

NN31545.0957

TA 957 ^{II}

april 1977

Instituut voor Cultuurtechniek en Waterhuishouding
Wageningen

EEN AANTEKENING BIJ HET TOEPASSEN VAN NUMERIEKE EXPLORATIE
IN EEN GEBIED MET BEGONNEN GRONDWATERONTTREKKING

dr. Ph.Th. Stol

**BIBLIOTHEEK
STARINGGEBOUW**

Nota's van het Instituut zijn in principe interne communicatiemiddelen, dus geen officiële publikaties.

Hun inhoud varieert sterk en kan zowel betrekking hebben op een eenvoudige weergave van cijferreeksen, als op een concluderende discussie van onderzoeksresultaten. In de meeste gevallen zullen de conclusies echter van voorlopige aard zijn omdat het onderzoek nog niet is afgesloten.

Bepaalde nota's komen niet voor verspreiding buiten het Instituut in aanmerking

15 N 124109-02

I N H O U D

	Blz.
VERANTWOORDING	
1. INLEIDING	1
2. VECTOREN EN MATRICES	2
3. BEWERKINGEN MET VECTOREN	4
4. MATRIXVOORSTELLING NORMAALVERGELIJKINGEN	5
5. OPLOSSING NORMAALVERGELIJKINGEN	6
5a. Een bijzonder geval	8
6. REDUCTIE VAN HET PROBLEEM	10
7. HET EIGENLIJKE PROBLEEM	14
8. TE BESTUDEREN RELATIES	16
9. VERGELIJKINGEN EN AANNAMEN	18
10. OPLOSSING COËFFICIËNTEN	19
11. GELIJKSTELLING COËFFICIËNTEN	20
12. SLOTOPMERKINGEN	25
HYDROLOGISCHE INTERPRETATIE	26
REFERENTIE	26
BIJLAGE 1.	27

VERANTWOORDING

Het hier behandelde probleem werd aan de orde gesteld door G. Bakker; G.J. Grotentraast; H. Janssen en J. Leunk, medewerkers van het technisch secretariaat van de COGROWA, Cultuurtechnische Dienst te Utrecht.

Graag zeg ik hen dank voor de gevoerde discussie waarin de vraagstelling werd geformuleerd, en beide laatsten voor de bespreking van het eerste concept van deze nota, wat tot verbetering en generalisatie van de uiteindelijke conclusies aanleiding was. De empirisch gevonden samenhangen tussen coëfficiënten in regressievergelijkingen bij numerieke exploratie kon langs mathematische weg worden bevestigd, en de voorwaarden, waaronder gelijkheid van coëfficiënten optreedt, konden worden opgesteld en een hydrologische interpretatie worden gegeven.

1. INLEIDING

Bij het empirisch beschrijven van de samenhang tussen grondwaterstandswaarnemingen in een gebied van onderzoek kan gebruik gemaakt worden van een methode die met 'numerieke exploratie' wordt aangeduid (STOL, 1969).

In het kort komt het erop neer dat met regressieberekeningen tussen een zorgvuldig gekozen meetpunt (de stambuis) en de overige meetpunten in het gebied van onderzoek (de peilbuizen) het gehele gebied wordt verkend en samenhangen tussen stam- en peilbuizen worden opgespoord.

Wanneer in een gebied van onderzoek op een bepaald tijdstip kunstmatig water gaat worden onttrokken, streeft de methode na de grondwaterstanden in de, door de onttrekking, beïnvloede peilbuizen met behulp van de afgeleide regressievergelijkingen te reconstrueren. Hierbij wordt ervan uitgegaan dat de metingen in de stambuis niet door de onttrekking worden beïnvloed. Het verschil tussen de gereconstrueerde waterstand (berekende waarde) en de gemeten waterstand is een maat voor het effect van de kunstmatige onttrekking op het grondwaterstandsregime.

Door de grootte van de kunstmatige onttrekkingen in de overwegingen te betrekken en bijvoorbeeld als onafhankelijk variabele in een nieuwe regressievergelijking op te nemen, kunnen de geconstateerde verlagingen 'verklaard' worden uit de geconstateerde onttrekkingen.

In het volgende zal, na een korte inleiding in de toegepaste numerieke uitwerking, ingegaan worden op complicaties die ontstaan wanneer de uitkomsten verkregen uit de numerieke exploratie van vóór en tijdens de kunstmatige ingreep, onderling vergeleken worden

respectievelijk met elkaar in verband worden gebracht.

Er zal een formulering worden toegepast waarmee het gestelde probleem kan worden beschreven en waarmee de numerieke samenhang tussen de verschillende resultaten kan worden geanalyseerd.

Alvorens het eigenlijk gestelde probleem uit te werken zal in het kort de gebruikte formulering met vectoren en matrices, worden toegelicht. De benodigde matrix-algebra zal hiervoor eerst worden behandeld.

2. VECTOREN EN MATRICES

Een beschouwing over de samenhang tussen op verschillende wijze verkregen uitkomsten van regressieberekeningen kan het meest overzichtelijk plaatsvinden met behulp van vectoren en matrices. Hierbij wordt een reeks gegevens (onder elkaar genoteerd) opgevat als een vector waarvan de gegevens de kentallen zijn. Wordt dezelfde reeks gegevens geschreven als een rij, dan spreekt men van een rijvector of van een getransponeerde (kolom)vector.

Voorbeeld:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{(kolom)vector}$$

$$x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{rijvector}$$

en

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \quad \text{(kolom)vector}$$

Zonder nadere aanduiding zal een vector steeds opgevat worden als een kolomvector.

Het is handig een vector in te voeren waarvan de kentallen

slechts uit 'één' bestaat, dus

$$1 = (1_1, 1_2, \dots, 1_n)^T$$

Een matrix kan worden opgevat als een schema (van waarnemingsuitkomsten bijvoorbeeld) waarin een aantal kolomvectoren voorkomen.

Een bekend voorbeeld van een matrix met waarnemingsuitkomsten wordt gegeven in de volgende tabel, waarin de kolomvectoren de metingen per meetpunt zijn, en de rijvectoren de metingen op een bepaalde datum.

Tabel 1. Matrix van grondwaterstanden (fictief) in 4 meetpunten in 1976

Datum	M E E T P U N T			
	1	2	3	4
14 januari	35	67	10	116
28	33	51	10	120
14 februari	40	67	12	127
28	47	63	10	120
14 maart	45	75	15	125
28	50	71	19	130
14 april	51	70	21	125
28	60	79	20	127

In het voorbeeld van tabel 1 bestaat de matrix uit 8 rijen en 4 kolommen en wordt gesproken van een (8 x 4) matrix, of een matrix met dimensies (8 x 4).

