De gebiedsreductiefactor in het hydrologisch ontwerp ten gevolge van verschillen in tijd en plaats van de neerslag.

nota 62

J.V. Witter

juli 1983

INHOUD

	blz.
1. INLEIDING	1
2. DE BEPALING VAN HET GEBIEDSGEMIDDELDE VAN DE NEERSLAG	7
2.1 Inleiding	7
2.2 Het schatten van het semivariogram	8
2.3 Het schatten van gebiedsgemiddelden met behulp van kriging	15
2.4 Resultaten	18
2.5 Conclusies	22
3 DE STATISTISCHE GEBIEDSREDUCTIEFACTOR GRF	24
3.1 Inleiding	24
3.2 Methoden ter berekening van GRF	25
3.3 Resultaten	31
3.4 Conclusies	38
4 BEPALING VAN GRF UIT DE MARGINALE VERDELING VAN PUNTNEERSLAGEN EN HET RUIMTELIJK CORRELATIEVERLOOP	40
4.1 Inleiding	40
4.2 De toepasbaarheid van de methode: GRF_{24}	40
4.3 De toepasbaarheid van de methode: GRF_1	48
4.4 Resultaten	50
4.4.1 GRF_{24}	51
4.4.2 GRF_1	52
4.5 Conclusies	54
5 SAMENVATTING EN CONCLUSIES	55
6 LITERATUUR	56
FIGUREN	

APPENDIX I : Lijst van beschouwde stations bij berekening van GRF_{24}

APPENDIX II: De schattingsvariantie van $\hat{\gamma}(h)$

APPENDIX III: Gewichten bij het berekenen van kriging-gemiddelden van maandmaxima

APPENDIX IV : Geordende pieken van punt- en gebiedsneerslagen

APPENDIX V : Covariantiematrix van de schatters $\hat{\gamma}_o$ en $\hat{\beta}$

APPENDIX VI : Gewichten bij het berekenen van kriging-gemiddelden van de neerslag

WOORD VOORAF

Het onderzoek naar gebiedsreductiefactoren wordt begeleid door prof.dr.ir. L.C.A. Corsten [1] en prof.ir. D.A. Kraijenhoff van de Leur.[2]
Hun stimulerende en kritische opmerkingen kwamen het resultaat zeer ten goede. Ook dr.ir. M.A.J. van Montfort[1] en dr.ir. T.A. Buishand[3] leverden vele kritische opmerkingen en waardevolle suggesties.

---

[1] Vakgroep Wiskunde (Landbouwhogeschool)
[2] Vakgroep Hydraulica en Afvoerhydrologie (Landbouwhogeschool)
[3] Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut (KNMI)

1 INLEIDING

Het neerslagproces vertoont variatie naar plaats en tijd. Door deze variatie is de gebiedsneerslag die met een zekere, lage frequentie overschreden wordt geringer dan de puntneerslag met een zelfde overschrijdingsfrequentie. Hierdoor is een zekere reductie in de dimensionering bij het ontwerpen van afvoerstelsels mogelijk. Intuïtief is reeds duidelijk dat deze reductie toeneemt bij toenemende oppervlakte van het af te wateren gebied en bij afnemende overschrijdingsfrequentie van de maatgevende neerslag.

Deze reductie is overigens niet alleen het gevolg van de mate waarin de neerslag varieert, maar ook van verschillen in snelheid van ontwatering, van de ontwateringsnormen en van de looptijden in het afvoerstelsel binnen het af te wateren gebied. Ter verduidelijking van de wijze waarop reductie op grond van gebiedsgrootte wordt toegepast bij het ontwerpen van afvoerstelsels, volgt nu een zeer summiere schets van het gangbare ontwerpproces.

Landelijke afvoer.

Waterlopen worden zó gedimensioneerd dat wateroverlast slechts met een geringe, van te voren vastgestelde frequentie op zal treden. Voor "landelijke" gebieden volgt de afvoer van water uit de percelen naar de waterlopen ("ontwatering") uit een samengestelde ontwateringsnorm: een constante afvoer bij een minimale ontwateringsdiepte ("diepte van de grondwaterspiegel tijdens maatgevende omstandigheden"). Deze normen zijn berekend voor stationaire stromingssituaties, waarschijnlijk niet alleen vanwege de eenvoud ervan, maar ook omdat voor het landelijk gebied de neerslag in het winterseizoen maatgevend is. Gedurende het winterseizoen wordt de neerslag voornamelijk veroorzaakt door frontpassages, die vaak langdurige regens veroorzaken. De normen zijn gedifferentieerd naar grondsoort en grondgebruik. Een typische waarde voor gras- of bouwland is een constante afvoer van 0.08 $m^3 \cdot s^{-1} \cdot km^{-2} \cdot$ (bij een grondwaterstand van 0.30, resp. 0.50 m - maaiveld)(WERKGROEP AFVOERBEREKENINGEN; 1980). Dit zijn empirische normen; ze corresponderen evenwel met een neerslag van ongeveer 7 mm/dag. De dimensies van de waterlopen volgen nu uit de eis dat op elk punt van het stelsel het bovenstrooms geloosde water moet kunnen worden afgevoerd bij bepaalde toelaatbare overschrijdingen van het polderpeil.

Bij het ontwerp ten behoeve van landelijke gebieden wordt dus niet in directe zin gebruik gemaakt van een maatgevende neerslag. De dáár toegepaste reducties

op grond van gebiedsgrootte zijn dan ook empirisch vastgestelde, mogelijke reducties in afvoerdichtheden. Deze hangen niet alleen samen met de mate van variatie in de neerslag, maar ook met inrichting, beheer en gebruik van een gebied. Enkele voorbeelden van dergelijke reducties als functie van de gebiedsgrootte zijn afgebeeld in fig. 1 (overgenomen uit BIJKERK; 1963). Het CULTUURTECHNISCH VADEMECUM (1971) geeft als reductiefactor f voor de afvoerdichtheid voor gebieden groter dan 10.000 ha:

$$f = (0.0533 - 0.005\ {}^{10}\log A)/0.0333,$$

waarin:

A = oppervlakte (ha).

