

IS WISKUNDIGE STATISTIEK WISKUNDE?

REDE

UITGESPROKEN BIJ DE AANVAARDING VAN HET
AMBT VAN HOOGLERAAR IN DE WISKUNDIGE
STATISTIEK AAN DE LANDBOUWHOGESCHOOL
TE WAGENINGEN OP 4 JUNI 1964

DOOR

DR. IR. L. C. A. CORSTEN



H. VEENMAN & ZONEN N.V. — WAGENINGEN

*Mijne Heren Leden van het Bestuur der Landbouwhogeschool,
Dames en Heren Hoogleraren, Lektoren, Docenten en Wetenschappelijke Medewerkers,
Dames en Heren Studenten,
en voorts Gij allen, die door Uw aanwezigheid
blijk geeft van Uw belangstelling,*

Zeer gewaardeerde Toehoorders,

Aan de statistici onder U zou het hebben kunnen opvallen dat het aantal hoogleraren aan de Landbouwhogeschool in de loop der jaren is toegenomen. Aan dit verschijnsel zal zeker het volgende drietal oorzaken hebben medegewerkt, te weten de steeds toenevende specialisatie in de beoefening der wetenschappen, de wenselijk geachte verdieping in de opleiding van landbouwkundige ingenieurs en het groeiend aantal studerenden. Mede ten gevolge van dergelijke oorzaken wordt vandaag voor het eerst het ambt van hoogleraar in de wiskundige statistiek aan deze hogeschool aangevaard.

Dat wij hier met een tijdsverschijnsel te maken hebben wordt geïllustreerd door het feit dat in zeer kort tijdsbestek ook aan andere instellingen van hoger onderwijs in Nederland soortgelijke gebeurtenissen, waarvan enige in het laatste halve jaar, hebben plaatsgevonden. Merkwaardigerwijs vernam men meestal andere namen, zoals toegepaste statistiek, toegepaste wiskunde, mathematische statistiek of theoretische biologie, om er de wetenschappelijke werkzaamheden, die tenminste de wiskundige statistiek omvatten, mee aan te duiden. Maar in hoofdzaak gaat het hier telkens om ongeveer hetzelfde vakgebied.

Evenmin als elders betekent hier de instelling van deze nieuwe leerstoel de invoering van een nieuw studievak. Immers reeds lang voor de tweede wereldoorlog begon Van Uven, de toenmalige hoogleraar in de wiskunde, kolleges en onderzoek in de wiskundige statistiek en de daarmee samenhangende onderwerpen. Ook Kuiper, Van Uven's opvolger en mijn leermeester, wijdde een belangrijk deel van zijn activiteit hieraan.

Dat de wiskundige statistiek door middel van een zelfstandige leerstoel verzorgd gaat worden, vindt in de eerste plaats zijn verklaring in de reeds eerder genoemde algemene oorzaken. Daarnaast zijn ook enige specifieke oorzaken aan te wijzen. Een daarvan is on-

getwijfeld het vaker gehoorde en als een versleten gemeenplaats klinkend argument, dat ook dit vak in toenemende mate van belang wordt geacht. Vervolgens is dit betrekkelijk jonge vak — afgezien van een langdurig embryonaal stadium toch naar mijn mening pas omstreeks veertig jaar oud — steeds sneller gegroeid en nog steeds in ontwikkeling, zodat het steeds moeilijker is geworden het slechts als een neventerrein met sukses te beoefenen.

Ter illustratie diene, dat de poging van Kendall om de theorie van dit vak in een tweedelig boekwerk van bijna duizend pagina's te kompilieren, ongeveer twintig jaar geleden nog wel min of meer geslaagd mocht heten. Van de onlangs, nu te zamen met Stuart ondernomen, heruitgave van dit werk in drie delen, waarvan er tot dusverre twee verschenen zijn, kan men dit niet meer zeggen. Verscheidene onderwerpen komen er bij de huidige stand van zaken veel te bekaaid vanaf en het ontbreken van een innerlijke eenheid, die zich zelfs uit door tegenspraken, toont aan dat niet alle nieuwe begrippen en samenhangen doorzien zijn. Ofschoon men door partiële kennis dergelijke gebreken kan vaststellen, geloof ik dat nauwelijks meer iemand in staat is het gehele gebied zo te beheersen, dat hij alleen het standaardwerk zou kunnen schrijven. De in vergelijking met twintig jaar geleden respectabele hoeveelheid literatuur, die nu telkenjare verschijnt, is, zelfs al is alles niet even waardevol en al treedt het element herhaling ook uitbundig op, niet door de eenling te verteren.

Een derde oorzaak hoop ik juist door mijn betoog van heden aan te geven en heeft te maken met de eigen aard van dit vak, of zoals sommigen, overigens zonder bezwaren van mijn kant, zullen zeggen, met zijn eigenaardigheid — dit laatste gespeld als één woord.

Laten wij ons allereerst bezighouden met de vraag wat wiskundige statistiek nu wel is. Ik zal daarbij geen poging doen tot het geven van een waterdichte definitie, liefst slechts één zin lang, maar geleidelijk enige aspecten belichten, het aan uw fantasie overlatend zich een wellicht nog wazig beeld te vormen. Ik sta hierbij in de vervelende positie, dat het door velen gekoesterde vermoeden dat dit vak met wiskunde te maken heeft, juist is, en dat ik daardoor een vanaf de middelbare school ten onrechte bestaande vrees, overtrokken eerbied of zelfs weerzin ten aanzien van dit onderwerp in de harten van velen onder U zou aantreffen, indien ik in die harten mocht schouwen. Het zal deze toehoorders nauwelijks een troost zijn, als ik mijn mening uitspreek, dat wiskundige statistiek niet uitsluitend wiskunde is.

Met wiskunde — dit is evenmin een definitie — bedoel ik dan dat schone vak waarin men, uitgaande van een stel axioma's, van onduidelijke definities en van goed geformuleerde afspraken van wat er aan logische gevolgtrekkingen toelaatbaar geacht wordt, beweringen ofwel stellingen kan uitspreken waarvan de juistheid

noodzakelijk volgt, dat is bewezen kan worden, met behulp van deze hulpmiddelen alleen. Dat men met deze stellingen tot een enorme hoogte kan opstijgen of, zoals men het ook wel uitdrukt, tot zeer diepe resultaten kan komen, waarin men de vaak gering in aantal zijnde axioma's nauwelijks meer herkent, is aan iedereen bekend.

