

HET GEBRUIK VAN DE METHODE DER KLEINSTE KWADRATEN IN DE LANDMEETKUNDE

REDE

UITGESPROKEN BIJ DE AANVAARDING
VAN HET AMBT VAN LECTOR AAN DEN
LANDMETERSCURSUS VERBONDEN AAN
DE LANDBOUWHOOGESCHOOL

OP 26 OCTOBER 1931

DOOR

J. M. TIENSTRA



*Mijne Heeren Curatoren dezer Hoogeschool,
Mijne Heeren leden van het College van Bestuur van
den Landmeterscursus, Mijne Heeren Hoogleeraren,
Lectoren en Docenten, Dames en Heeren der Land-
bouwhoogeschool en Gij allen, die door Uw tegen-
woordigheid op dezen dag van Uw belangstelling
blijk geeft,*

Dames en Heeren,

Bij een eerste kennismaking met de methode der kleinste kwad-
raten zou men allicht geneigd zijn te denken, dat alle vraagstukken,
die zich bij het landmeten voordoen, zonder meer met behulp van
deze methode kunnen worden opgelost. Men stelt zich dan echter de
zaak te eenvoudig voor. Toch verkeert men in de landmeetkunde in
zekeren zin in een bijzondere en bevoorrechte positie in vergelijking
met andere gebieden der wetenschap, waarbij men met waarnemingen
te doen heeft. Deze bevoorrechte positie is, dat naar menselijke
berekening de Euclidische Meetkunde altijd wel een voldoende juiste
hypothese zal blijven om er de metingen op af te stemmen. Men
loopt op dit gebied niet het gevaar, dat men voor zeer nauwkeurige
metingen aan deze hypothese niet voldoende zou hebben en men
derhalve aan de hand van de uitkomsten van zulke metingen nieuwe
hypothesen zou moeten opstellen.

De moeilijkheden liggen in de landmeetkunde dan ook ergens an-
ders. Om U dit duidelijk te doen inzien, wil ik veronderstellen, dat
op een van te voren geheel onbewoond eiland een kolonie zal worden
gesticht. Een landmeter krijgt de opdracht het eiland nauwkeurig in
kaart te brengen en verder alles te doen, wat op zijn gebied nood-
ig is ter verzorging van de belangen der nederzetting.

Het eiland is, in landmeetkundigen zin gesproken, volslagen onge-
rept. Onze landmeter zal dus, te beginnen met zijn primaire drie-
hoeksnet tot aan zijn laatste meetlijn toe, alles uit het niet op moeten
bouwen.

Hij vangt aan met de verkenning en verricht deze meteen maar
voor alle werk wat er te doen is tegelijkertijd. In details stelt hij nu
zijn programma van meting vast en wel zoodanig, dat hij zoo weinig
mogelijk tijd behoeft te verliezen met reizen en trekken. Alle metin-
gen, die er op een bepaalde plek te doen zijn van het primaire werk af

tot aan de detailmeting toe worden daar verricht, zoodat hij nooit weer ergens terug behoeft te komen als hij er eenmaal geweest is.

Hij meet dus zoo alle hoeken en lengten, die voor de bepaling van zijn punten noodig zijn en het eerste wat nu moet gebeuren is de vereffening en de berekening van zijn geheele voorraad waarnemingen. De moeilijkheid, waarvoor hij zich thans geplaatst ziet en met het oog waarop ik dan ook dit voorbeeld heb gekozen, is, dat de vereffeningen, die hij moet verrichten practisch gesproken onmogelijk zijn. Hij heeft een driehoeksnet van waarschijnlijk zeer veel driehoeken, tusschen de driehoekspunten liggen zijn secundaire punten, daar weer tusschen derderangspunten, ten slotte heeft hij zijn veelhoeken en daaraan is weer vastgekoppeld zijn detailmeting. Al deze metingen hangen samen. Een wijziging van een hoek van een veelhoek brengt een wijziging te weeg van een derderangspunt, deze wijziging heeft gevolgen voor enkele secundaire punten en deze beïnvloeden weer de eersterangspunten. Iedere kleine wijziging in een uitkomst van een nog zoo onbeduidend schijnende waarneming, plant zich voort door zijn geheele meting. Hij zou wellicht moeten oplossen duizend vergelijkingen met duizend onbekenden, wanneer hij al zijn metingen zou willen vereffenen, zooals strikt genomen de methode der kleinste kwadraten het voorschrijft en hij zal derhalve gedwongen zijn te transigeeren.

De in werkelijkheid een geheel zijnde keten van metingen moet in stukken worden gehakt. De detailmeting is één deel, de veelhoeksmeting een ander enz. en onze landmeter spreekt met zichzelf af, dat al deze stukken als geheel op zichzelf staande metingen zullen worden beschouwd en er dus geen samenhang tusschen deze gebieden zal bestaan in den zin van de vereffeningstheorie.

Deze handelwijze is volmaakt willekeurig. Het zal b.v. kunnen voorkomen, dat een punt, dat als secundair punt wordt beschouwd, even goed in de vereffening van het driehoeksnet opgenomen had kunnen worden. Voor de eene of voor de andere handelwijze is geen bepaalde voorkeur.

