met wiskunde

de natuur in

door prof. dr. ir. J. Grasman

Landbouwuniversiteit

MET WISKUNDE DE NATUUR IN

door prof.dr.ir. J. Grasman

Inaugurele rede uitgesproken op 6 december 1990
bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar
in de Wiskunde, inclusief de Numerieke Wiskunde
aan de Landbouwuniversiteit te Wageningen

MET WISKUNDE DE NATUUR IN

Mijnheer de rector, dames en heren

Wiskunde aan de Landbouwuniversiteit is een ondersteunend vak. Van medewerkers van de vakgroep Wiskunde wordt in de eerste plaats verwacht dat zij de studenten de nodige wiskundige vaardigheden bijbrengen. Ook het geven van wiskundige en statistische adviezen aan onderzoekers van andere vakgroepen behoort tot de algemeen gewaardeerde taken. Het is minder bekend dat wiskundig onderzoek op de ons omringende natuur gericht kan zijn en daardoor op een direkte wijze kan bijdragen aan de oplossing van problemen op het gebied van landbouw en milieu.
Bij deze gelegenheid wil ik graag enkele ontwikkelingen in die richting onder uw aandacht brengen. Wiskundige modellering van processen, die zich in de ons omringende natuur afspelen, is een terrein van onderzoek dat meer en meer gestalte krijgt en dat een belangrijke bijdrage kan leveren aan de verdere uitbreiding van onze kennis van die natuurlijke processen. De mathematische fysica, met als belangrijke komponent de stromingsleer, kwam in de eerste helft van deze eeuw tot bloei. In de vijftiger jaren deed zich een vergelijkbare ontwikkeling in de biologie voor, die leidde tot de biomathematica als thema van onderzoek op het grensvlak van twee disciplines. Gekonstateerd moet worden dat het exakt gerichte onderzoek van de levende materie zich niet ontwikkeld heeft als in de fysica met z'n relativiteitstheorie, quantummechanica en elementaire deeltjestheorie. Het ontbreken van kennis van mogelijke onderliggende basiswetten, zoals de wet van Newton in de fysica, is, naar zich laat vermoeden, hiervoor verantwoordelijk.

De wiskunde van vandaag is daarmee nog onvoldoende toegerust om zich een geheel eigen rol toe te meten in de analyse van processen die zich afspelen in de natuur. Toch wordt op dit moment getracht vele aspekten van die natuur in formules tot uitdrukking te brengen. Daarin is men bij de beschrijving van fysische verschijnselen het meest suksesvol.

Meteorologie

Zo is het gebruik van wiskundige formules in de weersvoorspelling ver ontwikkeld. De circulatie van onze atmosfeer wordt beschreven door de zogeheten Navier–Stokes vergelijking, aangevuld met formules voor temperatuur en vochtigheid. Zouden we op een zeker moment voor elke plek op aarde de waarde van alle variabelen, zoals de druk en de wind, kennen, dan kan door oplossing van de vergelijking de toestand van de atmosfeer voor de daarop volgende periode bepaald worden. De vraag dringt zich op waarom zo'n weersvoorspelling niet altijd uitkomt. Een verklaring zou kunnen zijn dat de toestand van de atmosfeer niet op elk punt op aarde bekend is; er zijn slechts een beperkt aantal meetpunten. Tot in de zeventiger jaren dacht men dat dit, én de beperkte kapaciteit van de computers, de enige belemmeringen waren die de perfekte weersvoorspelling in de weg stonden. Door het baanbrekende werk van E.N. Lorenz[1] heeft zich bij fysici en wiskundigen een beeld gevormd van de bijzondere eigenschappen die de oplossing van de Navier–Stokes vergelijking kan hebben. De vergelijking, in zijn algemeenheid ook wel het dynamische systeem genoemd, blijkt gevoelig te reageren op willekeurig kleine verstoringen in de begintoestand. Dit brengt met zich mee dat het

gedrag van de atmosfeer in de tijd geen enkele regelmaat vertoont; het is chaotisch en op langere termijn onvoorspelbaar. Een nadere analyse van modellen, welke van een hogere orde zijn dan die van Lorenz, laat zien dat in die chaos een zekere orde aanwezig is. Het modelsysteem vertoont voorkeurstoestanden, welke gerelateerd kunnen worden aan bestaande voorkeurscirculatiepatronen van de werkelijke atmosfeer, door meteorologen "Grosswetterlagen" genoemd. Als wiskundige geeft het mij veel voldoening om op dit gebied te kunnen bijdragen in gezamenlijk onderzoek[2] met de groep "Voorspelbaarheidsonderzoek" van het KNMI, geleid door J.D. Opsteegh.
De gevoelige afhankelijkheid van de circulatie wordt het vlinder-effekt genoemd: de luchtverplaatsing ten gevolge van de fladdering van een vlinder in bijvoorbeeld Peking beïnvloedt binnen veertien dagen de circulatie op elke plaats de aardbol rond. Waarom werd dit niet eerder ontdekt; wetenschappers bestuderen al tientallen jaren stromingen in media aan de hand van de Navier-Stokes vergelijking? De reden is waarschijnlijk gelegen in het feit dat in de technische wetenschappen men zich bij voorkeur met reguliere stroming bezig hield: onvoorspelbare stromingen, turbulenties, waren ongewenst bij een vliegtuigvleugel of een scheepsschroef.
Het is niet zo dat de vlinder van Lorenz op een dag vanuit de blauwe hemel ons gezichtsveld binnen fladderde. In zijn inaugurele rede, gehouden aan de Vrije Universiteit, spreekt de geofysicus P. Groen[3] in 1952 al over het onstabiel zijn van de begintoestand van de atmosfeer en wijst hij op het fundamentele karakter ervan. Hij schetst daarbij hoe kleine verstoringen in de grotere tijd- en ruimteschalen doorwerken. De rede van Groen met als

titel "Over de grenzen van de voorspelbaarheid in de natuur" bevat een opmerkelijke passage over de voorspelbaarheid in relatie tot veranderingen in geofysische processen tengevolge van "de steeds toenemende bewerking en vervorming van het aardoppervlak door de mens". Die veranderingen hebben veertig jaar later een zeer konkrete invulling gekregen. Veranderingen in het klimaat ten gevolge van het broeikaseffekt en de mogelijk daarmee gepaard gaande zeespiegelrijzing zouden we graag correct willen voorspellen en vervolgens door het nemen van maatregelen ook willen beheersen. Echter de dynamica van het klimaat heeft veel gemeen met die van het wisselvallige weer; het is een vergelijkbaar proces op een langere tijdschaal, zodat het voorspellen van klimaatveranderingen aan overeenkomstige beperkingen onderhevig is. Waarschijnlijk spelen hier niet-lineaire instabiliteiten een doorslaggevende rol.

