par. 2), komt dit neer op een vierkant gebied van ruim 8 ha.

^{x)} Persoonlijke mededeling van A.C. VISSER

```

PROGRAM POLYGON(INPUT,OUTPUT,TAPE1=INPUT)
*** BEPAALT DE INWENDIGE ROOSTERPUNTEN VAN VLAKGEDEELTEN DIE DOOR
*** RECHTE LIJNSTUKKEN WORDEN BEGRENSD.
*** DE VLAKGEDEELTEN MOGEN CONCAAF EN MEERVOUDIG SAMENHANGEND ZIJN.
*** ZIE VERDER DE SUBROUTINES
*** RANDOMS, VERTEX, SIDES, SECANT, ROUNDEX, POINTS, INOUT.
***
INTEGER AY(115),R(115),X(115),Y(115)
INTEGER A,B,EL,EN,P,Q,U,V,XMAX,XMIN,XP,X1,X2,YMAX,YMIN,YP,Y1,Y2
INTEGER AQ
COMMON AY,CX(600),CY(600),CI(600),EX(115),IND(115),IX(115)
COMMON R,X,Y,AR(115),IMAGE(115,115)
COMMON A,B,C,D,IN,INDEX,KY,M,N,NY,XMAX,XMIN,XP,YMAX,YMIN,YP

PRINT101
101 FORMAT(1H1)
INDEX=0
DO 4 I=1,115
AR(I)=0.
DO 4 J=1,115
4 IMAGE(I,J)=0
CALL RANDOMS
1 CALL VERTEX
CALL SIDES
YP=YMAX+1
2 YP=YP-1
IF(YP.LT.YMIN) GOTO 3
CALL SECANT
CALL ROUNDEX
CALL POINTS
GOTO 2
3 IF(A.NE.0) GOTO 1
DO 5 I=1,115
K=116-I
5 PRINT102,(IMAGE(K,J),J=1,115)
102 FORMAT(1X,115A1)
CALL EXIT
END

```

Fig. 1. FORTRAN-programma 'POLYGON'
(hoofd-progr.)

```

SUBROUTINE RANDOMS
*** INITIALISEERT LIBRARY SUBROUTINE RAND
*** T.V.M. BEHANDELING RANDPUNTEN IN SURR. POINTS.
***
T=TIME(TA)
DECODE(10,101,T) IM,IM,IS
101 FORMAT(1X,3(I2,1X))
ISC=3600*IM+60*IM*IS
T=ISC+ISC+1
CALL RANSET(T)
RETURN
END

SUBROUTINE VERTEX
*** LEEFT DE HOEKPUNTS-COORDINATEN VAN EEN GERIED.
*** ZET ZE IN VOLGORDE EN BEREKENT DE OPPERVLAKTE.
***
INTEGER AY(115),R(115),X(115),Y(115)
INTEGER A,B,EL,EN,P,Q,U,V,XMAX,XMIN,XP,X1,X2,YMAX,YMIN,YP,Y1,Y2
INTEGER AO
COMMON AY,CX(600),CY(600),C1(600),EX(115),IND(115),IX(115)
COMMON R,X,Y,AR(115),IMAGE(115,115)
COMMON A,B,C,D,IN,INDEX,KY,M,N,NY,XMAX,XMIN,XP,YMAX,YMIN,YP

N=1
IF(INDEX,EO,1) GOTO 1
READ(101,C,D,EL,EN)
101 FORMAT(2F10.5,2I3)
1 X(1)=C+0.5
AY(1)=Y(1)+0.5
2 READ(101,E,F,A,B)
IF(EOF(1)) 21,22
21 STOP 1111
22 CONTINUE
U=F+0.5
V=F+0.5
IF(A.NE.EL) GOTO 3
IF(R.NE.EN) GOTO 3
N=N+1
X(N)=U
AY(N)=V
IF(EN.NE.0) V=-V
Y(N)=V
EL=A $ FN=R $ GOTO 2
3 IF(EN.NE.0) GOTO 5
N=N+1 $ X(N)=X(1) $ AY(N)=Y(1) $ Y(N)=Y(1)
N=N+1 $ P=X(N)=U $ AQ=AY(N)=V $ Q=Y(N)=-V
IF(A.NE.EL) GOTO 6
EL=A $ FN=R $ GOTO 2
5 N=N+1 $ X(N)=P $ AY(N)=AQ $ Y(N)=Q $ GOTO 4
6 J=EL
N=N-1 $ C=U $ D=V $ EL=A $ EN=R $ INDEX=1

**
** OPPERVLAKT PER ELEMENT
**
M=N-1 $ ARFA=0.
DO A I=1,M
8 AREA=ARFA+X(I+1)*Y(I)-X(I)*Y(I+1)
AR(J)=AREA*0.5
RETURN
END

SUBROUTINE SIDES
*** BEPAALT DE RICHTINGS-COEFFICIENTEN VAN DE ZIJDEN
*** EN DE HOEKPUNTEN VAN DE OMGESCHREVEN RECHTHOEK.
***
INTEGER AY(115),R(115),X(115),Y(115)
INTEGER A,B,EL,EN,P,Q,U,V,XMAX,XMIN,XP,X1,X2,YMAX,YMIN,YP,Y1,Y2
INTEGER AO
COMMON AY,CX(600),CY(600),C1(600),EX(115),IND(115),IX(115)
COMMON R,X,Y,AR(115),IMAGE(115,115)
COMMON A,B,C,D,IN,INDEX,KY,M,N,NY,XMAX,XMIN,XP,YMAX,YMIN,YP

XMIN=YMIN=99999 $ XMAX=YMAX=-1
DO I I=1,M
CX(I)=CY(I)=C1(I)=0.
U=X(I) $ V=AY(I)
IF(Y(I)*Y(I+1).LE.0) GOTO 1
CX(I)=AY(I+1)-V
CY(I)=U-X(I+1)
C1(I)=V*X(I+1)-U*AY(I+1)
XMIN=MIND(XMIN,U) $ YMIN=MIND(YMIN,V)
XMAX=MAXD(XMAX,U) $ YMAX=MAXD(YMAX,V)
1 CONTINUE
RETURN
END