De tak van de wiskunde waarvan de wiskundige statistiek zich in de eerste plaats bedient is de waarschijnlijkheidsrekening of kansrekening. De kansrekening is, ondanks alle associaties die het woord „kans” oproept met frivole bezigheden zoals roulettespel, dobbelen, wedden en kaartspelen, een zeer serieus beoefend en volwaardig onderdeel van de wiskunde. Zij is gebaseerd op een beperkt aantal intuïtief aansprekende axioma's, waarmee enige eigenschappen van het ding, dat kans zal heten, worden vastgelegd.

Kans is dan een getal op een bepaalde wijze toegekend aan onderdelen van een verzameling elementen, die genoemd wordt de steekproefruimte ofwel, in een meer schilderachtige taal, de „verzameling van alle mogelijke uitkomsten van een experiment”. De totale verzameling krijgt daarbij kans één toegekend. Het eenvoudigste voorbeeld is er een, ontleend aan de analogie met het werpen van een munt. De steekproefruimte zal dan bestaan uit slechts twee punten, nl. kruis of munt of, zo U wilt, 1 en 0, en wel met kansen p resp. $1-p$.

Met zulk een steekproefruimte kan men vervolgens de veel grotere steekproefruimte definiëren van zg. „onafhankelijke herhalingen van het experiment onder gelijkblijvende omstandigheden”, waarvan elk punt bestaat uit een rij van n opeenvolgende „uitkomsten”, en waarin de bij zulk een punt behorende kans gelijk is aan het gedurig produkt van de kansen behorende bij die individuele uitkomsten. Zo zal in ons voorbeeld met de munt voor $n = 3$ (d.i. drie worpen met dezelfde munt) het punt van de nieuwe steekproefruimte, dat correspondeert met achtereenvolgens kruis-munt-kruis werpen, een kans $p(1-p)p$ toegewezen krijgen.

In ditzelfde abstracte raam is nu de kans te berekenen op k keer kruis bij n worpen met de munt, ofwel op de fraktie k/n worpen kruis in n worpen. Als wij nu om de toegekende kans op kruis p een kleine marge maken bv. zich uitstrekkend van $p - 0,001$ tot $p + 0,001$, dan volgt verder uit de zg. sterke wet der grote aantallen der kansrekening, dat de fraktie kruis k/n bij toename van n , d.i. bij toenemend aantal worpen, met kans één op een zeker moment binnen die marge komt en daarna niet meer er buiten. Daarbij kunnen wij de breedte van die marge om de toegekende kans zo klein maken als wij maar willen.

Deze laatste konstatering laat zien, dat het tot dusverre abstracte begrip kans overeenkomt met datgene, wat wij er intuïtief van verwachten, namelijk, dat een mogelijke uitkomst van een experiment met kans p , in n herhalingen van dat experiment een fraktie van

optreden heeft, die wij met kans 1 net zo dicht bij die kans p kunnen brengen en houden, als wij maar wensen, indien wij het aantal herhalingen van het experiment maar voldoende groot maken. Hieraan ontlene wij de hoop met sukses kansrekening toe te passen in de ons omringende realiteit.

Zo kunnen wij met behulp van de kansrekening berekenen dat de tijd die men, elke sekonde kruis of munt gooiend met een zuivere munt d.i. met $p = 1/2$, gemiddeld zou moeten wachten totdat er 5 maal achter elkaar kruis komt, een minuut bedraagt. Maar meer nog, men zou dit experimenteel kunnen controleren en in orde bevinden. Deze behoefte aan controle zou natuurlijk verkoelen, als men zou moeten nagaan dat het wachten bij deze zelfde handelwijze op 20 maal kruis achter elkaar gemiddeld 24,3 dagen duurt, maar dit resultaat is er niet minder juist om.

Een van de belangrijkste begrippen uit de kansrekening is dat van de „stochastische variabele”. In puur wiskundige termen uitgedrukt is dat een meetbare afbeelding van de steekproefruimte op de verzameling van de reële of van de natuurlijke getallen. In voor de buitenstaander meer sprekende bewoordingen is dat de variabele die ontstaat door aan de mogelijke uitkomsten van een experiment getalswaarden toe te kennen. Zo kenden wij reeds in het voorbeeld van het werpen met een geldstuk aan kruis de waarde 1 en aan munt de waarde 0 toe. Aldus ontstaat een stochastische variabele, die met kans p de waarde 1 aanneemt en met kans $1-p$ de waarde 0.

Een andere stochastische variabele die wij in feite reeds beschouwen is het aantal keren kruis k bij n keer werpen met een munt. Deze stochastische variabele is er een die de waarden 0, 1, 2, en zo voort tot en met n , kan aannemen, elk met een in p uit te drukken kans.

Een derde stochastische variabele behorende bij het experiment, „het werpen met een munt”, zou kunnen zijn de kortste afstand tussen het midden van de neergekomen munt en de cirkelvormige rand van de ronde tafel waarop wij dit experiment uitvoeren, aangenomen dat worpen, waarbij de munt van de tafel valt, buiten beschouwing blijven. Men kan de kans dat de afstand tussen de 3 en 4 cm ligt beschouwen, maar ook de kans dat deze afstand tussen de 3,3 en 3,4 cm is.

Wij merken dus op dat deze laatste stochastische variabele in tegenstelling tot de twee voorgaande een heel continuüm van waarden kan aannemen tussen nul en de straal van de door het tafelblad gevormde cirkel. Bovendien blijken we bij hetzelfde experiment, bij dezelfde steekproefruimte verschillende stochastische variabelen te kunnen aanwijzen. Zulke stochastische variabelen of variabelen met een kansverdeling te zamen worden als geheel kortweg een stochastische vector genoemd.

Met dit laatste voorbeeld, de afstand van de munt tot de tafel-

rand, zijn wij al zeer dicht gekomen bij een situatie zoals de wiskundige statistiek die beschouwt. De wiskundige statistiek is namelijk ten dele een stuk toegepaste wiskunde, en wel een waarin toepassing van de kansrekening op de voorgrond staat.