Reactie-diffusieprocessen

Irregulier, chaotisch gedrag komt op grote schaal voor: het is vele processen in de natuur eigen. Ook reactie-diffusieprocessen kunnen chaotisch gedrag vertonen. Voor deze processen en voor stromings-problemen speelt eenzelfde afgeleide vergelijking, de Ginzburg-Landau vergelijking, een belangrijke rol. Het wiskundig onderzoek naar de geldigheid van deze modulatie-vergelijking en naar de oplossing ervan is in een stroomversnelling geraakt. Ik noem in dit verband onderzoek dat verricht wordt te Utrecht door W. Eckhaus en zijn medewerkers*.
De studie van reactie-diffusievergelijkingen vormt één van de zwaartepunten van het wiskundig onderzoek van biologische processen. Het was de chemicus

A.M. Turing[5], die in 1952 het idee ontwikkelde dat dergelijke processen verantwoordelijk kunnen zijn voor het ontstaan van vormen en structuren in organismen. Dit concept werd in de zeventiger jaren uitgewerkt door I. Prigogine[6] en zijn medewerkers. Nog steeds wordt op grote schaal onderzoek op dit gebied verricht. In de beginfase werden vooral verschijnselen uit de ontwikkelingsbiologie gekozen, zoals het celdifferentiatieproces in een embryo. Ook regeneratie–experimenten met lagere organismen, zoals de hydra, leverden uitkomsten welke met de reactie–diffusietheorie verklaard konden worden. Veronderstelt men dat de voortgang van de ont–wikkeling van een organisme vastgelegd is in een voortschrijdende parameter, dan is het mogelijk dat bij toename van die parameter in de stationaire oplossing van het reactie–diffusieproces kwalitatieve veranderingen optreden. Dit wordt in de wiskunde aangeduid met bifurcatie. De wijze waarop opper–vlakken zich kunnen ontvouwen als functies van één of meerdere parameters laat zien, welk type bifurcaties men kan verwachten. Deze tak van wiskundig onderzoek, de katastrofetheorie, bracht bij z'n introductie grote opwinding te weeg. De manier waarop de grondlegger ervan, René Thom[7], zijn resultaten met de mogelijke toepassingen in de ontwikkelingsbiologie uitdroeg, heeft aan die opwinding bijgedragen. De Engelse onderzoeker Christopher Zeeman[8] ging nog verder door het geven van zeer spectaculaire, doch minder verantwoorde, toepassingen van de katastrofetheorie in de gedragswetenschappen en de economie. Het leidde ertoe dat deze theorie min of meer uit de gratie raakte. In de gemeenschap van exakte onderzoekers is men voorzichtig geworden met het enthousiast binnenhalen van een nieuwe theorie die omgeven wordt door berichten met een sensationeel karakter. Toen recentelijk de chaostheorie zich op vergelijkbare wijze presenteerde waren er onderzoekers die dit slechts als een herhaling van het katastrofenavontuur zagen; men kon het al in de overeenkomst van de benaming zien. De chaostheorie is echter gekoppeld aan een wezenlijk nieuw fenomeen: de vreemde aantrekker. Deze vorm van stationair gedrag past in de rij van tot dan toe bekende gedragingen van dynamische systemen, te weten: evenwicht, periodieke beweging en quasi-periodieke beweging. Naast de eerder genoemde gevoelige afhankelijkheid van beginwaarden, heeft de vreemde aantrekker een tweede kenmerk. In de toestandsruimte heeft de verzameling van punten waaruit de aantrekker is opgebouwd, een niet-gehele, fractale dimensie. Dit verbindt de chaostheorie met de fractale geometrische theorie van Benoit Mandelbrot[8].

Alvorens we dieper op chaos en fractals ingaan, houden we ons nog even bezig met de reactie-diffusieprocessen. Naast een mechanisme voor het ontstaan van vormen en structuren, is aan deze processen ook het verschijnsel verbonden van lopende golven die met konstante snelheid door een aktief medium lopen. De activiteit van het medium kan zeer divers zijn. We kunnen denken aan een verbrandingsproces: een lont die met konstante snelheid opbrandt, of een kaars. We kunnen echter ook denken aan de verspreiding van een ziekte, zoals de pest die in 1347 in Genua uitbrak en met een snelheid van circa 750 kilometer per jaar door Europa trok.

Het basismodel voor de lopende golf, gedragen door actoren, werd in 1933 ontwikkeld door de geneticus en tevens grondlegger van de landbouwstatistiek

R.A. Fisher[10]. Het model beschrijft de verspreiding van een nieuw genotype over een biologische populatie.
In gezamenlijk onderzoek van de vakgroep Fytopathologie van de Landbouwuniversiteit en het Instituut voor Theoretische Biologie te Leiden is aangetoond, dat ook de verspreiding van plantenziekten, zoals gele roest bij tarwe, voldoet aan het lopende golf model. Dit onderzoek leidde tot een proefschrift van de hand van F. van den Bosch. Hierin komt o.a. het verband aan de orde dat er bestaat tussen de snelheid van de verspreiding van de schimmelziekte gele roest en de samenstelling van het tarwemengsel, dat voor een deel bestaat uit voor die ziekte vatbare planten. Overigens niet-vatbare planten zijn weer vatbaar voor andere ziekten, zodat een afdoende oplossing niet onmiddellijk voor de hand ligt. Het samengaan van reactie en diffusie is ook van toepassing op het fysiologisch proces van de voortplanting van een electrische puls langs de uitlopers van een zenuwcel. Deze ontdekking van Hodgkin en Huxley[12] in 1952 gaf het vertrouwen, dat wiskundige formules zinvol gebruikt kunnen worden in het onderzoek van biologische processen. Wel is het zo, dat die biologische processen dermate gecompliceerd zijn, dat een exakte weergave in formules niet mogelijk is. Hodgkin en Huxley gebruikten benaderende formules voor het toen nog niet in detail bestudeerde proces van transport van ionen door het membraan van de zenuwcel. De konklusie lijkt gerechtvaardigd, dat veelal van een biologisch verschijnsel vastgesteld kan worden tot welke klasse van processen het behoort. Binnen zo'n klasse kan een eenvoudig modelprobleem als vertegenwoordiger fungeren en men bestudeert dan kwalitatieve

eigenschappen van het biologisch proces aan de hand van zo'n gekozen representant, zoals de vergelijking van Fisher bij reactie-diffusieprocessen.