```

Fig. 1A. Sub-programma's
RANDOMS, VERTEX, SIDES

```

SUBROUTINE SECANT
*** BEPAALT DE SNIJPUNTEN VAN DE LIJN Y=C MET GERIEDEZIJDEN
*** EN VERWIJDEERT SNIJPUNTEN VOORZOVER ZE MEERVOUDIG ZIJN.
***
INTEGER AY(115),R(115),X(115),Y(115)
INTEGER A,B,EL,EN,P,Q,U,V,XMAX,XMIN,XP,X1,X2,YMAX,YMIN,YP,Y1,Y2
INTEGER AO
COMMON AY,CX(600),CY(600),C1(600),EX(115),IND(115),IX(115)
COMMON R,X,Y,AR(115),IMAGE(115,115)
COMMON A,B,C,D,IN,INDEX,KY,M,N,NY,XMAX,XMIN,XP,YMAX,YMIN,YP

NY=0
DO 3 I=1,M
IF(Y(I)*Y(I+1).LE.0) GOTO 3
IF((YP-AY(I))*(YP-AY(I+1)).GT.0) GOTO 3
NY=NY+1
IF(CX(I).EQ.0.) GOTO 1
EX(NY)=- (CY(I)*YP+C1(I))/CX(I) $ GOTO 3
1 IF(CY(I)*YP+C1(I).NF.0.) GOTO 2
EX(NY)=X(I) $ GOTO 3
2 NY=NY-1
3 CONTINUE
4 IF(NY.LT.1) STOP 1
IF(NY.EQ.1) GOTO 7
**
** REDUKTIE TOT ENKELVOUDIGE SNIJPUNTEN
**
MY=NY-1
MMY=NY
DO 42 K=1,MY
MMY=MMY-1
DO 41 J=1,MMY
IF(EX(J).LE.EX(J+1)) GOTO 41
W=EX(J)$ EX(J)=EX(J+1) $ EX(J+1)=W
41 CONTINUE
42 CONTINUE
DO 6 I=1,MY
IF(EX(I).NE.EX(I+1)) GOTO 6
DO 5 K=I,MY
5 EX(K)=EX(K+1)
NY=NY-1 $ GOTO 4
6 CONTINUE
7 CONTINUE
RETURN
END

SUBROUTINE ROUNDEX
*** BEPAALT DE KRITIEKE ROOSTERPUNTEN OP Y=C
*** EN VERWIJDEERT ZE VOORZOVER ZE MEERVOUDIG ZIJN.
***
INTEGER AY(115),R(115),X(115),Y(115)
INTEGER A,B,EL,EN,P,Q,U,V,XMAX,XMIN,XP,X1,X2,YMAX,YMIN,YP,Y1,Y2
INTEGER AO
COMMON AY,CX(600),CY(600),C1(600),EX(115),IND(115),IX(115)
COMMON R,X,Y,AR(115),IMAGE(115,115)
COMMON A,B,C,D,IN,INDEX,KY,M,N,NY,XMAX,XMIN,XP,YMAX,YMIN,YP

KY=0
DO 2 I=1,NY
W=EX(I)
F=K*W+0.00001
IF(ABS(F-W).GE. 0.00001) GOTO 1
KY=KY+1 $ IX(KY)=K $ GOTO 2
1 KY=KY+1 $ IX(KY)=W
KY=KY+1 $ IX(KY)=W+1.
2 CONTINUE
3 IF(KY.LT.1) STOP 2
IF(KY.EQ.1) GOTO 6
**
** REDUKTIE TOT ENKELVOUDIGE KRITIEKE ROOSTERPUNTEN
**
KM=KY-1
DO 5 I=1,KM
IF(ABS(IX(I)).NE.ABS(IX(I+1))) GOTO 5
DO 4 J=I,KM
4 IX(J)=IX(J+1)
KY=KY-1 $ GOTO 3
5 CONTINUE
6 CONTINUE
RETURN
END

```

Fig. 1B. Sub-programma's
SECANT, ROUNDEX

```

SURROUTINE POINTS
*** DETERMINEERT (M,R,V, SURROUTINE INOUT) DE OP Y=C GELEGEN
*** ROOSTERPUNTEN ALS INWENDIG, UITWENDIG OF RANDPUNT.
***
INTEGER AY(115),R(115),X(115),Y(115)
INTEGER A,R,EL,EN,P,0,1,2,V,XMAX,XMIN,XP,X1,X2,YMAX,YMIN,YP,Y1,Y2
INTEGER AQ
COMMON AY,CX(600),CY(600),C1(600),FX(115),IND(115),IX(115)
COMMON P,X,Y,AP(115),IMAGE(115,115)
COMMON A,R,C,D,IN,INDEX,KY,M,N,NY,XMAX,XMIN,XP,YMAX,YMIN,YP

DO 2 I=1,KY
XP=IX(I)
IF(XP.F0.0) STOP 5
IF(XP.GT.0) GOTO 1
IND(I)=0 $ GOTO 2
1 CALL INOUT
IND(I)=IN
2 CONTINUE
IF(KY.LT.0) STOP 6
DO 3 J=XMIN,XMAX
3 R(I)=-1
IA=V+IARS(XP) $ R(V)=0
IF(KY.EQ.1) GOTO 9
**
** DETERMINEREN VAN DE NIET-KRITIEKE ROOSTERPUNTEN OP Y=C.
**
K=KY-1 $ [A=IARS(IX(1))
DO 4 I=1,K
U=IARS(IX(I)) $ V=IARS(IX(I+1)) $ XP=U+1 $ JF=V-1
P=IND(I) $ R=IND(I+1)
IF(V.LT.XP) STOP 7
IF(V.GT.XP) GOTO 4
R(I)=P $ R(XP)=R $ GOTO 8
4 IF(P.NE.0 .OR. R.NE.0) GOTO 7
CALL INOUT
5 R(I)=P $ R(V)=R
DO 6 J=XP,JE
6 R(J)=IN
GOTO 8
7 IF(P.LT.0) STOP 10
IN=1
IF(P.LT.0 .OR. R.LT.0) IN=-1
GOTO 5
8 CONTINUE
**
** ASELECTE HERDEFINITIEF VAN ELK RANDPUNT OP Y=C ALS IN- OF UITWENDIG PUNT.
**
9 DO 10 I=IA,V
IF(R(I).NE.0) GOTO 10
W=PI*F(0.1)
IF(W.GF. 0.5) R(I)= 1
IF(W.LF. 0.5) R(I)=-1
10 CONTINUE
**
** HET MARKEREN VAN DE INWENDIGE ROOSTERPUNTEN OP Y=C.
**
DO 11 I=XMIN,XMAX
IF(R(I).NE.1) GOTO 11
IMAGE(YP,I)=1H*
11 CONTINUE
RETURN
END
SURROUTINE INOUT
*** DETERMINEERT EEN ROOSTERPUNT ALS INWENDIG, UITWENDIG OF RANDPUNT.
*** (IN=1) (IN=-1) (IN=0)
INTEGER AY(115),R(115),X(115),Y(115)
INTEGER A,R,EL,EN,P,0,1,2,V,XMAX,XMIN,XP,X1,X2,YMAX,YMIN,YP,Y1,Y2
INTEGER AQ
COMMON AY,CX(600),CY(600),C1(600),FX(115),IND(115),IX(115)
COMMON P,X,Y,AP(115),IMAGE(115,115)
COMMON A,R,C,D,IN,INDEX,KY,M,N,NY,XMAX,XMIN,XP,YMAX,YMIN,YP

SOM=0.
DO 5 I=1,M
X1=X(I) $ Y1=AY(I) $ XP=X(I+1) $ Y2=AY(I+1)
DET=XP*(Y1-Y2)-YP*(X1-X2)+X1*Y2-X2*Y1
IDEX=0 $ IF(Y1+Y2.GT.0 .AND. DET.EQ.0) IDEX=1
RAND=(YP-Y1)*(YP-Y2)
RANDX=(XP-X1)*(XP-X2)
IF(IDEX.NE.0) GOTO 1
U=RAND $ IF(Y1.EQ.Y2) U=RANDX
IF(IDEX.EQ.1) GOTO 3
IF(U.GT.0) GOTO 1
SOM=0. $ IN=0 $ GOTO 6
1 W=RAND*RANDX
IF(W.EQ. 0.) GOTO 3
PHI=ATAN(-DET/W)
IF(W.GT. 0.) GOTO 5
IF(DET.EQ. 0.) GOTO 5
IF(DET.GT. 0.) GOTO 2
PHI=PHI+3.14159265 $ GOTO 5
2 PHI=PHI-3.14159265 $ GOTO 5
3 IF(DET.F0. 0.) STOP 3
IF(DET.LT. 0.) GOTO 4
PHI=-1.57079633 $ GOTO 5
3) IN=0
IF(U.EQ.0) GOTO 6
PHI=0. $ GOTO 5
4 PHI= 1.57079633
5 SOM=SOM+PHI
J=SOM/A.2R318531+0.00001
IN=1
IF(J-J/2.NE.0) IN=1
6 CONTINUE
RETURN
END