Meer algemeen is een matrix een schema van n rijen en m kolommen. Wanneer $n = m$, dan heet de matrix vierkant en is het, onder enkele restricties, mogelijk de inverse matrix te bepalen. De inverse van de matrix M wordt aangeduid met het symbool M^{-1} en de betrekking

tussen beide is dat het produkt luidt $MM^{-1} = M^{-1}M = I$ met I een $(n \times n)$ eenheidsmatrix (zie par. 5).

De getransponeerde matrix van de matrix M wordt geschreven als M^T en wordt verkregen door rijen en kolommen van M te verwisselen.

3. BEWERKINGEN MET VECTOREN

Er wordt hier slechts aan herinnerd dat vectoren kunnen worden opgeteld (afgetrokken, met een constante vermenigvuldigd) door de overeenkomstige kentallen op te tellen (af te trekken, met die constante te vermenigvuldigen).

Verder wordt het inproduct van twee vectoren x en y gedefinieerd als

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (3.1)$$

wat dus de produktsom van de getallenreeksen x en y is, die hiervoor even lang moeten zijn.

Volgens de regels van de matrixrekening zou dit inproduct geschreven kunnen worden als een rijvector maal een kolomvector dus als $x^T y$. In het volgende zal aan schrijfwijze (3.1) de voorkeur worden gegeven. Opgemerkt wordt hierbij nog dat $(x, y) = (y, x)$ wat zonder meer uit (3.1) blijkt.

Tenslotte wordt nog vermeld dat eenvoudig blijkt dat

$$(a, p + q) = (a, p) + (a, q) \quad (3.2)$$

door het linkerlid volgens (3.1) uit te schrijven.

Wanneer van twee vectoren a en b het inproduct $(a, b) = 0$, wordt gezegd dat deze vectoren loodrecht zijn en een orthogonaal stelsel vormen.

Wanneer twee vectoren gelijk zijn, dan zijn alle overeenkomstige kentallen onderling gelijk.

De lengte van een vector wordt verkregen uit het herhaald toepassen van de stelling van Pythagoras wat oplevert voor de lengte in het kwadraat:

$$|a|^2 = (a, a) = \sum_i a_i a_i$$

4. MATRIXVOORSTELLING NORMAALVERGELIJKINGEN

Regressie-analyse geeft aanleiding tot het beschouwen van vergelijkingen van het type

$$y = ax + b$$

Met vectoren y , x en 1 wordt dit geschreven als

$$y = ax + b1 \quad (4.1)$$

dus als

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Het schema van 'waarnemingen' ofwel de matrix X is dan

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$$

en de matrixvorm van (4.1) respectievelijk (4.2) luidt dan

$$y = X \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (4.2a)$$

De normaalvergelijkingen om a en b uit op te lossen worden verkregen door beide leden van (4.2a) te vermenigvuldigen met X^T . Eerst beschouwen we hiertoe het produkt $M = X^T X$, wat oplevert:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x_n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, x) & (x, 1) \\ (1, x) & (1, 1) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Hierin is nog in het bijzonder

$$(x, 1) = (1, x) = \sum_i x_i$$

en

$$(1, 1) = \sum_i 1_i 1_i = \sum_i 1_i = n$$

Voor de normaalvergelijkingen kan dus geschreven worden:

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = X^T y \quad (4.4)$$

waaruit a en b moeten worden opgelost. Opgemerkt wordt nog dat

$$X^T y = \begin{pmatrix} (y, x) \\ (y, 1) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

en de 'kolom (vector) van bekenden' kan worden genoemd.

5. OPLOSSING NORMAALVERGELIJKINGEN

Door beide leden van (4.4) met de inverse matrix van M te vermenigvuldigen komt er

$$M^{-1} M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = M^{-1} X^T y \quad (5.1)$$

waarmede a en b zijn opgelost, aangezien

$$M^{-1} M = I$$

dat wil zeggen een eenheidsmatrix van de volgende structuur

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

indien M de dimensies heeft (2 x 2).

De inverse matrix van $M = X^T X$, gegeven in (4.3), is eenvoudig op te schrijven. Stel hier gemakshalve dat de gedaante is

$$M = \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}$$

dan is

$$M^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} r & -q \\ -q & p \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

waarin D de determinant van de matrix is en dus gelijk is aan

$$D = pr - q^2$$

Gemakkelijk valt dan te verifiëren dat inderdaad geldt dat

$$M^{-1} M = I$$

namelijk

$$\frac{1}{pr - q^2} \begin{pmatrix} r & -q \\ -q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Toegepast op (4.3), en ingevuld in (5.1), onder toepassing van

(4.5), luidt de oplossing, met $\sum x = (x, 1)$

$$a = \frac{1}{n(x, x) - (\sum x)^2} \{n(x, y) - (\sum x)(\sum y)\}$$

$$b = \frac{1}{n(x, x) - (\sum x)^2} \{(x, x)(\sum y) - (x, y)(\sum x)\}$$
(5.3)

De oplossing voor 3 coëfficiënten bijvoorbeeld in

$$y = au + bv + c$$
(5.4)

is minder eenvoudig op deze wijze weer te geven, doch dit probleem kan gemakkelijk tot het vorige worden gereduceerd (zie par. 6).

Opmerking:

De wijze waarop (5.2) is verkregen uit M is de volgende:

- bepaal de determinant van de matrix
- vermeld op elke plaats in de matrix de determinant van de bijbehorende minor verkregen door de rij en de kolom waartoe deze plaats behoort weg te schrappen
- vermenigvuldig de uitkomsten in de oneven te nummeren rijen achtereenlopend met +1, -1, +1, -1, enz.
- vermenigvuldig de uitkomsten in de even te nummeren rijen met -1, +1, -1, +1, enz.
- deel alle uitkomsten in de matrix door de determinant.

Deze werkwijze leent zich n i e t goed voor het programmeren van een algoritme voor het berekenen van de inverse matrix. Echter voor (2 x 2) en eventueel ook nog (3 x 3) matrices is de werkwijze een handige methode om de inverse direct op te kunnen schrijven.

5a. E e n b i j z o n d e r g e v a l

In de vorige paragraaf is de oplossing gegeven van de coëfficiënten in

$$y = ax + b$$
(5a.1)

Wordt de oplossing (5.3) nu toegepast in (5a.1) en wordt genomen

$x = \bar{x}$, dan komt er

$$\begin{aligned} y &= \frac{n(x, y) \bar{x} - (\sum x)(\sum y) \bar{x} + (x, x) \sum y - (x, y) \sum x}{n(x, x) - (\sum x)^2} \\ &= \frac{(x, x) y - (\sum x)^2 \sum y / n}{n(x, x) - (\sum x)^2} \\ &= \frac{n(x, x) - (\sum x)^2}{n(x, x) - (\sum x)^2} \bar{y} = \bar{y} \end{aligned}$$

waarmede is aangetoond dat $(\bar{x}, \bar{y})$ een punt van de aldus met (5.3) verkregen rechte is.