Cyclische processen

Beschouwen we processen die periodiek in de tijd verlopen, dan kent ook die klasse zijn representant: de Van der Pol vergelijking. Het was de Nederlander Balthasar van der Pol, verbonden aan het Natuurkundig Laboratorium van Philips, die in 1926 een zichzelf in stand houdende oscillatie in een electronisch netwerk ontdekte[13] welke voldoet aan een tweede orde niet-lineaire differentiaalvergelijking. Van der Pol vermoedde dat deze bijzondere, sterk niet-lineaire oscillatie, die hij de naam relaxatietrilling gaf, zich vooral in fysiologische en meer algemeen in biologische processen voordoet. Bij de bestudering van onderling gekoppelde Van der Pol oscillatoren treden vormen van synchronisatie aan het licht, die we ook in biologische processen waarnemen, zoals het gecoördineerd samentrekken van cellen van de hartspier. Bij het wiskundig analyseren van onderlinge synchronisatie van oscillatoren zijn voor mij de biologische verschijnselen een bron van inspiratie geweest[14]. In het bijzonder Winfree's beschrijving[15] van de wijze waarop vuurvliegjes in Zuid-Oost Azië elkaars ritme van periodiek opgloeien beïnvloeden, gaf me het idee hoe in het algemeen gekoppelde sterk niet-lineaire oscillaties in wiskundige formules gevat zouden kunnen worden. Ook gekoppelde oscillatoren kunnen zich chaotisch gedragen. Het was Van der Pol zelf die reeds in 1927 met Van der Mark bij een periodiek aangedreven oscillator bijzondere synchronisatie-verschijnselen

waarnam[1 9]. Het bleek dat bij een gegeven instelling van de parameters van het electronisch circuit twee verschillende periodieke oplossingen mogelijk waren, afhankelijk van de begintoestand. Ook vonden zij voor veranderende waarden van de parameter bij de overgang van de ene periodieke oplossing naar de andere een bijzondere, irreguliere oplossing. Van der Pol zette de electronische oscillaties om in akoestische signalen: periodieke oplossingen gaven een zuivere fluittoon en de irreguliere een ruisachtig gekraak. Uitgaande van de wiskundige theorie van dynamische systemen konkludeerden aan het einde van de veertiger jaren J.E. Littlewood en N. Levinson, dat in de aangedreven Van der Pol vergelijking een hele bijzondere oplossing verborgen is, die de twee periodieke oplossingen scheidt.
Pas in 1967 was het wiskundig gereedschap voor handen om deze oplossing te analyseren. Het was S. Smale die speciaal voor dit doel een afbeelding formuleerde waarmee het bestaan van irreguliere, chaotische oplossingen bewezen kon worden. Deze zogeheten hoefijzer-afbeelding bleek van fundamenteel belang voor de ontwikkeling van de chaostheorie.

Singuliere storingstheorie

Nu ik over wiskundig gereedschap spreek, wil ik uw aandacht vragen voor het gereedschap dat ik zelf altijd binnen handbereik heb: de storingstheorie. Van de Amerikaanse mathematisch fysicus G.F. Carrier werd gezegd, dat hij erg beperkt was omdat hij alleen singuliere storingsproblemen kon oplossen. Maar, werd vervolgens er aan toegevoegd, hij was wel in staat om ieder probleem tot een singulier storingsprobleem te transformeren. Dit laatste klinkt erg onwaarschijnlijk. Ik ben echter bereid om de bewering in een iets afgezwakte vorm over te nemen: aan bijna ieder probleem is met de storingstheorie een zinvolle bijdrage te leveren. Als leerling in de school van Eckhaus heb ik mij bekwaamd in de theorie van singuliere storingen en heb ondervonden dat resultaten verkregen met de storingstheorie op een eigen wijze bijdragen aan de oplossing van een probleem. De methode geeft een kwalitatief beeld van die oplossing; hiervoor zijn numerieke methoden veelal niet toereikend. Echter ook in kwantitatief opzicht kan storingstheorie met numerieke methoden concurreren als het gaat om problemen met scherpe grenslagen, die we kunnen ontmoeten in bijvoorbeeld stromingen in media of reactie-diffusieprocessen. Verder kunnen we denken aan processen met meerdere tijdschalen, zoals die optreden in de enzymkinetiek of bij de eerder genoemde relaxatietrillingen. Het is niet zo, dat men storingstheorie mechanistisch op elk zich voordoend probleem kan loslaten. Van de toepasser wordt telkens opnieuw enige mate van inventiviteit verwacht. De beste aanzet voor een storingsontwikkeling ligt opgesloten in de aard van het probleem. Boeiend is het vraagstuk van de "matching"; dit is de aansluiting van lokaal geldende storingsoplossingen. In het bijzonder bij niet-lineaire differentiaalvergelijkingen kunnen zich onverwachte complicaties voordoen. Voor de Van der Pol relaxatie-oscillator was dit in 1947 uitgewerkt door de Russische wiskundige A.A. Dorodnicyn. Toen ik samen met Herman Bavinck in 1968 bij gelegenheid van een cursus aan het Mathematisch Centrum deze berekeningen verifiëerde, ontdekten we enkele tekortkomingen, die alleen rechtgezet konden worden door invoering van een extra grenslaag, daarmee het benodigde aantal lokale storingsoplossingen op vijf brengend. Het was de Zwitserse wiskundige J. Waldvogel die voor de Van der Pol oscillator, door een geschikte keuze van toestandsvariabelen, dit aantal weer tot drie kon reduceren. Ook gebruikte hij formule manipulatie, daarmee bedreef hij als één van de eersten storingstheorie met de computer. Formule–manipulatie software voor meer algemeen gebruik is thans voor een ieder beschikbaar in de vorm van pakketten als Maple en Mathematica. Dit roept de vraag op, of we de studenten bij het calculuscollege nog moeten lastig vallen met zaken zoals de bepaling van primitieven van allerlei min of meer bedachte functies. De eerlijkheid gebiedt me deze vraag met nee te beantwoorden. Daar moet dan wel tegenover staan, dat wij de studenten helpen, om op een verantwoorde manier met die pakketten om te gaan. Verder is uiteraard enige basiskennis wel gewenst, zoals de student ook kennis moet hebben van exponentiële en logaritmische functies, die hij op zijn zakrekenmachientje intoetst.

Chaotische dynamica

Chaotisch gedrag van een systeem is al enkele malen aan de orde geweest. Wat houdt dit eigenlijk in? Om dit nader te omschrijven, is het allereerst nodig om op te merken, dat de toestand van een dynamisch systeem op een bepaald tijdstip vastgelegd wordt door de waarde die de systeemvariabelen op dat moment hebben, ze vormen de toestandsvektor. Een dynamisch systeem wordt bepaald door een formule waarmee men de toestandsvektor op een tijdstip berekent uit de toestandsvektor op het voorgaande tijdstip. Voor een fysisch systeem dat energie verliest, bijvoorbeeld

door wrijving, zal de rij van toestandsvektoren, die men verkrijgt door herhaalde toepassing van de formule, naar een vaste waarde convergeren: de rusttoestand van het systeem. Systemen die energie met hun omgeving uitwisselen, kunnen periodiek gedrag vertonen. Dat ook irregulier, chaotisch gedrag tot de mogelijkheden behoort is nog niet zo lang bekend[17]. Een systeem dat die eigenschap heeft, is niet noodzakelijkerwijs erg gecompliceerd. Noodzakelijk is wél, dat het niet-lineair is.
Eigenlijk zijn vrijwel alle natuurlijke processen niet-lineair. Daarmee wordt de wiskunde geconfronteerd met een toepassingsgebied, waarvoor het slecht geëquipeerd is. De wiskunde van lineaire relaties is een bouwwerk, dat een zekere volledigheid bezit en waarin elk probleem geplaatst kan worden. De niet-lineaire theorie heeft dat niet. Zoals eerder opgemerkt, werkt men veelal met een eenvoudig model, dat kwalitatief het gedrag van een klasse van problemen vertegenwoordigt. In de chaostheorie is dat de kwadratische formule, ook wel logistische iteratie-afbeelding genaamd. Het chaotische gedrag van dit systeem werd voor het eerst in 1973 gesignaleerd door Robert May[18]. Hij deed dit in het tijdschrift Nature met een artikel getiteld "Simple mathematical models with very complicated dynamics". De logistische iteratie-afbeelding fungeert daarin als model voor de verandering van de dichtheid van een biologische populatie. Kenmerk van het model is dat de groeicoëfficiënt lineair afneemt met de dichtheid. Voor konstante groeicoëfficiënt a voldoet de dichtheid van de populatie N op tijdstip t aan