```

Fig. 1C. Sub-programma's
POINTS, INOUT

Genoemde versie van POLYGON is dan ook in de eerste plaats bedoeld als test-programma voor de gevolgde werkwijze. Ze zal geschikt worden gemaakt voor grotere gebieden en worden ingepast in een omvangrijker programma voor landschapsanalyse, waarin ook lijnvormige en puntvormige elementen een rol zullen spelen.

2. DE AARD VAN DE GEGEVENS

Elk, in principe onregelmatig gevormd, begroeiingselement wordt voordat verwerking plaats vindt, geschematiseerd tot een gebied begrensd door rechte lijnstukken. Zo'n schematisch gebied kan namelijk met behulp van de coördinaten der knikpunten worden gegeven. In fig. 2 is een aantal mogelijkheden aangeduid. Fig. 2A geeft het eenvoudigste geval weer, dat van een convexe veelhoek. Karakteristiek is hierbij dat elk paar punten binnen de veelhoek, kan worden verbonden door een recht lijnstuk, dat geheel binnen de veelhoek verloopt. Ook concave veelhoeken kunnen door POLYGON onderzocht worden (fig. 2B). Het lijkt hierbij voor de hand liggend dit uit te voeren door de concave veelhoek te verdelen in een aantal convexe veelhoeken, hetgeen altijd mogelijk is. De convexe figuren zouden dan, elk apart, doelmatig onderzocht kunnen worden met behulp van de zojuist genoemde karakteristieke eigenschap. Tijdens het opnemen der knikpuntscoördinaten vanaf een kaart echter, kan het doorsnijden verwarrend werken. Bovendien moet worden voorkomen dat de punten van de doorsnijdingslijn dubbel geteld worden. Verder dienen de convexe deelfiguren naderhand samengevoegd te worden opdat men informatie kan verkrijgen over de gehele (concave) figuur. Om deze redenen werd gekozen voor een methode die geen gebruik maakt van het begrip convexiteit.

Fig. 2C is van een algemener gedaante dan fig. 2B. Er is sprake van een buitenste begrenzing en een aantal begrenzings van 'enclaves' in de begroeiing. Het programma POLYGON is geschikt voor het onderzoeken van een figuur van het type 2C, waar 2A en 2B ook toe behoren. Dit is het algemene type dat voor de landschapsanalyse van belang is. Voor nog weer algemenere typen van geschematiseerde begroeiingselementen, verkregen door combinatie der eigenschappen van één of

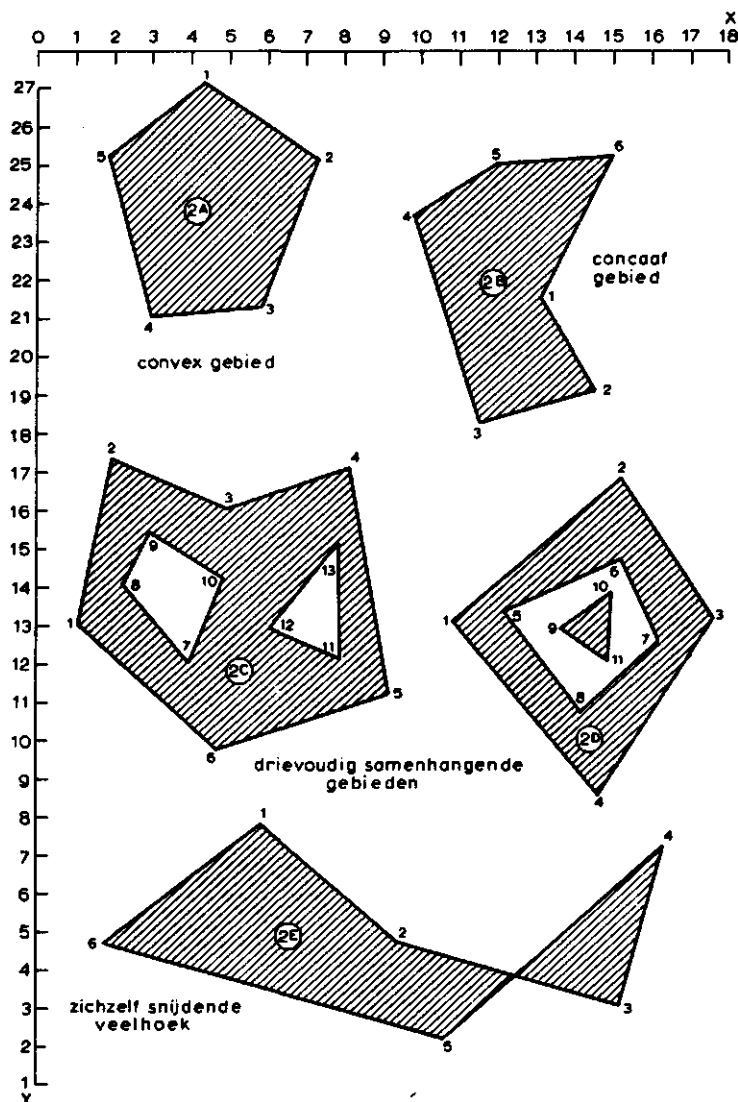


Fig. 2. Geschematiseerde begroeiingselementen (par. 2)

meer der fig. 2A tot en met E, is POLYGON in principe ook bruikbaar.

De benodigde gegevens worden per begroeiingselement verstrekt. Ze bestaan uit de rechthoekige coördinaten (X, Y) der knikpunten. Deze coördinaten staan in een volgorde die overeenkomt met het in klok-wijzerzin doorlopen van elk der begrenzingen van het betreffende element. Hierbij komt de buitengrens eerst en daarna de eventuele enclave-begrenzingen. Het beginpunt is bij elke rondgang willekeurig (zie de nummering in fig. 2). De coördinaten gelden ten opzichte van het eerdergenoemde netwerk. De roosterpunten hebben gehele waarden

als coördinaten. Het netwerk wordt bovendien zo gekozen dat alle coördinaten positief zijn. Dit komt de overzichtelijkheid der gegevens ten goede; bovendien ontstaat dan de mogelijkheid met behulp van min-tekens aan de gegevens bepaalde indicaties toe te voegen (par. 3 en 8).

De maaswijdte geldt als lengte-eenheid. Het gebruik van locale coördinaten houdt wel in dat transformaties van en naar het uiteindelijk gewenste stelsel nodig is. Dit is nog niet in POLYGON opgenomen.

De ponskaartinput voor de fig. 2B en 2C is ter illustratie weer gegeven in fig. 3.