Stel nu dat gevonden zou zijn dat, toevallig, $b = 0$, dan wordt in (5.3)

$$b = (x, x) \sum y - (x, y) \sum x = 0$$

en dus

$$\bar{y} = \frac{(x, y)}{(x, x)} \bar{x}$$

N.B.!

De normaalvergelijking voor het geval

$$y = ax$$

luidt

$$(x, x) a = (x, y)$$

met

$$a = \frac{(x, y)}{(x, x)}$$

dus

$$y = \frac{(x, y)}{(x, x)} x$$

wordt gekozen $x = \bar{x}$ dan ontstaat

$$y = \frac{(x, y)}{(x, x)} \bar{x} \neq \bar{y}$$

en in dit geval is het punt $(\bar{x}, \bar{y})$ dus *n i e t* een punt van de rechte $y = ax$.

Het resultaat kan in de volgende figuren schematisch worden weergegeven waarin een stippenzwerm door een ellipsvormige figuur is aangeduid (zie fig. 1).

Belangrijk is het hierbij op te merken dat indien gesteld wordt als aanname

$$y = ax$$

dat dan de kleinste kwadraten oplossing een lijn geeft die *n i e t* door het zwaartepunt van de stippenzwerm hoeft te gaan.

Wordt echter aangenomen dat

$$y = ax + b$$

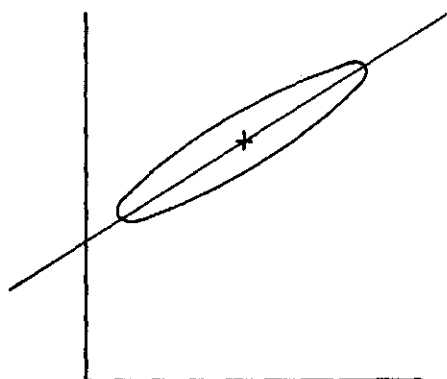
dan zal echter met

$$b \approx 0 \tag{5a.2}$$

wel gesteld mogen worden dat

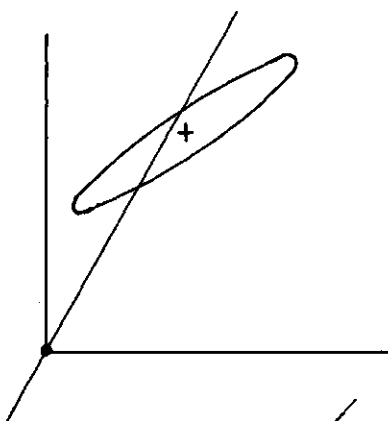
$$\bar{y} \approx a\bar{x} \tag{5a.3}$$

Hiernaar zal in het volgende nog worden terugverwezen.



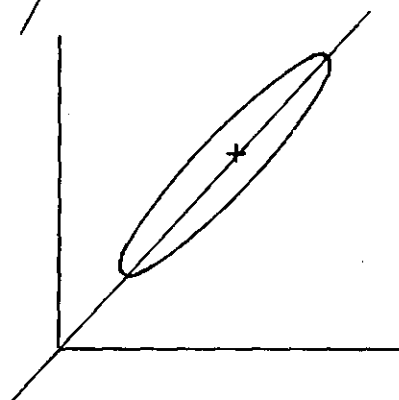
$$y = ax + b$$

$$\bar{y} = a\bar{x} + b$$



$$y = ax$$

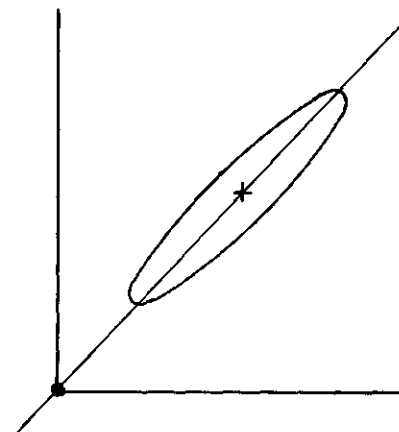
$$\bar{y} \neq a\bar{x}$$



$$y = ax + b$$

gevonden wordt $b = 0$

$$\bar{y} = a\bar{x}$$



$$y = ax$$

$$\text{dan } \bar{y} = a\bar{x}$$

alleen als

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

Fig. 1. Voorbeelden van regressielijnen die al of niet gedwongen door de oorsprong kunnen gaan

6. REDUCTIE VAN HET PROBLEEM

Het kan bewezen worden dat (beide) regressielijnen door het zwaartepunt van de stippenzwerm (x, y) gaan zodat $(\bar{x}, \bar{y})$ een punt van de lijnen is. Er kan dus geschreven worden

$$y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$$

waarin

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \quad \text{en} \quad \bar{y} = \frac{\sum y}{n}$$

Hieruit volgt weer dat

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

wat bovendien een eenvoudiger berekeningswijze voor b is dan volgens (5.3). Dat dit de juiste oplossing voor b geeft is in par. 5a bewezen.

Schrijven we

$$X_i = x_i - \bar{x}$$

en

$$Y_i = y_i - \bar{y}$$

dan volgt hieruit dat a kan worden berekend met

$$a = \frac{(X, Y)}{(X, X)} \tag{6.1}$$

aangezien voor de teller in (5.3) na deling door n geldt dat

$$\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_i x_i y_i - \frac{(\sum_i x_i)(\sum_i y_i)}{n}$$

wat door uitschrijven van het linkerlid van bovenstaande gelijkheid eenvoudig valt na te gaan. In vectoren luidt de relatie

$$(X, Y) = (x, y) - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n} \quad (6.2)$$

waarin weer $\sum x$ geschreven wordt voor $(x, 1)$.

Door de reductie toe te passen op (5.4) ontstaat

$$y - \bar{y} = a(u - \bar{u}) + b(v - \bar{v})$$

of

$$Y = a U + b V \quad (6.3)$$

met

$$c = \bar{y} - a\bar{u} - b\bar{v}$$

Door als matrix van waarnemingen te definiëren

$$X = \begin{pmatrix} U_1 & V_1 \\ U_2 & V_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ U_n & V_n \end{pmatrix}$$

volgt dat

$$M = \begin{pmatrix} (U, U) & (U, V) \\ (U, V) & (V, V) \end{pmatrix}$$

en

$$M^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} (V, V) & -(U, V) \\ -(U, V) & (U, U) \end{pmatrix}$$

waarin

$$D = (U, U)(V, V) - (U, V)^2$$

terwijl het rechterlid van de normaalvergelijkingen nu luidt:

$$X^T Y = \begin{pmatrix} (U, Y) \\ (V, Y) \end{pmatrix}$$

zodat

$$a = \frac{(V, V)(U, Y) - (U, V)(V, Y)}{D} \quad (6.4a)$$

$$b = \frac{(U, U)(V, Y) - (U, V)(U, Y)}{D} \quad (6.4b)$$

$$c = \bar{y} - a\bar{u} - b\bar{v} \quad (6.4c)$$

7. HET EIGENLIJKE PROBLEEM

In fig. 2 is de situatie geschets zoals deze thans zal worden geanalyseerd.

