

NN31545.1343

maart 1982

Instituut voor Cultuurtechniek en Waterhuishouding
Wageningen

BIBLIOTHEEK DE HAFF
Droevendaalsesteeg 3a
Postbus 241
6700 AE Wageningen

**BENADERING VAN DE RELATIE TUSSEN OPPERVLAKTE EN INHOUD
VAN EEN ZANDWINPUT DOOR EEN LINEAIRE SPLINE FUNCTIE**

drs. J. Vreke

Nota's van het Instituut zijn in principe interne communicatie-
middelen, dus geen officiële publikaties.

Hun inhoud varieert sterk en kan zowel betrekking hebben op een
eenvoudige weergave van cijferreeksen, als op een concluderende
discussie van onderzoeksresultaten. In de meeste gevallen zullen
de conclusies echter van voorlopige aard zijn omdat het onderzoek
nog niet is afgesloten.

Bepaalde nota's komen niet voor verspreiding buiten het Instituut
in aanmerking

1790536

16 FEB. 1998



I N H O U D

	Blz.
1. INLEIDING	1
2. PROBLEEMSTELLING	1
3. LINEAIRE SPLINE FUNCTIES	6
4. ENKELE WISKUNDIGE AFLEIDINGEN	10
4.1. Inleiding	10
4.2. $R(q)$ nader bekeken	10
4.3. Het bewijs dat $RS(q)$ bestaat uit raaklijnen aan $R(q)$	14
4.4. De bepaling van de knikpunten als $RS(q) - R(q) \leq \Delta$	19
4.5. De bepaling van de knikpunten als $\{RS(q) - R(q)\}/R(q) \leq \rho$	22
4.6. De bepaling van het raakpunt van een raaklijn aan $R(q)$	26
5. DE BENADERING VAN $R(q)$	28
5.1. Inleiding	28
5.2. De benadering op het interval $[rq_0, rq_1]$	29
5.3. De benadering op het interval $[rq_1, \infty)$	30
5.4. De benadering op het interval $[rq_0, \infty)$	34
6. SLOTOPMERKINGEN	35
LITERATUUR	41

1. INLEIDING

De niet lineaire relatie tussen de oppervlakte en de inhoud van een zandwinput is één van de complicerende factoren bij de bouw van een gemengd geheeltallig lineair programmeringsmodel met betrekking tot de optimale allocatie van zandwinobjecten. (Dit is beschreven in VREKE, 1982). In de onderhavige nota wordt nader ingegaan op de benadering van deze relatie door een lineaire functie. Hierbij wordt gebruik gemaakt van lineaire spline functies. De nota moet worden beschouwd als een aanvulling op VREKE, 1982, waarin het optimaliseringsmodel beschreven wordt.

De indeling van de nota is als volgt. In par. 2 wordt de probleemstelling verder uitgewerkt en wordt de afleiding van de relatie tussen de oppervlakte en de inhoud van een zandwinput gegeven. In par. 3 wordt het begrip spline functie geïntroduceerd. Par. 4 bevat wiskundige afleidingen en bewijzen van in par. 5 gebruikte stellingen en formules. Deze afleidingen zijn in een afzonderlijke paragraaf ondergebracht om de leesbaarheid te vergroten. In par. 5 wordt de benadering van de relatie tussen de oppervlakte en de inhoud van een zandwinobject gegeven. Par. 6 bevat een voorbeeld en enkele opmerkingen.

2. PROBLEEMSTELLING

In VREKE, 1982 wordt uitgegaan van een winput met de volgende kenmerken:

- de voor de zandwinning niet bruikbare bovenlaag heeft een constante dikte (v);
- de laag winbaar zand heeft een constante dikte (d);
- de winput heeft de vorm van een, al dan niet afgeknotte, piramide

- met een vierkant grondvlak en een talud, dit is de helling van de (opstaande) zijden ten opzichte van het grondvlak, van 1:t;
- de hoeveelheid zand die minimaal gewonnen moet worden als de put in produktie wordt genomen, bedraagt rq_0 ;
 - de hoeveelheid zand die gewonnen kan worden is onbegrensd.

Daarnaast wordt aangegeven dat de ruimte die in beslag wordt genomen door opslag, plaatsing machines en dergelijke in de berekeningen buiten beschouwing wordt gelaten.

Onder deze voorwaarden wordt het voor de winput benodigde grondoppervlak bepaald door de dikte van de bovenlaag, de dikte van de zandlaag, het talud en door de putproduktie (d.i. de hoeveelheid zand die gewonnen wordt). Dit leidt tot een niet lineaire relatie tussen het grondoppervlak en de putproduktie.

In de fig. 2.1 en 2.2 is de doorsnede getekend van een winput die de genoemde kenmerken bezit en een diepte heeft van respectievelijk minder dan $(v + d)$ meter en $(v + d)$ meter*.

Een put met een diepte van minder dan $(v + d)$ meter heeft de vorm van een (omgekeerde) piramide. De in fig. 2.1 gegeven lengten van de zijden volgen rechtstreeks uit de veronderstellingen met betrekking tot diepte en talud van de winput. De oppervlakte van het grondvlak en de putproduktie (d.i. de inhoud van het gedeelte van de winput dat zich in de zandlaag bevindt) kunnen met de bekende formules worden berekend. Dit geeft voor de oppervlakte van het grondvlak:

$$R = (2tv + 2th)^2 \quad (2.1)$$

en voor de putproduktie**:

$$q = \frac{4}{3} t^2 h^3 \quad (2.2)$$

*Hierbij is v de dikte van de niet bruikbare bovenlaag en d de dikte van de zandlaag

**Voor de inhoud van een afgeknotte piramide met oppervlakte grondvlak O , oppervlakte topvlak T en hoogte h geldt:

$$Inh = \frac{1}{3} h \{ O + T + (O \times T)^{\frac{1}{2}} \}$$

Voor een gewone piramide geldt T is nul

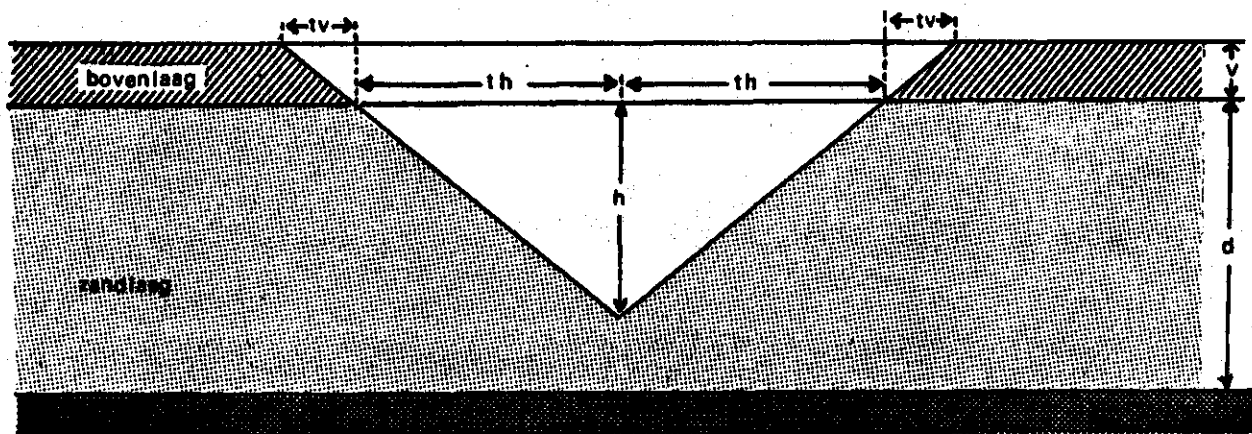


Fig. 2.1. Doorsnede van een piramidevormige winput met diepte
(v + h)

Hierbij hebben de symbolen de volgende betekenis:

R = het voor de winput benodigde grondoppervlak

q = de putproduktie

t = het talud

h = de diepte van het gedeelte van de winput dat zich in de zandlaag bevindt

v = de dikte van de voor de zandwinning niet bruikbare bovenlaag

d = de dikte van de laag winbaar zand.

Uit vergelijking (2.2) is af te leiden:

$$h = (3q/4t^2)^{\frac{1}{3}} \quad (2.3)$$

Substitutie van h in vergelijking (2.1) geeft de volgende, niet lineaire, relatie tussen R en q:

$$R = \left\{ 2tv + (6tq)^{\frac{1}{3}} \right\}^2 \quad (2.4)$$

Een winput met een diepte van (v + d) meter heeft de vorm van een (omgekeerde) afgeknotte piramide Dit wordt weergegeven in fig. 2.2.

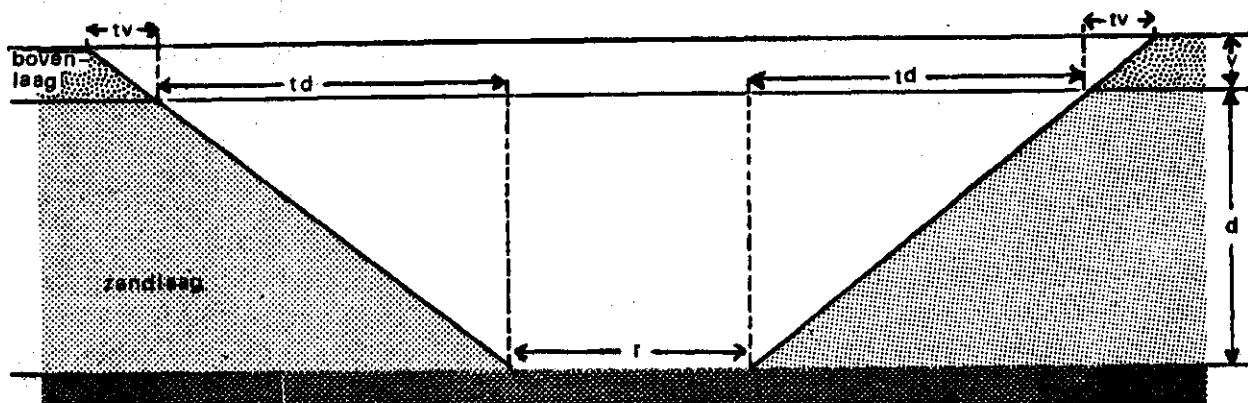


Fig. 2.2. Doorsnede van een winput met de vorm van een afgeknotte piramide

De in deze figuur gegeven lengten van de zijden volgen uit de veronderstellingen. Het topvlak van de afgeknotte piramide is een vierkant met zijden met lengte r . Voor de oppervlakte van het grondvlak geldt:

$$R = (2tv + 2td + r)^2 \quad (2.5)$$

en voor de putproduktie:

$$q = \frac{1}{3} d \{ (r + 2td)^2 + r^2 + r(r + 2td) \} \quad (2.6)$$

Uit vergelijking (2.6) is af te leiden:

$$r = -td + \left(\frac{q}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.7)$$

Substitutie van vergelijking (2.7) in vergelijking (2.5) geeft:

$$R = \left\{ \left(\frac{q}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2 \right)^{\frac{1}{2}} + td + 2tv \right\}^2 \quad (2.8)$$

De relatie tussen het benodigd grondoppervlak en de putproduktie is nu bepaald voor de volgende gevallen

- de winput is een omgekeerde piramide met een diepte van $(v + h)$ meter waarbij $0 < h < d$;
- de winput is een omgekeerde afgeknotte piramide met een diepte van $(v + d)$ meter en een bodemoppervlakte r^2 .

Wat rest is een winput met de vorm van een piramide en een diepte van $(v + d)$ meter. In dit geval kan voor de berekening van R gebruik worden gemaakt van zowel vergelijking (2.1) met $h = d$ als van vergelijking (2.5) met $r = 0$. Dit geeft:

$$R = (2tv + 2td)^2 \quad (2.9)$$

Voor de putproduktie, rq_1 , geldt:

$$rq_1 = \frac{4}{3} t^2 d^3 \quad (2.10)$$

Samenvatting van het voorgaande geeft voor de relatie tussen het benodigd grondoppervlak en de putproduktie:

$$R(q) = \left\{ 2tv + (6tq)^{\frac{1}{3}} \right\}^2 \quad rq_0 \leq q \leq rq_1 \quad (2.11)$$

$$= \left\{ \left(\frac{q}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2 \right)^{\frac{1}{2}} + td + 2tv \right\}^2 \quad q \geq rq_1$$

Dit is een niet lineaire functie van q . Omdat vergelijking (2.11) deel uitmaakt van de doelstellingsfunctie van een gemengd geheeltalig lineair programmeringsprobleem moet deze vergelijking worden benaderd door één of meer lineaire vergelijkingen. In VREKE, 1982 zijn voor deze benadering, $RS(q)$, de volgende uitgangspunten geformuleerd:

- de benadering moet continu zijn;
- de benadering moet groter dan of gelijk aan de werkelijke waarde zijn, dat wil zeggen $RS(q) \geq R(q)$;
- de som van de afwijkingen $\{RS(q) - R(q)\}$ moet zo klein mogelijk zijn. Ofwel $\int \{RS(q) - R(q)\} dq$ is minimaal;
- de benadering moet plaatsvinden door middel van een zo klein mogelijk aantal lijnstukken;

- op het interval $[rq_0, rq_1]$ moet de benadering plaatsvinden met behulp van twee lijnstukken terwijl voor $q = rq_0$ en $q = rq_1$ moet gelden $RS(q) = R(q)$;
- op het interval $[rq_1, \infty)$ worden twee nauwkeurigheidscriteria gedefinieerd:
 1. de afwijking $\{RS(q) - R(q)\}$ mag niet groter zijn dan Δ ;
 2. de relatieve afwijking $\frac{\{RS(q) - R(q)\}}{R(q)}$ mag niet groter zijn dan ρ .