Met de indeeling in de bovengenoemde hoofdonderdeelen der meting is men er nog niet. Het is in den regel ook nog zelfs uitgesloten om b.v. alle veelhoeksmetingen, ten minste voor zoover deze samenhangen, als een geheel te vereffenen. Hier zal een nadere splitsing in onderdeelen moeten geschieden. Bij zulke gevallen spreekt nog sterker de willekeur, dan bij de bovenvermelde verdeeling. Men laat zich dan uitsluitend leiden door het practische inzicht.

Er zijn aan het indeelen van het werk in zelfstandige onderdeelen, ten opzichte van de vereffening, verstrekkende gevolgen verbonden. Laten wij veronderstellen, dat de vereffening van het driehoeksnet heeft plaats gevonden. Omdat aan de metingen zekere onvolkomenheden kleven, zal ook de ligging van ieder hoekpunt van het driehoeks-

net slechts met een beperkte mate van nauwkeurigheid bekend zijn. In het algemeen leert de theorie, dat de mate van nauwkeurigheid kan worden voorgesteld door de voetpuntskromme van een ellips, met als middelpunt het punt zelf; bij ieder der hoekpunten behoort op deze wijze zoo'n kromme, die in het algemeen voor elk punt verschillend zal zijn.

Wij willen de optimistische veronderstelling maken, dat van alle punten van het net de foutenkromme berekend is. Thans moet de ligging der secundaire punten worden bepaald, waarbij men moet uitgaan van de reeds als hoekpunt van het driehoeksnet bekend zijnde punten. Men staat nu voor de moeilijkheid, hoe de nauwkeurigheid van de driehoekspunten tot uitdrukking te laten komen bij de vereffening en berekening van deze secundaire metingen. Dit is een lastig vraagstuk, en het zal waarschijnlijk hierdoor zijn, dat men tevergeefs in de literatuur naar de oplossing ervan zal zoeken.

Het vraagstuk heeft een algemeene beteekenis: steeds wanneer men van een in zijn geheel samenhangende keten van metingen, zooals die van onzen landmeter, die ik nu maar verder op zijn eiland met rust zal laten, een brok afhakt, stuit men onmiddellijk op de moeilijkheden, die ik zooveen geschetst heb.

Ik heb U echter deze bezwaren nog eenvoudiger voorgesteld, dan ze zijn. Ik heb verondersteld, dat van ieder punt van het driehoeksnet de foutenkromme berekend was. Zelfs dit deel van het werk moet in de practijk achterwege worden gelaten, omdat het veel te veel tijd zou kosten en wanneer wij dus zien, wat er overblijft van de toepassing van de methode der kleinste kwadraten zelfs in het belangrijke en fundamenteele vraagstuk van de berekening van een driehoeksnet, dan blijkt dit slechts te zijn de eenvoudige vereffening, zonder een verdere bepaling van de nauwkeurigheid der berekende resultaten.

Weer ben ik te optimistisch geweest. Ik moet U mededeelen, dat men slechts in zeer enkele gevallen deze vereffening uitvoert. Zelfs bij het primaire driehoeksnet in Nederland is de vereffening geschied door de indeeling van het net in 3 gedeelten en nog was de berekening van deze vereffening zoo ingewikkeld dat voor de vereffening van het grootste der drie stukken 81 vergelijkingen met 81 onbekenden moesten worden opgelost, waarmee maanden gemoeid waren.

Wanneer we thans zien naar de vereffening en de berekening van de secundaire punten, waarover ik reeds terloops heb gesproken, dan blijkt hier ook van een strenge toepassing van de methode der kleinste kwadraten geen sprake te zijn. Men heeft eerst te maken met de omstandigheid, dat de nauwkeurigheid van de ligging van de reeds berekende primaire punten onbekend is, omdat zij niet werd uitgerekend. De gewoonte bij de berekening der secundaire punten is dan

ook om de primaire punten als foutloos te beschouwen. In hoeverre dit geoorloofd is, is naar mijn weten nooit behoorlijk onderzocht. Ook over deze kwestie vermeldt de literatuur betrekkelijk weinig. In den regel geschiedt de vereffening van de secundaire punten stuk voor stuk. Men berekent hier wel de nauwkeurigheid van de ligging van deze punten, doch slechts alleen in de richting van de X en de Y as van het rechthoekige coördinaten-stelsel. Tot een berekening van de geheele foutenkromme komt men zoo goed als nooit.

Ik moet echter opmerken, dat de berekening dier nauwkeurigheid hier op een totaal onjuiste manier geschiedt. Ik wil U dit met een voorbeeld verduidelijken. Voor de bepaling van een punt, dat ik voor het gemak maar een secundair punt zal blijven noemen, zijn met een theodoliet de richtingen naar 6 bekende punten gemeten. Deze metingen hebben zoo plaats gevonden, dat in 8 verschillende randstanden deze 6 richtingen zijn bepaald. In totaal zijn er derhalve 48 richtingen voorhanden. De gewoonte is nu om uit deze acht waarnemingsreeksen één reeks af te leiden, als gemiddelde van deze 8. Met de aldus verkregen waarden voor de 6 richtingen wordt nu het vraagstuk verder berekend. Bij deze behandelingsmethode treedt duidelijk naar voren, hoe het geheele probleem der vereffening en der berekening geschiedt in 2 tempi. Een eenvoudige theoretische beschouwing leert, dat dit inderdaad geoorloofd is. De resultaten die men vindt, nl. de coördinaten van het gezochte secundaire punt, zijn gelijk aan die, welke men gevonden zou hebben, wanneer men direct van de 48 richtingen uitgaande, in eens de vereffening en de berekening had uitgevoerd.