Er wordt aangenomen dat in een gebied van onderzoek de grondwaterstand in peilbuis P wordt gemeten en 'verklaard' wordt met de waterstanden gemeten in stambuis S.

Met behulp van de over de periode 1 opgestelde betrekking tussen de waterstanden in de peilbuis, respectievelijk in de stambuis, kan reconstructie van waterstanden voor peilbuis P over de periode 2 plaatsvinden. De verschillen tussen gemeten en berekende grondwaterstanden, veelal aangeduid met (O-C)-waarde, zal hier eenvoudigheds halve met het symbool v worden weergegeven.

De volgende grootheden worden verder gedefinieerd.

s_i = metingen van de grondwaterstand in de stambuis

p_i = metingen van de grondwaterstand in de peilbuis

q_i = gemeten wateronttrekking

v_i = verschil tussen gemeten en berekende grondwaterstand

Verder zal worden gebruikt $S_i = s_i - \bar{s}$, enz.

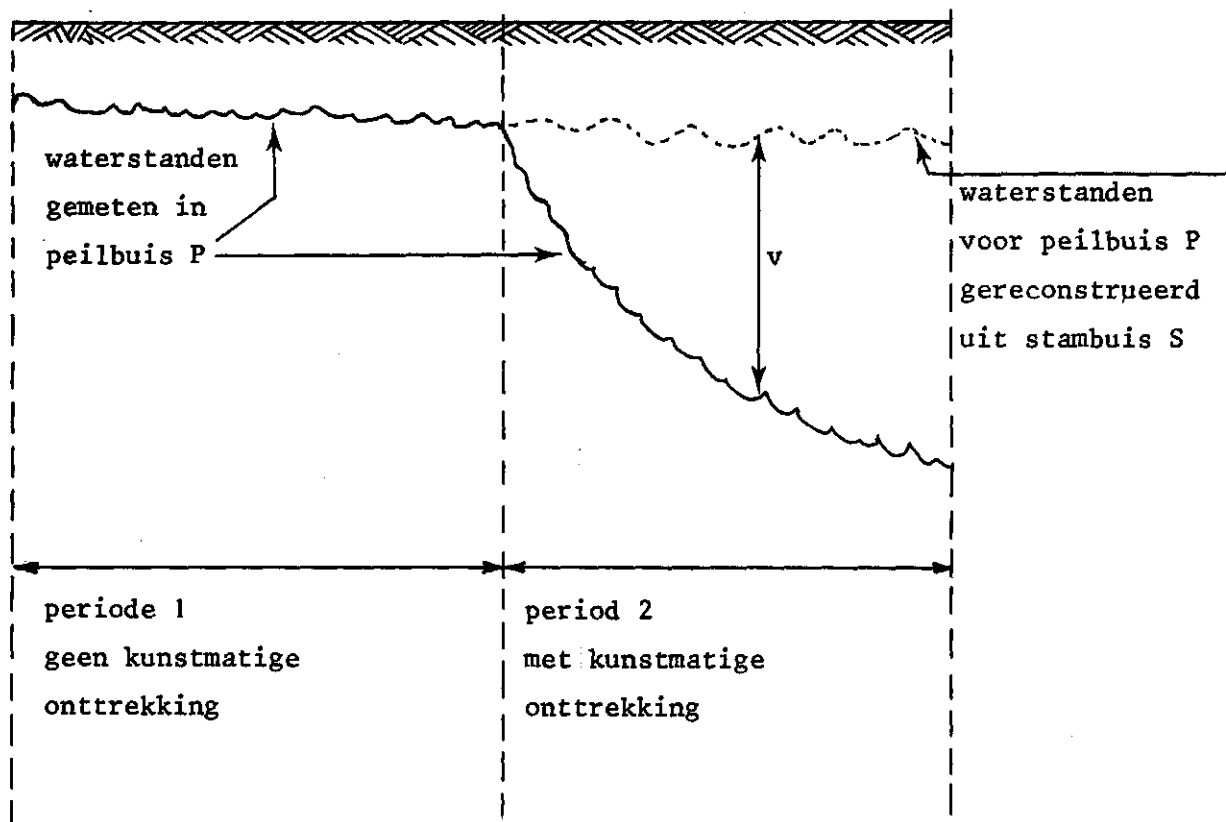


Fig. 2. Schematische situatie waarin op een bepaald moment grondwaterstanden door kunstmatige onttrekkingen worden verlaagd

- 1. = metingen en uitkomsten periode 1
- 2. = metingen en uitkomsten periode 2
- 3. = metingen en uitkomsten periode 1 en 2

. Een stip als index zal worden gebruikt om uit de regressievergelijkingen berekende grootheden aan te duiden.

In het volgende zal nadruk worden gelegd op het numerieke aspect waarbij wordt aangenomen dat de perioden 1 en 2 lang genoeg zijn om de verschillende relaties in de numerieke exploratie met de benodigde graad van betrouwbaarheid te kunnen vaststellen.

De vraag is nu welke relaties in het kader van de numerieke ex-

ploratie kunnen worden opgesteld voor de perioden 1, 2 en 3, en hoe dan de samenhang is tussen de verkregen uitkomsten, dat wil zeggen de waarden van de coëfficiënten in de verschillende regressie-vergelijkingen.

8. TE BESTUDEREN RELATIES

De volgende relaties zullen worden beschouwd waarbij in het rechterlid g e m e t e n waarden moeten worden ingevuld.

8A: P e r i o d e 1

$$p_{\cdot}^{1\cdot} = as^{1\cdot} + a_o$$

De grondwaterstanden in peilbuis p worden verklaard uit stambuis-waarnemingen.

8B: P e r i o d e 2

$$p_{\cdot}^{2\cdot} = as^{2\cdot} + a_o$$

Gereconstrueerde standen in peilbuis p worden berekend door metingen uit de stambuis in te vullen in de gevonden regressievergelijking

$$v_{\cdot}^{2\cdot} = p_{\cdot}^{2\cdot} - p_{\cdot}^{2\cdot} \quad (8B.1)$$

Berekening van verschillen tussen gemeten en berekende peilbuisstanden. Ook volgens

$$v_{\cdot}^{2\cdot} = p_{\cdot}^{2\cdot} - as^{2\cdot} - a_o$$

Verder

$$v_{\cdot}^{2\cdot} = bq^{2\cdot} + b_o \quad (8B.2)$$

Berekening van verschillen tussen gemeten en berekende peilbuisstanden, in dit geval 'verlagingen', uit vastgestelde onttrekkingen.