Voor beide criteria wordt de benadering bepaald.

De formulering van een lineaire benadering van $R(q)$ die aan de genoemde voorwaarden voldoet is het onderwerp van deze nota. Gekozen is voor een benadering door een lineaire spline functie.

3. LINEAIRE SPLINE FUNCTIES

Een spline is oorspronkelijk een lang, dun, flexibel latje dat aan de tekentafel wordt gebruikt. Door het plaatsen van gewichten op dit latje kan men door een aantal gegeven punten een vloeiende kromme trekken. Door de opkomst van de computer is de behoefte ontstaan dit soort vloeiende curven met analytische functies te beschrijven zodat verwerking met de computer mogelijk wordt. Hierdoor is de spline de naamgever geworden van een klasse van functies. Spline functies bestaan uit gedeelten van functies (veeltermen) die aan elkaar zijn geknoopt. Een n^e -graads spline functie is een spline functie waarvan de eerste $(n-1)$ -afgeleiden continue zijn in de knooppunten. Een lineaire spline functie is een spline functie bestaande uit aan elkaar geknoopte lijnstukken (gedeelten van lineaire functies).

De lineaire spline functie kan als volgt gedefinieerd worden:

Definitie: Stel op het interval $[a, b]$ is $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ de verzameling basispunten met $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$, dan is de afhankelijke variabele y een lineaire spline functie $S_{\Delta}(x)$ over Δ dan en slechts dan als y een gebroken rechte is bestaande uit k -segmenten gedefinieerd op de k -intervallen $[x_0, x_1], \dots, [x_{k-1}, x_k]$.

In fig. 3.1 is een lineaire spline functie getekend. De punten $(x_i, S_{\Delta}(x_i))$ met $i = 1, \dots, (k - 1)$ zijn de knikpunten (ook wel buigpunten, breekpunten of knooppunten genoemd). In de definitie is de spline functie gedefinieerd op een gesloten interval. Uitbreiding tot een open interval is mogelijk. Er mag bijvoorbeeld gelden $a \rightarrow -\infty$ en/of $b \rightarrow +\infty$.

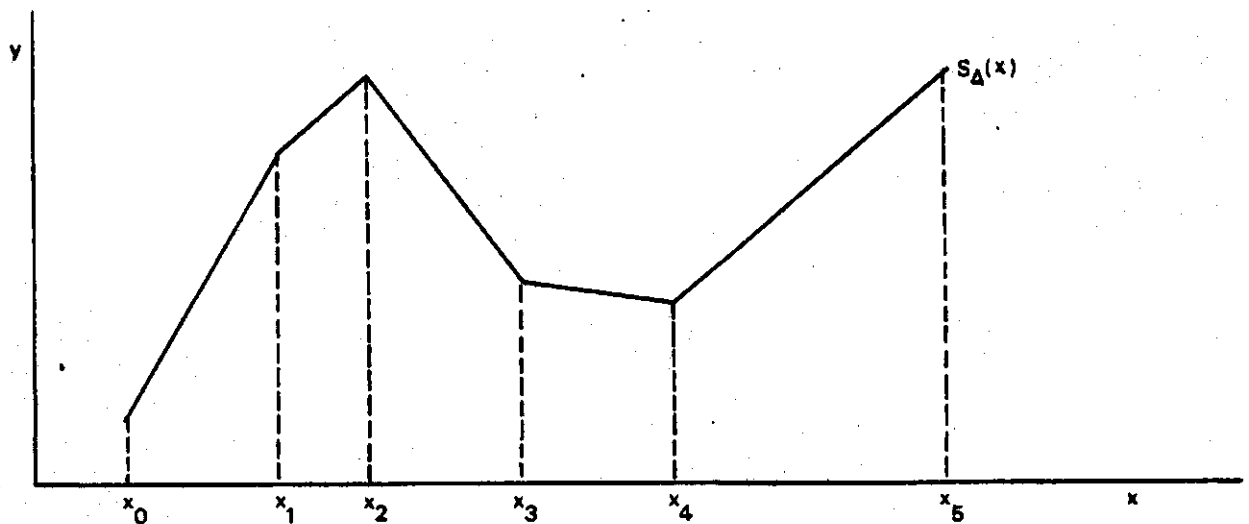


Fig. 3.1. De lineaire spline functie $y = S_{\Delta}(x)$

Voor elk van de intervallen $[x_{i-1}, x_i]$, met $i = 1, \dots, k$ geldt dat y weergegeven kan worden door de lineaire functie:

$$y = a_i + b_i x \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (3.1)$$

Als de waarde van y voor $x = x_i$ wordt gedefinieerd als

$$y_i = S_{\Delta}(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, k \quad (3.2)$$

dan kan (3.1) geschreven worden als:

$$y = y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) = y_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_i) \quad i = 1, \dots, k \quad (3.3)$$

Vergelijking (3.3) is afgeleid door achtereenvolgens de punten (x_i, y_i) en (x_{i-1}, y_{i-1}) in (3.1) te substitueren. Dit geeft een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden, a_i en b_i . Oplossen van dit stelsel en substitutie van de uitkomsten in vergelijking (3.1) geeft vergelijking (3.3).

Definieer vervolgens $(x - x_i)^+$ als:

$$(x - x_i)^+ = \max(0, x - x_i) \quad i = 0, 1, \dots, k-1 \quad (3.4)$$

Met behulp van (3.4) kan $S_{\Delta}(x)$ geschreven worden als:

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \{(x - x_0)^+ - (x - x_1)^+\} + \dots + \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \{(x - x_{k-1})^+\} \quad (3.5)$$

Substitutie van $z_i = (x - x_{i-1})^+ \quad i = 1, \dots, k$

$$c_0 = y_0$$

$$c_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{x_{i-1} - x_{i-2}} \quad i = 2, \dots, k$$

$$\text{en } c_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

in vergelijking (3.5) geeft:

$$y = c_0 + \sum_{i=1}^k c_i z_i \quad (3.6)$$

Vergelijking (3.6) kan worden beschouwd als de algemene vorm van de lineaire spline functie. De richtingscoëfficiënt, $rc(i)$, van de spline functie op het interval $[x_{i-1}, x_i]$ is gelijk aan de som van de coëfficiënten c_h over de eerste i -intervallen:

$$rc(i) = \sum_{h=1}^i c_h \quad i = 1, \dots, k \quad (3.7)$$

Dit betekent dat de coëfficiënt c_h (voor $h \geq 2$), de verandering in de richtingscoëfficiënt geeft die plaats vindt in het $(h - 1)^e$ knikpunt. Tot slot wordt aan de hand van een voorbeeld aangetoond dat toepassing van de vergelijkingen (3.3) en (3.6) dezelfde uitkomsten geven.

Stel dat geldt $x \in [x_2, x_3]$. Dan geldt volgens vergelijking (3.3):

$$y = y_2 + \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}(x - x_2) \quad (3.8)$$

Omdat $x \in [x_2, x_3]$, geldt voor z_i :

$$\begin{aligned} z_i &= x - x_{i-1} & i &= 1, 2, 3 \\ &= 0 & i &= 4, 5, \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

Substitutie van (3.9) in (3.6) geeft:

$$\begin{aligned} y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \left\{ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right\} (x - x_1) + \\ + \left\{ \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right\} (x - x_2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dit kan worden herleid tot:

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) + \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}(x - x_2) = \\ &= y_2 + \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}(x - x_2) \end{aligned} \quad (3.11)$$

en dit is gelijk aan vergelijking (3.8). Er kan geconcludeerd worden dat toepassing van de vergelijkingen (3.3) en (3.6) tot dezelfde uitkomsten leidt.

4. ENKELE WISKUNDIGE AFLEIDINGEN

4.1. Inleiding

Deze paragraaf is geschreven ter ondersteuning van par. 5. Er worden een aantal wiskundige afleidingen en bewijzen behandeld die in par. 5 worden gebruikt. Er is gekozen voor de beschrijving van de wiskundige afleidingen in een afzonderlijke paragraaf om het totaal overzichtelijk te houden.

De onderwerpen die achtereenvolgens aan de orde komen zijn:

- de functie $R(q)$;
- het bewijs dat de spline functie $RS(q)$ bestaat uit raajlijnen aan $R(q)$;
- de bepaling van de knikpunten van $RS(q)$;
- de bepaling van de raakpunten van $RS(q)$ en $R(q)$.

Bij de formulering van de benadering $RS(q)$ wordt uitgegaan van de in par. 2 geformuleerde uitgangspunten. Dit houdt onder meer in dat de lineaire benadering $RS(q)$ beter is dan een lineaire benadering $RT(q)$ als geldt dat beide benaderingen continu zijn, uit een gelijk aantal lijnstukken bestaan, aan de nauwkeurigheidscriteria voldoen en als:

$$\int_{rq_0}^{\infty} RS(q) dq < \int_{rq_0}^{\infty} RT(q) dq \quad (4.1)$$

4.2. $R(q)$ nader bekeken*

In par. 2 is de relatie tussen het benodigde grondoppervlak en de produktie van een zandwinput afgeleid. Hierbij is het benodigd grondoppervlak van een zandwinput uitgedrukt als een functie van de putproduktie (q). Dit geeft:

*Voor de betekenis van de symbolen wordt verwezen naar par. 2

$$R(q) = \left\{ 2tv + (6tq)^{\frac{1}{3}} \right\}^2 \quad rq_0 \leq q \leq rq_1 \quad (2.11)$$

$$= \left\{ \left(\frac{q}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2 \right)^{\frac{1}{2}} + td + 2tv \right\}^2 \quad q \geq rq_1$$

waarbij:

$$rq_1 = \frac{4}{3} t^2 d^3 \quad (2.10)$$

De eerste en de tweede afgeleide van $R(q)$ naar q zijn respectievelijk:

$$R'(q) = 4t(6tq)^{-\frac{2}{3}} \left\{ 2tv + (6tq)^{\frac{1}{3}} \right\} \quad rq_0 \leq q \leq rq_1 \quad (4.2)$$

$$= \frac{1}{d} \left\{ 1 + \frac{td + 2tv}{\left(\frac{q}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right\} \quad q \geq rq_1$$

$$\text{en } R''(q) = -32t^3 v (6tq)^{-\frac{5}{3}} - 8t^2 (6tq)^{-\frac{4}{3}} \quad rq_0 \leq q \leq rq_1 \quad (4.3)$$

$$= -\frac{1}{2d^2} (td + 2tv) \left(\frac{q}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad q \geq rq_1$$

$R(q)$, $R'(q)$ en $R''(q)$ zijn continue functies van q voor $q \geq rq_0$. Omdat t , v , d en rq_0 positieve constanten zijn, geldt:

$$R'(q) > 0 \quad q \geq rq_0 \quad (4.4)$$

$$\text{en } R''(q) < 0 \quad q \geq rq_0 \quad (4.5)$$

Dit betekent dat $R(q)$ voor $q \geq rq_0$ een continue, toenemende functie is terwijl de toename $\{R(q + \delta) - R(q)\}$ met $\delta > 0$, afneemt naarmate q toeneemt. De toename blijft echter groter dan nul. Voor de eerste afgeleide, $R'(q)$, geldt:

$$R'(q_1) > R'(q_2) \quad rq_0 \leq q_1 < q_2 \quad (4.6)$$

Met betrekking tot de raaklijn $r_i(q)$ in het punt $P_i = (rq_i, R(rq_i))$

aan $R(q)$ kan worden opgemerkt dat geldt (zie fig. 4.1) :

$$r_i(q) - R(q) \geq 0 \quad r q_i, q_i \geq r q_0 \quad (4.7)$$

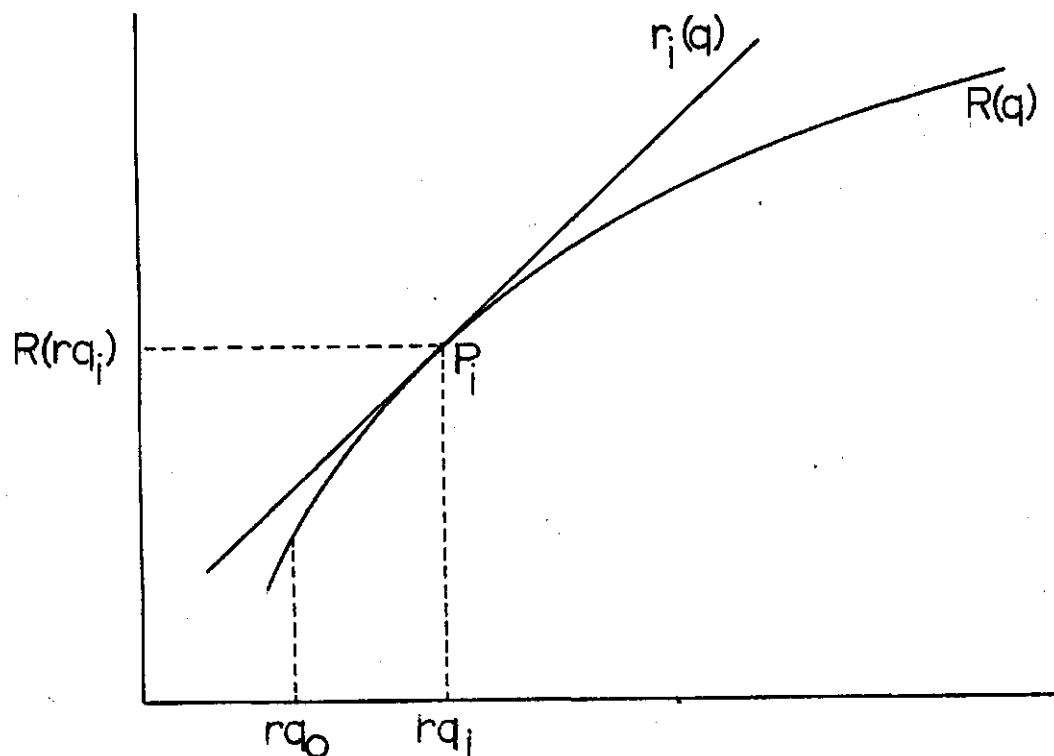


Fig. 4.1. De raaklijn in P_i aan $R(q)$

Dit kan als volgt wordt bewezen:

de raaklijn in P_i aan $R(q)$ heeft de volgende vorm:

$$r_i(q) = R(r q_i) + R'(r q_i) \cdot \{q - r q_i\} \quad q \geq r q_0 \quad (4.8)$$

terwijl in het punt P_i geldt:

$$r_i(r q_i) = R(r q_i) \quad (4.9)$$

Stel $q > r q_i$, dan kan q worden geschreven als:

$$q = r q_i + \sum_j \delta_j \quad \text{met } \delta_j \text{ voldoende kleine, positieve constanten} \quad (4.10)$$