Voor de berekening van de nauwkeurigheid van de resultaten echter, is het niet hetzelfde wat men doet. De gevolgde methode in de praktijk is, dat men uit het eerste deel der berekening een middelbare fout bepaalt. Het doel hiervan is om min of meer een oordeel te kunnen vellen over de nauwkeurigheid, waarmee de waarnemingen zijn verricht. Bij het tweede deel der berekening vormen de uitkomsten van de vereffening van het eerste deel de gegevens. Men doet bij de berekening van de middelbare fout bij dit tweede deel alsof deze richtingen direct gemeten grootheden zijn en laat buiten beschouwing, dat zij zelf reeds gemiddelden waren van metingen. De bij dit laatste deel der berekening gevonden middelbare fout beschouwt men als de middelbare fout, welke men verder als maatstaf voor de nauwkeurigheid blijft aanhouden.

Deze handelwijze is geheel analoog met de volgende. Men wil de lengte van een lijn kennen en daarvoor verricht men 5 series van elk 10 metingen. Men kan de eindwaarde van de lengte der lijn vinden, door eerst van ieder der 10 series het gemiddelde te berekenen en door daarna uit de 5 aldus verkregen gemiddelden weer het gemiddelde te

bepalen. Men kan echter ook uit alle 5 waarnemingen direct het eindgemiddelde berekenen. Beide handelwijzen geven hetzelfde resultaat, zooals gemakkelijk te zien is.

Men gaat nu met behulp der 5 waarden, die de gemiddelden der 5 series waren, de middelbare fout berekenen. Dit is niet juist zult gij zeggen, men moet uitgaan van de 5 oorspronkelijke metingen, want een middelbare fout heeft slechts dan eenige waarde, wanneer de berekening geschiedde uit veel waarnemingen. Toch wordt de handelwijze, die hier onmiddellijk als onjuist gekwalificeerd wordt, al jaren en jaren dagelijks toegepast bij de berekening van de middelbare fout in de coördinaten van een afzonderlijk bepaald punt.

Ook bij de berekening van secundaire punten is derhalve geen sprake van een strenge toepassing van de theorie van de kleinste kwadraten. Ik heb gezegd, dat als regel deze punten na elkaar werden berekend. Af en toe komt het voor dat men twee punten tegelijk vereffent, terwijl mij één geval bekend is in ons land, waarbij 5 punten tegelijk berekend zijn. Dit zijn de 5 hoofdpunten van Amsterdam, welke als grondslag dienden voor de andere aldaar te bepalen punten.

Hetgeen hier gezegd is aangaande de secundaire punten geldt eveneens voor de punten van lageren rang.

Wij zijn thans gevorderd tot de veelhoeksmetingen. Hier is er zoo goed als geen sprake van de toepassing van de methode der kleinste kwadraten. Niet alleen dat men hier geen middelbare fouten in de resultaten berekent, maar de vereffening zelve geschiedt zelfs niet volgens deze methode. In het „Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde” heeft Professor Ir. J. W. Dieperink de aandacht gevestigd op de strenge vereffening van veelhoeken en de practische mogelijkheid van zulk een vereffening aangetoond. Ook bij veelhoeksmetingen is er geen sprake van, dat men een net van veelhoeken als één geheel vereffent, hoogstens wordt een kruispunt van twee veelhoeken als een knooppunt berekend. Voor de berekening van veelhoeken zijn beenderingsmethoden in zwang, die weinig houvast voor theoretische beschouwingen bieden, en die betrekkelijk willekeurig gekozen zijn.

Dalen wij nog een trapje af, dan komen wij bij het meetlijnen net. Evenmin als bij de veelhoeksberekening is hier sprake van een toepassing van de methode der kleinste kwadraten. De gang der berekening is vrij willekeurig en van vereffening is geen sprake.

Om het overzicht te voltooien wil ik nog even bespreken de vereffening van hoeken of richtingen, die met den theodoliet zijn gemeten. Deze metingen worden zoodanig verricht, dat de invloed van de onjuiste stand van de tweede as ten opzichte van de eerste as van het instrument, de fout van de excentriciteit der alhidade, de fout in de stand van de vizierlijn geëlimineerd worden en de fouten in de randverdeling zoo goed mogelijk. Dit geschiedt door de metingen te

kwadraten toepassing vindt, staat de landmeter rustig en geeft het werk hem zekerheid. Hierdoor meen ik ook te moeten verklaren, dat de methode der kleinste kwadraten in de landmeetkunde zoo'n belangrijke rol is gaan spelen.