3. INLEIDENDE BEWERKINGEN, ORDENING DER GEGEVENS

De bewerkingen vinden plaats per element. Eerst worden hierbij de knikpuntscoördinaten in een geschikte volgorde en vorm in het computergeheugen geplaatst. Dan volgt de oppervlakteberekening. Dit alles is de functie van het sub-programma VERTEX (fig. 1A).

Wat de volgorde betreft: de gegevens worden per element door de computer ingelezen, in de volgorde aangeduid door de regels in fig. 3. Daarna wordt aan de knikpunten van elke begrenzende veelhoek als extra punt weer het beginpunt van de betreffende veelhoek toegevoegd. Is er hierbij sprake van een enclave dan wordt bovendien nog het eerste punt van het element toegevoegd. In fig. 2B bijvoorbeeld wordt de volgorde der knikpunten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1 en in fig. 2C: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 7, 8, 9, 10, 7, 1, 11, 12, 13, 11, 1. Bovendien worden de Y-coördinaten van de enclave-knikpunten van een min-teken voorzien. Tenslotte worden de volgens het bovenstaande verkregen getallen afgerond op gehele waarden. Het begroeiingselement uit fig. 2C wordt bijvoorbeeld als volgt geregistreerd:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
			1	3	.	1	1					2	1	.	5	4						1								
			1	4	.	5	2					1	9	.	1	4						1								
			1	1	.	5	5					1	8	.	2	7						1								
			9	.	8	0						2	3	.	7	1						1								
			1	1	.	9	4					2	5	.	0	5						1								
			1	4	.	9	6					2	5	.	2	9						1								
			1	.	0	8						1	3	.	0	9						2								
			1	.	9	5						1	7	.	3	5						2								
			4	.	9	6						1	6	.	0	9						2								
			8	.	1	2						1	7	.	1	2						2								
			9	.	1	6						1	1	.	2	2						2								
			4	.	6	8						9	.	7	7							2								
			3	.	9	3						1	2	.	0	5						2				1				
			2	.	2	6						1	4	.	0	4						2				1				
			2	.	9	1						1	5	.	4	2						2				1				
			4	.	8	2						1	4	.	5	2						2				1				
			7	.	8	8						1	2	.	1	2						2				2				
			6	.	0	5						1	2	.	9	1						2				2				
			7	.	8	2						1	5	.	1	7						2				2				

Fig. 3. Ponskaart-invoer voor fig. 1B en 1C, bestaande uit:
X, Y, element nr, evt. enclavenr. (par. 2)

Tabel 1. De coördinaten die fig. 2C definiëren

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
X	1	2	5	8	9	5	1	4	2	3	5	4	1	8	6	8	8	1
Y	13	17	16	17	11	10	13	-12	-14	-15	-14	-12	13	-12	-13	-15	-12	13
	element (y > 0)						enclave (y < 0)						enclave (y < 0)					

Op deze manier is het element met enclaves gedefinieerd, en wel uitsluitend met behulp van coördinaten; bij verdere verwerking treedt nu tabel 1 in de plaats van fig. 3.

In het vervolg zullen de roosterpunten worden beschouwd als representant van een vak ter grootte van een maas in het netwerk. In de eerste plaats hierom worden de coördinaten op gehele waarden afgerond, en dus voorgesteld door het dichtstbij zijnde roosterpunt (fig. 4). Andere overwegingen komen in par. 9 ter sprake.

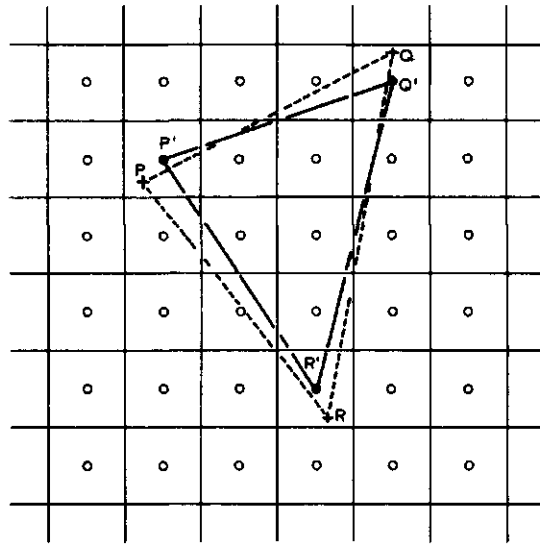


Fig. 4. De gegeven knikpunten P , Q , R - - - - -
 worden afgerond tot P' , Q' , R' —————
 (par. 3)

4. BEREKENING VAN OPPERVLAKTEN

Aansluitend op de zojuist beschreven ordening wordt voor elk element de oppervlakte berekend volgens

$$\text{opp} = \frac{1}{2} \sum_1^{n-1} (x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1}) \quad (1)$$

onder gebruikmaking van de n knikpunten volgens de registratiewijze uit tabel 1.

In verband hiermee en wat in par. 5 volgt, wordt thans het algemene begrip 'determinant' geïntroduceerd.

Zijn $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ en $P_3(x_3, y_3)$ een drietal punten, dan kan de determinant D worden gedefinieerd volgens

$$D = (x_3 - x_1) (y_2 - y_1) - (x_2 - x_1) (y_3 - y_1) \quad (2)$$

Wanneer $D > 0$ liggen P_1, P_2, P_3 in wijzerzin op een cirkel, als $D < 0$ is de oriëntatie in tegen-wijzerzin, als $D = 0$ liggen de drie punten op één rechte lijn. Dus: het teken van D bepaalt de oriëntatie.

De oppervlakte van driehoek $P_1P_2P_3$ bedraagt $\frac{1}{2} D$, en heeft een teken dat met de oriëntatie der hoekpunten samenhangt. Verbindt men nu het nulpunt $O(x = 0, y = 0)$ van het netwerk met alle knikpunten P_1, P_2, \dots, P_n , en telt men de oppervlakten OP_iP_{i+1} op, dan leidt dit tot formule (1). Deze geldt voor een willekeurig convex of concaaf element. Een afleiding van (1) is vermeld in de bijlage (fig. 10). Eventuele enclaves leveren in (1) een negatieve bijdrage wegens $y < 0$. Niet relevante driehoeken OP_iP_{i+1} treden op wanneer P_iP_{i+1} geen gebiedsgrens vormt (in fig. 2c: $P_1P_7, P_7P_1, P_1P_{11}, P_{11}P_1$ wat in tabel 1 overeenkomt met de verbindingslijnen van de punten 7 en 8, 12 en 13, 13 en 14, 17 en 18). De niet-relevante bijdragen vallen door de ordening echter tegen elkaar weg, zodat (1) blijft gelden.