Door gebruik te maken van enige stellingen uit de differentiaalrekening kan $R(q)$ worden geschreven als:

$$R(q) = R(rq_i + \sum_j \delta_j) = R(rq_i) + R'(rq_i) \cdot \delta_1 + R'(rq_i + \delta_1) \cdot \delta_2 + \dots \quad (4.11)$$

Omdat $\delta_j > 0$ geldt volgens vergelijking (4.6): $R'(rq_i) > R'(rq_i + \delta_j)$. Gecombineerd met de vergelijkingen (4.8), (4.10) en (4.11) geeft dit:

$$R(q) < R(rq_i) + \sum_j \delta_j R'(rq_i) = R(rq_i) + (q - rq_i) \cdot R'(rq_i) = r_i(q) \quad (4.12)$$

Op analoge wijze kan voor $rq_0 \leq q < rq_i$, gebruikmakend van de transformatie $q = rq_i - \sum_j \delta_j$, worden bewezen:

$$R(q) < R(rq_i) - \sum_j \delta_j R'(rq_i) = R(rq_i) - (rq_i - q) R'(rq_i) = r_i(q) \quad (4.13)$$

Uit de vergelijkingen (4.9), (4.12) en (4.13) volgt:

$$r_i(q) - R(q) \geq 0 \quad q, rq_i \geq rq_0 \quad \text{QED} \quad (4.7)$$

Tot besluit van deze (sub) paragraaf worden een aantal hulpvariabelen gedefinieerd die in de volgende subparagrafen veelvuldig gebruikt zullen worden:

$$z = \left(\frac{q}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.14)$$

$$z_i = \left(\frac{rq_i}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.15)$$

$$\alpha = (td + 2tv) \quad (4.16)$$

Substitutie van (4.14) en (4.16) in (2.11) en in (4.2) geeft, voor $q \geq rq_i$:

$$R(q) = (z + \alpha)^2 \quad z \geq z_1 \quad (4.17)$$

$$\text{en } R'(q) = \frac{1}{d} \left(1 + \frac{\alpha}{z}\right) \quad z \geq z_1 \quad (4.18)$$

Uit (4.18) kan worden afgeleid:

$$\frac{\alpha}{z} = dR'(q) - 1 \quad z \geq z_1 \quad (4.19)$$

Substitutie van (4.14), (4.15), (4.16), (4.17) en (4.18) in (4.8) geeft voor de raaklijn in P_i aan $R(q)$:

$$r_i(q) = (z_i + \alpha)^2 + \frac{1}{z_i} (z_i + \alpha) (z^2 - z_i^2) \quad z_i \geq z_1 \quad (4.20)$$

Hierbij is gebruik gemaakt van:

$$\frac{1}{d}(q - rq_i) = \frac{1}{d}q - \frac{1}{3}t^2d^2 - \left(\frac{1}{d}rq_i - \frac{1}{3}t^2d^2\right) = z^2 - z_i^2$$

4.3. Het bewijs dat $RS(q)$ bestaat uit raaklijnen aan $R(q)$

Aan de hand van de volgende stellingen wordt aangetoond dat bij de in par. 2 genoemde uitgangspunten de benadering $RS(q)$ is opgebouwd uit lijnstukken die raken aan $R(q)$.

Stelling 4.1: Stel $F(x)$ is een continue functie met continue eerste en tweede afgeleiden waarbij $F'(x) > 0$ en $F''(x) < 0$.
 Stel $r_1(x)$ is de raaklijn in het punt $P_1 = (x_1, F(x_1))$ aan $F(x)$ en $s_1(x)$ is een lijn die $F(x)$ in het punt P_1 snijdt en waarvoor geldt $s_1(x) > F(x)$ voor $x > x_1$.
 Dan geldt:

$$\int_{x_1}^b \{s_1(x) - r_1(x)\} dx > 0 \quad \forall b > x_1 \quad (4.21)$$

Dit is weergegeven in fig. 4.2..

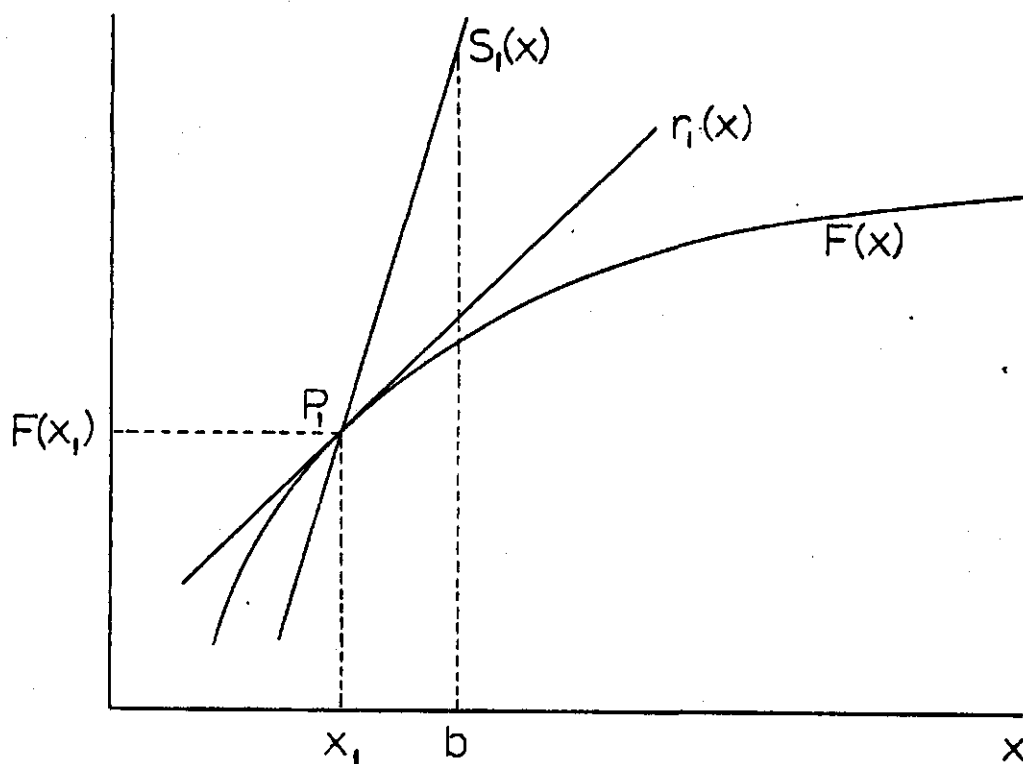


Fig. 4.2. Illustratie stelling 4.1

Bewijs:

Voor de snijlijn in het punt P_1 geldt:

$$s_1(x) = F(x_1) + c_1(x - x_1) \quad , \quad c_1 > F'(x_1) \quad (4.22)$$

Dat $c_1 > F'(x_1)$ is als volgt in te zien:

- substitutie van $c_1 = F'(x_1)$ in vergelijking (4.22) geeft

$$s_1(x) = F(x_1) + F'(x_1) \cdot (x - x_1) = r_1(x),$$

dit is de raaklijn in P_1 aan $R(x)$;

- substitutie van een $c_1 < F'(x_1)$ in vergelijking (4.22) geeft, als

$|x - x_1|$ voldoende klein is,

$$s_1(x) = F(x_1) + c_1(x - x_1) < F(x_1) + F'(x_1) \cdot (x - x_1) = F(x), \quad x > x_1.$$

Dit is niet toegestaan omdat moet gelden $s_1(x) > F(x)$ als $x > x_1$.

Dus $c_1 > F'(x_1)$.

Stel nu $c_1 = F'(x_1) + \epsilon^2$, dan kan vergelijking (4.21) worden geschreven als:

$$\int_{x_1}^b \{s_1(x) - r_1(x)\} dx = \int_{x_1}^b \epsilon^2(x - x_1) dx = \frac{1}{2} \epsilon^2(b - x_1)^2 > 0 \quad \text{QED} \quad (4.23)$$

Stelling 4.2: Stel $F(x)$ is een continue functie met continue eerste en tweede afgeleiden waarbij $F'(x) > 0$ en $F''(x) < 0$. Stel $r_2(x)$ is de raaklijn in het punt $P_2 = (x_2, F(x_2))$ aan $F(x)$ en $s_2(x)$ is een lijn die $F(x)$ in P_2 snijdt en waarvoor geldt $s_2(x) > F(x)$ voor $x < x_2$. Dan geldt:

$$\int_a^{x_2} \{s_2(x) - r_2(x)\} dx > 0 \quad \forall a < x_2 \quad (4.24)$$

Dit is weergegeven in fig. 4.3.

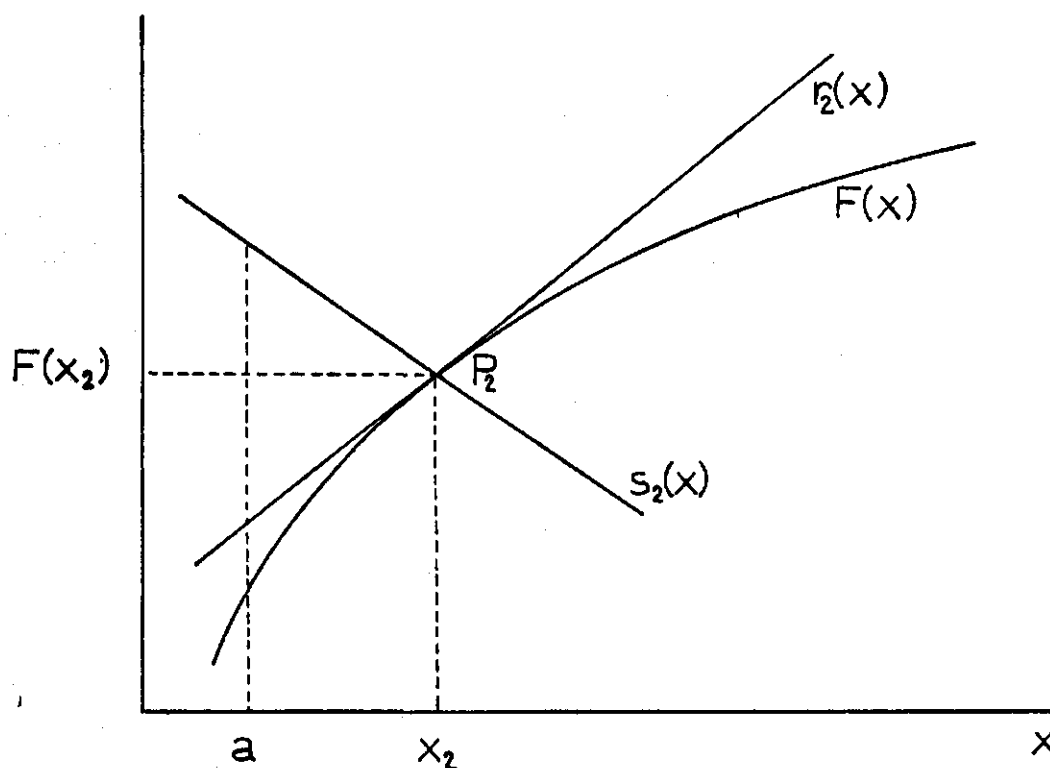


Fig. 4.3. Illustratie stelling 4.2

Bewijs:

Analoog aan het bewijs van stelling 4.1 kan worden aangetoond dat moet gelden:

$$s_2(x) = F(x_2) + c_2(x - x_2) \quad , \quad c_2 < F'(x_2) \quad (4.25)$$

Substitutie van $c_2 = F'(x_2) - \epsilon^2$ in (4.24) geeft vervolgens:

$$\int_a^{x_2} \{s_2(x) - r_2(x)\} dx = \int_a^{x_2} -\epsilon^2(x - x_2) dx = \frac{1}{2} \epsilon^2 (a - x_2)^2 > 0 \quad \text{QED}$$

(4.26)

Stelling 4.3: Stel $F(x)$ is een continue functie met continue eerste en tweede afgeleiden waarbij $F'(x) > 0$ en $F''(x) < 0$. Stel $r_1(x)$ en $r_2(x)$ zijn raaklijnen in respectievelijk $P_1 = (x_1, F(x_1))$ en $P_2 = (x_2, F(x_2))$ aan $F(x)$, waarbij $x_1 < x_2$. Stel $s_1(x)$ en $s_2(x)$ zijn lijnen die $F(x)$ in respectievelijk P_1 en P_2 snijden terwijl geldt $s_1(x) > F(x)$ als $x > x_1$ en $s_2(x) > F(x)$ als $x < x_2$. Als de raaklijnen elkaar snijden in het punt $K = (kx, r_1(kx))$ en de snijdende lijnen $s_1(x)$ en $s_2(x)$ elkaar snijden in het punt $S = (sx, s_1(sx))$, dan geldt:

$$V = \int_{x_1}^{sx} s_1(x) dx + \int_{sx}^{x_2} s_2(x) dx - \int_{x_1}^{kx} r_1(x) dx - \int_{kx}^{x_2} r_2(x) dx > 0$$

(4.27)

Dit is weergegeven in fig. 4.4.