Bij welke toepassing van wiskunde in de ons omringende realiteit ook, of dat nu gaat om de voortplanting van warmte in grond te beschrijven of om de invloed van een verandering in de vraag op de prijs van een vrij verhandeld produkt te bestuderen, begint men met wiskundig hanteerbare beschrijvingen op te stellen van de grootheden, die men in aanmerking wenst te nemen, en van hun onderlinge relaties. In het bijzonder worden de axioma's van het toe passen deel der wiskunde geldig verklaard. Vaak zijn deze beschrijvingen vereenvoudigend, maar naar men hoopt de werkelijkheid goed benaderend, soms, ofschoon goed benaderend, ook wat ingewikkelder, alleen maar om het geheel toegankelijker te maken voor krachtiger wiskundige hulpmiddelen.

In dit deel van beschrijvingen, het wiskundig model genaamd, kan het probleem dat van bv. chemische of economische aard was, worden vertaald in een wiskundige vraag, waarop soms de wiskunde ook een antwoord weet te geven. Dit antwoord kan weer terugvertaald worden in de taal van het vak, waarin de oorspronkelijke vraag gesteld werd. Het zal een goed antwoord zijn, als de opstelling van het model deugdelijk was. Blijkt het antwoord bij experimentele toetsing niet te kloppen, dan zijn er twee mogelijkheden. De eerste is dat het model ondeugdelijk is, vaak door al te vereenvoudigende veronderstellingen, hetgeen o.a. kan betekenen het over het hoofd zien van grootheden, die in de gestelde vraag van belang zijn. De tweede mogelijkheid is, dat er bij de hantering van de wiskunde fouten zijn gemaakt. Over deze laatste mogelijkheid zal ik verder nauwelijks spreken. Dit onderwerp leent zich niet zo wel voor een mondelinge bespreking en het is bovendien nogal vaktechnisch. Ik mag volstaan met de opmerking, dat nauwkeurige wiskundige analyse van dit deel van het proces aan het licht kan brengen, waar eventuele fouten schuilen.

Wiskundige statistiek is, zoals ik reeds zei, ten dele een stuk toegepaste wiskunde en wel toegepast op modellen, waarbij in de een of andere vorm stochastische variabelen een hoofdrol spelen. Het gaat hierbij altijd om een model voor een konglomeraat van waarnemingen of metingen, afkomstig van een experiment of een onderzoek, dat gedaan is of nog moet worden verricht. Stochastische variabelen treden in zulk een model op, doordat verondersteld wordt, dat het hele konglomeraat van waarnemingen, of stukken daarvan, metingen zijn aan een der mogelijke uitkomsten van een ander abstract experiment, zoals wij dat bij onze opmerkingen over de kansrekening reeds ontmoetten.

De noodzaak van zulk een veronderstelling is gelegen in de we-

tenschap of in het aan zekerheid grenzende vermoeden, dat opnieuw verzamelen van zulk waarnemingsmateriaal, bv. door opnieuw uitvoeren van een proef, tot resultaten leidt die verschillen van de vorige. Als men bv. op een tarweveld de lengte van tien halmen bepaalt, dan zal bij een nieuwe bepaling van de lengte van tien andere halmen een andere uitkomst verschijnen. Evenzo is het aantal woorden op pagina 7 van de gedrukte tekst van deze rede verschillend van die op pagina 12, al heb ik dat niet nageteld. Dit verschijnsel is een gevolg van wat genoemd wordt een natuurlijke variatie, waarvoor een exacte verklaring niet gevonden kan worden of, zo die al gevonden zou kunnen worden — in het voorbeeld der halmen door precieze kennis van genetische en uitwendige invloeden — wegens een te grote detaillering veelal onoverzichtelijk en oninteressant zou zijn. Zulke grootheden met natuurlijke variatie worden dus in het te gebruiken model voorgesteld als een stochastische vector. Natuurlijk is deze stochastische vector pas nader gedefinieerd, als vastgesteld is uit welke steekproefruimte hij afkomstig is.

Dit brengt ons tot het in de wiskundige statistiek zo belangrijk begrip populatie. In ons voorbeeld van de halmlengten zal het meestal niet gaan om de lengte van die tien halmen, waaraan de metingen verricht werden. Bij het aantal woorden op een bladzijde van een werk gaat het niet om dit aantal op de pagina's 7 en 12. Wij willen iets weten over een grote verzameling van dingen, zoals alle halmen op het tarweveld of alle bladzijden in een boek. Wij wensen op grond van de kennis van het bijzondere geval, het experiment of het onderzoek, iets te zeggen over het algemene geval. Wij wensen door een proces, dat in de wetenschap met inductie wordt aangeduid, tot algemene uitspraken te komen op grond van bijzondere gegevens; kort en onnauwkeurig gezegd, wij wensen te generaliseren.

Nu wordt de verzameling van dingen, waarover wij een algemene uitspraak wensen te doen, met de term populatie aangegeven. In het geval van de halmlengten kan zij zijn die tien bewuste halmen zelf; zij kan ook zijn alle halmen op een bepaalde vierkante meter, waar ook die tien halmen vandaan kwamen; zij kan ook zijn alle halmen op dat tarweveld als geheel; zij kan ook zijn alle halmen op alle tarwevelden van Nederland op hetzelfde tijdstip dat de tien te meten halmen genomen werden; zij kan ook zijn alle volgroeide halmen van alle tarwevelden in Nederland in de komende vijf jaren. En zo zou ik nog wel enige tijd kunnen doorgaan, bv. door beperkingen te maken naar ras of naar grondsoort. Belangrijk is slechts dat men zich duidelijk voor ogen moet stellen en vastleggen over welke populatie men tot algemene uitspraken wil komen.

Vervolgens wordt de steekproefruimte, die het bedoelde abstracte experiment beschrijft en waarvan het deel van het materiaal uit de

populatie waaraan waarnemingen verricht worden, een element voorstelt, gedefinieerd als alle mogelijke stukjes uit de populatie van dezelfde aard als dit speciale stukje, terwijl elk zulk een stukje een kans krijgt toegewezen gelijk aan zijn frekwentie van voorkomen in de populatie. De techniek, waardoor men zulk een abstrakt experiment realiseert, en met name er voor zorgt, dat elk stukje een kans heeft gelijk aan de frekwentie ervan in de populatie, wordt aselekte trekking, dat is trekking zonder voorkeur, genoemd.