Stedelijke afvoer

Bij "stedelijke" gebieden wordt bij het ontwerp in het algemeen uitgegaan van een maatgevende neerslag: een neerslaggebeurtenis van een bepaalde duur, die met zekere frequentie wordt overschreden. Voor deze neerslag neemt men een bepaald buiprofiel aan, dat het neerslagverloop in de tijd beschrijft. Vervolgens wordt nagegaan of het afvoerstelsel op elk punt de afvoer uit het bovenstrooms gelegen gebied kan verwerken.

De hier behandelde reductiefactoren zijn statistisch bepaalde factoren, waarmee een puntneerslag vermenigvuldigd moet worden om de met dezelfde frequentie voorkomende gebiedsneerslag te verkrijgen. De factoren worden GebiedsReductieFactoren (notatie: GRF; indien nodig voorzien van een index die de lengte van de betreffende neerslagduur in uren aangeeft) genoemd. Zij zijn van belang indien bij het ontwerp gebruik wordt gemaakt van een maatgevende neerslag.

De hierboven gedefinieerde GRF wordt wel "statistische" GRF genoemd, ter onderscheiding van de "bui-gecentreerde" GRF. Bij de "bui-gecentreerde" GRF wordt uitgegaan van de waargenomen of door extrapolatie bepaalde, maximale puntneerslag voor een neerslaggebeurtenis: p(o). De gemiddelde neerslag p(A) over een door een isohyeet omsloten gebied met oppervlakte A rondom het neerslagcentrum wordt nu geschreven als functie van p(o):

$$p(A) = m \cdot p(o), \qquad (1)$$

waarin:

m = "bui-gecentreerde" GRF.

m	Auteur(s)	Opmerkingen
$1 - \alpha A^{\frac{1}{4}}$	FRUEHLING (1894)	Heftige regens in Polen
$\exp(-\alpha A^{\beta})$	HORTON (1924)	Zware dagneerslagen in het oosten van de V.S.; $\beta \approx \frac{1}{2}$
$1 - \alpha A^{\frac{1}{2}}$	HUFF en STOUT (1952)	Neerslagen van verschillende duur en uitgestrektheid in Illinois, V.S.
$1 - \alpha A^{\frac{1}{2}} + \beta A - ..$	CHOW (1954)	Alle typen neerslag
$\frac{1.68}{A/\alpha}\{1-[1.09(A/\alpha)^{0.5}+1]\exp[-1.09(A/\alpha)^{0.5}]\}$	BOYER (1957)	Grote depressies, afkomstig uit de niet-tropen, in het midden van de V.S.
$\frac{\gamma\alpha}{A}\{1-\exp(-\frac{A}{\alpha})\}+\frac{(1-\gamma)\beta}{A}\{1-\exp(-\frac{A}{\beta})\}$	KRAIJENHOFF (1958)	Zware zomerse dagneerslagen in Nederland
$1 - \alpha A^{0.6}$	WOOLHISER en SCHWALEN (1959)	Convectieve neerslag met een uitgestrektheid $\leq 50 km^2$ in Arizona, V.S.
$\frac{\alpha}{A}\{1-\exp(-\frac{A}{\alpha})\}$	COURT (1961)	Als generalisatie van eerder gevonden relaties

Tabel 1: uitdrukkingen voor m in (1); het verloop van de isohyeten is cirkelvormig verondersteld.

In het algemeen geldt (EAGLESON; 1970) dat m:

i) met de oppervlakte A afneemt

ii) met de totale neerslaghoeveelheid toeneemt

iii) met de neerslagduur toeneemt

iv) kleiner is bij convectieve en orografische neerslag dan bij neerslag als gevolg van depressies.

Voor m zijn allerlei relaties voorgesteld (zie tabel 1), waarin meestal slechts de invloed van de oppervlakte A tot uiting komt. De invloed op m van de hierboven genoemde factoren ii), iii) en iv) komt dan tot uiting in de waarde van de coefficiënten en in het geldigheidsbereik van de formule.

Relaties voor m als gegeven in tabel 1 worden bepaald op grond van maximale -neerslaghoeveelheid-oppervlakte-curves, zie bijv. fig. 2 (overgenomen uit

WMO; 1969). Deze curves geven de maximale gemiddelde neerslaghoeveelheid als functie van de oppervlakte. Volgens HERSHFIELD (1967) hebben de totale neerslaghoeveelheid, het seizoen en de neerslagduur weinig invloed op de vorm van de maximale-neerslaghoeveelheid-oppervlakte-curves, en dus op m. Ook de oorsprong van de luchtmassa's waaruit de neerslag valt, blijkt de vorm van de curves niet te beïnvloeden (HERSHFIELD en WILSON; 1960). Wel is de topografie belangrijk van het stroomgebied waarover de neerslagen zijn waargenomen. Bij de bepaling van de curves speelt ook het aantal regenmeters en de locatie ervan een rol. De formule van Court volgt uit die van Kraijenhoff door $\gamma = 1$ te kiezen. Het ontwikkelen in Taylorreeksen van de exponentiële termen in het model van Kraijenhoff leidt na enige vereenvoudigingen tot $m \approx 1-\alpha A+\beta A^2-\ldots$ Ditzelfde geldt voor de formule van Court. Door CHOW (1958) werd erop gewezen dat ontwikkeling in een Taylorreeks van de exponentiële term in de formule van Boyer, gevolgd door enige vereenvoudigingen, een relatie oplevert die overeenstemt met de door hem gevonden relatie. De uitdrukkingen voor m in tabel 1 zijn dus te herleiden tot 3 vormen: $m = 1-A^{\frac{1}{4}}$ (Frühling), $m \approx 1-\alpha A$ (Kraijenhoff, Court) en $m \approx 1-A^{\frac{1}{2}}$ (overigen).

Een mogelijke verklaring voor het verschil tussen de twee laatstgenoemde relaties is, dat de eerste geldt voor lokale en relatief frequent voorkomende, convectieve neerslaggebeurtenissen (Kraijenhoff), en de tweede voor zeer uitgestrekte en zeldzame neerslagen (Boyer). Dat Huff en Stout, en Woolhiser en Schwalen op dezelfde relatie uitkwamen als Boyer, terwijl in beide onderzoeken frequent voorkomende gebeurtenissen geanalyseerd werden, kan het gevolg zijn van het feit dat in deze onderzoeken de waarnemingen verricht werden over een klein en vast gebied. Dit in tegenstelling tot de studies van Krayenhoff en Boyer, waarin het gebied waarvoor de ruimtelijke neerslagverdeling werd nagegaan per neerslaggebeurtenis verschilde (resp. "fixed area" en "moving target area storm-centered areal reduction factor").