$$N(t) = aN(t-1),$$

d.w.z. dat voor $a>1$ de populatie toeneemt met een vaste faktor a ten opzichte van het voorgaande tijdstip. Dit is het exponentiële groeimodel opgesteld in 1789 door de Engelse dominee Malthus. In het logistische model wordt de formule

$$N(t) = \alpha.\ (1-N(t-1))N(t-1).$$

Afhankelijk van de waarde van α. kan het systeem een evenwicht naderen, periodiek worden of zich chaotisch gedragen. Zoals opgemerkt is dit een modelprobleem waaraan veel onderzoek verricht werd en nog steeds verricht wordt. Ik wil nu dit voorbeeld gebruiken, om te laten zien hoe met behulp van wiskundige modellen van fysische en biologische processen, voorspellingen gemaakt kunnen worden en aan welke beperkingen die voorspellingen onderhevig zijn.
Bij het voorspelbaarheidsprobleem van het weer werden we geconfronteerd met een voorspelbaarheidsgrens in de grootte orde van twee weken. Dit verschijnsel zien we terug bij de logistische iteratie-afbeelding in het chaotische domein van de parameter. Is de populatiedichtheid op het begintijdstip $t = 0$ gegeven: $N(0) = N_0 < 1$, dan kunnen we met de kwadratische formule $N(1)$ bepalen en uit $N(1)$ vervolgens $N(2)$ en zo verder. We kunnen hiervoor een personal computer met een nauwkeurigheid van, naar we aannemen, 8 decimalen gebruiken. We laten de populatiedichtheden afdrukken voor $t = 1$ tot en met $t = 100$ en geven hiermee een voorspelling voor het populatiedichtheidsverloop over de eerste honderd tijdstappen. Voeren we echter de berekening iets anders uit, door bijvoorbeeld N^2 van N af te trekken, dan blijkt de voorspelling anders uit te vallen. Een nadere bestudering van de verschillen leert, dat de

onderlinge afwijking groeit met iedere tijdstap en dat bij de vijfentwintigste stap zelfs de eerste decimaal verschillend is. Dit houdt in, dat onze voorspelling slechts tot vijfentwintig tijdstappen kan gaan. Dit is onze voorspelbaarheidshorizon. Maken we gebruik van de waarschijnlijkheidsrekening, dan is het toch mogelijk over de verwachte waarden achter de horizon een uitspraak te doen. Omdat het effekt van een beginwaarde verdwenen is, kunnen we ervan uitgaan dat het proces stationair is: het is op z'n vreemde aantrekker aangekomen. Bij zo'n stationair proces hoort een zekere kansdichtheids-verdeling van de mogelijke waarden op een zeker tijdstip. Willen we een uitspraak doen over de kans dat op $t = 100$ het eerste cijfer achter de komma gelijk is aan 4, dan integreren we de stationaire verdeling over het interval (0.35, 0.45). We kunnen ook om een ander type voorspelling vragen. Gegeven een klein start-interval en een doel-interval. Na hoeveel iteraties komt het chaotisch systeem van een punt in het start-interval in het doel-interval terecht, aannemend dat het doel-interval niet met kans 1 getroffen wordt vòòr de voorspelbaarheidsgrens bereikt wordt? Herhalen we het experiment met de startwaarde variërend binnen het start-interval dan blijkt het benodigde aantal iteraties bij benadering exponentiëel verdeeld te zijn[19]. Bijna ongemerkt zijn we bezig om met een deterministisch systeem stochastisch gedrag te beschrijven. Het deterministisch systeem vertoont gevoelige afhankelijkheid van de beginwaarden, waardoor de eindtoestand niet met zekerheid te voorspellen is, zoals ook een opgegooide dobbelsteen een deterministisch systeem is met een onzekere uitkomst. Kijken we om ons heen dan zien we ook in de natuur hetzelfde stochastisch gedrag als dat van onze chaotische iteratie-afbeelding. De cyclus van de biologische cel heeft een duur, waarin naast een konstante komponent, een variabele komponent voorkomt. Uit observaties blijkt dat de rustfase, áangeduid met G1, per cel verschilt. De statistische verdeling van de duur van deze fase is exponentiëel. Dit heeft geleid tot het overgangswaarschijnlijkheidsmodel voor de cel waarin de fase G1 verlaten wordt met een vaste waarschijnlijkheid per tijdsinterval. Nemen we aan dat de intracellulaire processen een dynamica hebben, vergelijkbaar met die van de chaotische logistische iteratie-afbeelding, dan kunnen we ons voorstellen, dat de G1-fase verlaten wordt als een intracellulaire stof een zekere drempelwaarde overschrijdt. Hiermee ruilen we het stochastische overgangswaarschijnlijkheden model in voor een niet-lineair deterministisch drempelwaardemodel[20], hetgeen beter aansluit op ons beeld van de fysische werkelijkheid waarin systemen volgens een eenduidig voorschrift evolueren. Ook in de atmosfeer zien we die exponentiëel verdeelde wachttijd terug in het tijdsinterval tussen twee zware stormen, of tussen twee stormvloeden aan onze Noordzeekust.

Informatiefunctie

Het is niet zo dat noodzakelijkerwijs de invloed van de beginwaarde achter de voorspelbaarheidshorizon geheel verdwenen is. Om dit aan te tonen introduceren we een functie uit de communicatietheorie: Shannon's entropiefunctie. Deze informatiefunctie is een maat voor de onzekerheid dat het systeem in een bepaalde toestand is. Hieruit kan weer een andere functie afgeleid worden, welke een maat is voor de hoeveelheid informatie over de begintoestand, die in een latere toestand is opgeborgen. Bij de logistische iteratie-afbeelding zien we de informatie over de begintoestand per tijdstap uit elke decimaal, van achteraf, wegschuiven, zoals de uitkomsten van de twee verschillende berekeningen per iteratie verder uit elkaar gaan lopen. Er zijn echter ook iteratie-afbeeldingen[20] waarin informatie over de begintoestand toch nog een langere tijd in alle decimalen aanwezig is. Het is echter op een zo laag nivo dat alle decimalen onbetrouwbaar zijn. Het antwoord wordt dan terzijde gelegd, het ligt achter de voorspelbaarheidshorizon. We weten ons geen raad met de informatie die we nog wel in handen hebben. Toch zijn er wetten voor die informatiestroom in een systeem, die vergelijkbaar zijn met de gebruikelijke fysische behoudswetten. Als er bijvoorbeeld informatie over de begintoestand verdwijnt, dan komt er andere informatie uit de omgeving voor in de plaats: informatie over hoe de computer afrondt of over hoe het probleem geprogrammeerd is. Het berekenen van de informatiefunctie vereist voor een eenvoudig systeem reeds veel rekentijd. Voor meer gecompliceerde systemen zijn dergelijke berekeningen alleen uitvoerbaar met behulp van een supercomputer. Dit is een gebied waar voor de wiskunde en informatica een uitdaging ligt. Het zijn echter vooral de fysici die thans op dit gebied het meest actief zijn.