Ik heb U verteld, hoe het mogelijk is, dat men door proefnemingen op eenvoudige gevallen van metingen richtlijnen kan vinden, die iets leeren omtrent de in het algemeen te volgen handelwijzen. Men onderzoekt dan b.v. de werking van de fouten bij eenvoudige lengtemetingen en men vindt door toepassing van de methode der kleinste kwadraten een regel, die het verband geeft tusschen de lengte van de lijn en de middelbare fout van de meting. Dr. W. Jordan vergelijkt deze regels met de spannings- en buigingswetten van den ingenieur en vormt daaruit nog de verdere analogie, dat ook de praktische toepassing van zulke wetten in beide gevallen innig verwant is. Duizenden bouwwerken worden zonder sterkte-berekening, slechts naar het practisch inzicht van metselaar of timmerman uitgevoerd, maar wie niet met de berekening van spanningen en traagheids-momenten op de hoogte is, kan tegenwoordig niet als wetenschappelijk ingenieur gelden. Evenzoo staan de zaken met de fouten-wetten van ons vak. Een terreintje opmeten en een sinus of een cosinus berekenen, is voldoende voor de dagelijksche behoefte, maar van den meester in ons vak verlangt men, dat hij ook een inzicht heeft in de verborgenheden van de samenwerking en de voortplanting van de fouten.

De algemeene regels omtrent de werking van de fouten komen iedereen ten goede en het is geen overdrijving zegt weer Dr. W. JORDAN, wanneer wij beweren, dat in deze beteekenis de methode der kleinste kwadraten op alle metingen kan worden toegepast, zelfs op een eenvoudige lengtemeting. Natuurlijk niet zoo, dat voor zulke gevallen fouten-vergelijkingen worden opgesteld en normaalvergelijkingen worden opgelost, maar dat, ofschoon naar willekeur wordt vereffend, daarbij toch volgens theoretische wetten in aanmerking worden genomen de fouten-invloeden op alle onderdeelen der meting.

Door het gebruik van de methode der kleinste kwadraten in de landmeetkunde, is er aan de meetkunde een zeer lastig en gecompliceerd element toegevoegd.

Wanneer men in de vlakke meetkunde een driehoek bestudeert, dan is het daarbij onverschillig hoe zoo'n driehoek er precies uitziet. Wij leeren bijvoorbeeld, dat in een rechthoekigen driehoek de stelling van Pythagoras geldt en deze stelling geldt voor alle driehoeken waar maar een rechte hoek in voorkomt. Voor den landmeter echter zijn alle rechthoekige driehoeken lang niet hetzelfde. Is een der beide andere hoeken al te scherp, dan kan dit beteekenen, dat de stelling van Pythagoras voor hem onbruikbaar wordt. Verder leeren wij bij

voorbeeld, dat twee rechte lijnen elkaar steeds snijden, mits zij niet evenwijdig loopen. Moet de landmeter uit twee hem in ligging bekende standplaatsen, de plaats van een derde punt bepalen, zoo kan hij dit doen, door met zijn theodoliet op die beide standplaatsen den hoek te bepalen, welke de richtingen naar het onbekende punt met de noordlijn maken. Het gevraagde punt is dan bepaald als het snijpunt van twee lijnen. Het is nu lang niet onverschillig of die snijding geschiedt onder een hoek, die nagenoeg recht is of onder een hoek, die zeer scherp of zeer stomp uitvalt. Ofschoon in het laatste geval in de planimetrie het punt evengoed bepaald is, als in het eerste geval, zoo zal de landmeter het eerste geval onmiddellijk prefereren. Dit komt, omdat zijn metingen niet geheel nauwkeurig zijn, en de onzekerheid daardoor in de ligging van het snijpunt van de lijnen zeer groot kan worden, wanneer de hoek, waaronder die lijnen elkaar snijden, klein is.

Bij dit voorbeeld ziet U zeer duidelijk naar voren treden, dat behalve de nauwkeurigheid van de meting, ook de meetkundige omstandigheden van het probleem een rol spelen. Dit verschijnsel treft men algemeen aan. Nu is de meting zelve iets, waarover van te voren nooit met zekerheid te zeggen is hoe zij uitvalt. De meetkundige omstandigheden kan men echter trachten in ieder speciaal geval zoo gunstig te kiezen, als maar mogelijk is. Hiervoor is echter noodig, dat men de kenmerken leert vinden, op grond waarvan men de meer of mindere gunstigheid kan beoordeelen. Men is gesteld tegenover zeer eigenaardige en speciale vraagstukken, waarvan de oplossing niet gemakkelijk is en die een toepassingsgebied der meetkunde vormen, dat tot op heden zeer weinig onderzocht is, maar waar de mathematicus vele interessante problemen kan vinden.

Het is mij mogen gelukken het vraagstuk op te lossen hoe de invloed van de meetkundige omstandigheden is bij het problema van Snellius, waardoor het mogelijk is vóór een meting in dit geval een onderdeel te vellen over de meer of minder gunstige ligging der punten.

Betroffen dus de regels omtrent de voortplanting der fouten het gebied der meting, deze laatste eigenschappen hebben betrekking op het andere element, dat de eind-nauwkeurigheid bepaalt. De eerstgenoemde regels worden gevonden door middel van het experiment, de andere langs zuiver theoretischen weg, beide soorten hebben gemeen, dat zij onmogelijk gevonden zouden kunnen worden, indien men niet de beschikking had over de methode der kleinste kwadraten.