In deze mogelijke verklaring speelt dus de oorsprong van de luchtmassa's waaruit de neerslag valt (HERSHFIELD en WILSON; 1960) geen directe rol. Het blijkt ook dat er in Nederland zeer zware en zeer uitgestrekte neerslaggebeurtenissen voorkomen, niet zozeer ten gevolge van de oorsprong van de luchtmassa's waaruit de neerslag valt, maar ten gevolge van de een of andere bijzondere samenloop van meteorologische omstandigheden (bijvoorbeeld de neerslag van 3 en 4 juli 1952; zie BUISHAND en VELDS; 1980, p.: 176-178).

Relaties als (1) vinden in de hydrologie toepassing bij het bepalen van de frequentie van voorkomen van puntneerslagen in schaars bemeten gebieden (FOGEL en DUCKSTEIN; 1967, RODRÍGUEZ-ITURBE en MEJÍA; 1973) en bij het op analytische wijze bepalen van het correlatie-afstand verloop (STOL; 1981).
In deze nota wordt de bui-gecentreerde GRF verder buiten beschouwing gelaten, en wordt alleen aandacht besteed aan de statische GRF, aangezien deze in menig ontwerp van afvoerstelsels wordt toegepast.

Bij de berekening van GRF is de wijze van berekening van gebiedsgemiddelden van belang. Daartoe zullen allereerst in hoofdstuk 2 enige methoden ter berekening van gebiedsgemiddelden worden vergeleken. De daarbij gestelde vraag luidt:

1. Leiden verschillende berekeningsmethoden voor gebiedsgemiddelden tot wezenlijk verschillende resultaten?

Voor het berekenen van GRF zijn in de literatuur verschillende methoden voorgesteld (o.a. USWB; 1957-1960, NERC; 1975, BELL; 1976). In hoofdstuk 3 zal met behulp van deze methoden GRF worden berekend voor een drietal gebieden in Nederland, elk met een oppervlakte van ongeveer 1.000 km^2. De resultaten van de verschillende methoden zullen zowel onderling, als met waarden van GRF_{24} uit het buitenland worden vergeleken. De daarbij gestelde vragen zijn:

2. Leiden verschillen in berekeningswijze tot verschillen in GRF_{24}?
3. Zijn er verschillen in GRF_{24} tussen 3 ongeveer even grote gebieden in Nederland?
4. Verschilt de voor Nederland berekende GRF_{24} van voor andere landen berekende GRF_{24}?

GRF is in meerdere of mindere mate een functie van seizoen, van locatie en van duur en overschrijdingsfrequentie van de neerslag. Op de afhankelijkheid van locatie wordt ingegaan in de vragen 3 en 4. Op de seizoensafhankelijkheid en op de afhankelijkheid van de overschrijdingsfrequentie van de neerslag zal in hoofdstuk 3 worden ingegaan aan de hand van de vragen:

5. Treden jaarmaxima van punt- en gebiedsneerslagen in hetzelfde seizoen op?
6. Is er verschil in GRF_{24} tussen het winterseizoen en het zomerseizoen voor de drie beschouwde gebieden in Nederland?
7. Hangt GRF_{24} af van de overschrijdingsfrequentie?

De afhankelijkheid van GRF van de neerslagduur komt in hoofdstuk 4 aan de orde, waar GRF voor uurneerslagen (GRF_1) zal worden berekend. Berekening van GRF_1 voor Nederland is met behulp van de hierboven genoemde methoden niet goed moge-

lijk, aangezien er voor Nederland onvoldoende gegevens afkomstig van neerslagmeetnetten zijn. Daartoe zal in hoofdstuk 4 allereerst een methode worden behandeld ter berekening van GRF uit de marginale verdeling van puntneerslagen en het ruimtelijk correlatie verloop (RODRÍGUEZ-ITURBE en MEJÍA; 1974, BUISHAND; 1977a). De toepasbaarheid van deze methode zal worden nagegaan door berekening van GRF_{24} voor de drie genoemde gebieden van ca. 1.000 km^2 en van GRF_1 voor een gebied van 5 km^2 in de Achterhoek. De te behandelen vragen zijn:

8. Leidt berekening van GRF uit de marginale verdeling van puntneerslagen en het ruimtelijk correlatie verloop tot bruikbare schattingen van GRF?
9. Hoe is bij zekere neerslagduur de samenhang tussen overschrijdingsfrequentie van de neerslag en oppervlakte van het beschouwde gebied enerzijds, en de op de hierboven genoemde wijze berekende GRF anderzijds?

In hoofdstuk 5 volgen samenvatting en conclusies.

Voor de berekening van GRF_{24} worden gegevens gebruikt uit een drietal gebieden in Nederland van elk ongeveer 1.000 km^2 met elk 12 neerslagstations. Appendix 1 geeft informatie over de in deze gebieden gelegen beschouwde neerslagstations.

Voor de berekening van GRF_1 worden gegevens gebruikt uit het hydrologisch proefgebied Hupsel met een oppervlakte van ongeveer 5 km^2, met 3 zelfregistrerende regenmeters (periode van waarneming: 1-10-'69/1-10-'73). Ter berekening van het correlatie-afstandverloop van uurneerslagen worden de gegevens uit Hupsel en gegevens van de stations De Bilt en Soesterberg (periode van waarneming: 1-6-'74/31-12-'77) gebruikt. De marginale verdeling van uurneerslagen wordt nagegaan met behulp van de volledige reeks van De Bilt (1-1-'06/31-12-'77). Ligging van de stations en de gebieden is weergegeven in fig. 3.