Denken we aan toepassing van Shannon's entropie-functie in een ander probleem, het comprimeren van data waarin beelden van bijvoorbeeld satellieten zijn vastgelegd, dan liggen ook daar mogelijkheden voor wiskundigen en informatici. Zo wordt de functie gebruikt, om bij reductie van het aantal grijstinten,

de intervallen zo te kiezen dat de informatie vastgelegd in het beeld maximaal is[21]. De meest extreme keuze is de digitalisering van het beeld in witte en zwarte pixels.
Op het punt van data–compressie van beelden is er reeds een belangrijke aanzet vanuit de wiskunde gemaakt: beelden met een fractale structuur, zoals bijvoorbeeld van een wolkenformatie, kunnen vastgelegd worden in een fractie van het aantal getallen dat nodig is om het beeld pixel voor pixel te coderen. De wiskundige M. Barnsley[19], verbonden aan het Georgia Institute of Technology te Atlanta, heeft hiertoe het begrip "geïtereerd functie systeem" geïntroduceerd en de nodige software voor beeldanalyse ontwikkeld. Het geïtereerde functie systeem is een bijzonder dynamisch systeem. In plaats van met toestandsvektoren werkt het met beeltenissen. Na een voldoende aantal iteraties levert het een eindbeeld, vergelijkbaar met het aantrekkende evenwicht van een dynamisch systeem. Dit eindbeeld is onafhankelijk van de keuze van het eerste beeld. Het eindbeeld ligt dus opgesloten in het functie–systeem. Andersom kan bij een gegeven beeltenis een functiesysteem opgesteld worden welke een eindbeeld genereert dat die beeltenis benadert. Barnsley legt de procedure hiervoor vast in z'n collagestelling.

Het rekenen met neurale netwerken

Een tweede uitdaging voor wiskundigen en informatici ligt op het gebied van de niet–lineaire signaal–analyse: de neurale netwerken. Het neurale netwerk kan in hardware of software op een computer geïnstalleerd worden. Zoals de naam al aangeeft, heeft de werking van de hersenen model gestaan voor

Figuur 1. Varenblad als eindbeeld van een geïtereerd functiesysteem. Het functiesysteem wordt vastgelegd door slechts 24 getallen.

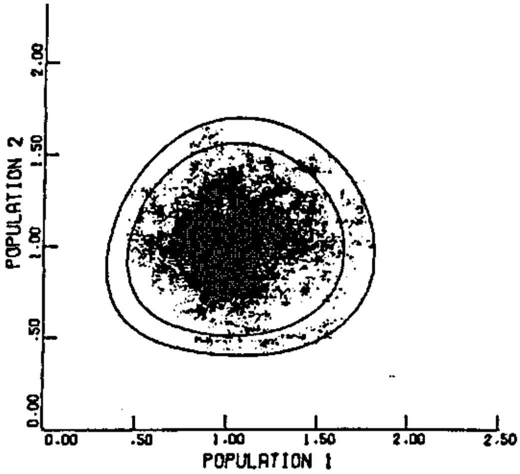
deze methode van probleem oplossen met behulp van de computer[20]. Taken voor een groep hersencellen, zoals het opslaan van een beeld, worden uitgevoerd door versterking van de synaptische verbindingen tussen cellen. Dit legt een patroon vast. Het is heel goed mogelijk dat patronen elkaar overlappen. De sterkte van een verbinding op één punt laat zich dus niet direkt vertalen in een taak die daaraan verbonden kan zijn. Zo is het ook met het neurale netwerk. Door aan de input-neuronen een signaal aan te bieden en de output te vergelijken met de gewenste output, kan in de leerfase, door middel van het opleggen van een boetefunctie, het systeem dié verbindingen versterken, die de actuele output zo dicht mogelijk bij de gewenste output brengt. Een dergelijk systeem is uitermate geschikt voor de herkenning van patronen in beelden en geluiden. Opgemerkt kan worden dat

nieuwe toepassingen zich in snelle opeenvolging aandienen. Voor landbouw en milieu verdient één hiervan aandacht. Het betreft de analyse van watermonsters op de aanwezigheid van verschillende algensoorten met behulp van een flow cytometer. Aanbieding van het signaal aan een neuraal netwerk levert een betrouwbaar antwoord, er van uitgaand, dat we het netwerk het juiste leerproces hebben laten doorlopen.
Tenslotte zou ik als mogelijk toepassingsgebied van neurale netwerken het milieu-onderzoek en de modellering van ecologische systemen willen noemen. We hebben hier te maken met modellering in onzekerheid. Onzekerheden in de keuze van het model en bij een gekozen model onzekerheid over het mogelijke waardebereik van de parameters. Dit waardebereik van parameters en toestandsvariabelen is zo groot dat niet-lineaire effekten niet verwaarloosd mogen worden. Een analyse van het systeem, gelineariseerd in de omgeving van zijn meest waarschijnlijke oplossing, houdt deze effekten verborgen. Het neurale netwerk, een intrinsiek niet-lineair systeem, weet hier wél raad mee. Het is echter niet uitgesloten dat het, bij gebrek aan voldoende informatie, creatief een eigen interpretatie geeft, die beduidend kan afwijken van de werkelijkheid.