In sommige gevallen kan men door verlotingsprocedures bewerkstelligen dat men met voldoende vertrouwen de wijze van vergaren van het waarnemingsmateriaal als aselekte trekking uit de te onderzoeken populatie mag beschouwen. In vele andere gevallen is dat niet zo duidelijk en moeten wij maar hopen dat de natuur, de techniek of de samenleving, die ons de gegevens in handen geeft, een aselekte trekking tot stand brengt uit de populatie die wij bedoelen te bestuderen. Anders gezegd, omdat men door de wijze van trekken aan de stukjes van de populatie kansen toekent en daarmee in omgekeerde richting een populatie definieert, is het steeds weer de vraag welke die nieuwe populatie is. Slechts over de populaties waaruit men aselekt trekt — want die bepalen de stochastische vectoren waarvan men uitkomsten ter beschikking heeft — kan de wiskundige statistiek uitspraken doen die hout snijden. Als dus die populatie een andere is, dan degene die wij eigenlijk bedoelen, dan kunnen wij tot geheel verkeerde konklusies komen. Het vaststellen uit welke populaties aselekt getrokken wordt, is in elk voorkomend geval een nieuwe vraag, die vaak slechts met kennis van vele andere zaken dan wiskunde kan worden beantwoord.

Dit is in het bijzonder een moeilijkheid in de situatie waarin de populatie een abstrakt karakter draagt. Zo is bij de beschouwing van economische gegevens op een bepaald tijdstip de populatie de nogal hypothetische en vaag gedefinieerde verzameling van de toestanden op ogenblikken, waarop zich soortgelijke omstandigheden voordoen als op dat bepaalde tijdstip. De onderhavige gegevens worden beschouwd als waarnemingen aan een aselekte trekking uit die populatie.

Hebben wij aldus aannemelijk gemaakt dat het opstellen van een wiskundig model het definiëren van populaties en de daarmee samenhangende stochastische variabelen en vectoren nodig maakt, daarmee zijn wij er nog niet. Er zullen veelal veronderstellingen worden ingevoerd omtrent de aard van de stochastische variabelen, bv. dat zijzelf of zekere functies ervan tot een zekere familie van variabelen behoren, waardoor zij, op een of meer onbekende konstanten n , parameters geheten, bepaald zijn — men denke aan de zg. normale variabelen die, op hun gemiddelde en spreidingsmaat n , bepaald zijn — of veronderstellingen dat hun gemiddelde waarde op de een of andere manier afhangt van andere, eveneens aan

het materiaal te meten grootheden, die al of niet als stochastische variabelen moeten worden opgevat, of dat de spreidingsmaat van een bepaalde eigenschap in de ene populatie een bepaald veelvoud is van die in een andere.

Vervolgens, en dat is binnen dit kader de moeilijkste opgave naar mijn mening, zal de vraag, of zullen de vragen, die men over de te bestuderen populatie stelt, een zodanige formulering moeten krijgen, dat er inderdaad een wiskundig-statistisch vraagstuk ontstaat. Dit betekent in feite steeds dat men streeft naar uitspraken over parameters van zekere stochastische variabelen behorend bij populaties.

Hierbij zijn uitdrukkelijk ook inbegrepen de vraagstukken die men met een slechte naam parameter-vrij noemt en waarbij men in feite de te bestuderen stochastische variabelen niet beperkt tot een klasse, waarin slechts een gering aantal parameters voorkomt, maar veronderstelt dat zij behoren tot een veel ruimere klasse.

Deze vaak moeizame vormgeving van de vragen vindt veelal plaats in lang overleg tussen de statisticus en de vraagsteller, die wij gemakshalve maar onderzoeker noemen. Want al zijn er al te veel zich onderzoeker noemende lieden die met een enorme werklust gegevens verzamelen en vervolgens, als het te laat is, zichzelf of aan anderen de vraag stellen tot welke konklusies over welk vraagstuk deze gegevens kunnen leiden, ook voor de goede onderzoeker, die meer doelbewust te werk gaat, is het vaak niet eenvoudig om ondubbelzinnig en ontdaan van de werkelijke en vermeende vanzelfsprekendheden, die tot zijn vakgebied behoren, zijn probleem met inbegrip van de veronderstellingen en de konsekwenties ervan te formuleren. Daarbij komt dat de problemen vaak ook pas in de loop van de onderzoekingen, inclusief de statistische, een vastere of een andere dan de aanvankelijk gedachte vorm aannemen.

Mij bewust van het feit, dat ik in het voorgaande impliciet eisen stel aan onderzoekers, en wel de eis van tijdig helder denken en heldere communicatie, moet ik van de andere kant van de zijde van de statisticus een geduldig inlevingsvermogen en de capaciteit tot het verstaan van de taal van de onderzoeker als noodzakelijk stellen. De statistiek komt namelijk in een steeds uitgebreider deel der wetenschappen ter sprake en tot toepassing.

Was de naam statistiek aanvankelijk in gebruik voor wat men nu noemt de beschrijvende statistiek, d.i. het compleet verzamelen van cijfermateriaal over economisch van belang zijnde grootheden, van statistieken dus, zoals in onze dagen het Centraal Bureau voor de Statistiek nog steeds mede als opdracht heeft, datgene, wat wij wiskundige statistiek noemen, vond het eerst vooral toepassing in de astronomie en de landmeetkunde, en wel onder de naam foutenvereffening; het stochastisch element werd hier namelijk gevormd door de onvermijdelijke meetfouten. Dit onderdeel vond ook wel

een veelal zeer bescheiden plaats in de fysika en de chemie. Het vak begon echt uit te groeien in wisselwerking met de biologie, de psychologie en de landbouwwetenschappen. In verband met dit laatste wil ik opmerken dat een van de grootsten, zo niet de allergrootste op het terrein van de wiskundige statistiek, de nog slechts onlangs overleden Engelsman Fisher, gedurende vele jaren verbonden was aan een landbouwkundig proefstation en mede door de aldaar aangepakte problemen geïnspireerd werd tot bijdragen, waarvan men de sporen telkens weer aantreft. Vervolgens zijn ook de economie, de techniek en de technologie in toenemende mate van statistiek gebruik gaan maken en hebben omgekeerd de statistiek verrijkt. Ook in de medische wetenschappen en in de sociologie ziet men een soortgelijke ontwikkeling. De eerste aarzelende stappen van toepassing in een specifiek alpha-terrein, namelijk de taalwetenschappen, zijn zelfs gezet. Een en ander hangt samen met de toenemende behoefte aan kwantificering, ook in die wetenschappen, waarin dat vroeger ongebruikelijk was, en waarin dat zelfs nu nog wel als oneerbiedige aantasting wordt beschouwd. Het is intussen wel een boeiende zijde van dit vak, dat men daarbij met de problemen in zo uiteenlopende gebieden van wetenschap en met hun beoefenaren in aanraking komt.