Bewijs:

Uit het bewijs van de stellingen 4.1 en 4.2 blijkt dat de lijnen als volgt kunnen worden weergegeven:

$$r_1(x) = F(x_1) + F'(x_1)\{x - x_1\} \quad (4.28)$$

$$r_2(x) = F(x_2) + F'(x_2)\{x - x_2\} \quad (4.29)$$

$$s_1(x) = F(x_1) + \{F'(x_1) + \epsilon^2\}\{x - x_1\} \quad (4.30)$$

$$s_2(x) = F(x_2) + \{F'(x_2) - \delta^2\}\{x - x_2\} \quad (4.31)$$

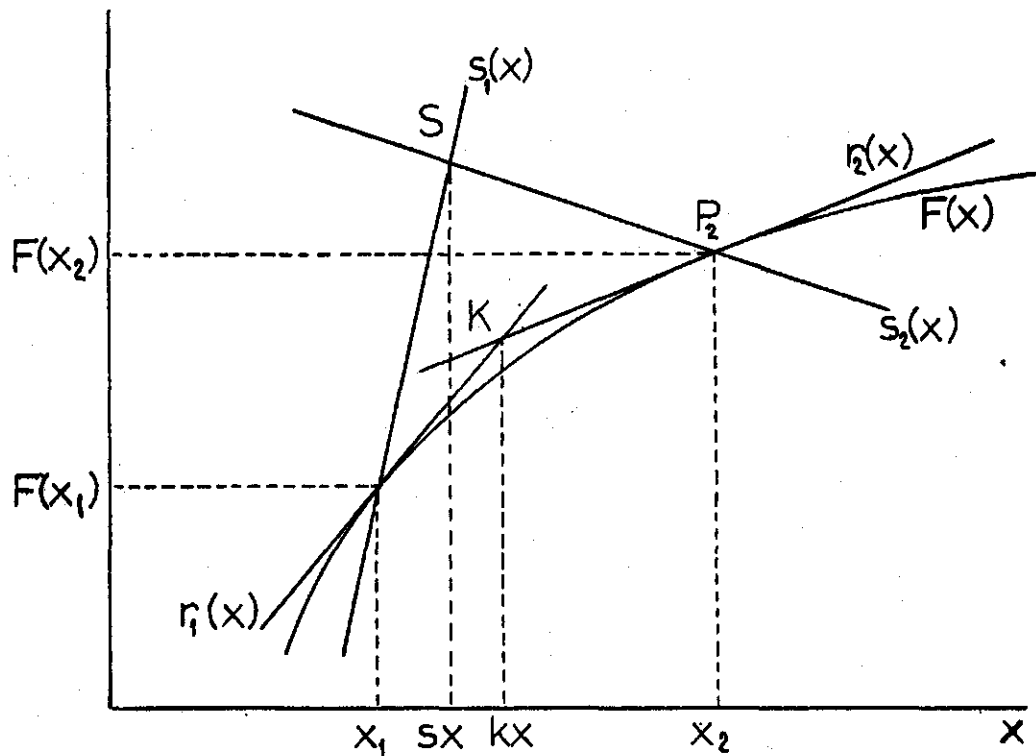


Fig. 4.4. Illustratie stelling 4.3

Door gelijkstellen van $r_1(x)$ en $r_2(x)$ en van $s_1(x)$ en $s_2(x)$ kunnen kx en sx worden bepaald. Dit geeft:

$$kx = \frac{F(x_2) - F(x_1) + x_1 F'(x_1) - x_2 F'(x_2)}{F'(x_1) - F'(x_2)} \quad (4.32)$$

en

$$sx = \frac{F(x_2) - F(x_1) + x_1 F'(x_1) - x_2 F'(x_2) + x_1 \epsilon^2 + x_2 \delta^2}{F'(x_1) - F'(x_2) + \epsilon^2 + \delta^2} \quad (4.33)$$

Substitutie van (4.28) - (4.31) in (4.27) geeft na integreren:

$$\begin{aligned} V = & F(x_1) \cdot (sx - x_1) + \frac{1}{2} \{F'(x_1) + \epsilon^2\} (sx - x_1)^2 - F(x_2) \cdot (sx - x_2) - \frac{1}{2} \\ & - \frac{1}{2} \{F'(x_2) - \delta^2\} (sx - x_2)^2 - F(x_1) \cdot (kx - x_1) - \frac{1}{2} F'(x_2) (kx - x_1)^2 + \\ & + F(x_2) \cdot (kx - x_2) + \frac{1}{2} F'(x_2) (kx - x_2)^2 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Dit kan worden herleid tot:

$$V = (sx - kx)\{F(x_1) - F(x_2) - x_1F'(x_1) + x_2F'(x_2)\} + \\ + \frac{1}{2}(sx^2 - kx^2)\{F'(x_1) - F'(x_2)\} + \frac{1}{2}\epsilon^2(sx - x_1)^2 + \frac{1}{2}\delta^2(sx - x_2)^2 \quad (4.35)$$

Uit vergelijking (4.32) kan worden afgeleid:

$$kx\{F'(x_1) - F'(x_2)\} = F(x_2) - F(x_1) - x_2F'(x_2) + x_1F'(x_1) \quad (4.36)$$

Combineren van de vergelijkingen (4.35) en (4.36) geeft:

$$V = (sx - kx)(-kx)\{F'(x_1) - F'(x_2)\} + \frac{1}{2}(sx^2 - kx^2)\{F'(x_1) - F'(x_2)\} + \\ + \frac{1}{2}\epsilon^2(sx - x_1)^2 + \frac{1}{2}\delta^2(sx - x_2)^2 \quad (4.37)$$

Volgens (4.6) geldt voor een steeds langzamer toenemende functie $F(x)$:

$$F'(x_1) > F'(x_2) \quad x_1 < x_2 \quad (4.38)$$

Uit (4.37) en (4.38) is af te leiden

$$V = \frac{1}{2}\{F'(x_1) - F'(x_2)\}(sx - kx)^2 + \frac{1}{2}\epsilon^2(sx - x_1)^2 + \\ + \frac{1}{2}\delta^2(sx - x_2)^2 > 0 \quad \text{QED (4.39)}$$

Uit de stellingen 4.1 tot en met 4.3 blijkt dat een benadering van $R(q)$ door middel van raaklijnen altijd beter (zie par. 4.1) is dan een benadering door middel van $R(q)$ snijdende lijnen. Dit geldt zowel voor een open als voor een gesloten interval.

4.4. De bepaling van de knikpunten als $RS(q) - R(q) \leq \Delta$

In deze paragraaf wordt de waarde van q bepaald waarvoor geldt dat $r_i(q) - R(q) = \Delta$. Hierbij is $r_i(q)$ de raaklijn in het punt P_i met $P_i = (rq_i, R(rq_i))$ aan $R(q)$ voor $i \geq 1$. Tevens wordt aangetoond dat het verschil $\{r_i(q) - R(q)\}$ toeneemt naarmate $|q - rq_i|$ toeneemt.

In fig. 4.5 is een en ander weergegeven:

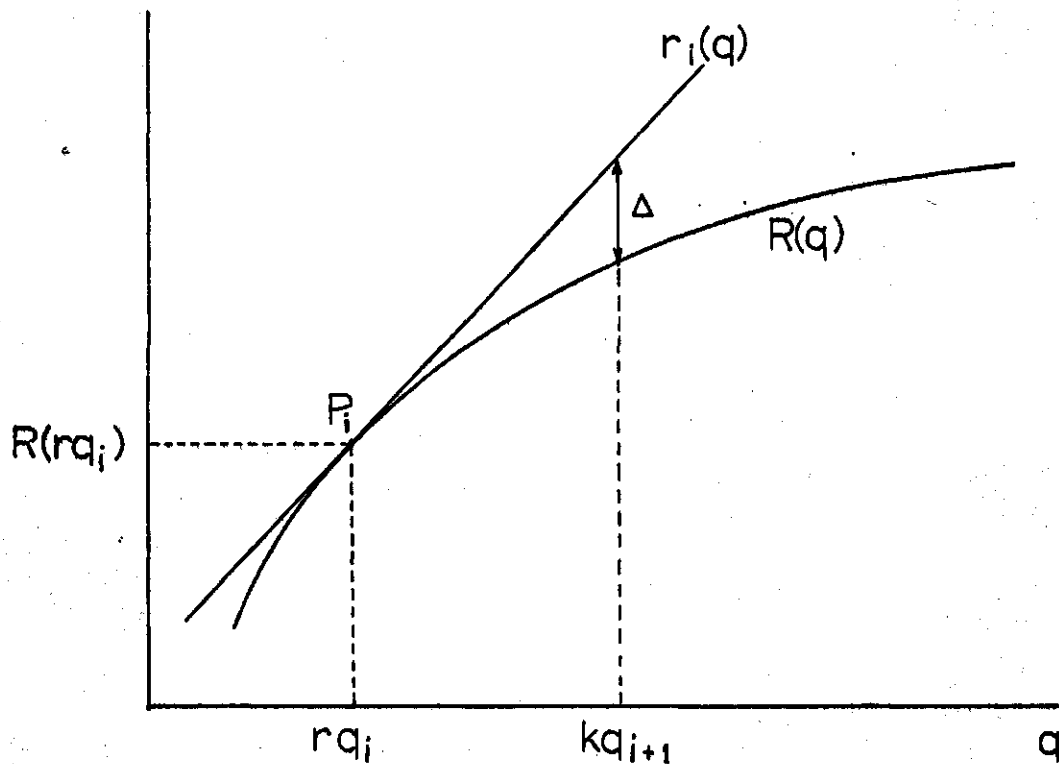


Fig. 4.5. Illustratie $r_i(q) - R(q) = \Delta$

Stelling 4.4: Stel $R(q)$ is weergegeven in vergelijking (2.11) en $r_i(q)$, met $i = 1, 2, \dots$, is weergegeven in vergelijking (4.8). Dan geldt dat het verschil $V_i(q) = r_i(q) - R(q)$, toeneemt naarmate $|q - r_{q_i}|$ toeneemt.

Bewijs:

De stelling is bewezen als geldt:

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(q)}{dq} &> 0 && \text{als } q > r_{q_i} \\ &< 0 && \text{als } q < r_{q_i} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Substitutie van (4.8) in $V_i = r_i(q) - R(q)$ geeft:

$$V_i(q) = R(r_{q_i}) + R'(r_{q_i})\{q - r_{q_i}\} - R(q) \quad (4.41)$$

Differentiëren naar q geeft:

$$\frac{dV_i(q)}{dq} = R'(rq_i) - R'(q) \quad (4.42)$$

uit vergelijking (4.6) blijkt dat $R'(q_1) - R'(q_2) > 0$ als $q_2 > q_1$.
Combineren van deze relatie met vergelijking (4.42) geeft (4.40).