Oogenschijnlijk zijn de beide boven besproken invloeden, die de eindnauwkeurigheid van een meting bepalen, van een zoodanig uiteenlopend karakter, dat zij wel niets met elkaar te maken hebben. Toch kan ik zeggen, dat met de wijze van meten, de meetkundige omstandigheden veranderd kunnen worden. Met de wijze van meten

bedoel ik dan het meten met verschillende nauwkeurigheid. Ik wil als voorbeeld aanhalen het bepalen van den vorm van een driehoek. Dit kan geschieden door het meten van de drie hoeken en voor de nauwkeurigheid in de ligging van het derde hoekpunt ten opzichte van de twee anderen vindt men dan als resultaat een zekere foutenkromme. Bij deze berekening kan men de beide andere punten foutloos veronderstellen. De vorm van deze foutenkromme hangt uitsluitend af van den vorm van den driehoek. Door de nauwkeurigheid van de meting op te voeren, kan men wel deze foutenkromme verkleinen, doch de vorm ervan blijft steeds gelijk. Wanneer deze vorm ongunstig is, dus langgestrekt, blijft zij dat, ook al meet men nog zoo nauwkeurig.

Toch kan men den vorm van de foutenfiguur door de meting beïnvloeden en wel door de metingen van de drie hoeken met verschillende nauwkeurigheid uit te voeren. De eene hoek kan men b.v. 10 maal, een andere 3 maal en de derde 7 maal meten. De foutenkromme wordt anders, en het resultaat is dan net alsof men in het geval verkeerde, dat men een anderen gegeven driehoek had gehad waarvan men de hoeken met gelijke nauwkeurigheid had gemeten. Hierop doelde ik toen ik zooveel zei, dat men door de wijze van meten, de meetkundige omstandigheden kon veranderen.

Ook dit wijzigen van de nauwkeurigheid van de meting van de verschillende grootheden is een belangrijk middel om goede resultaten te verkrijgen en om een meting zoo economisch mogelijk te verichten.

Terugkeerende tot de meting van den driehoek, waarover ik zooveel sprak, kan men zich de vraag stellen, welke vorm van foutenkromme onder alle mogelijke vormen te prefereren is. De theorie leert, dat de foutenkromme in sommige gevallen in een cirkel kan ontaarden. Dit geval doet zich voor, wanneer de driehoek gelijkzijdig is en wanneer de hoeken met gelijke nauwkeurigheid zijn bepaald.

Men heeft dan naar alle richtingen voor de ligging van het derde punt dezelfde nauwkeurigheid en er is dan van eenigerlei preferenti van richting niet meer sprake. Het geval is ideaal en de meting is het meest economisch, omdat een eventueele verhooging der nauwkeurigheid aan alle richtingen gelijkelijk ten goede komt.

Het geval toch, waarbij de foutenkromme een langgestrekten vorm heeft is oneconomisch. Om de langste as van deze kromme binnen zekere perken te houden, moet de nauwkeurigheid van de meting worden opgevoerd en die meerdere moeite is verspild aan de kortste as want deze was misschien al klein genoeg.

Men kan op eenvoudige wijze nagaan, dat, om bij een willekeurige driehoek te zorgen dat de foutenkromme een cirkel wordt, men de hoeken meten moet met gewichten evenredig aan hun cotangenten

Omdat de cotangens van een hoek grooter dan 90° negatief is en men niet met een negatieve nauwkeurigheid en dus met een negatief gewicht een meting kan uitvoeren, moet men te maken hebben met een scherphoekigen driehoek, die overigens willekeurig van vorm kan zijn.

Het leek mij toe, dat in het algemeen, die eisch van gelijke nauwkeurigheid in alle richtingen een eisch was, die waard was om steeds te stellen in alle gevallen, waarin sprake was van de bepaling van de ligging van een punt en ik stelde die eisch, aan alle hoekpunten van een driehoeksnet. Van een driehoeksnet, zonder stompe hoeken kregen alle punten een cirkelvormige foutenkromme, wanneer ook hier de hoeken gemeten werden met gewichten per driehoek evenredig aan hun cotangenten. Ook bij verschillende soorten driehoeksnetten, die niet vrij lagen, doch aansloten aan reeds bestaande netten, waardoor dus bij de gewone betrekkingen tusschen de hoeken nog andere optraden en ook bij kettingen, bleek de stelling omtrent de cotangenten op te gaan.