De wiskundige statistiek is ten duidelijkste een hulpwetenschap, die zich ten doel stelt konklusies te trekken over populaties op grond van waarnemingsmateriaal met stochastisch karakter. De met behulp van statistiek getrokken konklusies zijn derhalve konklusies in het vak van toepassing, en worden daardoor niet anders van aard dan de op andere gronden getrokken konklusies. Opmerkingen, die een tegenstelling suggereren tussen statistische konklusies en wetenschappelijke konklusies, wijzen op onbegrip van de inderdaad niet altijd even eenvoudige statistische gedachtengang. Ik moge zelfs beweren dat zg. algemene inductieve konklusies op natuurwetenschappelijk, economisch of sociologisch terrein, wellicht intuïtief, van een statistische gedachtengang gebruik maken. Van de andere kant moge ik daaraan meteen toevoegen, dat zulk een intuïtieve gedachtengang wel eens zo ingewikkeld van aard kan zijn, dat de statistiek die een dergelijke gedachtengang tracht te formaliseren, nog niet altijd de daarvoor vereiste apparatuur ter beschikking heeft.

Ik wil niet beweren dat men voor elke beoordeling van waarnemingsmateriaal expliciet statistiek nodig heeft. Er zijn namelijk legio gevallen, waarin de konklusie zo voor de hand ligt, dat het inschakelen van deze hulpwetenschap een overbodigheid zou vormen. Van de andere kant zijn er ook legio gevallen, waarin men zulk een vertrouwen in de absolute betekenis van zekere uitkomsten heeft en daarmee het stochastische karakter ervan over het hoofd ziet, dat men niet alleen uitglijdt, maar zich nog ernstig bezeert ook.

Waar komt dan het wantrouwen, dat men wel eens bespeurt tegen deze methode, uit voort? Voor zover dat voortkomt uit onbekendheid met de wiskunde die er aan te pas komt, ga ik daaraan voorbij. In tegenstelling tot de statistische vakman, behoeft men daarin toch niet zo diep te graven, om althans de bedoelingen te verstaan. Het leren kennen van het elementaire gedachtenpatroon is daartoe meestal voldoende.

Ik dacht dat ondervonden teleurstelling echter ook een rol speelt. En zonder de statisticus, die zoiets, naar ik hoop onbewust op zijn geweten heeft, een hand boven het hoofd te willen houden, zou ik daaraan meteen willen toevoegen, dat een onderzoeker moet meedenken over de toelaatbaarheid van de onvermijdelijk te maken veronderstellingen, over het passend zijn van het gestelde statistische probleem bij de vraag, die de onderzoeker voor de geest zweeft, en over de logika in de gedachtengang. Als er iets verschijnt dat, zoals men dat noemt, strijdig is met het gezond verstand, dan is dat een waarschuwing, dat er met de zojuist genoemde dingen iets verkeerd gegaan is, en zou het kortzichtig zijn de wiskundige statistiek daarvan te betichten. Bij de beoefening van dit vak is overigens het inschakelen van gezond verstand voortdurend aan te bevelen.

Het behoeft ook niet verwonderlijk te zijn dat verschillende statistici bij hetzelfde probleem niet tot dezelfde konklusies komen. De een zal met zijn veronderstellingen verder durven gaan dan de ander, de een zal een methode en daarom een probleemstelling kiezen, die volgens hem beter gericht is op de door de onderzoeker voorgelegde vraag dan wat de ander kiest, de een ontdekt iets aan de gegevens of de tussenresultaten wat de ander ontgaat en tenslotte, ofschoon de statistiek objectivering nastreeft, zelfs bij het kiezen van dezelfde methode moet men de gevolgen van verschillende soorten mogelijke fouten in de konklusies tegen elkaar afwegen, hetgeen de een anders zal doen dan de ander. Men zou omtrent dit laatste kunnen tegenwerpen, dat die objectivering dus maar schijn is en op een ander punt de subjektieve voorkeuren welig laat tieren, m.a.w. de subjektieve invloed slechts naar een ander punt verlegt. Dat is dan toch niet helemaal juist, want men moet kwantitatief kenbaar maken, hoe de bedoelde afweging is geschied.

Men moet natuurlijk ook weer niet te grote verwachtingen hebben. Weliswaar is, zoals gezegd, de beschikbare hoeveelheid hulpmiddelen steeds omvangrijker geworden, maar de werkelijkheid is te ingewikkeld en veelzijdig dan dat hiermede alle vragen min of meer beantwoord kunnen worden. Er zijn verscheidene vragen die, ofschoon wiskundig geformuleerd, nog geen antwoord hebben en misschien ook wel niet kunnen krijgen. Daarnaast zijn wij steeds genoodzaakt ten opzichte van de werkelijke problemen vereenvoudigingen te maken ter wille van de wiskundige hanteerbaarheid en

dat niet alleen ten aanzien van het model, maar ook ten aanzien van de wijze waarop konklusies tot stand komen. Ik zal daarop zo meteen nog terugkomen.

Wel wil ik in dit verband niet nalaten een opmerking omtrent de zwaarte van de in dit vak gebruikte wiskunde te laten horen afkomstig van Bose. Of deze ook betrekking had op de kansrekening dan wel alleen op andere takken der wiskunde weet ik niet, maar de opmerking hield in, dat kennisneming van slechts de eerste vijftientwintig inleidende bladzijden in een wiskundig werk onmiddellijk aanleiding kan geven tot nieuwe ontwikkelingen in de wiskundige statistiek. De kern van waarheid in deze opmerking is gelegen in het feit, dat men in dit vak weliswaar nogal eens een beroep doet op zeer sterk uiteenlopende delen der wiskunde, maar daarbij in verscheidene gevallen niet tot zulk een diepte komt, dat een zuiver wiskundige daarover in opwinding geraakt.