Wanneer aangenomen wordt dat de geëxtrapoleerde grondwaterstanden in de tweede periode dezelfde gemiddelde waarde hebben als de grondwaterstanden die in de eerste periode werden gemeten, dan zal

$$\bar{p}^{-2}_{\cdot} = \bar{p}^{-1}_{\cdot}$$

en in verband met (8B.1) is dan

$$\bar{v}^{-2}_{\cdot} = \bar{p}^{-2}_{\cdot} - \bar{p}^{-1}_{\cdot}$$

Wordt dan in (8B.2) aangenomen dat gevonden wordt $b_0 \approx 0$, dan geldt ook dat

$$\bar{v}^{-2}_{\cdot} \approx b\bar{q}^{-2}_{\cdot} \quad (\text{zie 35a.3})$$

en dus

$$\bar{p}^{-2}_{\cdot} - \bar{p}^{-1}_{\cdot} \approx b\bar{q}^{-2}_{\cdot} \quad (8B.3)$$

waarmee de gemiddelde verlaging verklaard is uit de gemiddelde onttrekking.

8C: P e r i o d e 3

$$\bar{p}^3_{\cdot} = \alpha \bar{s}^3_{\cdot} + \beta \bar{q}^3_{\cdot} + \gamma$$

Berekening van de grondwaterstanden in de peilbuis uit de grondwaterstanden gemeten in de stambuis en de vastgestelde onttrekkingen.

Gevraagd wordt nu wat de relatie is tussen a en α ; b en β ; a_0 , b_0 en γ ; en wat eventueel de voorwaarden zijn dat de uitkomsten voor a en α , b en β , en de intercepten a_0 , b_0 en γ gelijk zijn.

9. VERGELIJKINGEN EN AANNAMEN

Teneinde ook het laatste geval hanteerbaar te maken zal de gereduceerde vorm worden gebruikt zodat we hebben:

$$p_i^{1\cdot} = a s_i^{1\cdot} \quad (9.1)$$

$$v_i^{2\cdot} = b q_i^{2\cdot} \quad (9.2)$$

met

$$v_i^{2\cdot} = p_i^{2\cdot} - a s_i^{2\cdot} - a_o \quad (9.3)$$

$$p_i^{3\cdot} = \alpha s_i^{3\cdot} + \beta q_i^{3\cdot} \quad (9.4)$$

In deze schrijfwijze wordt aangenomen dat elk van de met hoofdletters benoemde variabelen gereduceerd is met het gemiddelde over de periode vermeld in de bovenindex.

Gezien de hydrologische eigenschappen waaruit het gestelde probleem bestaat, kunnen een aantal aannamen worden gedaan om het systeem van werken te schematiseren en tot een eenvoudiger schrijfwijze in de oplossing te komen.

Eerst wordt nog opgemerkt dat

$$q_i^{1\cdot} = 0, \text{ alle } i \quad (9.5)$$

$$\bar{q}^{1\cdot} = 0 \quad \text{en} \quad Q_i^{1\cdot} = 0$$

omdat in de eerste periode geen onttrekking plaats vond.

De - eventuele achtereenvolgend toe te passen - relevante aannamen zijn:

A1: Wanneer wordt aangenomen dat de waterstanden in de stambuis niet beïnvloed worden door de kunstmatige onttrekkingen, dat de verdere meteorologische- en hydrologische omstandigheden zich niet wijzigen,

en dat de in beschouwing genomen perioden voldoende lang zijn, dan geldt dat in goede benadering gesteld mag worden

$$\bar{s}^{1.} = \bar{s}^{2.} = \bar{s}^{3.}$$

A2: Het feit dat in A1 aangenomen is dat stambuisstanden en onttrekkingen elkaar niet beïnvloeden kan uitgedrukt worden door te zeggen dat de correlatie tussen beide 0 is. Voor een willekeurige niet gespecificeerde, periode geldt dan dat de correlatie r tussen s en q is

$$r_{s, q} = \frac{(s, q) - (\sum s)(\sum q)/n}{\sqrt{(s, s) - (\sum s)(\sum s)/n} \sqrt{(q, q) - (\sum q)(\sum q)/n}}$$

$$= 0$$

wat ook inhoudt dat (zie (6.2))

$$(s, q) - (\sum s)(\sum q)/n = (S, Q) = 0$$

A3: Verder nemen we (soms) aan dat de lengten van beide perioden 1 en 2 voldoende met elkaar overeenkomen om te kunnen stellen dat $n^{1.} = n^{2.}$ waarbij we dan definiëren $n = n^{1.}$.

A1 naar behoefte zal in de verdere uitwerking van de hier geformuleerde aannamen A1, A2 en A3 gebruik worden gemaakt.

10. OPLOSSING COËFFICIËNTEN

Alvorens de oplossingen van de coëfficiënten te kunnen vergelijken, zullen deze eerst in de algemene vorm gegeven worden.

Uit (9.1) volgt, volgens (6.1),

$$a = \frac{(P^{1.}, S^{1.})}{(S^{1.}, S^{1.})}$$

en

$$a_0 = \bar{p}^{1.} - a \bar{s}^{1.}$$

Uit (9.2) wordt gevonden

$$b = \frac{(v^{2\cdot}, q^{2\cdot})}{(q^{2\cdot}, q^{2\cdot})}$$

en

$$b_o = \bar{v}^{2\cdot} - b\bar{q}^{2\cdot}.$$

Uit (9.4) wordt gevonden volgens (6.4a), (6.4b) en (6.4c) dat

$$\alpha = \frac{(p^{3\cdot}, s^{3\cdot})(q^{3\cdot}, q^{3\cdot}) - (p^{3\cdot}, q^{3\cdot})(s^{3\cdot}, q^{3\cdot})}{(s^{3\cdot}, s^{3\cdot})(q^{3\cdot}, q^{3\cdot}) - (s^{3\cdot}, q^{3\cdot})(s^{3\cdot}, q^{3\cdot})} \quad (10.1a)$$

$$\beta = \frac{(p^{3\cdot}, q^{3\cdot})(s^{3\cdot}, s^{3\cdot}) - (p^{3\cdot}, s^{3\cdot})(q^{3\cdot}, s^{3\cdot})}{(q^{3\cdot}, q^{3\cdot})(s^{3\cdot}, s^{3\cdot}) - (q^{3\cdot}, s^{3\cdot})(q^{3\cdot}, s^{3\cdot})} \quad (10.1b)$$

$$\gamma = \bar{p}^{3\cdot} - \alpha\bar{s}^{3\cdot} - \beta\bar{q}^{3\cdot}. \quad (10.1c)$$

11. GELIJKSTELLING COËFFICIËNTEN

In het nu volgende zijn enkele eigenschappen van inprodukten van toepassing wanneer die moeten worden uitgedrukt in deel-inprodukten. De benodigde eigenschappen zijn afgeleid in Bijlage 1.