Diffusiebenadering van stochastische processen

Van de neutrale netwerken wil ik nu terugkeren naar de diffusieprocessen. Eerder in mijn betoog betrof diffusie de ruimtelijke verspreiding van materie of organismen. Bestuderen we de onzekerheid in de positie van de toestandsvektor van een dynamisch systeem ten gevolge van willekeurige verstoringen,

dan is ook hierin een belangrijke rol weggelegd voor een diffusievergelijking: de Fokker–Planck vergelijking.
In plaats van naar een oplossing van deze vergelijking te zoeken kan men het proces met z'n onzekerheden op de computer nabootsen. Weten we de positie van de toestandsvektor op het begintijdstip dan kunnen we de waarschijnlijke positie op een later tijdstip bepalen door bijvoorbeeld 1000 maal uit het beginpunt te vertrekken. Op een later tijdstip vormen de 1000 punten een wolk, de kansdichtheidsverdeling. Deze onzekerheid over de positie van de toestandsvektor kan vérstrekkende gevolgen hebben, als de wolk een gebied van de toestandsruimte raakt waar het systeem anders functioneert. Nemen we een ecologisch systeem met als toestandsvektor de dichtheden van de deelnemende populaties, dan kan een populatie uitsterven als de wolk het vlak raakt waar de dichtheid van die populatie nul is (zie figuur 2). Het bleek H. Roozen[26] mogelijk dergelijke kansen uit de Fokker–Planck vergelijking met analytische methoden te berekenen. U vermoedt het misschien al: singuliere storingstheorie biedt ook hier een uitkomst. De standaardstoringstheorie laat ons echter met een onbepaalde konstante achter. Dit probleem werd reeds in de zestiger jaren gekonstateerd. De remedie bestond uit een bewerkelijk alternatief dat alleen voor gewone differentiaalvergelijkingen uit te voeren was. Het idee om het halfopgeloste probleem als variationeel probleem te herformuleren[27] maakte het mogelijk om ook partiële differentiaalvergelijkingen, zoals de stationaire Fokker–Planck vergelijking, aan te pakken. Z. Schuss[28] breidde tenslotte de methode uit tot niet zelfgeadjungeerde elliptische vergelijkingen, die geen variationele



Figuur 2. Mogelijke prooi–roofdier dichtheden ten gevolge van willekeurige geboorte en sterfte, uit H. Roozen[2*].

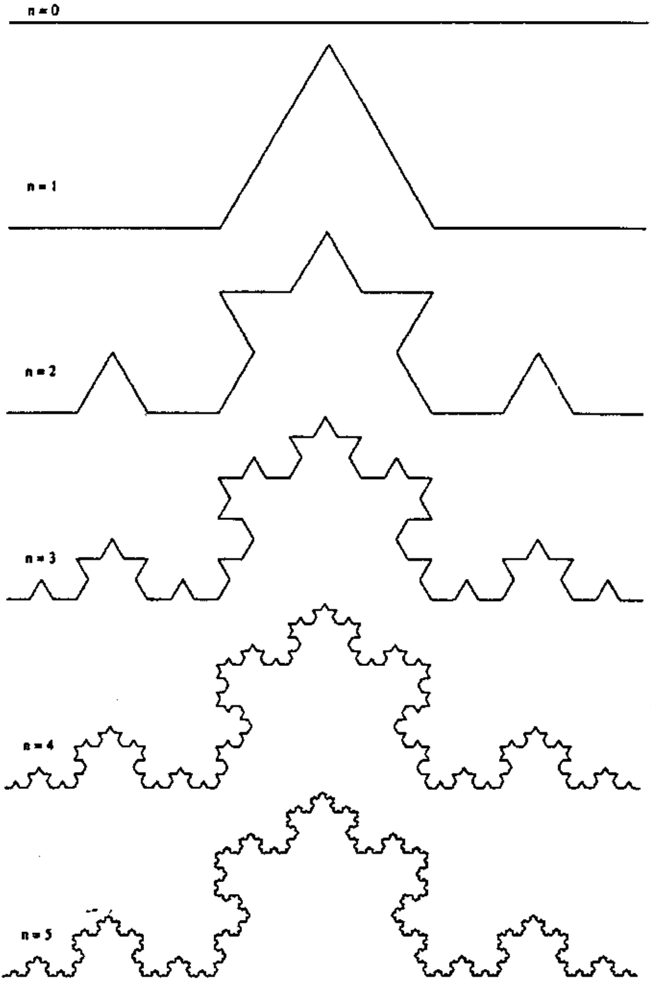
formulering toelaten. Zo is de Fokker–Planck vergelijking in de stochastische populatiedynamica van dit type. In zijn proefschrift, dat hij op deze plaats enkele maanden geleden verdedigde, laat Roozen zien dat deze methode niet alleen in de ecologie maar ook in de mechanica toepasbaar is.
Binnen de vakgroep Wiskunde in Wageningen wordt dit onderzoek voortgezet in een nieuw toepassingsgebied: de grondwaterstroming. Voor de bepaling van de verspreiding van schadelijke stoffen in het grondwater, kan niet volstaan worden met de berekening van het stromingspatroon. Vanwege de dispersieve eigenschappen van de stroming, kan een deeltje van het gemiddelde stromingspatroon afwijken. De vergelijking die dit beschrijft is van het type

Fokker–Planck vergelijking. De analytische methoden, ontwikkeld voor deze vergelijking, maken het mogelijk een uitspraak te doen over de mate waarin een bron van verontreinigingen een nabij gelegen drinkwaterput vervuilt waarbij slechts een minimaal gebruik van de computer gemaakt hoeft te worden[29,30].

Fractals

De excursie, waarop ik u meegenomen heb langs wiskundige methoden die bruikbaar zijn in de beschrijving van natuurlijke processen, wil ik eindigen bij de fractals.
Fractals, die meetkundige figuren in eindeloze herhaling, hebben binnen maar vooral ook buiten de wiskunde sterk de aandacht getrokken. In Nederland is dit vooral te danken aan het werk van Hans Lauwerier[31], die heeft laten zien, dat het mogelijk is om op de personal computer met een BASIC–prorammma van niet meer dan twaalf regels, de mooiste plaatjes op het scherm te laten verschijnen. Er bestaat dan ook veel belangstelling bij Wageningse studenten voor een afstudeerproject in deze richting.
Het beginpunt van de theorie van fractals wordt gemarkeerd door de vraag: Hoe lang is de kust van Groot–Britanië? In een artikel in Science van 1967 poogt Mandelbrot[32] een antwoord te formuleren. De vraag is eigenlijk: hoe gaan we meten? Nemen we de kaart en trekken we rechte lijnen tussen punten die in werkelijkheid 1 km uit elkaar liggen of misschien 100 meter of gaan we ter plaatse met een één meter lange stok meten? Het blijkt dat de lengte blijft toenemen met de fijnheid van ons meetinstrument. Uiteindelijk is de kustlijn oneindig lang, maar is anderzijds opgesloten in het begrensde gebied van

de smalle kustzoom. De mate waarin die zoom wordt opgevuld door die kronkelige lijn kan vastgelegd worden in een getal: de Hausdorff–dimensie D. Dit getal zal voor dit probleem tussen de één en twee liggen. De kustlijn heeft een gebroken ofwel fractale dimensie. Mandelbrot vindt zo voor de kustlijn van Groot–Britanië een fractale dimensie van ongeveer 1,3. In zijn latere boeken werkt Mandelbrot[9] het begrip fractal verder uit en laat zien dat de natuur een enorme rijkdom aan fractals in zich bergt. Naast de gebroken dimensie is de zelfgelijkenis of zelf–similariteit het tweede belangrijke kenmerk van een fractal.
Het eenvoudigste voorbeeld is de Koch–kromme[31]. De procedure om de kromme te tekenen is gebaseerd op die zelfsimilariteit. Een lijnstuk wordt in drie gelijke stukken verdeeld. Het middelste lijnstuk wordt vervangen door twee lijnstukken van dezelfde lengte als de overige, zodat de lengte van de nu gebroken lijn is toegenomen met een faktor 4/3, zie figuur 3. Deze bewerking wordt herhaald voor elk van de vier lijnstukken en vervolgens voor de daarop ontstane 16 lijnstukken en zo verder. De fractale dimensie van de Koch–kromme, verkregen uit dit limietproces, blijkt bij benadering gelijk te zijn aan 1,26.
De vraag dringt zich op, waarom dergelijke strukturen niet eerder bestudeerd zijn. Het antwoord luidt dat dit wel degelijk gebeurd is onder andere door een tweetal wiskundigen Julia en Fatou aan het begin van deze eeuw. Wiskundigen eigen, deden zij dit zeer grondig. De huidige belangstelling is waarschijnlijk in de hand gewerkt door de mooie fractale structuren[33], die veelal in kleuren met de computer geproduceerd kunnen worden.