2 DE BEPALING VAN HET GEBIEDSGEMIDDELDE VAN DE NEERSLAG

2.1 Inleiding

De meeste methoden ter bepaling van GRF vereisen kennis van het gebiedsgemiddelde van de neerslag. Daarom wordt allereerst ingegaan op de berekening van het gebiedsgemiddelde. Het gebiedsgemiddelde is te berekenen als het rekenkundig gemiddelde van de in het gebied gemeten puntneerslagen. BUISHAND en VELDS (1980) bevelen onder Nederlandse omstandigheden toepassing van deze methode aan. Gebiedsgemiddelden kunnen ook op andere wijze berekend worden, bijvoorbeeld met behulp van:

- de isohyetenmethode
- de Thiessenmethode
- een uitbreiding van de 'optimale interpolatiemethode' (DE BRUIN; 1975)
- kriging (JOURNEL en HUIJBREGTS; 1978)
- Kalman-filter technieken (BRAS en COLON; 1978).

Kriging, de optimale interpolatiemethode en de kalman-filter technieken geven "Beste Lineaire Zuivere Schatters", aangezien de voorspellingsvarianties geminimaliseerd worden. Bij deze drie methoden worden veronderstellingen ingevoerd met betrekking tot het verloop van de bestudeerde ruimtelijke variabele. Deze veronderstellingen zijn in het geval van kriging het minst stringent.
Ter beantwoording van de in hoofdstuk 1 genoemde vraag 1:

> Leiden verschillende berekeningsmethoden voor gebiedsgemiddelden tot wezenlijk verschillende resultaten?

worden in dit hoofdstuk met behulp van de krigingmethode (KM) berekende maandmaxima van gebiedsgemiddelden van dagneerslagsommen vergeleken met rekenkundige gemiddelden (RGM) en Thiessen-gemiddelden (TM) (maandmaxima zijn hier gedefinieerd met behulp van het rekenkundig gemiddelde van de neerslagen, gemeten op de in het gebied beschouwde stations).

Als criteria gelden de voorspellingsvarianties van de methoden en een vergelijking van de berekende gemiddelden met de kriging-gemiddelden. Aangezien namelijk de werkelijke gemiddelden onbekend zijn, worden de (optimale) kriginggemiddelden als referentiewaarden gebruikt. Als gegevens zijn gebruikt dagneerslagen over de periode 1951 t/m 1979 uit de gebieden 1, 2 en 3, resp. gelegen in Noord-Holland, Zeeland en op de Veluwe (zie fig. 3).

De rest van dit hoofdstuk is als volgt ingedeeld: In hoofdstuk 2.2 zal het semivariogram van dagneerslagen geschat worden. In hoofdstuk 2.3 zullen de kriging-gemiddelden worden berekend. In hoofdstuk 2.4 worden de drie beschouwde methoden vergeleken. De conclusies volgen in hoofdstuk 2.5.

2.2 Het schatten van het semivariogram

Voor een toevalsfunctie Z(x), die gedefinieerd is in elk punt x_i van een gebied V met oppervlakte A, wordt het populatie-semivariogram gedefinieerd als:

$$\gamma(h) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Var}\,[Z(x)-Z(x+h)], \tag{1}$$

waarin:

x = coördinatenvector

h = afstandsvector.

Indien de "intrinsieke hypothese" geldt:

$$\begin{cases} E\,[Z(x)-Z(x+h)] = 0, & (2a) \\ \mathrm{Var}\,[Z(x)-Z(x+h)] = 2\gamma(h), & (2b) \end{cases}$$

wordt het populatie-semivariogram $\gamma(h)$ zuiver geschat door het steekproef-semivariogram $\hat{\gamma}(h)$:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N'}\sum_{i=1}^{N'}[z(x_i+h)-z(x_i)]^2, \tag{3}$$

waarin:

$z(x_i)$ = realisatie in het punt x_i van Z(x)

N' = aantal paren van waarnemingspunten met afstand h.

Indien de waarnemingspunten onregelmatig over het gebied verspreid liggen, worden bij het berekenen van $\hat{\gamma}(h)$ afstandsklassen gevormd. In dat geval duidt h de gemiddelde afstand in een afstandsklasse aan en N' het aantal waarnemingspunten in die afstandsklasse.

Omdat slechts één realisatie z(x) bekend is, vindt aanpassing van $\gamma(h)$ aan $\hat{\gamma}(h)$ slechts plaats over afstanden h waarvoor

$$h<L/2, \tag{4}$$

waarin:

L = grootste afstand tussen 2 punten in het gebied V (in het geval van een rechthoekig gebied: de diagonaal).

Voor grotere afstanden dan L/2 is de schattingsprocedure namelijk weinig betrouwbaar, omdat men slechts één realisatie z(x) van de toevalsfunctie Z(x) ter beschikking heeft. Zelfs in het hypothetisch geval dat deze ene realisatie op alle punten $x_i \in V$ bekend zou zijn, is de variantie van het steekproef-semivario-

gram, in dit geval aangeduid door $\hat{\gamma}_V(h)$ bijzonder groot voor grote h. Zo geldt in het geval van een lineair populatie-semivariogram

$$\gamma(h) = ah, \tag{5}$$

waarin:

a = coëfficient,

voor de schattingsvariantie van $\hat{\gamma}_V(h)$ in een 1-dimensionale ruimte V (MATHERON; 1971. Zie eveneens Appendix II):

$$\mathrm{Var}\,[\hat{\gamma}_V(h)] = \begin{cases} [\frac{4}{3}\frac{h^3}{L-h} - \frac{1}{3}\frac{h^4}{(L-h)^2}]a^2 & (h \leq L/2) \quad (6a) \\ [2h^2 + \frac{1}{3}(L-h)^2 - \frac{4}{3}h\,(L-h)]a^2 & (h > L/2). \quad (6b) \end{cases}$$

Voor h = L/2 geldt dus voor het kwadraat van de variatie-coëfficient vc^2 van deze schatter $\hat{\gamma}_V(h)$:

$$vc^2 = \frac{\mathrm{Var}[\hat{\gamma}_V(h)]}{[\gamma(h)]^2} = 1. \tag{7}$$

Voor $h \approx 0$ geldt: $vc^2 \approx \frac{4}{3}\frac{h}{L}$.