Op zichzelf beschouwd beteekende deze vondst wel iets, maar er deed zich een ander zeer merkwaardig verschijnsel voor. Men zou verwachten, dat de vereffening door de invoering van gewichten ingewikkelder zou worden, doch wat gebeurt er: de vereffening werd integendeel eenvoudiger en wel in zeer belangrijke mate. Heeft men een driehoeksnet met 5 centrale punten en 18 driehoeken, zoo moet men in het gewone geval, bij de vereffening oplossen 28 normaalvergelijkingen. Worden de hoeken gemeten met gewichten evenredig aan de cotangenten, dan valt het systeem dezer 28 vergelijkingen uiteen en blijkt het, dat de vereffening kan geschieden, door eerst achtereen volgens de driehoeken sluitende te maken; daarna vereffent men de aldus gecorrigeerde hoeken op de horizonvergelijkingen, welke vereffening moet geschieden door in ons geval 5 normaalvergelijkingen op te lossen en ten slotte vereffent men op de 5 sinusvoorwaarden, hetgeen weer de oplossing van 5 normaalvergelijkingen verlangt. Een belangrijke besparing van werk dus in vergelijking met het gewone geval, omdat juist het oplossen van veel normaalvergelijkingen tegelijk zoo tijdroovend en de oplossing van zeer veel vergelijkingen practisch gesproken zelfs onuitvoerbaar is. Ik kan nog vermelden, dat de coëfficiënten van de normaalvergelijkingen, die afgeleid worden uit de horizonbetrekkingen, direct op te schrijven zijn. Het zijn zeer eenvoudig en regelmatig opgebouwde functies van de cotangenten van de hoeken. De tijdroovende bepaling van deze coëfficiënten valt practisch gesproken hier ook weg. Verder is nog een merkwaardigheid, dat de coëfficiënten van het stel normaalvergelijkingen volgende uit de sinusbetrekkingen, identiek zijn met die der horizontaal-betrekkingen, alleen de bekende leden verschillen natuurlijk. Beide stellen kan men volgens den algorithmus van Gauss

tegelijkertijd oplossen, door eenvoudig de twee bekende leden tegelijk mee te nemen.

Wij waren van plan ons veel moeite te getroosten om toch maar het ideale geval van de cirkelvormige foutenkromme te verwezenlijken en ziet het resultaat was een vereenvoudiging van het vraagstuk.

De zaken staan nu m.i. zoo. Het middel om door een driehoeksnet een terrein in kaart te brengen is onbevredigend. Wil men een driehoeksnet streng vereffenen door middel van de methode der kleinste kwadraten, dan zou dit zooveel tijd kosten, dat men, behalve voor het geval van primaire metingen, hiervan om praktische redenen moet afzien. Er bestaat wel een methode van een niet strenge vereffening, doch deze is zeer primitief en bovendien niet vrij van willekeur. Bepaalt men echter de hoeken van het net met gewichten evenredig aan hun cotangenten, dan is de strenge vereffening zooveel eenvoudiger geworden, dat zelfs voor zeer eenvoudige metingen volgens de strenge methode kan worden te werk gegaan.

Er zijn echter aan deze handelwijze meerdere voordeelen verbonden. Vooraf wil ik U mededeelen, dat ook voor de gevallen der afzonderlijke puntbepaling de gewichten gevonden kunnen worden, waarvoor de foutenkrommen cirkels worden. Het blijkt in alle gevallen mogelijk te zijn om bij punten, die door hoekmeting worden bepaald te zorgen, dat de foutenkromme een cirkel wordt, mits de foutenkrommen van de gegeven punten ook cirkels zijn. Bij een driehoeksnet laat ik dus buiten beschouwing de fout in de basismeting, die zich zooals van zelf spreekt door het geheele net gelijkvormig voortplant en de cirkelvormigheid van de foutenkromme weer verstoort. Ik kan echter in de theoretische onderzoeking deze omstandigheid buiten beschouwing laten. Doet men dit, dan heb ik aangetoond, dat indien het Nederlandsche primaire net gemeten was zoodanig, dat de gewichten evenredig waren gekozen aan de cotangenten van de bijbehorende hoeken, het mogelijk zou zijn geweest om te zorgen, dat alle punten, die uitgaande van dit driehoeksnet werden bepaald, evenals de hoekpunten van het net zelf, cirkelvormige foutenkrommen zouden hebben verkregen.

Het is verder nog van belang op te merken, dat door een conforme projectie of een conforme aansluitingsmethode de eigenschap blijft bestaan, mits in het geval van de aansluiting ook de punten waaraan de aansluiting geschiedt, cirkelvormige foutenkrommen hebben.

Er zouden eenige belangrijke voordeelen aanwezig zijn, wanneer inderdaad alle punten in hun ideaal toestand verkeerden. Ik heb U verteld, hoe het nimmer gebruikelijk is om bij de bepaling van nieuwe punten, rekening te houden met de nauwkeurigheid van de punten, waaruit het nieuwe punt wordt berekend en wel omdat dit tot te

omslachtige berekeningen zou leiden. Speciaal komt dit, omdat men zou moeten weten, hoe van ieder punt de foutenkromme moest zijn gelegen en hoe groot haar assen waren: men moest alzoo 3 groot-heden kennen. Voor het geval er cirkelvormige foutenkrommen aanwezig zijn blijft er van deze drie groot-heden maar één over, dat is de straal van den cirkel. De berekeningen worden hierdoor zeer vereenvoudigd, zoodat in deze onderstelling het mogelijk zou worden, wél de nauwkeurigheid van oude punten in rekening te brengen, welke moeite zich zeer zeker zou loonen voor belangrijke gevallen.

In de eerste plaats zou het dan echter noodig zijn te kennen de stralen van de foutencirkels van het primaire driehoeksnet. Deze kunnen inderdaad worden berekend en ofschoon ik mijn onderzoekingen op dit punt nog niet heb voltooid, kan ik U enkele eigenschappen ervan meedeelen.