Verder zullen we in deze paragraaf nagaan onder toepassing van welke aannamen de overeenkomstige coëfficiënten aan elkaar gelijk zijn.

11.1. a en α

Uit par. 10 wordt gevonden dat wanneer A2 geldt voor de tweede periode, - volgens conclusie 5 van bijlage 1 is dan $(s^{3\cdot}, q^{3\cdot}) = 0$ -, er geschreven kan worden:

$$a = \frac{(p^{1\cdot}, s^{1\cdot})}{(s^{1\cdot}, s^{1\cdot})} \quad \text{en} \quad \alpha = \frac{(p^{3\cdot}, s^{3\cdot})}{(s^{3\cdot}, s^{3\cdot})}$$

Onder toepassing van conclusie 6 uit bijlage 1 volgt dan

$$\alpha = \frac{(P^{3\cdot}, S^{3\cdot})}{2(P^{1\cdot}, S^{1\cdot})} a$$

wat, in verband met (4) in bijlage 1 geschreven kan worden als

$$\alpha = \frac{1}{2} a + \frac{(P^{2\cdot}, S^{2\cdot})}{2(P^{1\cdot}, S^{1\cdot})} a + \frac{n^{1\cdot} n^{2\cdot}}{n^{1\cdot} + n^{2\cdot}} (\bar{p}^{1\cdot} - \bar{p}^{2\cdot}) (\bar{s}^{1\cdot} - \bar{s}^{2\cdot}) a$$

wat onder aanname A3 reduceert tot

$$= \frac{1}{2} a + \frac{(P^{2\cdot}, S^{2\cdot})}{(P^{1\cdot}, S^{1\cdot})} \frac{1}{2} a$$

Terugverwijzend naar de formules in A2 in par. 9 beschouwen we de correlatie tussen de peil en de stambuis. Deze is in algemene symbolen:

$$r = \frac{(P, S)}{\sqrt{(P, P)} \sqrt{(S, S)}}$$

wat geschreven kan worden met σ als symbool voor de standaardafwijking

$$r = \frac{(P, S)/n}{\sigma_P \cdot \sigma_S}$$

Onder voorwaarde A3 is dan

$$\frac{(P^{2\cdot}, S^{2\cdot})}{(P^{1\cdot}, S^{1\cdot})} = \frac{r^{2\cdot} \sigma_P^{2\cdot} \sigma_S^{2\cdot}}{r^{1\cdot} \sigma_P^{1\cdot} \sigma_S^{1\cdot}} \quad (11.1)$$

waaruit dan de voorwaarde volgt dat als de varianties σ^2 van de peilbuisstanden en stambuisstanden gelijk blijven in de 1e en 2e periode en de correlatie tussen peil- en stambuisstanden eveneens, dat dan vergelijking (11.1) de waarde 1 aanneemt en dat dan $\alpha = a$.

11.2. b en β

De uitkomst voor b in par. 10 wordt eerst als volgt herleid

$$b = \frac{(v^{2\cdot}, q^{2\cdot})}{(Q^{2\cdot}, Q^{2\cdot})}$$

waarin

$$v^{2\cdot} = v^{2\cdot} - \bar{v}^{2\cdot} \quad \text{en volgens (9.3)}$$

$$v^{2\cdot} = p^{2\cdot} - as^{2\cdot} - a_o \quad (11.1)$$

en

$$\bar{v}^{2\cdot} = \bar{p}^{2\cdot} - a\bar{s}^{2\cdot} - a_o \quad (11.2)$$

zodat door te nemen (11.1) min (11.2) er volgt dat

$$v^{2\cdot} = p^{2\cdot} - aS^{2\cdot}$$

waardoor er komt (verwezen wordt naar (3.2)):

$$b = \frac{(P^{2\cdot}, Q^{2\cdot}) - a(S^{2\cdot}, Q^{2\cdot})}{(Q^{2\cdot}, Q^{2\cdot})} \quad (11.3)$$

Wanneer nu weer wordt aangenomen dat A2 geldt voor de tweede periode, dan levert (10.1b)

$$\beta = \frac{(P^{3\cdot}, Q^{3\cdot})}{(Q^{3\cdot}, Q^{3\cdot})}$$

maar ook volgt nu uit (11.3) dat

$$b = \frac{(P^{2\cdot}, Q^{2\cdot})}{(Q^{2\cdot}, Q^{2\cdot})}$$

waarin geldt dat:

$$(Q^{3\cdot}, Q^{3\cdot}) = (Q^{2\cdot}, Q^{2\cdot}) + \frac{n^{1\cdot} n^{2\cdot}}{(n^{1\cdot} + n^{2\cdot})} (\bar{q}^{2\cdot})^2$$

en

$$(P^{3\cdot}, Q^{3\cdot}) = (P^{2\cdot}, Q^{2\cdot}) - \frac{n^{1\cdot} n^{2\cdot}}{(n^{1\cdot} + n^{2\cdot})} (\bar{p}^{1\cdot} - \bar{p}^{2\cdot}) \bar{q}^{2\cdot}$$

welke uitkomsten verkregen worden door (9.5) toe te passen in (5) van bijlage 1.

Volledig uitgeschreven wordt dus β

$$\beta = \frac{(P^{2\cdot}, Q^{2\cdot})(n^{1\cdot} + n^{2\cdot}) - n^{1\cdot} n^{2\cdot} (\bar{p}^{1\cdot} - \bar{p}^{2\cdot}) \bar{q}^{2\cdot}}{(Q^{2\cdot}, Q^{2\cdot})(n^{1\cdot} + n^{2\cdot}) + n^{1\cdot} n^{2\cdot} \bar{q}^{2\cdot} \bar{q}^{2\cdot}}$$

Als relatie tussen b en β geldt

$$\beta = \frac{b(Q^{2\cdot}, Q^{2\cdot}) - N(\bar{p}^{1\cdot} - \bar{p}^{2\cdot}) \bar{q}^{2\cdot}}{(Q^{2\cdot}, Q^{2\cdot}) + N \bar{q}^{2\cdot} \bar{q}^{2\cdot}}$$

$$\text{waarin } N = \frac{n^{1\cdot} n^{2\cdot}}{(n^{1\cdot} + n^{2\cdot})}$$

Onder gebruikmaking van (8B.3) volgt dan

$$\beta \approx b$$

onder de voorwaarde dat de numerieke uitwerking oplevert dat $b_0 \approx 0$. Dat wil zeggen dat b en β gelijk zijn wanneer gevonden wordt dat bij een onttrekking $q = 0$ er, gemiddeld, geen waterstandsverlaging in de peilbuis geconstateerd wordt.