De statistische problemen kunnen wij op dit ogenblik in hun doelstelling — en dat is dus niet in hun uitwerking, waarbij de meest gevarieerde onderdelen der wiskunde in elementaire tot gevorderde vorm een rol spelen — indelen in drie klassen, nl. die van het toetsen van hypothesen, die van het schatten en die van het determineren. Over deze drie onderdelen, waartussen de scheiding overigens ook weer niet absoluut is en die integendeel onderling sterk verweven zijn, moge ik enige algemene opmerkingen maken.

Het toetsen van hypothesen, dat ik in dit bestek niet volledig kan uiteenzetten, maar waar menigeen wel van gehoord heeft, beoogt een uiteraard stochastische uitspraak te geven of een vooraf opgestelde veronderstelling omtrent de populatie al of niet verworpen dient te worden. Deze veronderstelling, nulhypothese genoemd, houdt vaak in zijn eenvoudigste vorm de afwezigheid of het nul zijn van een eigenschap in, bv. afwezigheid van afhankelijkheid, van korrelatie, van verschillen in effekt tussen twee of meer behandelingen, het ondeugdelijk zijn van teeltmateriaal, enz. De bedoeling is dat men bij eventueel verwerpen van die nulhypothese op grond van het waarnemingsmateriaal tot een alternatief konkludeert, zoals: er is afhankelijkheid, er is korrelatie, er is verschil in effekt, het materiaal is deugdelijk, enz. Veelal gebeurt dit door middel van een procedure, waarbij de kans op het verwerpen van de nulhypothese, terwijl zij geldig is, d.i. de kans op een bepaalde fout, beheerst wordt, beneden een vooraf gekozen grens wordt gehouden. Tevens tracht men de kans op het verwerpen van een nulhypothese zo groot mogelijk te maken als inderdaad het alternatief geldig is.

Het schatten heeft betrekking op de onbekende waarden van de parameters die in het wiskundig kansmodel voorkomen. Het is het berekenen van uitdrukkingen of funkties van de waarnemingsuitkomsten, dat zijn dus in feite waarden van stochastische variabelen, die men, bij gebrek aan betere kennis, gelijk stelt aan de onbekende

parameterwaarden bij verdere beschouwingen over de populatie; men bereikt daarmee tevens een vaak aan de statistiek toegeschreven doel, nl. het kondenseren van uitvoerig cijfermateriaal. Natuurlijk tracht men deze stochastische variabelen, schatters genaamd, zo gunstig mogelijke eigenschappen te geven, die op de een of andere manier moeten inhouden, dat de kans op grote verschillen tussen werkelijke waarde en schatting klein zal zijn.

Een nauw bij de toetsing van hypothesen aansluitende schattingsmethode is die der betrouwbaarheidsgebieden. Dat is het bepalen van een gebied, stochastisch van karakter, dat uit al die mogelijke parameterwaarden bestaat, die bij toetsing als nulhypothese niet verworpen worden.

Het determineren is het kiezen van een model voor een populatie uit een beperkt aantal vooropgestelde mogelijkheden hiervoor. Men denke bv. aan de vraag tot welk van een beperkt stel bekende rassen een veldje aardappelen van een onbekend ras behoort. In tegenstelling tot de situatie bij het toetsen, staan die mogelijkheden min of meer gelijkwaardig tegenover elkaar: men wenst hier steeds een positieve keuze te maken in plaats van hetzij een alternatief te kiezen hetzij zo een keuze achterwege te laten. Hier zal men op de een of andere manier de kansen op fouten of de konsekventies daarvan minimaal willen maken.

Bij elk van deze drie klassen van problemen treedt, naast de reeds gekonstateerde onzekerheden, nl. allereerst omtrent de juistheid van het wiskundige model, ten tweede omtrent de geslaagdheid van de vertaling van een wetenschappelijke vraag in een wiskundig probleem, een derde reeds aangeduide onzekerheid op nl. dat van de keuze van criteria.

Bij het toetsen evenals bij het determineren dient men met betrekking tot de toelaatbaarheid van foute konklusies de kansen op fouten op direkte wijze of, via de onderlinge beoordeling van dergelijke fouten op een gemeenschappelijke basis, op indirecte wijze aan banden te leggen. Men stuit dan allereerst op de vraag hoeveel de ene fout ernstiger dan de andere is en, na een antwoord daarop, hoe deze kansen en deze zwaarte van konsekventies kunnen worden verwerkt in een rationeel criterium, waarmee men bovendien kan verder werken. Zo kennen wij dan tenslotte criteria als dat van Neyman en Pearson, dat bij vasthouden van één soort kans op fouten de andere tracht te minimaliseren, voorts het criterium, dat de gemiddeld te verwachten slechte gevolgen van fouten minimaal maakt, en ook het minimax criterium, waarbij het gevaar voor de zwaarste schade die zou kunnen optreden, zo klein mogelijk wordt gemaakt. Voorts kent men methoden waarbij men uit alle mogelijke procedures een redelijk schijnende deelverzameling kiest en slechts daarbinnen zulk een criterium toepast. Daartoe behoren bv. methoden die kans-invariant zijn voor een of meer groepen van

transformaties van de stochastische vector, of methoden die in een specifieke betekenis zuiver zijn.

Soortgelijke keuzemogelijkheden zijn er bij het schatten. Zo treden als criteria op: het minimaal maken van zekere parameters van de stochastische variabele, die het verschil tussen de schatter en de te schatten grootheid aangeeft, met als bijzondere gevallen, het minimaliseren oftewel nul maken van de gemiddelde waarde daarvan — wij krijgen dan de zg. zuivere schatters — of het minimaliseren van de mediaan daarvan, hetgeen er op neer komt, dat men zorgt dat er evenveel kans is op een afwijking naar boven als naar beneden. Voorts kan men ook weer de gemiddeld te verwachten slechte gevolgen minimaal maken, met als bijzonder geval de schatter die het gemiddelde van het kwadraat van de fout minimaliseert, de zg. kleinste tweede moment schatter, of een die de kans op het optreden van fouten boven een zekere marge minimaal maakt. Ook hier kan beperking tot zekere redelijk lijkende deelverzamelingen van mogelijkheden optreden. Als bekendste voorbeeld noemen wij de kleinste tweede moment schatters onder de zuivere, ook genoemd de nauwkeurigste zuivere schatters.