5. ALGEMENE METHODE VOOR HET DETERMINEREN VAN EEN PUNT

Waar het in POLYGON in hoofdzaak om gaat, is het bepalen van de roosterpunten die binnen een vlakvormig element liggen. Het eenvoudigst zou zijn elk roosterpunt op de kaart te determineren als in- of uitwendig punt. Dit leidt tot veel overbodig werk. Beter is, het betreffende element vóór het determineren te omsluiten door een rechthoek waarvan de zijden in het netwerk passen. De rekentijd kan in het algemeen verder aanzienlijk worden verkleind door op elke 'horizontale' rasterlijn binnen de rechthoek de snijpunten met de element-grenzen te bepalen en daarna tussen de uiterste snijpunten de roosterpunten op de betreffende horizontale lijn te determineren. Een verdere versnelling kan tenslotte hieruit bestaan, dat men niet alle zojuist genoemde roosterpunten determineert, maar uitsluitend de roosterpunten waar een reeks inwendige punten overgaat in een reeks uitwendige, of omgekeerd (zie voorbeeld fig. 5). De hier aangegeuide werkwijzen zijn in de vermelde volgorde gecompliceerder, maar blijkens proefberekeningen in dezelfde volgorde efficiënter. Daarom is

de als laatste genoemde methode gebruikt bij het samenstellen van POLYGON.

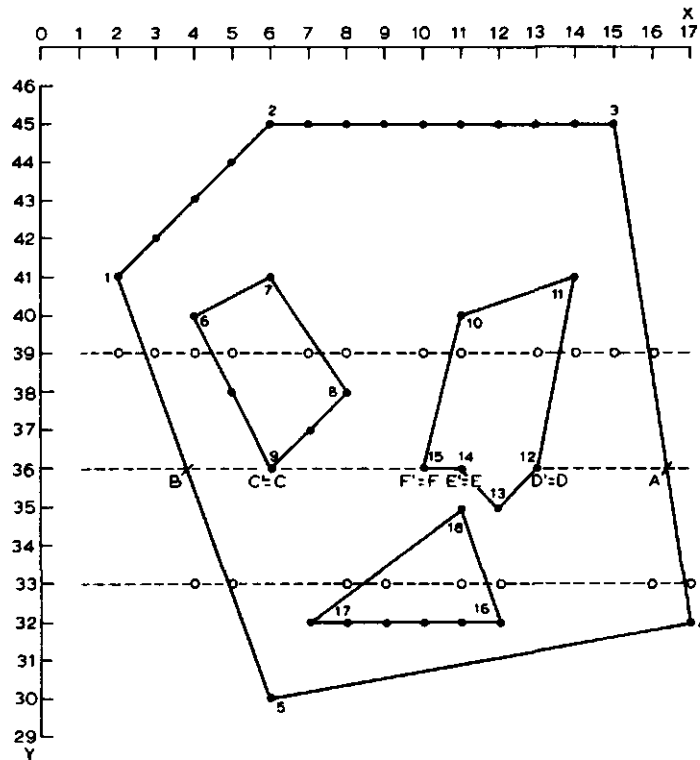


Fig. 5. Element met 3 enclaves

De roosterpunten op $Y = 39$ en $Y = 33$ die volgens par. 5 in ieder geval gedetermineerd worden, zijn aangeduid met o .

Randpunten zijn aangeduid met (par. 5)

De punten A, B, C, C', D, D', E, E' worden in het sub-programma SECANT bepaald (par. 7).

Centraal staat dus het determineren van één enkel roosterpunt. Dit gebeurt in het sub-programma INOUT (fig. 1C). Voor een gegeven roosterpunt $P_o(x_o, y_o)$ wordt eerst vastgesteld of het wellicht een randpunt is (fig. 5), dus óf een knikpunt óf een roosterpunt dat op een zijde ligt. Voor elk randpunt wordt in een ander sub-programma (POINTS, fig. 1C) bepaald of het uiteindelijk wel of niet tot de inwendige punten van het beschouwde begroeiingselement wordt gerekend. Het vaststellen of P_o randpunt is, vindt plaats met behulp van de determinant (zie ook (2))

$$D = (x_{i+1} - x_0) (|y_i| - y_0) - (x_i - x_0) (|y_{i+1}| - y_0) \quad (3)$$

Bestaat er een waarde van i waarvoor $y_i \cdot y_{i+1} > 0$ en waarvoor bovendien $D = 0$, dan ligt P_0 op de zijde $P_i P_{i+1}$ en is dus randpunt; wanneer $y_i \cdot y_{i+1} < 0$ dan is $P_i P_{i+1}$ geen zijde en P_0 zeker geen randpunt.

Het bepalen of P_0 een inwendig punt is, gebeurt door de draaiing van de lijn $P_0 P_i$ te beschouwen (fig 6A, B). Betreft het een element zonder enclaves, dan is bij een inwendig punt de draaiingshoek na het doorlopen van alle knikpunten en terugkeer bij het knikpunt van uitgang (dus $i = 1, 2, \dots, n$), in totaal 2π radialen ($= 360^\circ = 400 \text{ gr.}$). Gaande van het ene knikpunt naar het volgende is de draaiingshoek in dit geval steeds positief (wijzer-richting). Bij een uitwendig punt treden zowel positieve als negatieve draaiingshoeken op, waarvan de som nul radialen bedraagt.

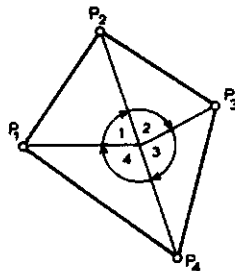


Fig. 6A. De som der draaiingshoeken bedraagt 2π rad. bij het inwendige punt P_0 ; er zijn 4 positieve hoeken (par. 5)

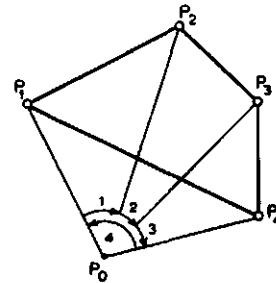


Fig. 6B. De som der draaiingshoeken bedraagt 0 rad. bij het uitwendige punt P_0 ; er zijn 3 positieve hoeken en 1 negatieve hoeken (par. 5)

Zijn in een begroeiingselement enclaves aanwezig, dan is voor een inwendig punt de totale draaiingshoek met betrekking tot de enclaves nul rad., dus de draaiing over het gehele element 2π rad. Voor een uitwendig punt, niet in een enclave gelegen is de draaiing uiteraard nul; voor een uitwendig punt binnen een enclave bedraagt de draaiing 2π voor de buitenrand, 2π voor de rand van de enclave waarbinnen het punt ligt en nul rad. voor de overige enclaves. De totale draaiing bedraagt dus 4π rad. Het bovenstaande is na te gaan in de fig. 2A, B, C en E.

Wordt nu nog fig. 2D beschouwd, dan blijkt voor de inwendige punten in het buitenste gearceerde gebied de draaiing 2π rad. te bedragen en voor de inwendige punten in de binnenste arcering $3 \times 2\pi$ rad. De uitwendige punten hebben een draaiing van nul of $2 \times 2\pi$ rad.

De conclusie is dan ook:

bij inwendige punten is de draaiing gelijk aan een oneven aantal keer 2π radialen, bij uitwendige punten een even aantal keer 2π rad.

Dit criterium is toegepast in het sub-programma INOUT (fig. 1C). De hoek bij draaiing van P_i naar P_{i+1} wordt berekend uit

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{D}{(x_i - x_0)(x_{i+1} - x_0) + (|y_i| - y_0)(|y_{i+1}| - y_0)}$$

waarin D de in (3) gedefinieerde determinant voorstelt. Niet-relevante draaiingen, wanneer dus $P_i P_{i+1}$ geen elementzijde voorstelt, vallen tegen elkaar weg.