QED

Stelling 4.5: Stel $R(q)$ is weergegeven in vergelijking (2.11) en de raaklijn $r_i(q)$, met $i = 1, 2, \dots$, in $P_i = (rq_i, R(rq_i))$ aan $R(q)$ is weergegeven in vergelijking (4.8). Dan is de waarde kq_{i+1} waarvoor geldt dat het verschil $V_i(kq_{i+1}) = r_i(kq_{i+1}) - R(kq_{i+1}) = \Delta > 0$ en $kq_{i+1} > rq_i$, bepaald door vergelijking (4.43)

$$kq_{i+1} = \frac{1}{3} t^2 d^3 + d \left\{ \left(\frac{\Delta}{dR'(rq_i) - 1} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{rq_i}{d} - \frac{1}{2} t^2 d^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad i = 1, 2, \dots; \Delta > 0 \quad (4.43)$$

Bewijs:

Volgens (4.17) en (4.20) zijn $R(q)$ en $r_i(q)$ als volgt te schrijven:

$$R(q) = (z + \alpha)^2 \quad (4.17)$$

en

$$r_i(q) = (z_i + \alpha)^2 + \frac{1}{z_i}(z_i + \alpha)(z^2 - z_i^2) \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.20)$$

Dit geeft voor het verschil $\{r_i(q) - R(q)\}$:

$$V_i(q) = (z_i + \alpha)^2 + \frac{1}{z_i}(z_i + \alpha)(z^2 - z_i^2) - (z + \alpha)^2 \quad (4.44)$$

Ontbinden in factoren en gelijkstellen van het verschil aan Δ geeft:

$$\Delta = (z_i - z)(z_i + z + 2\alpha) - (z_i - z)(z_i + z) \left(\frac{z_i + \alpha}{z} \right) \quad (4.45)$$

Dit kan worden herleid tot:

$$(z - z_i)^2 = \frac{\Delta z_i}{\alpha} \quad (4.46)$$

Omdat moet gelden $kq_{i+1} > rq_i$, is slechts de waarde van $z > z_i$ van belang. Dat wil zeggen:

$$z = z_i + \left(\frac{\Delta z_i}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.47)$$

Substitutie van (4.14), (4.15) en (4.19) in (4.47) en kwadrateren geeft:

$$\frac{kq_{i+1}}{d} - \frac{1}{3} t_d^2 = \left\{ \left(\frac{rq_i}{d} - \frac{1}{3} t_d^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\Delta}{dR'(rq_i) - 1}\right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2 \quad \text{QED} \quad (4.48)$$

4.5. De bepaling van de knikpunten als $\{RS(q) - R(q)\}/R(q) \leq \rho$

In deze paragraaf wordt de waarde van q bepaald waarvoor geldt dat $\{r_i(q) - R(q)\}/R(q) = \rho$. Hierbij is $r_i(q)$ de raaklijn in het punt P_i met $P_i = (rq_i, R(rq_i))$ aan $R(q)$ voor $i \geq 1$. Tevens wordt aangetoond dat het relatieve verschil $\{r_i(q) - R(q)\}/R(q)$ toeneemt naarmate $|q - rq_i|$ toeneemt. In fig. 4.6 is één en ander weergegeven.

Stelling 4.6: Stel $R(q)$ is weergegeven in vergelijking (2.11) en de raaklijn $r_i(q)$ in $P_i = (rq_i, R(rq_i))$, met $i = 1, 2, \dots$, is weergegeven in vergelijking (4.8). Dan geldt dat het relatieve verschil $RV_i(q) = \{r_i(q) - R(q)\}/R(q)$ toeneemt naarmate $|q - rq_i|$ toeneemt, waarbij $q \geq rq_0$. Voor $q > rq_i$ geldt dat RV_i asymptotisch nadert tot $\bar{\rho} = dR'(rq_i) - 1$.

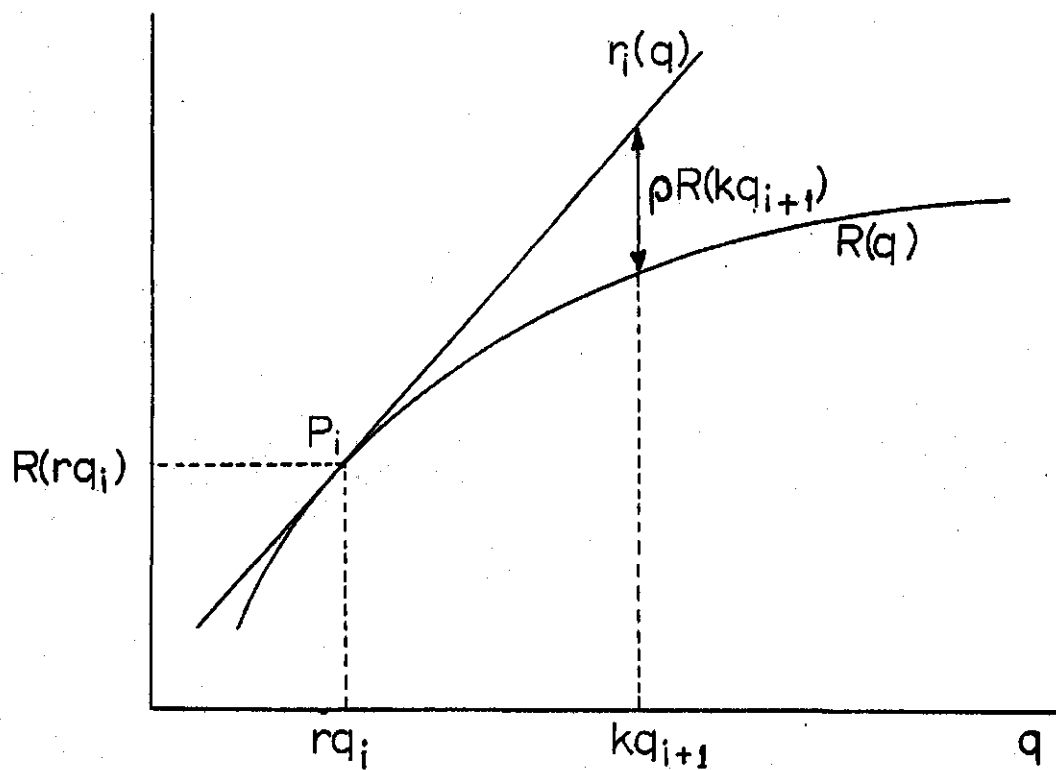


Fig. 4.6. Illustratie $\frac{r_i(q) - R(q)}{R(q)} = \rho$

Bewijs:

Het eerste gedeelte van de stelling is bewezen als geldt:

$$\begin{aligned} \frac{dRV_i(q)}{dq} &< 0 & rq_0 \leq q < rq_i & & (4.49) \\ &> 0 & q > rq_i & & \end{aligned}$$

Substitutie van vergelijking (4.8) in RV_i en gebruik maken van (4.41) geeft:

$$RV_i(q) = \frac{R(rq_i) + R'(rq_i)\{q - rq_i\} - R(q)}{R(q)} = \frac{V_i(q)}{R(q)} \quad (4.50)$$

Analoog aan (4.46) kan worden afgeleid:

$$RV_i(q) = \frac{\alpha}{z_i} \cdot \frac{(z - z_i)^2}{(z + \alpha)^2} \quad (4.51)$$

Substitutie van (4.14), (4.15) en (4.16) in (4.51) geeft:

$$RV_i(q) = \frac{td + 2tv}{\left(\frac{rq_i}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\left\{\left(\frac{q}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{rq_i}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2}{\left\{\left(\frac{q}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2\right)^{\frac{1}{2}} + td + 2tv\right\}^2} \quad (4.52)$$

Differentiëren van (4.52) naar q geeft, na rangschikken:

$$\frac{dRV_i(q)}{dq} = \frac{(td + 2tv) \cdot \left(\frac{q}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{\left(\frac{q}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{rq_i}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}}{\left\{\left(\frac{q}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2\right)^{\frac{1}{2}} + td + 2tv\right\}^3} \cdot \left\{\left(\frac{rq_i}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2\right)^{\frac{1}{2}} + td + 2tv\right\} \quad (4.53)$$

Het teken van $\frac{dRV_i(q)}{dq}$ wordt bepaald door het teken van $\left\{\left(\frac{q}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{rq_i}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$. Dit betekent dat (4.49) bewezen is. Voor $\bar{\rho}$ geldt, omdat $R(q)$ continu en toenemend,

$$\bar{\rho} = \lim_{q \rightarrow \infty} RV_i(q) = \frac{(td + 2tv)}{\left(\frac{rq_i}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\left\{\left(\frac{q}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{rq_i}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2}{\left\{\left(\frac{q}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2\right)^{\frac{1}{2}} + td + 2tv\right\}} \quad (4.54)$$

Substitutie van (4.15), (4.16) en (4.19) in (4.54) en bepaling van de limiet geeft:

$$\bar{\rho} = \{dR'(rq_1) - 1\} \cdot 1 \quad \text{QED} \quad (4.55)$$

Stelling 4.7: Stel $R(q)$ is weergegeven in vergelijking (2.11) en de raaklijn $r_i(q)$ in $P_i = (rq_i, R(rq_i))$, met $i = 1, 2, \dots$, aan $R(q)$ is weergegeven in vergelijking (4.8). Dan is

de waarde kq_{i+1} waarvoor geldt dat het relatieve verschil $RV_i(kq_{i+1}) = r_i(kq_{i+1}) - R(kq_{i+1}) = \rho$ met $0 < \rho < dR'(rq_i) - 1$ en waarvoor $kq_{i+1} > rq_i$, bepaald door vergelijking (4.56).

$$kq_{i+1} = \frac{1}{3} t^2 d^3 + d \left[\frac{\{R(rq_i) \cdot (dR'(rq_i) - 1) \cdot \rho\}^{\frac{1}{2}} + (1 + \rho)(td + 2tv)}{dR'(rq_i) - 1 - \rho} \right]^2 \quad (4.56)$$

Bewijs:

Uit vergelijking (4.51) blijkt dat moet gelden:

$$RV_i(q) = \frac{\alpha}{z_i} \frac{(z - z_i)^2}{(z + \alpha)^2} = \rho \quad (4.51)$$

Hieruit kan $z > z_i$ worden berekend als:

$$z = \frac{z_i + \alpha \left(\rho \cdot \frac{z_i}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \left(\rho \cdot \frac{z_i}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{z_i + \alpha - \alpha \left\{1 - \left(\rho \cdot \frac{z_i}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}}{1 - \left(\rho \cdot \frac{z_i}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.57)$$

Vermenigvuldigen van teller en noemer van (4.57) met

$$\left(\frac{\alpha}{z_i}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(\frac{\alpha}{z_i}\right)^{\frac{1}{2}} + \rho^{\frac{1}{2}} \right\} \text{ geeft:}$$

$$z = \frac{\left\{ \left(\frac{\alpha}{z_i}\right)^{\frac{1}{2}} + \rho^{\frac{1}{2}} \right\} \left\{ \left(\frac{\alpha}{z_i}\right)^{\frac{1}{2}} (z_i + \alpha) - \alpha \left(\left(\frac{\alpha}{z_i}\right)^{\frac{1}{2}} - \rho^{\frac{1}{2}} \right) \right\}}{\frac{\alpha}{z_i} - \rho} \quad (4.58)$$

Samenvoegen van termen geeft:

$$z = \frac{(z_i + \alpha) \left(\frac{\alpha}{z_i}\right)^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} + \alpha(1 + \rho)}{\frac{\alpha}{z_i} - \rho} \quad (4.59)$$

Substitutie van de vergelijkingen (4.17), (4.16), (4.19) en (4.14) in vergelijking (4.59) geeft:

$$\left(\frac{kq_{i+1}}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\{R(rq_i)(dR'(rq_i) - 1) \cdot \rho\}^{\frac{1}{2}} + (td + 2tv)(1 + \rho)}{dR'(rq_i) - 1 - \rho} \quad (4.60)$$

en kwadrateren geeft vergelijking (4.56) QED

4.6. De bepaling van het raakpunt van een raaklijn aan $R(q)$

In deze paragraaf wordt het raakpunt P_{i+1} van de raaklijn uit K_{i+1} aan $R(q)$ bepaald, waarbij geldt dat K_{i+1} ligt op de raaklijn $r_i(q)$ in $P_i = (rq_i, R(rq_i))$ aan q . Dit is weergegeven in fig. 4.7.

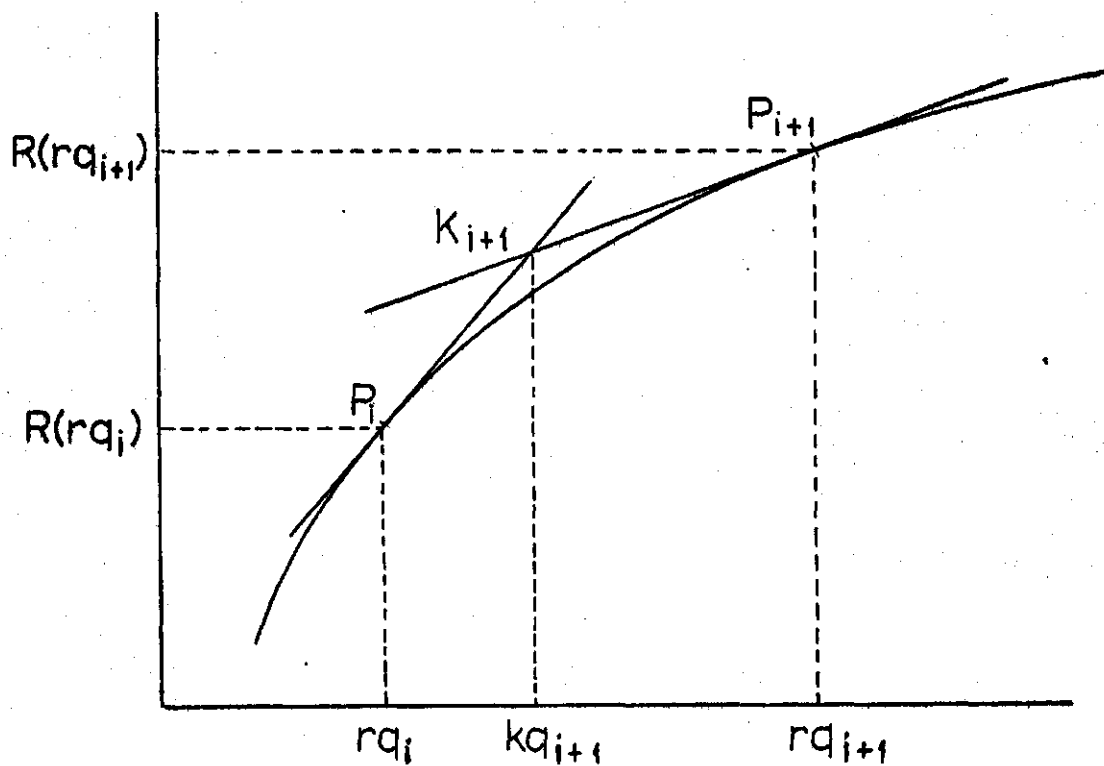


Fig. 4.7. Illustratie stelling 4.8

Stelling 4.8: Stel $R(q)$ is bepaald door vergelijking (2.11), $r_i(q)$ is de raaklijn in het punt $P_i = (rq_i, R(rq_i))$ aan $R(q)$, met $i = 1, 2, \dots$, en $K_{i+1} = (kq_{i+1}, r_i(kq_{i+1}))$ met $kq_{i+1} > rq_i$ is een punt op $r_i(q)$. Dan geldt dat de raaklijn $r_{i+1}(q)$ door K_{i+1} aan $R(q)$, die niet samenvalt met $r_i(q)$, $R(q)$ raakt in het punt $P_{i+1} = (rq_{i+1}, R(rq_{i+1}))$, met:

$$rq_{i+1} = \frac{1}{3} t_d^2 d^3 + d \cdot \left(\frac{kq_{i+1}}{d} - \frac{1}{3} t_d^2 d^3 \right)^2 / \left(\frac{rq_i}{d} - \frac{1}{3} t_d^2 d^2 \right) > rq_i \quad (4.61)$$