Het is dus niet zonder meer duidelijk welk van zulke criteria in een gegeven situatie het meest voor de hand ligt. Het feit dat men in heel wat gevallen dan maar dat criterium kiest, dat tot een wiskundig hanteerbare vraag en oplossing leidt, wijst in de eerste plaats op de noodzaak dat het wiskundige apparaat vrij aanzienlijke uitbreiding nodig heeft. Maar ook wijst dat erop dat eigenlijk nog lang niet altijd de gewenste formalisering van het konklusies trekken, iets wat de wiskundige statistiek toch nastreeft, bereikt is.

Zo is het ook zeer de vraag of de drie globaal beschreven methoden nl. toetsen, schatten en determineren, hoe krachtige middelen ook, in alle gevallen adequaat zijn. Ik bedoel hiermede bv. ten aanzien van het toetsen niet verder voedsel te geven aan de nog al eens vernomen gedachte, dat de formele statistische toets voor de praktijk van weinig belang zou zijn, dit in tegenstelling tot schatten. Integendeel, bij het al of niet stapsgewijze opstellen van een wiskundig model, dat de te schatten parameters bevat, zal juist statistische toetsing een betere leidraad zijn voor de uiteindelijke keuze van dit model dan intuïtie en ervaring alleen. Dat geldt zelfs in die gevallen waarin door een opeenstapeling van dergelijke toetsingen de uiteindelijke kans op fouten niet precies kan worden overzien; immers het leidt tot nieuwe inzichten en ideeën omtrent het te onderzoeken probleem, maakt tenminste de gedachtengang minder subjectief en verhoogt de onderlinge vergelijkbaarheid van konklusies uit soortgelijk onderzoek.

Met het eventueel inadequaat zijn van de genoemde methoden denk ik o.a. aan het ad hoc karakter van de statistische konklusies, met name van het toetsen en het determineren, dit in tegenstelling

tot de konklusies, die door samenvoeging van allerlei in die richting wijzende aspecten een meer definitief karakter dragen en pas door andere vervangen worden, als er duidelijke feiten aan het licht komen die tot herziening of andere interpretatie van de vroegere konklusies nopen. Dit ad hoc karakter komt tot uiting in het feit dat het bij die klassieke methoden niet zo eenvoudig is de a-priorikennis, laat staan vermoedens, in het model op te nemen.

Hiermede hangt ook samen de sinds enige tijd weer bespeurbare onzekerheid inzake de betekenis van betrouwbaarheidsgebieden. Ook hier doet men alsof men van de te schatten parameters niets weet, terwijl vaak het tegendeel het geval is. Bovendien zijn parameterwaarden die men niet afwijst, daarom nog niet erg geschikt, of zeg maar betrouwbaar, als schatting, maar ten hoogste waarden waar men onverschillig tegenover staat. Vandaar dat zulk een gebied, ten opzichte van datgene wat de naam suggereert, er nogal groot, te groot uitziet. Daarnaast is men in vele gevallen met de vorm van dergelijke gebieden niet erg gelukkig, evenmin als met het gebrek aan differentiatie van de mate van betrouwbaarheid binnen zulk een gebied, terwijl men er toch iets van deze aard in wenst te lezen.

De zeer ernstige pogingen om begrippen als fiducial inference, Bayes-methoden, a-priori-verdelingen, eventueel zelfs met betrekking tot een ander praktisch begrip kans dan wij zoëven introduceerden, nl. het subjektieve of persoonlijk kansbegrip, volledig te begrijpen en met de als klassiek aanvaarde methoden te verzoenen, zullen hier wellicht een wenselijke verrijking betekenen.

In het voorgaande heb ik iets, van wat er in de wiskundige statistiek omgaat, laten zien en door op een bij deze bijeenkomst te verklaren nadruk op de niet-wiskundige aspecten een indirecte antwoord gegeven op de vraag of wiskundige statistiek alleen maar wiskunde is. Ofschoon de verleiding groot is bij het onderwijs in dit vak alleen aandacht te schenken aan het alleszins belangrijke aspect wiskunde, hoop ik toch ook juist aan dat andere, het manoeuvreren met de gesignaleerde onzekerheden, gepaste aandacht te besteden, al ben ik mij ervan bewust dat juist hier niet pasklare recepten maar moeilijk overdraagbare ervaring en reflectie de juiste weg moeten wijzen. Als men hier iets van inziet, zal men de statistiek niet misbruiken als vlag, die een publikatie op, naar men meent, tegenwoordig vereiste maar in feite nietszeggende wijze moet illustreren, niet gebruiken als kapstok waaraan men met verkeerde argumenten konklusies ophangt, en ook niet, bij gebrek aan vak-kennis, in de plaats willen laten treden van onderzoek in zijn vak. Want, wanneer toegepast, is de wiskundige statistiek een hulpwetenschap, en in die vorm zelfs een zeer doeltreffend gereedschap. Daarnaast gebeurt er ook veel onderzoek binnen de wiskundige statistiek om wille van het vak zelf: zo immers wordt de vooruit-

gang erin ten sterkste gediend. Ik beschouw het tevens als mijn taak om, naast de medewerking aan deze vooruitgang, er naar te streven de reeds bereikte oplossingen van wiskundige problemen in dit vak op hun bruikbaarheid voor de feitelijke toepassing in de vele wetenschappen, die met landbouwwetenschappen worden aangeduid, te doen onderzoeken of daarvoor rijp te maken.

Aan het einde van deze rede gekomen, betuig ik mijn eerbiedige dank aan Hare Majesteit de Koningin, die mij in het ambt van hoogleraar heeft willen benoemen.

Mijne Heren Leden van het Bestuur der Landbouwhogeschool,

Naar de redenen, die U hebben geleid tot het voornemen tot instelling van een nieuwe leerstoel in de Wiskundige Statistiek, heb ik in het voorgaande gegist. Met het feit van die instelling ben ik het, zoals gebleken is, geheel eens. Dat U aan dat voornemen het besluit hebt verbonden mij voor dit ambt voor te dragen, vervult mij met dankbaarheid voor het vertrouwen, dat U blijkbaar in mij stelt. Ik hoop tenminste iets waar te kunnen maken van de verwachtingen, die U klaarblijkelijk van mij koestert in deze positie, die ik ten dele en daarom met schroom zie als een voortzetting van het werk van twee grote voorgangers.

Dames en Heren Hoogleraren der Landbouwhogeschool,

Naar ik hoop zal het nog onwennige voorrecht, dat ik mij tot Uw kring mag rekenen, zowel voor U als voor mij gunstige gevolgen hebben. Misschien kan ik U wel eens van dienst zijn, van de andere kant bloeit de wiskundige statistiek juist bij impulsen van de zijde der wetenschappen die om haar diensten vragen.