6. BEGRENZING VAN EEN BEGROEIINGSELEMENT

Voordat roosterpunten gedetermineerd worden, zijn vrij uitgebreide voorbereidingen nodig. De eerste bestaat hieruit dat voor elke zijde $P_i P_{i+1}$ de coëfficiënten A, B en C van de lijnvergelijking

$$Ax + By + C = 0 \quad (4)$$

worden berekend, en wel volgens

$$\begin{aligned}
A &= |y_{i+1}| - |y_i| \\
B &= x_i - x_{i+1} \\
C &= x_{i+1} |y_i| - x_i |y_{i+1}|
\end{aligned}
\tag{5}$$

Dit gebeurt uiteraard uitsluitend voor de i -waarden waarvoor $y_i \cdot y_{i+1} > 0$. Omdat het roosterpunten betreft, zijn A , B en C gehele getallen. Het is dus heel goed mogelijk dat $A = 0$. In dat geval is de zijde evenwijdig aan de X -as, als $B = 0$ evenwijdig aan de Y -as en als $C = 0$ gaat het verlengde van de zijde door het nulpunt van het netwerk. Om al deze mogelijkheden open te houden, is de lijnvergelijking in de algemene gedaante (4) gebruikt en niet in een der vormen $y = ax + b$, $x = ay + b$ of $ax + by = 1$.

7. DE HORIZONTALE DOORSNIJDING VAN EEN ELEMENT

Als volgende stap in de voorbereiding van het determineren van roosterpunten worden in het sub-programma SECANT (fig. 1B) van elke 'horizontale' rasterlijn $y = y_0$, voor zover deze binnen de omsluitende rechthoek ligt, de snijpunten met de grenzen van het beschouwde begroeiingselement bepaald. In fig. 5 bijvoorbeeld komen op de rasterlijn $y = 36$ de snijpunten A en B voor. De snijpunten met de grenzen worden gevonden door eerst voor elke zijde $P_i P_{i+1}$ te bepalen of ze door de rasterlijn $y = y_0$ doorsneden wordt. De voorwaarden voor doorsnijding zijn

$$y_i \cdot y_{i+1} > 0 \quad \text{en} \quad (y_0 - |y_i|) (y_0 - |y_{i+1}|) < 0$$

Alleen als hieraan wordt voldaan, dan wordt de x -coördinaat van het snijpunt berekend, en wel volgens

$$x = - \frac{By_0 + C}{A}$$

Is $A = 0$, dus $P_i P_{i+1}$ horizontaal, dan wordt $x = x_i$ gesteld.

Een knikpunt op $y = y_0$ zal bij bovenstaande werkwijze dubbel geteld worden omdat ze op twee opeenvolgende zijden ligt.

Wanneer dus voor $y = y_0$ alle zijden beschouwd zijn, beschikt men over een stel X-coördinaten der snijpunten, die nog niet naar grootte gerangschikt zijn en waarin bovendien gelijke waarden kunnen voorkomen. Deze worden in toenemende grootte geplaatst en daarbij verwijderd voor zover ze meervoudig voorkomen. Zo wordt uiteindelijk op de rasterlijn $y = y_0$ een stel punten verkregen rond welke de afwisseling van inwendige, uitwendige en randpunten optreedt. Zie fig. 5: de doorsnijding met $y = 36$ levert, gezien de nummering der hoekpunten, achtereenvolgens de punten A, B, C, C', D, D', E, E', F, F'. Na ordenen volgens toenemende x-waarden en schrappen van gelijken wordt dit: B, C, F, E, D, A.

8. DE KRITIEKE ROOSTERPUNTEN OP EEN HORIZONTALE RASTERLIJN

De gang van zaken wordt nu aan de hand van het zojuist vermelde voorbeeld verder aangegeven. De geordende reeks B, C, F, E, D, A levert in het sub-programma ROUNDEX (fig. 1B) de 'Kritieke roosterpunten'. Dit zijn de roosterpunten op $y = y_0$ waarin de afwisseling van inwendige, uitwendige en ranpunten optreedt. Bij een gebroken x-waarde in de geordende reeks worden de omliggende gehele waarden genoteerd in de computer, bij een gehele x-waarde (randpunt!) deze waarde zelf, zij het dat ze wordt voorzien van een min-teken. In het voorbeeld van fig. 5 met $y = y_0 = 36$ levert dit

x:	1	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	-6	-10	-11	-13	16	17

In het algemeen kan het nog voorkomen dat een kritiek roosterpunt meervoudig optreedt (fig. 7). Hoe zelden dit wellicht voorkomt, in een algemeen systeem behoort zo'n punt tot een enkelvoudig punt te worden teruggebracht. Gezien de ordening die in de vorige paragraaf werd aangebracht, staan de enkelvoudige kritieke roosterpunten ook in toenemende grootte gerangschikt.

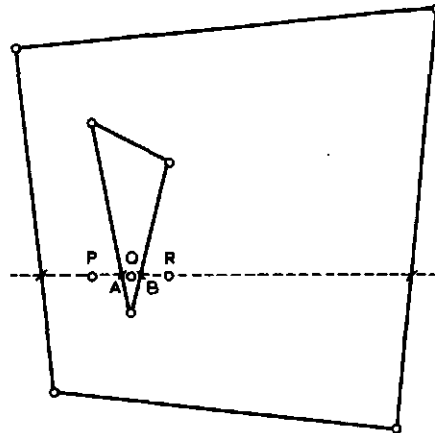


Fig. 7. Een tweevoudig kritiek roosterpunt Q (par. 8)
 P en Q zijn de omliggende roosterpunten van A
 Q en R zijn de omliggende roosterpunten van B

Nu worden de kritieke roosterpunten met positieve x gedetermineerd met behulp van het sub-programma INOUT (fig. 1C). Die met negatieve x -waarden zijn volgens het vorige randpunten. Zo ontstaat in het voorbeeld de volgende tabel (0 = randp., 1 = inw. punt, -1 = uitw. punt)

Tabel 2. Kritieke roosterpunten in fig. 5, op $y = 36$

	1	2	3	4	5	6	7	8
x :	3	4	-6	-10	-11	-13	16	17
indicatie:	-1	1	0	0	0	0	1	-1

Tenslotte worden in het sub-programma POINTS (fig. 1C) de indicaties van de tussengelegen punten op $y = y_0$ ingevuld. Hierdoor ontstaat een rij R van indicaties, die in de vorm van getallen 0, 1, -1 informatie bevat over de aard der roosterpunten op $y = y_0$. Bij dit invullen wordt elk paar opeenvolgende indicaties beschouwd (tabel 2). Betreffen ze x -waarden die 1 verschillen, dan behoeven slechts de reeds aanwezige indicaties in de rij R vermeld te worden. Dit geval

kan dus verder buiten beschouwing blijven. Zijn twee opeenvolgende indicaties (i en $i + 1$) niet beide nul, dan kan niet de ene positief zijn en de andere negatief, want dat is juist het geval dat nu buiten beschouwing kan blijven. Wanneer dus twee opeenvolgende indicaties niet beide nul zijn, is één ervan gelijk aan nul. De andere indicatie, die niet nul is, is van toepassing op de tussen $|x_i|$ en $|x_{i+1}|$ gelegen punten. Zijn twee opeenvolgende indicaties (tabel 2) beide nul (twee randpunten), dan wordt het punt waarvan de X-coördinaat $|x_i| + 1$ bedraagt gedetermineerd in het sub-programma INOUT (fig. 1C) en de daaruit verkregen indicatie (eventueel ook nul!) in de rij R ingelast voor de tussenpunten. In het voorbeeld zou het invullen, aan de hand van tabel 2, als volgt verlopen