De ene, bekende realisatie z(x) van de toevalsfunctie Z(x) is bovendien slechts in enkele waarnemingspunten $x_i \in V$ bekend. Vanwege deze slechts beperkte kennis van de realisatie z(x) kiest men de afstandsklassen bij het berekenen van $\hat{\gamma}(h)$ liefst zodanig, dat N' in (3) 30 à 50 bedraagt (JOURNEL en HUIJBREGTS; 1978). In het geval van onafhankelijke en Normaal verdeelde variabelen (hier: de verschillen z(x)-z(x+h)) geldt namelijk voor de variantie van de steekproef-variantie $\underline{s}^2$ (KENDALL en STUART; 1977, p. 258):

$$\mathrm{var}\ \underline{s}^2 = 2\sigma^4/N'. \tag{8}$$

Voor het kwadraat van de variatie-coëfficient vc^2 van deze schatter geldt dus: $vc^2 = 2/N'$, zodat voor $vc^2 < 5\%$ moet gelden: $N' > 40$. Merk overigens op, dat bij deze afleiding van het gewenste aantal paren van waarnemingspunten N' in feite volledig afstand is genomen van het werken met intrinsieke toevalsfuncties.

GANDIN (1965) gaat bij het bepalen van het gewenste aantal gepaarde waarnemingen N evenmin uit van Intrinsieke ToevalsFuncties van orde nul (ITF-0), waarvoor (2) geldt, maar van een tweede-orde-stationaire z(x). Dan geldt voor het genormaliseerde semivariogram $g(h) = \gamma(h)/\sigma^2$:

$$g(h) = 1-\rho(h), \tag{9}$$

waarin:

σ^2 = puntvariantie = var Z(x)

$\rho(h)$ = populatie-correlatiecoëfficient op afstand h.

Voorts geldt (KENDALL en STUART; 1977, p 258) voor de variantie van de schatting r(h) van ρ(h):

$$\mathrm{var}[\underline{r}(h)] \approx \frac{(1 - \rho^2(h))^2}{N}. \qquad (10)$$

Het is dan mogelijk N te geven als functie van var[ĝ(h))] en van g(h). Voor het behalen van een zekere nauwkeurigheid blijkt N te moeten toenemen met de onderlinge afstand h.

Bij het bepalen van gebiedsgemiddelden met behulp van kriging kunnen twee verschillende procedures worden gevolgd: de Enkelvoudige Realisatie Benadering (ERB) of de Meervoudige Realisatie Benadering (MRB). In het eerste geval wordt per gebeurtenis (hier dus per maandmaximum en per jaar) een steekproef-semivariogram $\hat{\gamma}(h)$ geschat. Hieraan wordt een populatie-semivariogram γ(h) aangepast, dat gebruikt wordt bij het schatten van het gebiedsgemiddelde. In het tweede geval wordt per groep van gebeurtenissen een gemiddeld steekproef-semivariogram $\hat{\gamma}(h)$ geschat (hier: per maand, waarbij gemiddeld wordt over de jaren van waarneming). Vervolgens wordt weer een γ(h) aangepast, te gebruiken bij het schatten van gebiedsgemiddelden.

Een argument voor toepassing van de Meervoudige Realisatie Benadering is dat het niet onredelijk lijkt om voor elke maand de maxima in verschillende jaren als realisaties van één toevalsfunctie op te vatten.

Een praktisch argument voor het toepassen van de Meervoudige Realisatie Benadering houdt verband met het aantal paren N' van waarnemingspunten, waarover $\hat{\gamma}(h)$ wordt gemiddeld: aangezien in elk van de 3 beschouwde gebieden 12 waarnemingspunten liggen, bedraagt het totaal aantal waarnemingsparen 66. Vanwege de onregelmatige ligging ervan worden afstandsklassen gevormd. Bij vorming van afstandsklassen 0 - 5 km, 5 - 10 km, ..., bedraagt N' hoogstens ongeveer 20 (afhankelijk van het beschouwde gebied), terwijl hiervoor reeds bleek dat N' bij voorkeur minstens 40 moest bedragen.

Behalve de hierboven genoemde vraag naar aanpassing van γ(h) aan een per gebeurtenis berekende $\hat{\gamma}(h)$ (ERB) of aan een over een groep van gebeurtenissen berekende $\hat{\gamma}(h)$ (MRB), is de vraag naar de orde k van de intrinsieke toevalsfunctie Z(x) van belang. In het geval van niet-stationaire verschijnselen geldt in het algemeen $k \neq 0$. Bij de berekening van kriging-gemiddelden wordt dan geen gebruik gemaakt van het semivariogram γ(h), maar van de gegeneraliseerde-covariantiefunctie K(h) (DELFINER; 1975).

Teneinde na te gaan of maandmaxima van de neerslag een ruimtelijke trend vertonen, is voor elk station de gemiddelde neerslag bepaald tijdens zomerse (mei t/m september) en winterse (rest van het jaar) maandmaxima. Deze gemiddelde maandmaxima zijn vermeld in fig. 4; de beschouwde gebieden zijn daar aangegeven als rechthoeken. Voor gebied 1 lijkt er 's zomers en voor gebied 3 's winters sprake te zijn van een ruimtelijke trend. Ook elders zijn voor andere kenmerken heterogeniteiten geconstateerd (KNMI; 1972, WITTER; 1982). Hieronder zal echter blijken dat de ruimtelijke trend te gering is om van invloed te zijn op de populatie-semivariogramen: deze verlopen lineair met de afstand h, terwijl bij lineaire ruimtelijke trend reeds een kwadratisch verloop verwacht mag worden. Er zal dan ook gebruik worden gemaakt van de ITF-0 theorie.

Deze conclusies (MRB, ITF-0 theorie) komen overeen met de conclusies van CHUA en BRAS (1980). Zij pasten de ITF-0 theorie toe bij de bepaling van gebiedsgemiddelden van de neerslag in een vlak gebied in de V.S. (550 km^2; 10 stations). Voor het schatten van het semivariogram werd daar gebruik gemaakt van de meervoudige realisatie benadering. De algemene ITF-k theorie pasten zij toe bij de berekening van gebiedsgemiddelden in een bergachtig gebied in de V.S. (4.400 km^2; 21-29 stations; variërend in hoogte van 2.350-3.660 m). Zelfs daar gold overigens voor 8 van de 9 beschouwde neerslaggebeurtenissen: k=0.