Figuur 3. De Koch–kromme.

De theorie van fractals kent nog een andere voorloper in de sfeer van de hydrologie. Hiervan wordt ten onrechte in het boek "Chaos, making a new science", van de hand van de journalist James Gleick[34], geen melding gemaakt. De hydroloog H.E. Hurst heeft een levenswerk gemaakt van zijn studie van de Nijl, met betrekking tot waterstanden en de opslag van water in reservoirs. Het was Hurst[35] in de vijftiger jaren opgevallen dat de getallenreeksen van waterstanden een bijzondere schalingseigenschap bezitten. Beschouwen we van zo'n reeks een deelinterval, dan blijkt er een vaste relatie te bestaan tussen de maximale rijkwijdte, het verschil tussen hoogste en laagste stand, en de lengte van het deelinterval. De parameter die in deze relatie voorkomt, de Hurst exponent H, heeft voor elke rivier z'n eigen karakteristieke waarde. Er blijkt nu een zeer eenvoudig verband te bestaan tussen de fractale dimensie D van de grafiek van de meetreeks en de Hurst exponent: $H + D = 2$.

Zoals eerder opgemerkt, hebben fractals bijna altijd een in het oogspringende elegant aandoende vorm en kleurschakering. Het is eenvoudig om zelf op de computer een eigen fractal te ontwerpen; hieraan wordt door vele wiskundigen en ook niet-wiskundigen veel plezier beleefd. Toch is de studie van fractals meer dan alleen een vorm van tijdverdrijf achter de computer. Laat ik me bij het geven van zinvolle voorbeelden[36] beperken tot problemen die in de landbouw- en milieuwetenschappen van belang zijn. Bij het proces van adsorptie speelt de mate van ruwheid van het oppervlak, weer te geven in de fractale dimensie, een belangrijke rol; het is bepalend voor het mogelijke aantal aanhechtingspunten van moleculen. Voor aggregatieprocessen, zoals deze voorkomen bij verwarming van proteïnen of bij kristallisatie van stoffen in een oplossing, kan in het onderzoek gebruik gemaakt worden van de theorie van fractale structuren. Ook de porositeit van een materiaal kan op deze wijze gekarakteriseerd worden. Hierop aansluitend kan gemeld worden dat er thans methoden ontwikkeld worden om de dispersieve eigenschappen van een stroming in een poreus medium langs deze weg te beschrijven. Doel is om in het stromingsmodel de schaalafhankelijkheid van de dispersiviteit op te nemen. We zouden ons verder in het spoor van Hurst kunnen verdiepen in tijdreeksen van natuurlijke processen die de groei van planten bepalen, zoals regenval en temperatuur. Tenslotte kunnen we ook aan de planten en bomen zelf fractale structuren onderkennen in het patroon van takken en wortels[37] en in de vorm van het bladerdak. Met deze opsomming hoop ik u ervan overtuigd te hebben dat in fractals, als onderwerp van onderzoek, het nuttige met het aangename verenigd kan worden.

Geachte toehoorders

Naast de wiskunde van stellingen, bewijzen en abstrakte formules is er nog een andere wiskunde, die van de toepassingen. In het voorgaande heb ik gepoogd u te laten zien wat die toegepaste wiskunde te betekenen kan hebben voor het onderzoek aan problemen van landbouw en milieu. In het proces van de modelvorming en in de kwantitatieve analyse kan die wiskunde zinvol bijdragen tot de oplossing van die problemen.

Geachte leden van het College van Bestuur en leden van de Universiteitsraad

Kijk ik met U terug op de geschiedenis van de landbouwuniversiteit, dan zien we dat deze instelling het belang van een sterke wiskundige ondersteuning altijd onderkend heeft. Het is zelfs zo dat de eerste hoogleraar Wiskunde, M.J. van Uven, reeds vóór de oprichting van de Landbouwhogeschool benoemd werd. Van een wiskundige, werkzaam te midden van land–bouwkundige studenten en onderzoekers, mag verwacht worden dat hij zijn vak uitdraagt door te laten zien wat wiskunde voor hen kan betekenen. Daarvoor is nodig dat die wiskundige zich verdiept in de problemen en in de werkwijze van landbouwkundigen. Ik beschouw het als een bijzondere eer om deze taak op me te mogen nemen en dank U voor het vertrouwen dat U door mijn benoeming in mij gesteld heeft.

Geachte leden van de vakgroep Wiskunde

Bij mijn komst vorig jaar werd ik getroffen door de hartelijke wijze waarop ik in de vakgroep opgenomen werd. Bij de sectie Zuivere en Toegepaste Wiskunde bestond het gevoel dat we gezamenlijk meer intensief wiskundig onderzoek zouden moeten bedrijven. Dat dit daadwerkelijk tot de mogelijkheden behoort, is mede te danken aan het feit dat in het recente verleden een uitstekend onderwijspakket is opgebouwd. Nu, ruim een jaar later, begint zich dit onderzoek af te tekenen. In het bijzonder op het gebied van de modellering van grondwaterstroming zijn reeds de eerste resultaten geboekt. Ik zie dan ook de toekomst met vertrouwen tegemoet en hoop dat we ook in de tijd die komen gaat in dezelfde prettige sfeer aan het bereiken van de ons gestelde doelen kunnen verder werken.

Hooggeleerde van Beek, beste Paul

In de korte periode, die ik nog maar in Wageningen werkzaam ben, heb ik je leren kennen als een prettige collega, die me in deze nieuwe omgeving met goede raadgevingen de weg heeft helpen vinden. Je inzet voor de vakgroep gaat verder dan de taak die je als voorzitter op je genomen hebt. We delen de wens dat er binnen de vakgroep meer ruimte voor onderzoek zou moeten komen. De wijze waarop jij tracht in een goede verstandhouding hieraan inhoud te geven steun ik van harte.