i=1	$x_1 = 3$	en	$x_2 = 4$	opv. punten	$\rightarrow R_3 = -1$	$R_4 = 1$	
i=2	$x_2 = 4$		$x_3 = -6$		$\rightarrow R_4 = 1$	$R_6 = 0$	$R_5 = 1$
i=3	$x_3 = -6$		$x_4 = -10$		$\rightarrow R_6 = 0$	$R_{10} = 0$	bij $x = 7$ wordt indicatie 1 gevonden $\rightarrow R_7 = R_8 = R_9 = 1$
i=4	$x_4 = -10$		$x_5 = -11$	opv. punten	$\rightarrow R_{10} = 0$	$R_{11} = 0$	
i=5	$x_5 = -11$		$x_6 = -13$		$\rightarrow R_{11} = 0$	$R_{13} = 0$	bij $x = 12$ wordt indicatie 1 gevonden $\rightarrow R_{12} = 1$
i=6	$x_6 = -13$		$x_7 = 16$		$\rightarrow R_{13} = 0$	$R_{16} = 1$	$R_{14} = R_{15} = 1$
i=7	$x_7 = 16$		$x_8 = 17$	opv. punten	$\rightarrow R_{16} = 1$	$R_{17} = -1$	

Zo ontstaat voor $y = y_0 = 36$ het volgende overzicht

X:	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
indicatie:	-1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	-1

9. DE A-SELECTE HERDEFINITIE VAN RANDPUNTEN

Omdat het uiteindelijk de bedoeling is van elk roosterpunt vast te stellen of het wel of niet tot een begroeiingselement wordt gerekend, moeten nu nog de randpunten, gekenmerkt door een indicatie gelijk aan nul, gedetermineerd worden, hetzij als inwendige, hetzij als uitwendige punten. Maar omdat er geen criterium is te formuleren voor dit herdefiniëren is in het systeem POLYGON gekozen voor een a-selecte

methode. Bij elke indicatie nul wordt hierbij a.h.w. kruis of munt geworpen om vast te stellen of die indicatie in 1 of in -1 zal worden gewijzigd. Dit wordt door de computer gerealiseerd door met behulp van een standaardprogramma een trekking te doen uit een uniforme kansverdeling tussen 0 en 1. Bij uitkomsten die minstens 0,5 zijn wordt de indicatie 1 gemaakt, bij uitkomsten van hoogstens 0,5 wordt deze -1. Aldus heeft een randpunt 50 % kans om alsnog tot inwendig punt te worden verklaard.

Dit lotingsmechanisme kan worden beschouwd als een simulatie van de natuurlijke grilligheid der begrenzingen van een begroeiingselement, nadat het in eerste instantie geschematiseerd werd tot een gebied begrensd door rechte lijnstukken.

Een dergelijke simulatie heeft, wat de randpunten betreft, in principe de eigenschap na herhaling andere uitkomsten te leveren. Is de maaswijdte van het netwerk klein, dan is dit relatief van geringe invloed; wordt de maaswijdte groot gekozen, bijvoorbeeld veel groter dan de standaardafwijking in X- of Y-richting van een geregistreerd punt, dan kan het lotingsprincipe van te grote invloed worden op grond van statistische overwegingen.

Aan het slot van par. 3 kwam het afronden der knikpuntscoördinaten ter sprake. Ook in verband met randpunten kan de afronding in beginsel juister zijn dan het achterwege laten ervan. Beschouw bijvoorbeeld fig. 8 waarin de gegeven driehoek ABC wordt afgerond tot A'B'C'.

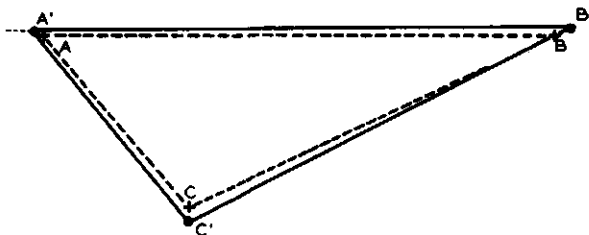


Fig. 8. Afronding in verband met randpunten (par. 9)

De roosterpunten op de rasterlijn AB' vallen buiten driehoek ABC. Er vallen duidelijk te veel punten buiten ABC, gezien de oppervlakte die elk vertegenwoordigt. Na het afronden moet in plaats van AB, A'B' beschouwd worden. Op A'B' is elk roosterpunt een randpunt. Door nu het lotingsmechanisme toe te passen op deze randpunten, zal een gedeelte ervan alsnog tot het inwendige van het gebied ABC gerekend worden, hetgeen juist is.

In het computerprogramma POLYGON wordt per begroeiingselement voor elke horizontale rasterlijn, waarvoor dit nodig is de rij R van indicaties +1 of -1 opgesteld. Deze rijen worden samengenomen in een tabel die het symbool 'blank' bevat op de plaatsen die overeenkomen met roosterpunten die tot geen enkel element gerekend worden, en die het symbool \times bevat op de plaatsen van inwendige roosterpunten. Deze tabel is de begroeiingskaart die in de inleiding werd genoemd.

10. SAMENVATTING

Het computerprogramma POLYGON bepaalt, bij een gegeven netwerk, de roosterpunten op een kaart die binnen een der gegeven vlakke begroeiingselementen liggen. Tevens wordt van elk element de oppervlakte berekend. De begroeiingselementen zijn gegeven door de coördinaten van de knikpunten ten opzichte van het gegeven netwerk. In de computer wordt een kaart van begroeiingselementen opgebouwd waarin de inwendige roosterpunten zijn gemarkeerd. Deze begroeiingskaart kan worden gebruikt bij andere berekeningen. Het wordt bijvoorbeeld mogelijk vanuit een willekeurig punt als het ware rond te kijken (overgang op poolcoördinaten) en daarbij het verloop van de openheid en de doorzichtigheid van het terrein te registreren aan de hand van de begroeiingskaart.

De in POLYGON gevolgde methode van samenstellen van een begroeiingskaart is niet de eenvoudigste, maar wel is ze sneller dan eenvoudigere methoden (par. 5). Ze is voldoende algemeen voor landschapsinventarisatie. In het bijzonder het sub-programma INOUT (fig. 1C) bevat een zeer algemene methode waarmee van een willekeurig punt kan worden vastgesteld of het een inwendig, uitwendig of randpunt van

van een door rechte lijnstukken begrensd gebied is (fig. 2).

Ter illustratie is een vierkant gebied van 400 ha nabij Haaksbergen doorgerekend. De maaswijdte bedroeg bij deze proef 20 meter (fig. 9A). De uitkomst is in fig. 9B weergegeven; bij de gebruikte apparatuur is de verhouding van de X- en Y-schalen 3:5 in plaats van 1:1, zodat de figuur enigszins langgerekt is geworden. De schalen in fig. 8A zijn hierbij aangepast.