11.3. a_0 , b_0 en γ

Uit de verschillende oplossingen in par. 10 volgt achtereenvolgens

$$a_o = \bar{p}^{1.} - a\bar{s}^{1.} \quad (11.4)$$

$$\begin{aligned} b_o &= \bar{v}^{2.} - b\bar{q}^{2.} \\ &= \bar{p}^{2.} - a\bar{s}^{2.} - a_o - b\bar{q}^{2.} \end{aligned}$$

en dus met $b_o \approx 0$

$$n^{2.} a_o \approx \bar{p}^{2.} - a\bar{s}^{2.} - b\bar{q}^{2.} \quad (11.5)$$

Terugverwijzend naar (10.1c) waarin

$$n^{3.} \gamma = \bar{p}^{3.} - \alpha\bar{s}^{3.} - \beta\bar{q}^{3.}$$

volgt nog

$$n^{3.} \gamma = \bar{p}^{1.} + \bar{p}^{2.} - \alpha\bar{s}^{1.} - \alpha\bar{s}^{2.} - \beta\bar{q}^{1.} - \beta\bar{q}^{2.}$$

Onder de voorwaarden waaronder $\alpha = a$ en $\beta = b$ vinden we uit (11.4)

$$n^{1.} a_o = \bar{p}^{1.} - \alpha\bar{s}^{1.}$$

en uit (11.5)

$$n^{2.} a_o = \bar{p}^{2.} - \alpha\bar{s}^{2.} - \beta\bar{q}^{2.}$$

en aangezien $\bar{q}^{1.} = 0$ (geen onttrekkingen in eerste periode) is ten slotte

$$n^{3.} \gamma = n^{1.} a_o + n^{2.} a_o = n^{3.} a_o$$

en dus

$$\gamma = a_o$$

12. SLOTOPMERKINGEN

In de gegeven beschouwingen is nagegaan hoe de coëfficiënten in regressievergelijkingen bij toepassing van numerieke exploratie over verschillende perioden van meting, met elkaar samenhangen.

Bij de afleiding van de formules die deze samenhangen moeten weer-
geven is slechts het numerieke aspect belicht. Zo zal het voorkomen
dat over de periode 1 en 2 in werkelijkheid nooit gevonden zal wor-
den dat $\bar{s}^1 = \bar{s}^2$ maar wel kan de situatie zich voordoen dat zowel
 $\bar{s}^1$ als $\bar{s}^2$ beide schattingen zijn van het werkelijke gemiddelde $\bar{s}$,
zonder onderling gelijk te zijn. Op deze situatie is in deze be-
schouwing niet ingegaan en er werd aangenomen dat n^1 en n^2 voldoende
de groot zijn om aan te nemen dat $\bar{s}^1 = \bar{s}^2$ in voldoende benadering.

De voorwaarden waaronder de verschillende coëfficiënten aan elkaar
gelijk zullen zijn worden hier nog eens samengevat.

. a en α

- De stambuiswaarnemingen mogen niet met de onttrekkingen gecorre-
leerd zijn.
- In de gegeven betrekking tussen a en α is aangenomen dat vóór
periode en periode van onttrekking ongeveer even lang zijn.
- De gemiddelde stambuisstanden van vóór en tijdens de onttrekking
zijn gelijk.
- De varianties van stam- en peilbuisstanden van vóór en tijdens de
de onttrekking zijn gelijk.
- De correlatie tussen stam- en peilbuisstanden van vóór en tijdens
de onttrekking zijn gelijk.

. b en β

- De stambuiswaarnemingen mogen niet met de onttrekkingen gecorre-
leerd zijn.
- De gevonden oplossing geldt voor $b_0 \approx 0$.

. a_0 en γ

- In de eerste periode treden geen onttrekkingen op en $a = \alpha$ en
 $b = \beta$.

HYDROLOGISCHE INTERPRETATIE

De resultaten laten een duidelijke hydrologische interpretatie toe.

In de eerste plaats moet er aan voldaan zijn dat de stambuis niet wordt beïnvloed door de onttrekkingen.

In de tweede plaats moet gelden dat de meteorologische situatie dezelfde is gebleven zodat stambuisfluctuaties rond het gemiddelde niveau in de periode vóór de onttrekking en ten tijde van de onttrekking van dezelfde orde zijn.

In de derde plaats moet er aan voldaan zijn dat ook voor de peilbuisfluctuaties hetzelfde geldt als voor de stambuizen onder 2.

Tenslotte wordt vereist dat de onderlinge mate van fluctuatie in respectievelijk de peilbuis en de stambuis (in de eerste voor beide niveaus, namelijk die van vóór en tijdens de onttrekking) van dezelfde orde zijn.

Als laatste opmerking wordt er nog op gewezen dat de uitkomst $b = \beta$ geldt onder gebruik van een regressievergelijking waarin het intercept nul blijkt te zijn.

REFERENTIE

STOL, Ph.Th., 1969. Use of computers for the investigation of the hydrologic properties of an area, exemplified with the temporary drawdown of groundwater levels. ICID-Bulletin July 1969: 67-74. ICW-Verspreide Overdrukken No. 89.

Samenhang tussen de inprodukten over de perioden 1, 2 en 3

In deze bijlage beschouwen we de volgende vectoren

$$x^{1\cdot} = (x_1, x_2, \dots, x_{n^{1\cdot}})^T$$

$$x^{2\cdot} = (x_{n^{1\cdot}+1}, x_{n^{1\cdot}+2}, \dots, x_{n^{1\cdot}+n^{2\cdot}})^T$$

$$x^{3\cdot} = (x_1, x_2, \dots, x_{n^{3\cdot}})^T$$

waarin $n^{3\cdot} = n^{1\cdot} + n^{2\cdot}$.

Op analoge wijze wordt de vector $y^{1\cdot}$, $y^{2\cdot}$ en $y^{3\cdot}$ gedefinieerd.

Allereerst wordt opgemerkt dat

$$(x^{3\cdot}, x^{3\cdot}) = (x^{1\cdot}, x^{1\cdot}) + (x^{2\cdot}, x^{2\cdot})$$

en

$$(x^{3\cdot}, y^{3\cdot}) = (x^{1\cdot}, y^{1\cdot}) + (x^{2\cdot}, y^{2\cdot})$$

Voorts dat

$$\sum_i x_i^{3\cdot} = \sum_j x_j^{1\cdot} + \sum_k x_k^{2\cdot}$$

waarin $i = 1(1)n^{3\cdot}$, $j = 1(1)n^{1\cdot}$ en $k = (n^{1\cdot} + 1)(1)n^{2\cdot}$.