Hooggeleerde Kuiper,

Het is mij bekend dat U de toevoeging van lovende bewoordingen aan Uw adres niet bemint. Laat ik om Uw tegenspraak straks, na afloop van deze rede, te ontgaan, het aldus formuleren, dat U, onder degenen die buiten mijzelf direkt hebben bijgedragen tot mijn wetenschappelijke vorming, inclusief het heden in de openbare belangstelling geplaatste stadium, verreweg de eerste plaats inneemt. Juist omdat ik dat nu eenmaal niet als vanzelfsprekend kan zien, wil ik hier openlijk van mijn grote dankbaarheid en bewondering getuigen voor het vele goede op uiteenlopend gebied, dat ik van Uw zijde ondervonden heb. Vaak betreur ik het, dat door het uiteenlopen van onze wegen het hartverwarmende en inspirende contact met U minder frekwent is geworden, heeft moeten worden. Ik beschouw dat als een verlies, dat ik toch zo veel mogelijk zou willen beperken.

Hooggeachte van Rootselaar en Justesen, Dames en Heren Medewerkers in de Afdeling Wiskunde der Landbouwhogeschool,

De ervaring, die ik in werk en omgang reeds met U heb gehad, met sommigen reeds over een lange reeks van jaren, wettigt mijn vertrouwen dat het binnen de Afdeling Wiskunde weer goed werken zal zijn. Soepele samenwerking en belangstelling voor elkaar zorgen ongezoekt voor de sfeer waarin de wetenschap gedijen kan. Ik hoop van mijn kant aan zulk een sfeer bij te dragen.

Mijne Heren Hoogleraren vakgenoten, niet aan de Landbouwhogeschool verbonden,

Gaarne grijp ik deze gelegenheid aan om te kennen te geven, hoezeer ik de contacten met U, die in sommige gevallen de vorm van vriendschap hebben aangenomen, op prijs stel. Van de voortzetting en de versteviging daarvan verwacht ik veel goeds.

Hooggeleerde Hamaker,

Onder de zojuist toegesprokenen neemt U voor mij een bijzondere plaats in. De tijd dat ik bij U heb mogen werken in de Groep Statistiek van het Natuurkundig Laboratorium der N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken, totdat ik naar deze plaats geroepen werd, is kort, te kort geweest. Maar zij was lang genoeg om vast te stellen, hoe aangenaam en veelzijdig, niet alleen in als direkt nuttig herkenbare arbeid, maar ook in wetenschappelijk opzicht, het werk bij zulk een instelling kan zijn, zeker als men te maken heeft met iemand als U. Ik dank U en Uw medewerkers voor het vele waardevolle, dat ik in die Groep heb ondervonden.

Hooggeachte Groenewolt,

In U dank ik allen, die daarvoor in aanmerking komen, voor de uiterst leerzame jaren gedurende welke ik bij het Instituut voor Rassenonderzoek van Landbouwgewassen heb mogen werken. Gaarne denk ik terug aan de prachtige teamgeest in Uw instituut en aan de mogelijkheid aldaar om, naast de vervulling van een stringente taak, een ontwikkeling in academische vrijheid door te maken. Deze beide goede dingen schrijf ik voor een groot deel aan Uw meestal stille invloed toe.

Dear Members of the Faculty of the Department of Statistics at the University of North Carolina,

The sixteen months of study and research which I spent with you under partial support of the Netherlands Organization for Pure Research continue to be a highlight in my life. I am most grateful for your contributions to my development as well as for your fine friendship.

Vader en Moeder,

Ik ben blij en dankbaar, dat U beiden deze vooral voor U grote dag van dichtbij moogt beleven.

Dames en Heren Studenten,

Ofschoon de eerste reden van mijn aanwezigheid op deze plaats gevormd wordt door U, is het gebruikelijk dat, bij een gelegenheid als deze, U het laatste woord krijgt, althans om naar te luisteren. Er bestaan enige zegswijzen in onze taal, die U met deze situatie kunnen verzoenen. Bovendien bent U in een voortdurende training tot wakker blijven bij uiteenzettingen van deze tijdsduur.

In alle ernst echter hoop ik dat de kennismakingstijd met de wiskundige statistiek, die voor bijna allen van U verplicht is in de vorm van het vak wiskundige verwerking van waarnemingsuitkomsten, een bron van vreugde voor U mag zijn, zo al niet op dat moment zelf, dan toch daarna. Want zowel de wiskundige aspecten ervan, als de vanmiddag zwaarder benadrukte niet-wiskundige hebben een grote algemeen vormende waarde. Een voor de Wageninger aangename bijkomstigheid bestaat hierin, dat dit vak nog nuttig is ook, niet alleen voor degene die ik gemakshalve onderzoeker noemde, maar ook voor ieder die met onderscheidingsvermogen van wetenschappelijke publikaties, of die nu een hoog of minder hoog niveau hebben, gebruik wenst te maken. En wie van U zal daartoe niet behoren? Als er onder U een kleine groep zal zijn, die zich in ruimere mate aan de genoegens van dit vak wenst over te geven, zal mij dat verheugen.

Het is niet zonder reden, dat ik het element vreugde in de studie zo op de voorgrond plaats. Het doet mij pijn, als men de studie slechts als een noodzakelijk kwaad op zijn levensweg blijkt te beschouwen. Bij alle gepraat over lange studieduur en zware eisen huldig ik het wellicht reaktionair geachte standpunt, dat te veel studenten de gelegenheid waarnemen een te groot deel van de hun gegeven tijd te verdoen met beuzelarijen; U hebt daar een korter woord voor.

Ik geloof dat de studentenverenigingen, die ik om hun mogelijkheden tot vorming in godsdienstig en kultureel opzicht en tot persoonlijk contact, naar ik hoop ook met mij, een warm hart toedraag, kunnen bijdragen tot een verbetering van die houding. Met name zou men aan de vanzelfsprekendheid, waarmee men aan het uitoefenen van een functie of activiteit een groot verlies van studietijd verbindt, een einde kunnen maken door het nastreven van een gelukkig huwelijk tussen de studie en die activiteit, en daarbij niet te aarzelen de uitwassen te verwijderen. Kort gezegd: Durft anders te leven!

Ik heb gezegd.