Bewijs:

Vergelijking (4.8) geeft voor de raaklijnen $r_i(q)$ en $r_{i+1}(q)$:

$$r_i(q) = R(rq_i) + R'(rq_i)\{q - rq_i\} \quad (4.62)$$

en

$$r_{i+1}(q) = R(rq_{i+1}) + R'(rq_{i+1})\{q - rq_{i+1}\} \quad (4.63)$$

In het snijpunt K_{i+1} van $r_i(q)$ en $r_{i+1}(q)$ geldt:

$$R(rq_i) + R'(rq_i)\{kq_{i+1} - rq_i\} = R(rq_{i+1}) + R'(rq_{i+1})\{kq_{i+1} - rq_{i+1}\} \quad (4.64)$$

Definieer:

$$zk_{i+1} = \left(\frac{kq_{i+1}}{d} - \frac{1}{3} t_d^2 d^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.65)$$

en substitueer de vergelijkingen (4.15), (4.17), (4.18) en (4.65) in vergelijking (4.64). Dit geeft:

$$\begin{aligned} (z_i + \alpha)^2 + \frac{1}{z_i}(z_i + \alpha)(zk_{i+1}^2 - z_i^2) &= \\ = (z_{i+1} + \alpha)^2 + \frac{1}{z_{i+1}}(z_{i+1} + \alpha)(zk_{i+1}^2 - z_{i+1}^2) & \quad (4.66) \end{aligned}$$

Dit kan worden herleid tot:

$$\frac{\alpha}{z_i} z_{i+1}^2 + \alpha z_i = \frac{\alpha}{z_{i+1}} \cdot z_{i+1}^2 + \alpha z_{i+1} \quad (4.67)$$

of

$$z_{i+1} - z_i = z_{i+1}^2 \cdot \frac{z_{i+1} - z_i}{z_{i+1} \cdot z_i} \quad (4.68)$$

Omdat $z_{i+1} \neq z_i$ kan hieruit worden afgeleid:

$$z_{i+1} = \frac{z_{i+1}^2}{z_i} \quad (4.69)$$

Substitutie van (4.15) en (4.64) in (4.69) geeft:

$$\left(-\frac{r_{q_{i+1}}}{d} - \frac{1}{3} t^{2d^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(-\frac{k_{q_{i+1}}}{d} - \frac{1}{3} t^{2d^2}\right) / \left(-\frac{r_{q_i}}{d} - \frac{1}{3} t^{2d^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.70)$$

kwadrateren geeft vergelijking (4.61)

QED

5. DE BENADERING VAN $R(q)$

5.1. Inleiding

In par. 2 zijn de volgende uitgangspunten voor de benadering van $R(q)$ genoemd:

- de benadering moet continu zijn;
- de benadering moet groter dan of gelijk aan de werkelijke waarde zijn;
- de som van de afwijkingen moet minimaal zijn;
- de benadering moet plaatsvinden door een minimaal aantal lijnstukken waarbij nauwkeurigheidscriteria als randvoorwaarden fungeren,

Waar het de nauwkeurigheidscriteria betreft wordt met betrekking tot de putproduktie* onderscheid gemaakt tussen het interval $[rq_0, rq_1]$ en het interval $[rq_1, \infty)$, rq_1 is de putproduktie waarbij de vorm van de winput van een piramide in een afgeknotte piramide verandert. In par. 2 is afgeleid dat geldt:

$$rq_1 = \frac{4}{3} t^2 d^3 \quad (2.10)$$

De benadering wordt voor de beide intervallen afzonderlijk beschreven.

5.2. De benadering op het interval $[rq_0, rq_1]$

Naast de in par. 5.1 genoemde voorwaarden moet de benadering van $R(q)$ op het interval $[rq_0, rq_1]$ aan de volgende voorwaarden voldoen:

- de benadering moet plaatsvinden door twee lijnstukken;
- in de eindpunten van het interval moet de benadering $RS(q)$ gelijk zijn aan $R(q)$.

In par. 4.3 is aangetoond dat de benadering onder de gestelde voorwaarden bestaat uit de raaklijnen in P_0 en P_1 aan $R(q)$. Hierbij is P_0 het punt $(rq_0, R(rq_0))$ en P_1 het punt $(rq_1, R(rq_1))$. In fig. 5.1 is de benadering weergegeven.

De raaklijnen worden weergegeven in de vergelijkingen (5.1) en (5.2):

$$r_0(q) = R(rq_0) + R'(rq_0)\{q - rq_0\} \quad (5.1)$$

$$\text{en } r_1(q) = R(rq_1) + R'(rq_1)\{q - rq_1\} \quad (5.2)$$

In het snijpunt, K_1 , van de raaklijnen geldt dat $r_0(q) = r_1(q)$. De hoeveelheid kq_1 , waarvoor dit het geval is kan worden gevonden door gelijkstellen van (5.1) aan (5.2). Dit geeft:

* rq_0 is de minimale putproduktie als de winput in produktie wordt genomen

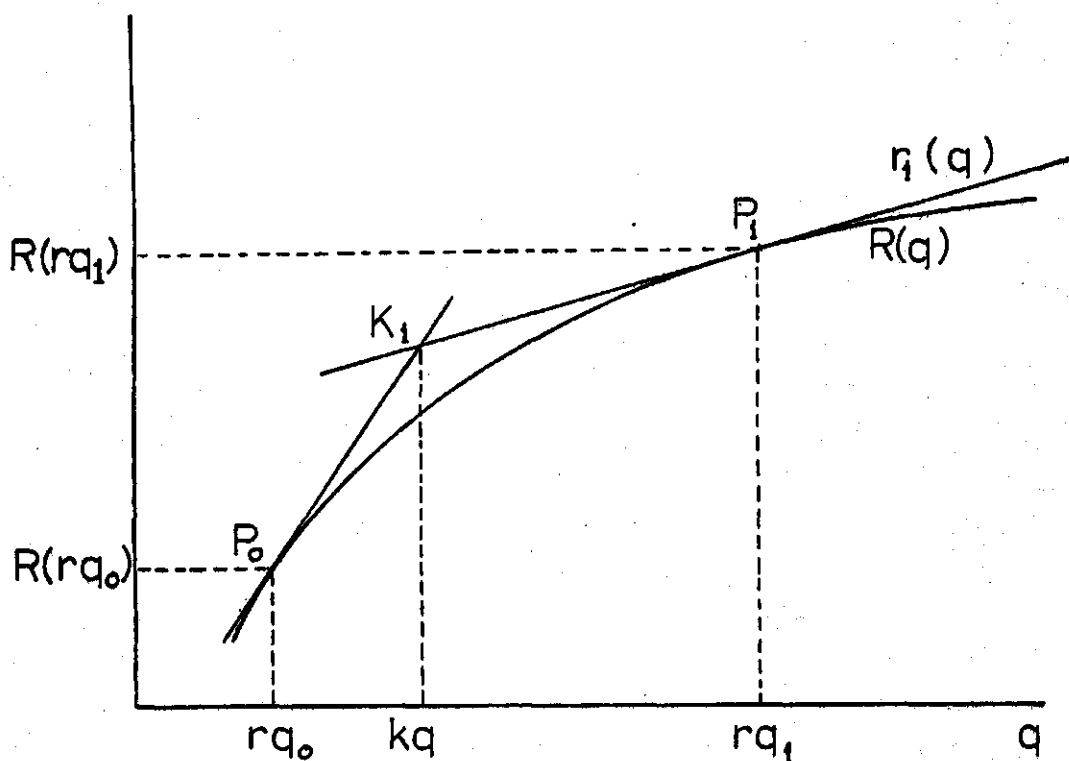


Fig. 5.1. De benadering op $[rq_0, rq_1]$

$$kq_1 = \frac{R(rq_1) - R(rq_0) + rq_0 \cdot R'(rq_0) - rq_1 \cdot R'(rq_1)}{R'(rq_0) - R'(rq_1)} \quad (5.3)$$

Gebruikmakend van de beschreven relaties kan de benadering op het interval $[rq_0, rq_1]$ worden geschreven als:

$$\begin{aligned} RS(q) &= R(rq_0) + R'(rq_0)\{q - rq_0\} & rq_0 \leq q \leq kq_1 \\ &= R(rq_1) + R'(rq_1)\{q - rq_1\} & kq_1 \leq q \leq rq_1 \end{aligned} \quad (5.4)$$

5.3. De benadering op het interval $[rq_1, \infty)$

De benadering op het interval $[rq_1, \infty)$ wordt bepaald door het gehanteerde nauwkeurigheidscriterium. Er zijn twee criteria gedefinieerd, te weten:

1. de afwijking $\{RS(q) - R(q)\}$ mag niet groter zijn dan Δ , ofwel

$$\{RS(q) - R(q)\} \leq \Delta \quad \Delta > 0 \quad (5.5)$$

2. de relatieve afwijking $\frac{RS(q) - R(q)}{R(q)}$ mag niet groter zijn* dan ρ .

Dat wil zeggen:

$$\frac{RS(q) - R(q)}{R(q)} \leq \rho \quad 0 < \rho < dR'(q_i) - 1 \quad (5.6)$$

Zowel voor Δ als voor ρ geldt dat ze voor ieder interval $[rq_i, rq_{i+1}]$ een andere waarde mogen hebben (b.v. afhankelijk van de putproduktie).

De benadering $RS(q)$ bestaat (vgl. par. 4.3) uit raaklijnen aan $R(q)$, waarbij de knikpunten K_{i+1} bepaald worden door het gehanteerde nauwkeurigheidscriterium. (In fig. 5.2 is de benadering voor het interval $[rq_i, rq_{i+1}]$ weergegeven). Eén van deze raaklijnen is de in vergelijking (5.2) gegeven lijn $r_1(q)$. Dit omdat:

- de benadering continu moet zijn. Dit betekent dat voor $q = q_1$ de benadering door het punt P_1 moet gaan. P_1 is het 'eindpunt' van de benadering op $[rq_0, rq_1]$;
- $R'(q)$ continu is voor $q = rq_1$. $r_1(q)$ is dus zowel op het interval $[rq_0, rq_1]$ als op het interval $[rq_1, \infty)$ de raaklijn in P_1 aan $R(q)$.

De rekenprocedure die gevolgd wordt bij de bepaling van $RS(q)$ is voor beide criteria gelijk. De procedure kan als volgt worden weergegeven:

STAP 0: Stel $i = 1$.

STAP 1: Ga uit van de raaklijn in het punt $P_i = (rq_i, R(rq_i))$ aan $R(q)$.

Bepaal het knikpunt K_{i+1} met** $kq_{i+1} > rq_i$ zodanig dat de afwijking gelijk is aan de maximaal toegestane afwijking. De maximaal toegestane afwijking komt overeen met het '='-teken in respectievelijk vergelijking (5.5) en vergelijking (5.6).