Berekening van $\hat{\gamma}(h)$ voor naar maand ingedeelde maandmaxima resulteert voor de gegevens van gebied 1 in de in fig. 5.1 en 5.2 afgebeelde steekproef-semivariogrammen. Daarbij is gemiddeld over afstandsklassen 0-5 km, 5-10 km, ... Per afstandsklassegemiddelde is in de figuren aangegeven de steekproefstandaardafwijking van de waarden van de afzonderlijke steekproef-semivariogrammen waarover is gemiddeld. Nagegaan is, of splitsing van de maandmaxima naar grote of kleine neerslaghoeveelheid resulteert in een geringere variatie van de steekproef-semivariogrammen binnen de gevormde groepen.

Een grote neerslaghoeveelheid wordt hier gedefinieerd als een gebiedsgemiddelde (RGM) groter dan 15 mm. Deze verdere groepsindeling, behalve naar maand ook naar neerslaghoeveelheid, leidt echter nóch tot vermindering van de variatie tussen de afzonderlijke steekproef-semivariogrammen, nóch tot een andere vorm van de gemiddelde steekproef-semivariogrammen. Een andere tweedeling op grond van de vraag of de hoogste gemeten puntneerslag tijdens een maandmaximum al dan niet meer dan 20 mm bedraagt, leidt evenmin tot vermindering van de variatie tussen afzonderlijke steekproef-semivariogrammen.

Aan de gemiddelde steekproef-semivariogrammen is per maand dan ook slechts één lineair populatie-semivariogram aangepast, namelijk:

$$\gamma(h) = \gamma_0\delta + \theta h, \qquad (12)$$

waarin:

γ_0, θ : niet-negatieve coëfficiënten

δ : 0 voor h = 0, en 1 voor h ≠0.

De coëfficiënt γ_0 houdt verband met het zogenaamde "klomp-effect" ("nugget-effect"). Dit kan niet alleen het gevolg zijn van het voorkomen van grote plaatselijke verschillen ten gevolge van bepaalde fysische oorzaken (bijv. het voorkomen van buicellen), maar ook van bepaalde verstoringen. Beide oorzaken zijn nauwelijks van elkaar te onderscheiden.

Aanpassing van $\gamma(h)$ geschiedde met behulp van lineaire regressie onder restricties, en vond plaats aan alle gemiddelde geschatte semivarianties behorende bij afstanden kleiner dan de helft van de grootste onderlinge afstand van waarnemingspunten in het gebied, L/2. De resulterende Kleinste-Kwadraten-(MKK) schattingen van de coëfficiënten γ_0 en θ in variogrammodel (12) zijn vermeld in tabel 2. Aangezien bij het gebruik van model (12) voor de berekening van kriging-gewichten slechts het quotiënt γ_0/θ van belang is, is dit quotiënt eveneens gegeven. Ook voor de beide andere gebieden is $\gamma(h)$ volgens model (12) bepaald, waarbij de keuze voor het lineaire model weer is gebaseerd op visuele inspectie van de gemiddelde steekproefvariogrammen (fig. $6^{1,2}$, $7^{1,2}$). De coëfficiënten γ_0 en θ en de quotiënten γ_0/θ zijn voor beide gebieden eveneens geschat en vermeld in tabel 2.

	gebied 1			gebied 2			gebied 3		
maand	$\hat{\gamma}_0$	$\hat{\theta}$	$\hat{\gamma}_0/\hat{\theta}$	$\hat{\gamma}_0$	$\hat{\theta}$	$\hat{\gamma}_0/\hat{\theta}$	$\hat{\gamma}_0$	$\hat{\theta}$	$\hat{\gamma}_0/\hat{\theta}$
jan.	1.3	0.2	6.0	1.3	0.5	2.6	4.3	0.2	17.2
febr.	1.4	0.2	7.4	2.7	0.1	39.1	1.5	0.3	5.3
mrt.	0.9	0.3	2.9	2.1	0.1	25.8	0.6	0.3	1.9
apr.	0.2	0.5	0.3	0	0.4	0	3.9	0.4	10.2
mei	3.9	0.7	5.8	0.0	0.7	0.0	6.8	0.9	7.1
juni	1.3	1.3	1.1	11.9	0.7	16.1	13.5	1.3	10.8
juli	16.8	1.9	8.9	6.4	2.3	2.8	18.4	2.4	7.8
aug.	19.7	6.3	3.1	44.7	0.7	67.7	18.9	2.3	8.2
sept.	7.8	1.6	4.9	13.1	1.3	10.1	7.0	1.1	6.4
oct.	2.6	1.0	2.6	4.6	1.3	3.6	2.9	0.7	4.4
nov.	0.6	0.8	0.8	6.2	0.1	68.7	3.1	0.3	11.1
dec.	5.2	0.3	15.3	9.1	0.0	302.3	7.6	0.1	151.2

Tabel 2: MKK-schattingen van de coëfficiënten γ_0[mm²] en θ[mm²·km⁻¹] in variogrammodel (12), en schattingen van γ_0/θ[km].

Het algemene beeld dat de tabel oproept, komt overeen met wat verwacht mag worden: hoge waarden van $\hat{\gamma}_o$ en $\hat{\theta}$ in de zomer, en lage waarden in de winter. Desondanks vertoont zowel het patroon van de verschillen tussen maanden als het patroon van de verschillen tussen gebieden een merkwaardig gedrag. Met betrekking tot de verschillen tussen maanden zij opgemerkt, dat in alle drie gebieden het klomp-effect $\hat{\gamma}_o$ in de maand december erg groot is. Voorts blijkt dat groeperen van maanden naar waarden van het quotiënt $\hat{\gamma}_o/\hat{\theta}$ tot vreemde combinaties leidt, die bovendien per gebied verschillen.

Verschillen tussen gebieden kunnen een gevolg zijn van onder andere de volgende vier factoren:

1. Maandmaxima in het ene gebied behoeven niet op dezelfde dag voor te komen als de maxima in een ander gebied. Dit heeft zowel "toevallige" als fysische oorzaken. Een fysische oorzaak is bijvoorbeeld dat in de zomer ten gevolge van de hoge oppervlakte-temperaturen relatief veel convectieve neerslag valt in het Oosten en Zuidoosten van het land, terwijl langs de kust in de lente en de vroege zomer de buivorming onderdrukt wordt door de relatief koude zee. Daarentegen veroorzaakt in de herfst de relatief warme zee buivorming langs de kust (BUISHAND en VELDS; 1980). Deze invloeden zijn in de tabel enigszins terug te vinden. De verschillen tussen de twee beschouwde kustgebieden kunnen worden verklaard door de invloed van de zeearmen. Blijkens het vaak vlakke verloop van de semi-variogrammen voor het gebied in Zeeland is de ruimtelijke samenhang van neerslag daar geringer.