Gemakshalve zullen de sommeringsindices worden weggelaten, aangezien het traject van sommeren door de bovenindex is bepaald.

We beschouwen $(X^{3\cdot}, Y^{3\cdot})$ waarin X en Y de op het gemiddelde over de geïndiceerde periode gereduceerde vectoren zijn. We hebben dan

$$(X^{3\cdot}, Y^{3\cdot}) = (x^{3\cdot}, y^{3\cdot}) - \frac{\sum x^{3\cdot} \sum y^{3\cdot}}{n^{3\cdot}}$$

Vervolg Bijlage 1

Uitwerking van het rechterlid geeft

$$(x^{1.}, y^{1.}) + (x^{2.}, y^{2.}) - \frac{(\sum x^{1.} + \sum x^{2.})(\sum y^{1.} + \sum y^{2.})}{n^{1.} + n^{2.}}$$

waarin de volgende uitdrukkingen voorkomen:

$$(x^{1.}, y^{1.}) - \frac{\sum x^{1.} \sum y^{1.}}{n^{1.} + n^{2.}} \quad (1)$$

$$(x^{2.}, y^{2.}) - \frac{\sum x^{2.} \sum y^{2.}}{n^{1.} + n^{2.}} \quad (2)$$

$$- \frac{\sum x^{1.} \sum y^{2.}}{n^{1.} + n^{2.}} - \frac{\sum x^{2.} \sum y^{1.}}{n^{1.} + n^{2.}} \quad (3)$$

(1) kan geschreven worden als

$$(x^{1.}, y^{1.}) + \frac{\sum x^{1.} \sum y^{1.}}{n^{1.}} - \frac{\sum x^{1.} \sum y^{1.}}{n^{1.} + n^{2.}}$$

Door de beide laatste termen onder één noemer te brengen ontstaat er

$$(x^{1.}, y^{1.}) + \frac{n^{2.} \sum x^{1.} \sum y^{1.}}{n^{1.} (n^{1.} + n^{2.})} \quad (1a)$$

Onder toepassing van aanname A3 wordt dit

$$(x^{1.}, y^{1.}) + \frac{\sum x^{1.} \sum y^{1.}}{2n} \quad (1b)$$

en evenzo

$$(x^{2.}, y^{2.}) + \frac{\sum x^{2.} \sum y^{2.}}{2n} \quad (2b)$$

Voor (1a) kan nog geschreven worden

$$(X^{1\cdot}, Y^{1\cdot}) + \frac{n^{2\cdot} \sum y^{1\cdot}}{n^{1\cdot} + n^{2\cdot}} \bar{x}^{1\cdot}.$$

Door nu (3) in dezelfde vorm te brengen waardoor verkregen wordt

$$- \frac{n^{1\cdot} \sum y^{2\cdot}}{n^{1\cdot} + n^{2\cdot}} \bar{x}^{1\cdot} - \frac{n^{2\cdot} \sum y^{1\cdot}}{n^{1\cdot} + n^{2\cdot}} \bar{x}^{2\cdot}.$$

blijkt dat uiteindelijk de onderdelen (1), (2) en (3) herleid kunnen worden en verzameld kunnen worden tot

$$(X^{3\cdot}, Y^{3\cdot}) = (X^{1\cdot}, Y^{1\cdot}) + (X^{2\cdot}, Y^{2\cdot}) + \frac{n^{1\cdot} n^{2\cdot}}{n^{1\cdot} + n^{2\cdot}} (\bar{x}^{1\cdot} - \bar{x}^{2\cdot})(\bar{y}^{1\cdot} - \bar{y}^{2\cdot}) \quad (4)$$

CONCLUSIES:

1. Wanneer aanname A1 geldt zodat $\bar{x}^{1\cdot} = \bar{x}^{2\cdot}$, $\bar{y}^{1\cdot} = \bar{y}^{2\cdot}$, of dat beide het geval is, dan zal

$$(X^{3\cdot}, Y^{3\cdot}) = (X^{1\cdot}, Y^{1\cdot}) + (X^{2\cdot}, Y^{2\cdot})$$

2. Wanneer alleen aanname A3 geldt, dan zal

$$(X^{3\cdot}, Y^{3\cdot}) = (X^{1\cdot}, Y^{1\cdot}) + (X^{2\cdot}, Y^{2\cdot}) + \frac{1}{2} n (\bar{x}^{1\cdot} - \bar{x}^{2\cdot})(\bar{y}^{1\cdot} - \bar{y}^{2\cdot})$$

Ook nu is er steeds een correctieterm nodig om de inprodukten over de gehele periode uit te drukken in de inprodukten over de eerste en de tweede periode afzonderlijk.

3. Wanneer geldt dat alle $y_i^{1\cdot} = 0$, en dus $\bar{y}^{1\cdot} = 0$, dan wordt (4) gelijk aan

Vervolg Bijlage 1

$$(X^{3\cdot}, Y^{3\cdot}) = (X^{2\cdot}, Y^{2\cdot}) - \frac{n^{1\cdot} \cdot n^{2\cdot}}{n^{1\cdot} + n^{2\cdot}} (\bar{x}^{1\cdot} - \bar{x}^{2\cdot}) \bar{y}^{2\cdot} \quad (5)$$

4. Is in geval 3 bovendien aanname A1 van kracht, dan komt er

$$(X^{3\cdot}, Y^{3\cdot}) = (X^{2\cdot}, Y^{2\cdot})$$

5. Wanneer in geval 3 en 4 bovendien geldt dat in de tweede periode x en y ongecorreleerd zijn en dat dus $(X^{2\cdot}, Y^{2\cdot}) = 0$, dan zal ook

$$(X^{3\cdot}, Y^{3\cdot}) = 0$$

6. Wordt verondersteld dat de inprodukten over beide perioden 1 en 2 gelijk zijn wat in feite betekent: gelijke hydrologische omstandigheden in beide perioden, dan ontstaat er

$$\begin{aligned} (X^{3\cdot}, Y^{3\cdot}) &= 2(X^{1\cdot}, Y^{1\cdot}) \\ &= 2(X^{2\cdot}, Y^{2\cdot}) \end{aligned}$$

waarin bovendien aanname A3 is toegepast.

7. Voor het bestuderen van eigenschappen met betrekking tot inprodukten met zichzelf kunnen in deze bijlage alle Y en y vervangen worden door respectievelijk X en x.