Hooggeleerde Eckhaus, zeer geleerde Verhulst, beste Wiktor en Ferdinand

Mijn vorming in het wiskundig onderzoek is vijf-entwintig jaar geleden aan de Technische Hogeschool te Delft begonnen, toen ik mij bij jullie op de onderafdeling Wiskunde meldde voor een afstudeerproject. Wiktor, jij was juist als hoogleraar benoemd en ik was je eerste student en later ook je eerste promovendus; velen zijn na mij gevolgd. Ook na mijn promotie zijn wij met elkaar in kontakt gebleven. Ik waardeer de adviezen en ondersteuning die jij mij door de jaren heen gegeven hebt. Ferdinand, vier jaar geleden stimuleerde jij me om de stap van onderzoeksinstituut, het Centrum voor Wiskunde en Informatica, naar universiteit te maken. De ervaringen, die ik daarna bij de vakgroep Wiskunde van de Rijksuniversiteit Utrecht opgedaan heb, blijken van praktische waarde te zijn in de functie die ik thans vervul.

Geachte oudcollega's van het Centrum voor Wiskunde en Informatica en van de vakgroep Wiskunde te Utrecht

Met enkelen van u ben ik nog steeds in kontakt vanwege het werk of in de persoonlijke sfeer. Bij deze gelegenheid wil ik u allen laten weten dat ik aan beide werkkringen prettige herinneringen bewaar.

Dames en heren studenten

Sommigen van u hebben vanuit zichzelf een belangstelling voor de wiskunde en besluiten in de laatste jaren van de studie een keuzecollege in de wiskunde te volgen of een wiskundig afstudeerprojekt te kiezen. Een ieder van u wil ik wijzen op het belang van een bepaalde vorm van wiskundige analyse van natuurlijke processen, die van de dynamische systemen. Ook statische vormen en strukturen, van ijskristallen tot duinlandschappen, zijn in een dynamisch proces tot stand gekomen. Ik wil u daarom toevoegen: denk dynamisch, denk wiskundig.

Mijnheer de rector, dames en heren

Ik heb gezegd. Ik dank u allen voor uw aandacht.

Referenties

1 Lorenz, E.N., 1963. Deterministic nonperiodic flow. Journal of Atmospheric Sciences 20, p. 130–141.

2 Swart, H.E., de, 1988. Vacillation and Predictability Properties of Low–order Atmospheric Spectral Models, proefschrift, Rijksuniversiteit Utrecht.

3 Groen, P., 1952. Over de grenzen der voorspelbaarheid in de natuur, Kok, Kampen.

4 Doelman, A., 1990. On the Nonlinear Evolution of Patterns: modulation equations and their solutions, proefschrift, Rijksuniversiteit Utrecht.

5 Turing, A.M., 1953. The chemical basis of morphogenesis, Philosophical Transactions of the Royal Society (part B) 237, p. 37–72 (Bulletin of Mathematical Biology 52, (1990), p. 153–147).

6 Nicolis, G., and I. Prigogine, 1977. Self–organization in Nonequilibrium Systems: from dissipative structures to order through fluctuations, Wiley, New York.

7 Thom, R., 1975. Structural Stability and Morphogenesis: an outline of a general theory of models, Benjamin Cummings, Reading (Mass.).

8 Zeeman, E.C., 1977. Catastrophe theory: selected papers 1972–1977, Addison–Wesley, Reading (Mass.).

9 Mandelbrot, B., 1982. The Fractal Geometry of Nature, W.H. Freeman and Co, San Francisco.

10 Fisher, R.A., 1937. The wave of advance of advantageous genes, Ann. Eugenics 7, p. 353–369.

11 Bosch, F. van den, 1990. The Velocity of Spatial Population Expansion, proefschrift, Rijksuniversiteit Leiden.

12 Hodgkin, A.L., and A.F. Huxley, 1952. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve, Journal of Physiology 117, p. 500–544. (Bulletin of Mathematical Biology 52 (1990), p. 25–71).

13 Pol, B. van der, 1926. On relaxation oscillations, Philosophical Magazine 2, p. 978–992.

14 Grasman, J., 1987. Asymptotic Methods for Relaxation Oscillations and Applications, Springer–Verlag, New York.

15 Winfree, A.T., 1967. Biological rhythms and the behaviour of populations of coupled oscillators, Journal of Theoretical Biology 16, p. 15–42.

16 Pol, B. van der, and J. van der Mark, 1927. Frequency demultiplication, Nature 120, p. 363–364.

17 Broer, H.W., en F. Verhulst (red.), 1990. Dynamische Systemen en Chaos; een revolutie vanuit de wiskunde, Epsilon Uitgaven, Utrecht.

18 May, R.M., 1976. Simple mathematical models with very complicated dynamics, Nature 216, p. 459-467.

19 Shaw, R., 1981. Strange attractors, chaotic behaviour and information flow, Zeitschrift für Naturforschung 36a, p. 80–112.

20 Grasman, J., 1990. A deterministic model of the cell cycle, Bulletin of Mathematical Biology 52, p. 535–547.

21 Matsumoto, K., and I. Tsuda, 1987. Extended information in one–dimensional maps, Physica 26D, p. 347–357.

22 Wong, A.K.C. and P.K. Sahoo, 1984. A gray–level threshold selection method based on maximum entropy principle, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 19, p. 866–871.

23 Barnsley, M., 1988. Fractals Everywhere, Academic Press, San Diego.

24 Forrest, S. (ed.), 1990. Emergent computation, Physica 42D, p. 1–452.

25 Balfort, H.W., persoonlijke communicatie.

26 Roozen, H., 1990. Analysis of the exit problem for randomly perturbed dynamical systems in applications, proefschrift, Landbouwuniversiteit Wageningen.

27 Grasman, J., and B.J. Matkowsky, 1977. A variational approach to singularly perturbed boundary value problems for ordinary and partial differential equations with turning points. SIAM Journal on Applied Mathematics 32, no. 3.

28 Schuss, Z., 1980. Theory and Applications of Stochastic Differential Equations, Wiley, New York.

29 Hoek, C.J. van der, 1990. Contamination of a well in a uniform background flow, Report Dept. of Mathematics, Agricultural University Wageningen.

30 Herwaarden, O.A. van, and J. Grasman, 1990. Dispersive groundwater flow and pollution, Report Dept. of Mathematics, Agricultural University Wageningen.

31 Lauwerier, H.A., 1987. Fractals: meetkundige figuren in eindeloze herhaling, Aramith, Amsterdam.

32 Mandelbrot, B., 1967. How long is the coast of Britain? Statistical selfsimilarity and fractal dimension, Science 155, p. 636–638.

33 Peitgen, H.–O., and P.H. Richter, 1986. The Beauty of Fractals, Springer–Verlag, Berlin.

34 Gleick, J., 1987. Chaos: making a new science, Penguin, New York.

35 Hurst, H.E., 1951. Long–term storage capacity of reservoirs, Transactions of American Society of Civil Engineering 116, p. 770–808.

36 Feder, J., 1988. Fractals, Plenum Press, New York.

37 Prusinkiewicz, P., and J. Hanan, 1989. Lindenmayer Systems, Fractals, and Plants, Lecture Notes in Biomathematics 79, Springer–Verlag, New York.