2. Verschillen tussen gebieden in kwaliteit van de metingen leiden tot een ander semivariogram. GANDIN (1965) laat de invloed zien van een toevallige fout ε_i:

$$f_i^* = f_i + \varepsilon_i, \qquad (13)$$

waarin:

f_i^* = gemeten neerslag op station i
f_i = werkelijke neerslag op station i
ε_i = toevallige meet- en waarnemingsfout met verwachting nul en variantie σ^2 op station i.

Dergelijke toevallige fouten zijn bovendien:

a) ongecorreleerd met de werkelijke neerslag
b) ongecorreleerd met fouten op andere stations.

Deze fouten leiden tot overschatten van $\gamma(h)$ met een bedrag, gelijk aan de helft van de verwachte som van de gekwadrateerde fouten op twee punten:

$$E[\hat{\gamma}^*(h)] = E\{ \frac{1}{2N'} \Sigma[f_i^* - f_j^*]^2\}$$

$$= E \{ \frac{1}{2N'} \Sigma[(f_i + \varepsilon_i)-(f_j + \varepsilon_j)]^2\}$$

$$= \gamma(h) + \overline{\tfrac{1}{2}(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)}^{i,j}, \qquad (14)$$

waarin:

$\overline{A_{i,j}}^{i,j}$ = het gemiddelde van $A_{i,j}$ over alle combinaties (i,j).

Aangezien hier $\sigma_i = \sigma_j = \sigma$, geldt: $E\ [\hat{\gamma}^*(h)] = \gamma(h) + \sigma^2$.

Een dergelijk model bij slechts systematische meet- en waarnemingsfouten is:

$$f_i^* = \beta_i f_i, \qquad (15)$$

waarin:

β_i = factor die de systematische meet en waarnemingsfout op station i aangeeft.

Indien verondersteld wordt:

$$\beta_i = \beta_j \ \ldots\ldots = \beta, \qquad (16)$$

blijkt de systematische fout te leiden tot een schatting van $\gamma(h)$, die daarvan naar verwachting een factor β^2 (meestal kleiner dan 1) afwijkt.

Het eerste type fout leidt dus tot een evenwijdige verschuiving van het semi-variogram, het tweede tot een andere hellingshoek. Maar zoals uit tabel 2 blijkt, vertoont geen van de drie beschouwde gebieden gedurende alle maanden van het jaar een afwijkende hellingshoek θ of een afwijkend klomp-effect γ_o. Verschillen in kwaliteit van de metingen lijken dus geen verklaring te zijn voor verschillen tussen gebieden. Dit is evenmin aannemelijk aangezien alle gegevens afkomstig zijn van het KNMI, dat één type regenmeter gebruikt en een uniforme contrôle op de waarnemingen toepast.

3. Verschillen tussen gebieden in kwaliteit van de schatting van het semi-variogram als gevolg van verschillen in stationsdichtheid. Door middel van het tekenen van Thiessen-polygonen (zie fig. 4) kunnen de afstanden tussen naburige stations worden bepaald. Met behulp van deze afstanden blijkt de oppervlakte van de beschouwde gebieden volgens de definitie van USWB (1957-1960) resp. 990, 1270 en 1360 km^2 te bedragen. Dit oppervlak wordt be-

rekend als de oppervlakte van k (= aantal regenmeters) cirkels, met elk een diameter gelijk aan de gemiddelde stationsafstand. Er kan dus worden geconcludeerd dat de verschillen in stationsdichtheid gering zijn.

4. Tengevolge van anisotropie kunnen bij gelijk oppervlak verschillen tussen gebieden optreden. Weliswaar werd voor Nederland anisotropie van het afstand-correlatieverloop voor decade- en maandneerslagen aangetoond door BUISHAND en VELDS (1980). Maar bij de geringe grootte van de hier beschouwde gebieden is voor dagneerslagen geen invloed van anisotropie te verwachten op de variogram-schattingen. Zo vond STOL (1972) voor een gebied in de Achterhoek (opp. ongeveer 2.000 km^2) geen aanwijzingen voor variatie in het correlatie-afstand-verloop van dagneerslagen door anisotropie.

2.3 Het schatten van gebiedsgemiddelden met behulp van kriging

Zij de neerslag z(x) in een punt met coördinaten x opgevat als realisatie van Z(x), zijnde een intrinsieke toevalsfunctie van orde nul. Bij toepassing van de kriging-methode wordt dan het gemiddelde over een gebied met oppervlakte A:

$$Z_V = \frac{1}{A} \int_V Z(x)\, dx \qquad (17)$$

geschat door een lineaire combinatie van de puntwaarnemingen:

$$\hat{z}_V = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z(x_i), \qquad (18)$$

waarin:

λ_i = gewicht dat wordt toegekend aan de realisatie van Z(x) in het punt met coördinaten x_i

k : aantal waarnemingspunten.

De eisen met betrekking tot zuiverheid en minimale variantie van de schatter (18) leiden tot het stelsel kriging-vergelijkingen (MATHERON, 1971):

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \gamma(x_i - x_j) + \mu = \frac{1}{A} \int_V \gamma\,(x_i - x)\, dx, \qquad (i = 1, ., k) \quad (19a)$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \tag{19b}$$

waarin:

μ : Lagrange factor

$\gamma(x_i - x_j)$ = semivariantie voor het puntenpaar met coördinaten x_i en x_j.

Het rechterlid in (19a) wordt hier in het vervolg genoteerd als $\bar{\gamma}(x_i;V)$: de gemiddelde semivariantie als van het beschouwde puntenpaar het ene punt het waarnemingspunt i is, en het andere punt het gebied V doorloopt. De integraal in (19a) kan als volgt worden berekend. Allereerst wordt het gebied V benaderd door een rechthoek V' en deze wordt vervolgens in vieren gesplitst, door assen evenwijdig aan de zijden van V' en door het punt x_i. Dan kan het rechterlid van (19a) benaderd worden door (BRAS en RODRÍGUEZ-ITURBE; 1976):

$$\frac{1}{A} \left[\sum_{i=1}^{4} \int_{0}^{D_i} \gamma(r)h(r)dr\right], \tag{20}$$

waarin:

D_i = de grootste afstand in deelgebied i

$h(r)$ = kansdichtheidsfunctie van de afstand r tussen het vaste punt x_i en een willekeurig punt in het beschouwde deelgebied.