*volgens stelling 4.6 moet gelden dat

$$\rho < \{dR'(rq_i) - 1\} \text{ als } RS(q) = R(rq_i) + R'(rq_i)\{q - rq_i\}$$

**er moet gelden $kq_{i+1} > rq_i$ omdat de procedure de benadering bepaalt, uitgaande van rq_1 , voor toenemende waarden van q

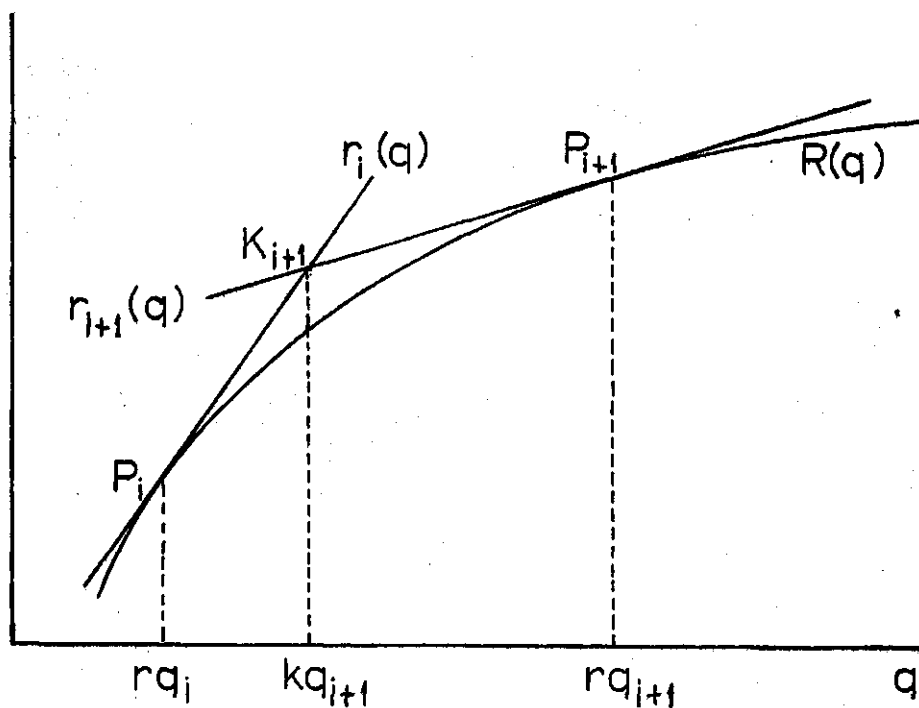


Fig. 5.2. De benadering op $[rq_i, rq_{i+1}]$

STAP 2: Bepaal het raakpunt $P(i+1) = (rq_{i+1}, R(rq_{i+1}))$ van de raaklijn door het punt K_{i+1} aan $R(q)$. Hierbij moet gelden $rq_{i+1} > kq_{i+1}$.

STAP 3: Hoog i op, dat wil zeggen $i = i + 1$, en ga terug naar STAP 1. Dit moet worden herhaald totdat een voldoende aantal lijnstukken is beschreven.

De procedure maakt gebruik van de eigenschap dat de afwijking $\{RS(q) - R(q)\}$ toeneemt naarmate q zich verder van het raakpunt verwijdert (stelling 4.4 en stelling 4.6).

Aan de hand van fig. 5.2 kan de procedure als volgt worden uitgelegd. Gegeven is de raaklijn $r_i(q)$ in het punt P_i aan $R(q)$. Op deze raaklijn wordt het punt (K_{i+1}) waarvoor geldt dat het verschil $\{r_i(q) - R(q)\}$ gelijk is aan het maximaal toelaatbare verschil, bepaald. Vervolgens wordt vanuit K_{i+1} de raaklijn aan $R(q)$ opgesteld. Hiermee wordt tevens het raakpunt P_{i+1} vastgelegd. De benadering op het interval $[rq_i, rq_{i+1}]$ is nu bepaald.

Voor de bepaling van de benadering op het interval $[rq_{i+1}, rq_{i+2}]$ wordt de procedure herhaald, uitgaande van P_{i+1} en $r_{i+1}(q)$.

Omdat de afleiding van de formules in par. 4 is beschreven kan worden volstaan met het geven van de resultaten. In par. 6 wordt een voorbeeld gegeven.

De benadering $RS(q)$ van $R(q)$ op het interval $[kq_i, kq_{i+1}]$ kan worden geschreven als:

$$RS(q) = R(rq_i) + R'(rq_i)\{q - rq_i\} \quad kq_i \leq q \leq kq_{i+1}; \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

waarbij:

$$rq_{i+1} = \frac{1}{3} t^2 d^3 + d \left(\frac{kq_{i+1}}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2 \right)^2 / \left(\frac{rq_i}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2 \right) \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.61)$$

$$kq_1 = \frac{R(rq_1) - R(rq_0) + rq_0 R'(rq_0) - rq_1 R'(rq_1)}{R'(rq_0) - R'(rq_1)} \quad (5.3)$$

kq_{i+1} , $i > 1$, is afhankelijk van het gehanteerde nauwkeurigheidscriterium.

Als het criterium $RS(q) - R(q) \leq \Delta$ gehanteerd wordt, dan geldt:

$$kq_{i+1} = \frac{1}{3} t^2 d^3 + d \left[\left(\frac{\Delta}{dR'(rq_i) - 1} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{rq_i}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \quad (4.43)$$

$$i = 1, 2, \dots; \quad \Delta > 0$$

en als het criterium $\{RS(q) - R(q)\}/R(q) \leq \rho$ gehanteerd wordt dan geldt:

$$kq_{i+1} = \frac{1}{3} t^2 d^3 + d \left[\frac{\{R(rq_i) \cdot (dR'(rq_i) - 1) \cdot \rho\}^{\frac{1}{2}} + (1 + \rho)(td + 2tv)}{dR'(rq_i) - 1 - \rho} \right]^2 \quad (4.56)$$

$$i = 1, 2, \dots; \quad \rho < dR'(rq_i) - 1$$

5.4. De benadering op het interval $[rq_0, \infty)$

Analoog aan de in (3.6) beschreven algemene gedaante van de spline functie kan $RS(q)$ worden geschreven als:

$$RS(q) = R(rq_0) + R'(rq_0) qx_0 + \sum_k \gamma_k qx_k \quad (5.8)$$

$$\text{waarbij: } qx_k = \max\{0, q - kq_k\} \quad k = 1, 2, \dots$$

$$qx_0 = \max\{0, q - rq_0\}$$

$$\gamma_k = R'(rq_k) - R'(rq_{k-1}) \quad k = 1, 2, \dots$$

$$rq_k = \frac{1}{3} t^2 d^3 + d \left\{ \frac{kq_k}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2 \right\}^2 / \left\{ \frac{rq_{k-1}}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2 \right\} \quad k = 2, 3, \dots$$

$$kq_k = \frac{1}{3} t^2 d^3 + d \left[\left(\frac{\Delta}{dR'(rq_{k-1}) - 1} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{rq_{k-1}}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2$$

$$k = 2, 3, \dots \quad \Delta > 0$$

$$kq_1 = \frac{R(rq_1) - R(rq_0) + rq_0 R'(rq_0) - rq_1 R'(rq_1)}{R'(rq_0) - R'(rq_1)}$$

$$kq_k = \frac{1}{3} t^2 d^3 + d \left[\frac{\left\{ R(rq_{k-1}) \cdot (dR'(rq_{k-1}) - 1) \cdot \rho \right\}^{\frac{1}{2}} + (1 + \rho)(td + 2tv)}{dR'(rq_{k-1}) - 1 - \rho} \right]^2$$

$$k = 2, 3, \dots; \quad 0 < \rho < dR'(rq_k) - 1$$

Er geldt dat $\gamma_k < 0$. Immers volgens vergelijking (4.6) geldt:

$$R'(rq_k) < R'(rq_{k-1}) \quad rq_k > rq_{k-1} \quad (4.6)$$

Dit geeft $\gamma_k = R'(rq_k) - R'(rq_{k-1}) < 0$.

De benadering $RS(q)$ is weergegeven in fig. 5.3.

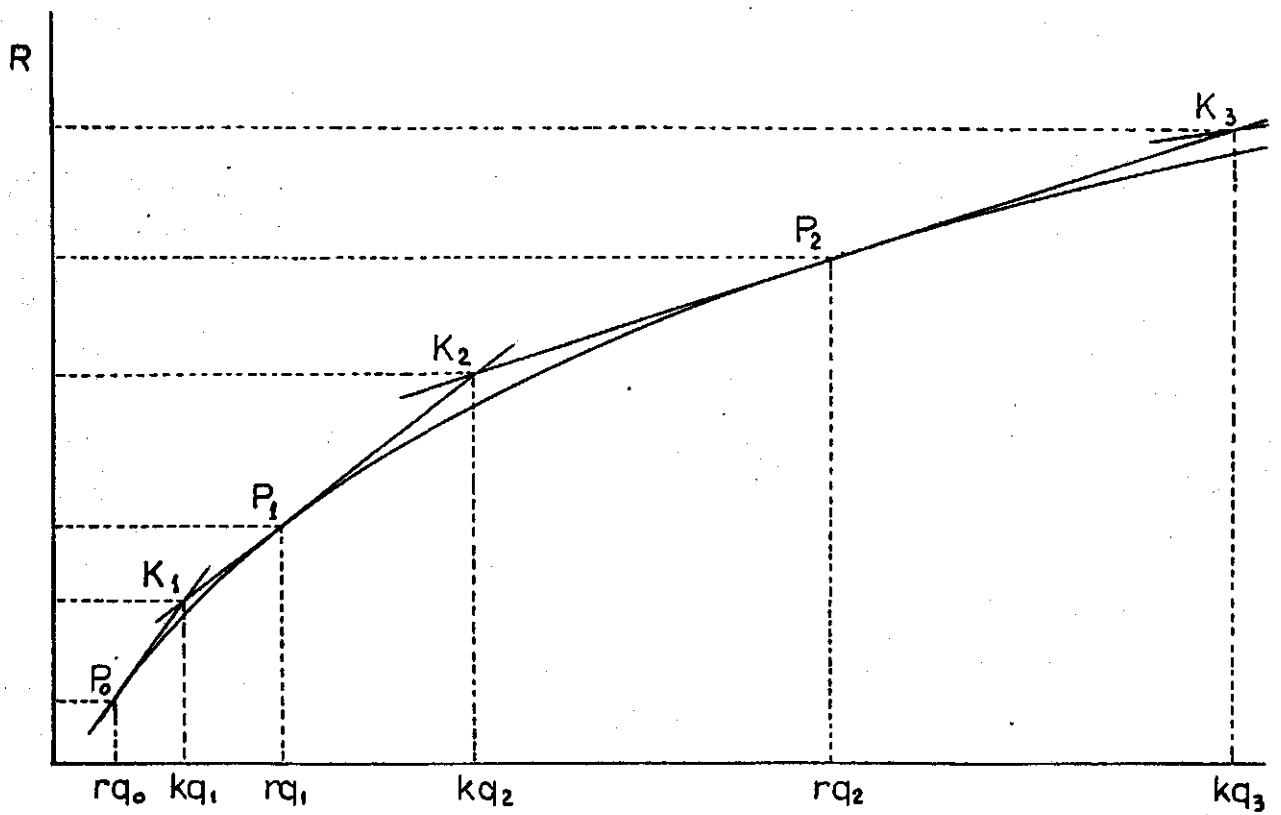


Fig. 5.3. De benadering $RS(q)$

6. SLOTOPMERKINGEN

Aan de hand van een voorbeeld worden enkele opmerkingen gemaakt. In het voorbeeld wordt uitgegaan van een zandwinput waarvan de dikte van de niet bruikbare bovenlaag gelijk is aan 3 meter ($v = 3$) en de dikte van de zandlaag 15 meter is ($d = 15$). Verder wordt uitgegaan van een talud van 1:4 ($t = 4$) en een minimale putproduktie van $30\ 000\ m^3$ ($rq_0 = 30\ 000$).

Dit geeft (gebruikmakend van de in par. 5 afgeleide vergelijkingen) voor het interval $[rq_0, rq_1]$:

$$R(q) = \{24 + (24q)^{\frac{1}{3}}\}^2$$

$$R'(q) = 16(24q)^{-\frac{2}{3}} \cdot \{24 + 24q\}^{\frac{1}{3}}$$

$$rq_1 = \frac{4}{3} t^2 d^3 = 72\ 000$$

$$kq_1 = \frac{R(rq_1) - R(rq_0) + rq_0 R'(rq_0) - rq_1 R'(rq_1)}{R'(rq_0) - R'(rq_1)} = 46\ 667$$

$$\text{en } RS(q) = 12\ 911 + 0,2263 qx_0 - 0,0663 qx_1 \quad (6.1)$$

waarbij:

$$qx_0 = \max\{0, q - rq_0\}$$

$$qx_1 = \max\{0, q - kq_1\}$$

Voor het interval $[rq_1, \infty)$ geeft dit:

$$R(q) = \left\{ \left(\frac{q}{15} - 1200 \right)^{\frac{1}{2}} + 84 \right\}^2 \quad q \geq rq_1$$

$$R'(q) = \frac{1}{15} \left\{ 1 + \frac{84}{\left(\frac{q}{15} - 1200 \right)^{\frac{1}{2}}} \right\} \quad q \geq rq_1$$

en gebruikmakend van vergelijking (5.8) en vergelijking (6.1):

$$RS(q) = 12\ 911 + 0,2263 qx_0 - 0,0663 qx_1 + \gamma_2 qx_2 + \gamma_3 qx_3 + \dots \quad (6.2)$$

waarbij:

$$qx_k = \max\{0, q - kq_k\} \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\gamma_k = R'(rq_k) - R'(rq_{k-1}) \quad k = 1, 2, \dots$$

$$rq_k = 18\ 000 + 15 \left\{ \left(\frac{kq_k}{15} - 1200 \right)^2 / \left(\frac{rq_{k-1}}{15} - 1200 \right) \right\} \quad k = 2, 3, \dots$$

en kq_k afhankelijk is van het gehanteerde nauwkeurigheidscriterium.