Neemt men drie willekeurige punten van het net, dan zijn de middelbare fouten in de hoeken evenredig met de lengten van de overstaande zijden en de middelbare fout in een hoek is gelijk aan de middelbare fout in de logarithme van de verhouding van de omliggende zijden.

Uit het bovenstaande is nog een belangrijke gevolgtrekking te maken.

Het is gebleken, dat de vereffening van een driehoeksnet zeer veel eenvoudiger wordt, als men de waarnemingen der hoeken verricht met gewichten evenredig met hun cotangenten. Bij eenvoudig werk zal deze de meerdere omslachtigheid voor de meting, die deze eisch met zich meebrengt, niet gemotiveerd zijn met het oog op de nauwkeurigheid, die vereischt is. Men kan nu de hoeken meten met gelijke nauwkeurigheid, doch bij de vereffening net doen alsof aan den eisch voor de gewichten was voldaan en profiteeren van de daarvoor geldende zeer eenvoudige vereffeningmethode. De gevolgde werkwijze is dan een benaderde vereffeningmethode. Vergeleken met de als regel als zoodanig gebruikte methode, vertoont de hier ontwikkelde het voordeel, dat zij niet willekeurig is en dat zij toelaat voor een meting van een driehoeksnet de mate van hare onvolkomenheid te regelen en zoo gering te maken als men zelf wil. Stelt men namelijk aan de eene zijde de vereffening van een driehoeksnet, waarvan de hoeken alle even nauwkeurig bepaald zijn en aan de andere zijde die van een net, waar de meting der hoeken geschiedde met gewichten evenredig aan de cotangenten, zoo is in het eerste geval de benadering het sterkst en in het tweede geval is er geen benadering. Door nu in zekere mate den eisch, waaraan de gewichten moeten voldoen na te streven bij de meting, kan men verkrijgen, dat de mate van

de benadering door het gebruik van de eenvoudige vereffeningsmethode geringer wordt.

De methode der kleinste kwadraten is een werktuig waarvan de hanteering groote vaardigheid vereischt en waarvoor een diep inzicht in haar wezen noodzakelijk is. Ik acht het een geluk, dat dit het geval is: het spoort ons aan tot grootere krachtsinspanning.

Er wordt wel eens gezegd, dat de landmeetkunde een gebied voor studie is, dat zeer beperkt is, omdat zij door de eeuwenlange beoefening ervan geen terreinen voor onderzoekingen meer oplevert. Ik kan het met deze uitspraak niet eens zijn, om vele uiteenloopende redenen niet en ik hoop dit zelfs op het zeer kleine gebied der landmeetkunde, waar ik over gesproken heb, voldoende duidelijk te hebben aangetoond.

Heeren Curatoren van deze Hoogeschool,

Uwe aanwezigheid hier ter plaatse bewijst mij Uwe belangstelling voor het onderwijs aan den cursus ter opleiding van landmeters en zij versterkt mij in het vertrouwen, dat de zaak der landmeetkunde Uw volle sympathie heeft. Ik hoop, dat U van mij de verzekering zult willen aanvaarden, dat ik mijn beste krachten zal geven aan de vervulling van het mij toevertrouwde lectoraat.

Heeren leden van het College van Bestuur van den Landmeterscursus,

Het is mij een behoefte U dank te zeggen, voor het vertrouwen, dat U in mij hebt gesteld door mij voor te dragen voor een lectoraat aan den Landmeterscursus.

Dat ik hier thans sta, is het gevolg van het tragische overlijden van mijn voorganger den Heer H. F. VAN RIEL. VAN RIEL heeft beheard tot degenen, die den cursus hebben weten te maken tot wat zij thans is en die door zijn gaven op de opleiding een zeer bijzonder stempel heeft gedrukt. Zijn werk verdient ieders bewondering. Het beste wat ik U daarom kan beloven is, dat ik zal trachten hem in zijn werk en zijn ambitie zooveel mogelijk na te streven.

Heeren Professoren, verbonden aan deze Hoogeschool,

Dat gij deze bijeenkomst met Uw tegenwoordigheid hebt willen vereeren, stemt mij tot groote dankbaarheid.

Voor al de omstandigheid, dat ik uit Uw tegenwoordigheid ook

meen te moeten concludereen Uwe belangstelling in de lotgevallen van den Cursus tot opleiding van Landmeters, is hiervan een voorname reden.

Hooggeleerde Dieperink,

Speciaal met U zal ik moeten samenwerken ten einde het onder-richt aan den Landmeterscursus zoo vruchtdragend mogelijk te doen zijn. Door de hartelijke wijze waarop Gij mij ontvangen hebt en Uw bereidwilligheid om mijn eerste schreden te leiden op een pad, dat mij volkomen vreemd was, ben ik zeer getroffen. Zij geven mij de overtuiging dat ik met groote gerustheid de toekomst tegemoet zal kunnen gaan: Uw steun en Uw vertrouwen zullen mij gemakkelijk de moeilijkheden doen overwinnen. Ik zal er een eer in stellen met U aan den bloei van den cursus te kunnen meewerken.