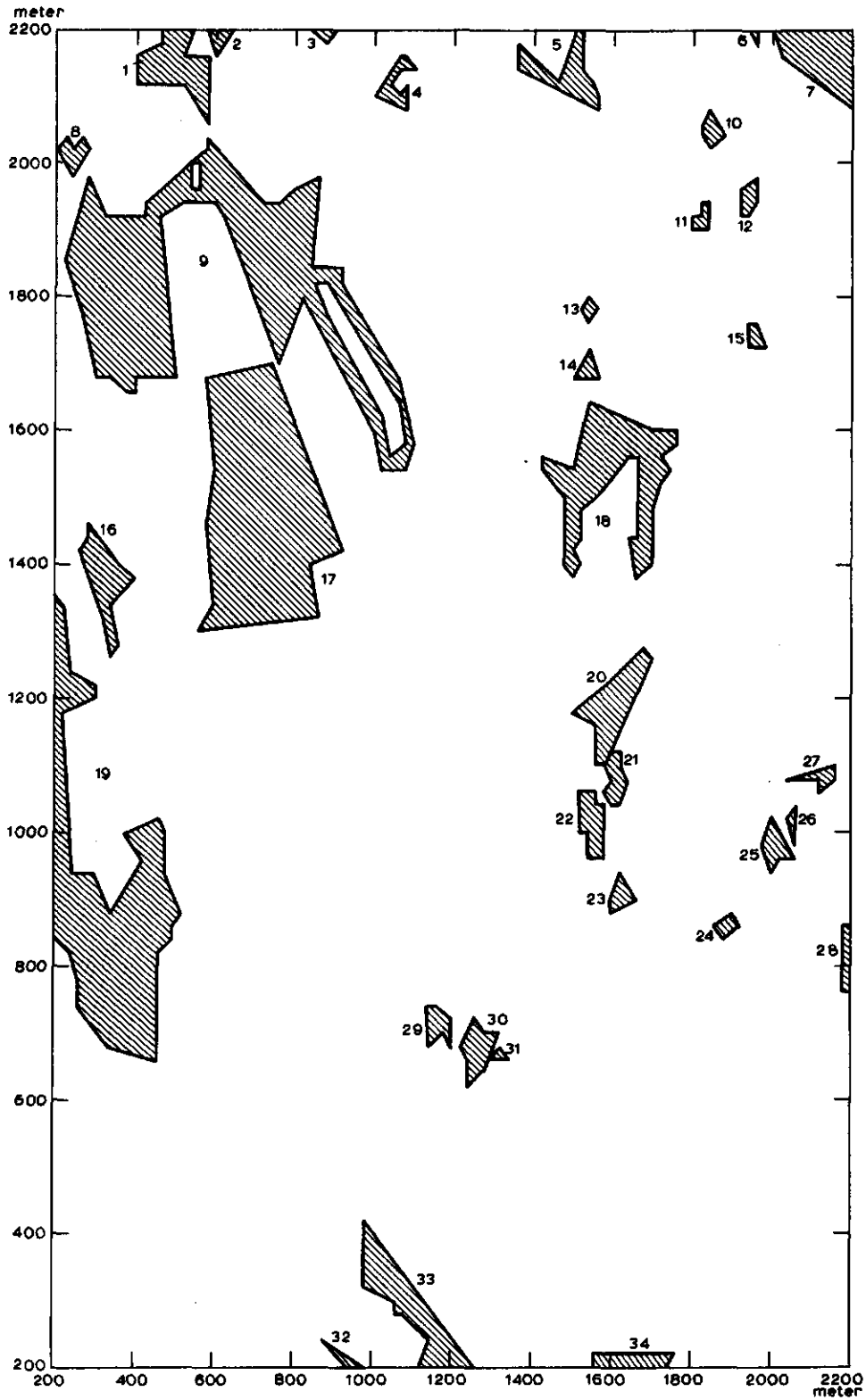


Fig. 9A. Begroeiingselementen, waarvan de coördinaten der knikpunten ten opzichte van een raster opgemeten zijn, en dienen als invoer voor het programma POLYGON (par. 10); een vak van 2000 x 2000 meter nabij Haaksbergen



Fig. 9B. Door de computer vervaardigde begroeiingskaart, waarvoor de coördinaten der knikpunten uit fig. 8A als invoer dienden (par. 10)

Bijlage

AFLEIDING VAN DE OPPERVLAKTE-FORMULE

In par. 4 werd de oppervlakte-formule voor een veelhoek vermeld. De wijze van afleiding is in fig. 10 aangegeven. Om de oppervlakte van fig. 10 te verkrijgen worden de volgende trapezium-oppervlakten berekend volgens de formule opp = basis x gemiddelde hoogte:

$$\text{opp } P_1P_2x_2x_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) (y_2 + y_1)$$

$$\text{opp } P_2P_3x_3x_2 = \frac{1}{2}(x_3 - x_2) (y_3 + y_2)$$

$$\text{opp } P_3P_4x_4x_3 = \frac{1}{2}(x_4 - x_3) (y_4 + y_3)$$

$$\text{opp } P_4P_1x_1x_4 = \frac{1}{2}(x_1 - x_4) (y_1 + y_4)$$

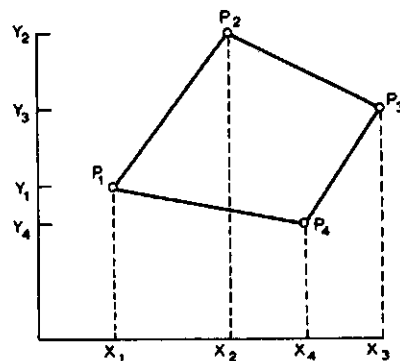


Fig. 10. Afleiding van de oppervlakte-formule in par. 4
(bijlage)

De eerste twee oppervlakten zijn positief, de laatste twee echter negatief omdat $x_1 < x_4 < x_3$. De algemene formule voor een n-hoek is dan ook, als men $x_{n+1} = x_1$ en $y_{n+1} = y_1$ neemt:

$$\text{opp} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) (y_i + y_{i+1})$$

De alternatieve vorm (1) wordt verkregen door deze sommatie uit te schrijven en daarbij een aantal termen tegen elkaar te laten wegvallen. Bij een vierhoek ($n = 4$) bijvoorbeeld, met voor het gemak

weglating van de factor $\frac{1}{2}$, heeft men de volgende 4 termen:

$$\text{bij } i = 1 : (x_2 - x_1) (y_1 + y_2) = x_2 y_1 - x_1 y_2 - x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$\text{bij } i = 2 : (x_3 - x_2) (y_2 + y_3) = x_3 y_2 - x_2 y_3 - x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$$\text{bij } i = 3 : (x_4 - x_3) (y_3 + y_4) = x_4 y_3 - x_3 y_4 - x_3 y_3 + x_4 y_4$$

$$\text{bij } i = 4 : (x_1 - x_4) (y_4 + y_1) = x_1 y_4 - x_4 y_1 - x_4 y_4 + x_1 y_1$$

Door optelling van deze vier gelijkheden vallen de produkten in de twee meest rechtse kolommen tegen elkaar weg en ziet men in de sommatie van de twee kolommen direct rechts van het = - teken formule (1) ontstaan.