Uitgaande van het criterium $RS(q) - R(q) \leq \Delta$ geldt:

$$kq_k = 18\,000 + 15 \left[\left(\frac{\Delta}{15R'(rq_{k-1}) - 1} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{rq_{k-1}}{15} - 1200 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \quad k = 2, 3, \dots$$

en uitgaande van $\frac{RS(q) - R(q)}{\rho} \leq \rho$:

$$kq_k = 18\,000 + 15 \left[\frac{\{R(rq_{k-1}) \cdot (15R'(rq_{k-1}) - 1)\rho\}^{\frac{1}{2}} + 84(1 + \rho)}{15R'(rq_{k-1}) - 1 - \rho} \right]^2$$

Voor verschillende waarden van Δ en ρ zijn de knikpunten en de raakpunten berekend. De uitkomsten zijn weergegeven in de tabellen 6.1 en 6.2. en in de fig. 6.1 en 6.2.

Tabel 6.1. Modeluitkomsten voor alternatieve waarden van $\Delta = RS(q) - R(q)$

$\Delta = 500$			$\Delta = 1000$			$\Delta = 2000$			
q	R(q)	$kq_k - kq_{k-1}$	q	R(q)	$kq_k - kq_{k-1}$	q	R(q)	$kq_k - kq_{k-1}$	
rq_0	30 000	12 911							
kq_1	46 667	16 346							
rq_1	72 000	20 736							
kq_2	111 374	26 536	64 707	130 821	29 147	84 154	161 462	33 050	114 795
rq_2	179 457	35 250		253 715	43 830		399 137	59 245	
kq_3	266 067	45 199	154 693	421 461	61 506	290 640	750 670	93 030	589 208
rq_3	399 137	59 245		708 586	89 142		1 426 433	152 431	
kq_4	560 671	75 189	294 604	1 072 231	121 876	650 770	2 321 070	226 423	1 570 400
rq_4	790 667	96 696		1 627 362	169 376		3 783 981	342 300	
kq_5	1 061 192	120 906	500 521	2 299 479	224 674	1 227 248	5 608 643	482 329	3 287 573
rq_5	1 426 433	152 431		3 252 292	300 686		8 317 374	685 312	

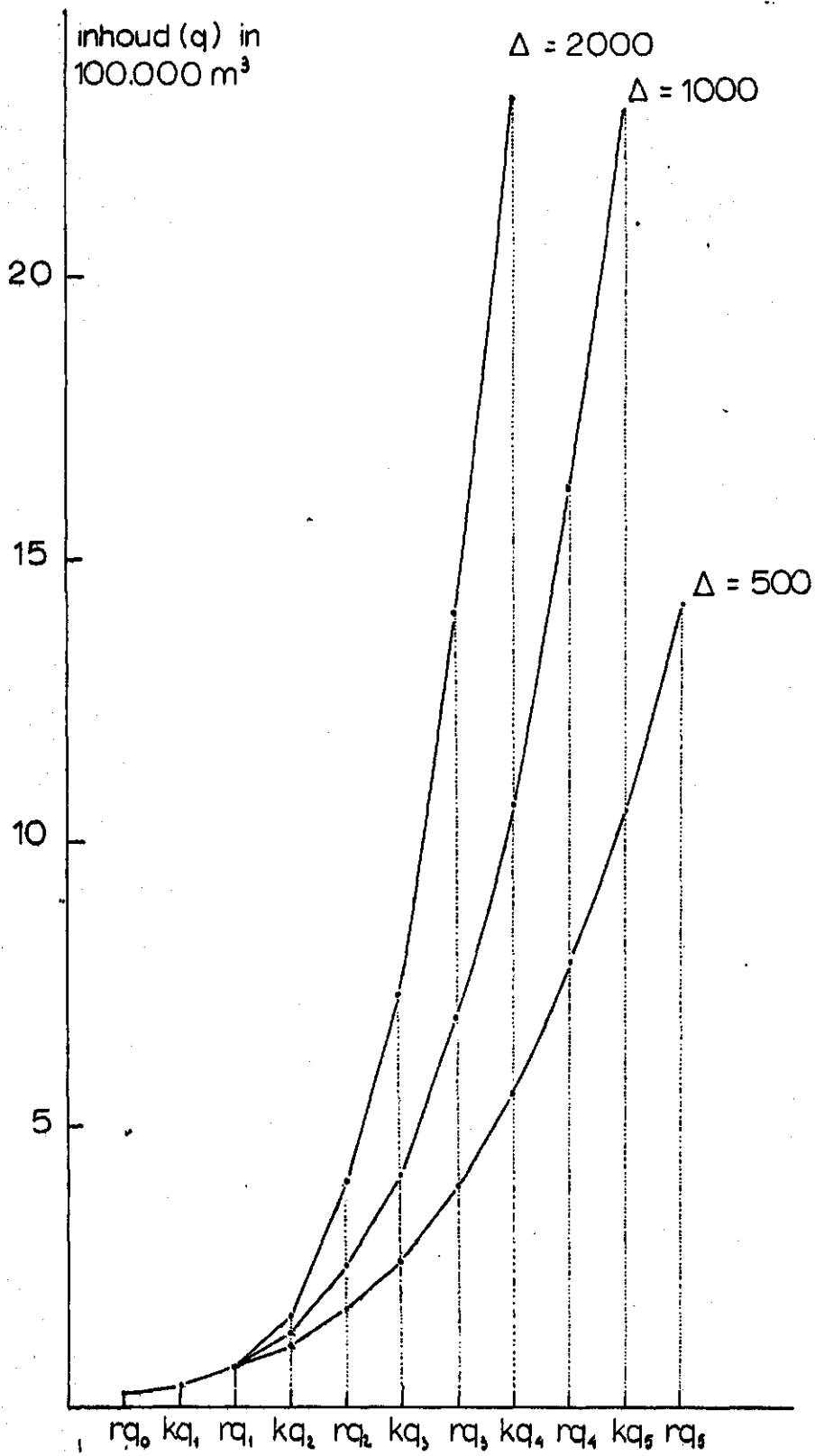


Fig. 6.1. Raakpunten en knikpunten van $RS(q)$ voor verschillende waarden van Δ

De benadering $RS(q)$ is vastgelegd door de knikpunten en de raakpunten. De afstand tussen twee raakpunten wordt bepaald door het verschil $\{kq_k - kq_{k-1}\}$ en door de helling van het lijnstuk. Uit tabel 6.1 (en fig. 6.1) blijkt dat de lengte van het interval $[kq_{i-1}, kq_i]$ toeneemt naarmate de waarde van q toeneemt en (triviaal) naarmate de toegestane afwijking (Δ) toeneemt.

Tabel 6.2. Modeluitkomsten voor alternatieve waarden van $\rho = \frac{RS(q) - R(q)}{R(q)}$

$\rho = 0,01$			$\rho = 0,05$			$\rho = 0,10$		
q	R(q)	$kq_k - kq_{k-1}$	q	R(q)	$kq_k - kq_{k-1}$	q	R(q)	$kq_k - kq_{k-1}$
rq_0	30 000	12 911						
kq_1	46 667	16 364						
rq_1	72 000	20 736						
kq_2	98 580	24 741	51 913	149 287	31 526	102 620	207 921	38 621
rq_2	138 242	30 114		337 190	52 842		685 963	87 039
kq_3	197 890	37 447	99 310	895 807	106 217	746 520	3 882 467	349 959
rq_3	287 129	47 501		2 432 063	235 390		22 375 683	1 702 674
kq_4	428 591	62 224	230 701					
rq_4	644 410	83 148						
kq_5	1 013 687	116 719	585 096					
rq_5	1 600 657	167 137						

In fig. 6.2 zijn de raakpunten en de knikpunten getekend voor $\Delta = 500$ en voor $\rho = 0,01$. Duidelijk is te zien dat het werken met relatieve afwijkingen voor lage waarden van q kleinere intervallen $[kq_{i-1}, kq_i]$ oplevert dan het geval is als met absolute afwijkingen wordt gewerkt. Voor grote waarden van q is het omgekeerde het geval.

Tot slot moet worden opgemerkt dat:

- zowel de waarde van Δ als de waarde van ρ van interval tot interval mag verschillen. Het is zelfs denkbaar dat voor lage waarden van q beperkingen worden opgelegd aan de relatieve afwijkingen en voor

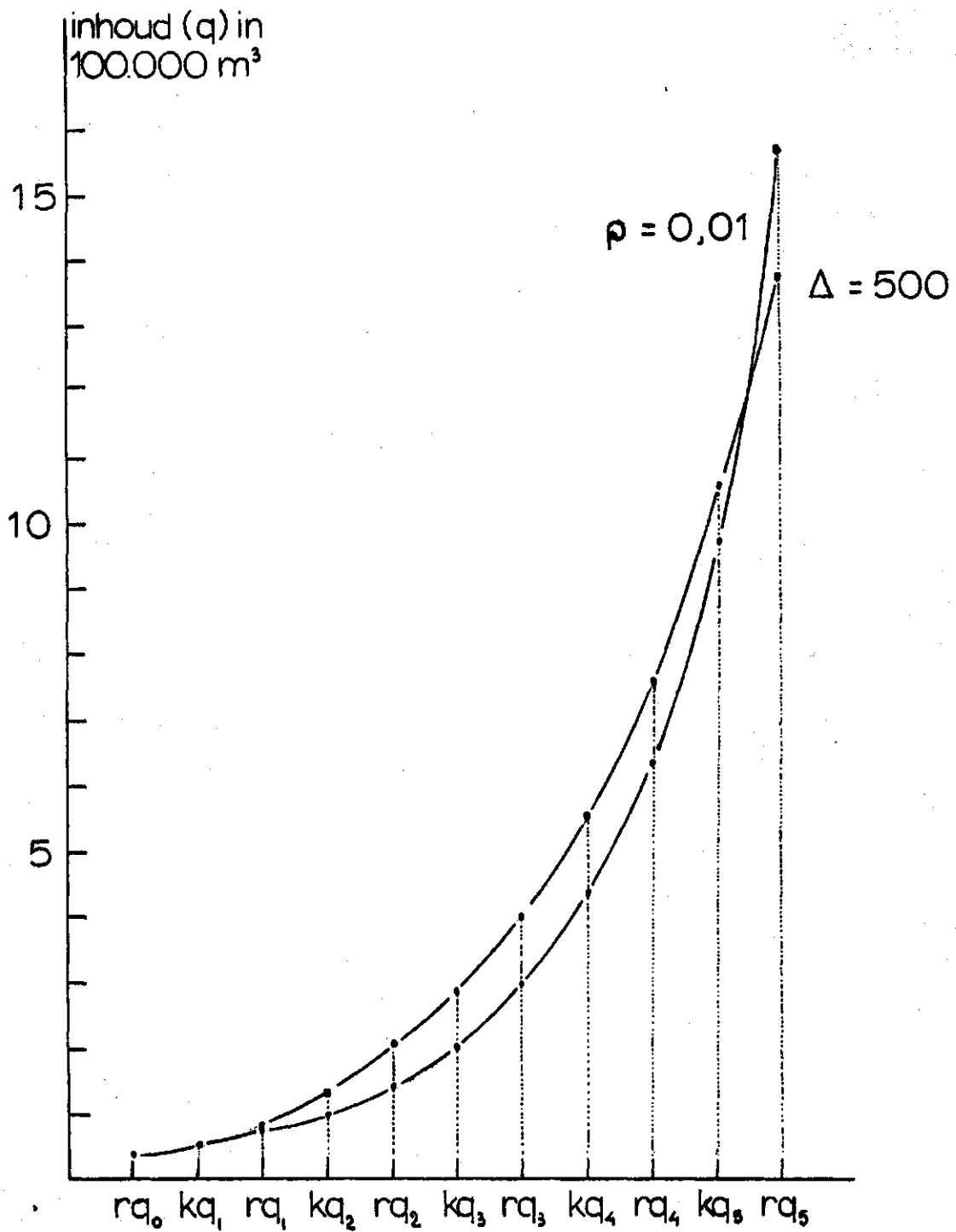


Fig. 6.2. Raakpunten en knikpunten van $RS(q)$ voor $\rho = 0,01$ en $\Delta = 500$

hoge waarden van q aan de absolute afwijkingen (of omgekeerd);

- ook op het interval $[rq_0, rq_1]$ een nauwkeurigheidscriterium gehanteerd kan worden (geeft mogelijk meer dan twee lijnstukken). Echter omdat begin- en eindpunt van het interval vastliggen zal de te volgen procedure enigszins afwijken van de in par. 5 besproken procedure.

LITERATUUR

- AHLBERG, J.H., E.N. NILSON and J.L. WALSH, 1967. The theory of splines and their applications. Academic Press, London.
- BARTSCH, H.J., 1974. Handbook of mathematical formulas. Academic Press, London.
- NES, F. VAN, 1977. Gebroken rechten en vloeiende krommen, het gebruik van spline functies in wiskunde en economie. Interne nota CPB.
- POIRIER, D.J., 1976. The econometrics of structural change. North Holland/American Elsevier.
- SPIEGEL, M.R., 1974. Theory and problems of Advanced Calculus. Schaum's outline series, McGrawHill, London.
- VREKE, J., 1982. Optimale allocatie van zandwinobjecten. ICW nota 1335.