Hooggeachte Kwisthout,

Het toeval heeft gewild, dat ik mijn vorig ambt, op slechts een enkel jaar na, uitsluitend onder Uwe bevelen heb vervuld. Gij zijt het geweest, die in mij hebt wakker gemaakt de belangstelling voor de geodesie, in de eerste jaren van mijn loopbaan en die steeds deze belangstelling hebt weten aan te vuren, waardoor Uw voorbeeld veel heeft bijgedragen. Hoezeer Uw ambtelijke arbeid U ook in beslag nam, steeds vindt gij gelegenheid mij met Uw raad bij te staan. Het verheugt mij zeer, in het openbaar te kunnen getuigen, welk een grooten invloed gij op mijn levensloop hebt gehad.

Hooggeachte Meester Iwema,

Hoewel de opleidingscursus beoogt een instituut te zijn voor de vorming van den landmeter in het algemeen, bestaat er toch een zeer nauwe band tusschen het Departement van Financiën en den Landmetercursus. Dat gij hier als vertegenwoordiger van den Heer Directeur Generaal der Belastingen aanwezig zijt, stel ik dan ook op hoogen prijs en ik ben dankbaar voor dit bewijs van sympathie.

Hooggeleerde Schermerhorn,

Toen gij mij Uw voornemen te kennen gaaft, hier bij deze plechtigheid tegenwoordig te zullen zijn, was dit voor mij een reden tot dankbaarheid. Het bewijst, dat gij dit landmeetkundige milieu de meest oprechte gevoelens van vriendschap toedraagt.

Voor mij persoonlijk beteekent Uw aanwezigheid hier zeer veel

en ik hoop mij steeds van Uw belangstelling voor mijn werk verzekerd te mogen achten.

*Heeren Ingenieurs-Verificateur van het Kadaster
en Oud-collega's,*

Het is mij van nabij bekend, hoe gij door Uw nauwe betrekkingen met den opleidingscursus voor Landmeters steeds met de meeste belangstelling de lotgevallen er van gadeslaat en ook is het mij bekend hoe niemand beter dan U kunt beoordeelen van welke beteekenis deze opleidingscursus is voor de landmeetkundige wereld en dus voor Uw wereld. Gij beschouwt den cursus als Uw cursus en uit geschiedkundig oogpunt terecht.

De vooruitgang der landmeetkunde in ons land is bijna uitsluitend te danken aan Uw werken en Uw rijen hebben de strijders er voor geleverd; ook de oprichting van dezen cursus was mede het gevolg van Uw onvermoeid streven.

In Uw midden heb ik 18 jaren van mijn leven doorgebracht, jaren die bij mij steeds in dankbare herinnering zullen blijven. Het is door den omgang met velen Uwer, dat ik mij heb kunnen vormen, en bij velen Uwer heb ik steeds een warme belangstelling mogen ondervinden voor de problemen die mij bezig hielden.

Ik hoop voortdurend in nauw contact met U te kunnen blijven om mij daardoor op de hoogte te kunnen houden van de stroomingen en de behoeften van de praktische landmeetkunde. De stimulansen toch voor de theoretische onderzoekingen liggen in het praktische leven. Uw steun en Uw sympathie zijn voor mij van het grootste belang, ik hoop dat U mij deze nimmer zult willen onthouden. Ik zal trachten mijn betrekking te vervullen op de wijze die gij van mij verwacht.

Heeren Ambtenaren van het Kadaster in Nederlandsch-Indie,

Op dit oogenblik gaan mijn gedachten ook naar U, die vanuit Uw verre gewesten met de meeste aandacht steeds het gebeuren hier gadeslaat.

Ik hoop U te toonen, dat ook Uw belangen bij mij veilig zullen zijn en het zal mij een aangename gedachte zijn, wanneer ik mij eveneens van Uw sympathie en steun verzekerd mag achten. Ik hoop van U in ruime mate te mogen ontvangen de wenken en inlichtingen, die ik noodig heb om het onderwijs zoo goed mogelijk te doen zijn en gaarne zal ik mij tot het uiterste inspannen om inderdaad dit doel te bereiken.

Heeren Studenten,

In mijn zoeven gehouden rede heb ik iets medegedeeld omtrent enkele problemen uit de landmeetkunde in de hoop daarmee Uw belangstelling te hebben aangewakkerd. Door verschillende omstandigheden zijn thans de vooruitzichten voor verschillenden onder U niet zoodanig, als men wel zou wenschen. Ik raad U aan U daar niet door te laten ontmoedigen. Wanneer de teekenen mij niet bedriegen, meen ik te zien een toeneming van bedrijvigheid op het gebied der landmeetkunde voor technische doeleinden, waarmede gepaard gaat een juistere waardeering van het nut van een wetenschappelijke opleiding in de geodesie. Waarschijnlijk ligt hier Uw toekomst, gij zult echter een belangrijke strijd hebben te strijden. Met des te meer aandrang moet ik U daarom aanraden, zooveel als in Uw vermogen ligt, U de tijd hier ten nutte te maken om U voor Uw zware taak voor te bereiden. Ik wil U daarbij helpen zoo veel ik kan, niet alleen door in de colleges, met U verschillende onderwerpen te behandelen, maar ook door U met mijn practische ervaring ter zijde te staan.