De enkelvoudige integraal in (20) is snel numeriek te berekenen.

Hier is echter gebruik gemaakt van hulpfuncties (JOURNEL en HUIJBREGTS; 1978): analytisch berekende gemiddelden $\bar{\gamma}(V;V')$ die corresponderen met een bepaalde, eenvoudige geometrie van V en V', en berekend voor het een of andere type van variogram (b.v. lineair of exponentieel). Er zijn 6 basishulpfuncties.
Beschouw een rechthoek ABCD met zijden a en b, dan:

$$\chi(b) = \bar{\gamma}(A;\ AB), \tag{21a}$$

$$F(b) = \bar{\gamma}(AB;\ AB), \tag{21b}$$

$$\alpha(a;b) = \bar{\gamma}(AC;\ BD), \tag{21c}$$

$$H(a;b) = \bar{\gamma}(A;\ ABCD), \tag{21d}$$

$$\chi(a;b) = \bar{\gamma}(AC;\ ABCD), \tag{21e}$$

$$F(a;b) = \bar{\gamma}(ABCD;\ ABCD). \tag{21f}$$

Hier werd gebruik gemaakt van H(a;b):

$$H(a;b) = \frac{1}{3}\sqrt{(a^2 + b^2)} + \frac{b^2}{6a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{(a^2 + b^2)}}{b}\right) + \frac{a^2}{6b} \ln\left(\frac{b + \sqrt{(a^2 + b^2)}}{a}\right) \tag{22}$$

(JOURNEL en HUIJBREGTS; 1978, p.113).

Voor elk van de waarnemingspunten is V in vieren (eventueel tweeën) gedeeld door assen evenwijdig aan de zijdes van V' door het punt te trekken. Door de met het oppervlak der rechthoeken gewogen gemiddelden der H(a;b) te berekenen, wordt $\bar{\gamma}(x_i;V)$ bepaald, op het klomp-effect γ_o in (12) na. Dit klomp-effect, per maand constant voor alle waarnemingspunten, kan echter eenvoudigweg bij het gewogen gemiddelde $\bar{H}(a;b)$ worden opgeteld om $\bar{\gamma}(x_i;V)$ te bepalen.

Vervolgens wordt het stelsel (19) opgelost. De semivarianties werden hierbij vervangen door pseudocovarianties C(h), volgens C(h) = A - γ(h), waarbij A (overigens willekeurig) groter wordt gekozen dan de grootste γ(·) die optreedt in (19). Aldus wordt vermeden dat een matrix geïnverteerd moet worden met slechts nullen op de diagonaal. De gewichten zijn voor elk van de drie gebieden voor elke maand vermeld in appendix 3. Merk op dat alle gewichten positief zijn. Negatieve gewichten als gevolg van "schaduweffecten" zijn alleen bij interpolatie naar punten te verwachten als alle waarnemingspunten in het te schatten domein liggen. In tabel 3 zijn voor elk station in de 3 gebieden de gewichten vermeld voor de maanden januari en juli, alsmede de door het jaar constante gewichten ter berekening van het rekenkundig gemiddelde en de Thiessen-gewichten.

Bij vergelijking van de kriging-gewichten tussen stations blijkt er een duidelijk verband te bestaan tussen de oppervlakten van de Thiessen-veelhoeken en de grootte van de gewichten. Dit verband is het sterkst indien het klompeffect γ_o van het variogram relatief onbelangrijk is. Indien de hellingshoek θ in het variogrammodel nul is, worden de kriging-gewichten exact gelijk aan de gewichten die gelden bij het berekenen van het rekenkundig gemiddelde.

Bij vergelijking van de gewichten tussen maanden blijken de verschillen niet erg groot te zijn. Bij nadere beschouwing blijkt dat de verhouding van de parameters γ_o en θ in het populatie-semivariogram de gewichten bepaalt.

Gebied 1				Gebied 2				Gebied 3			
Station	KG		TG	Station	KG		TG	Station	KG		TG
(KNMI no)	jan.	juli		(KNMI no)	jan.	juli		(KNMI no)	jan.	juli	
223	.0904	.0917	.0345	733	.0477	.0479	.0537	542	.0826	.0843	.1036
225	.0877	.0854	.1171	736	.0709	.0714	.0471	543	.0934	.0905	.0804
226	.0750	.0749	.0790	743	.0623	.0625	.0604	558	.0739	.0769	.0959
229	.0547	.0575	.0458	746	.1064	.1065	.0684	564	.0904	.0897	.0634
230	.0735	.0751	.0786	749	.0763	.0761	.0834	565	.0623	.0570	.0480
233	.0807	.0823	.0950	751	.1515	.1509	.1750	567	.0983	.1012	.0937
435	.0751	.0783	.0616	752	.1821	.1814	.1987	570	.1051	.1124	.1478
436	.0671	.0678	.0228	754	.0376	.0377	.0386	571	.0933	.0991	.1065
437	.1143	.1107	.1162	755	.0979	.0976	.1054	573	.0947	.0935	.0840
438	.1106	.1059	.1406	756	.0658	.0661	.0652	578	.0955	.1003	.1166
441	.1082	.1058	.1453	758	.0624	.0627	.0578	579	.0581	.0518	.0361
454	.0628	.0646	.0636	760	.0391	.0393	.0464	580	.0524	.0432	.0241

Tabel 3: Gewichten voor de berekening van gebiedsgemiddelden voor 3 gebieden in Nederland. N.B.: RGM-gewichten zijn voor alle maanden en voor de 3 gebieden gelijk aan 0.0833 (RGM: rekenkundig gemiddelde; KG: kriging-gemiddelde; TG: Thiessen-gemiddelde).

2.4 Resultaten

Met behulp van de voor alle drie methoden (KM, TM, RGM) berekende gewichten zijn gebiedsgemiddelden $g^k_{i,j}$, $g^t_{i,j}$, $g^r_{i,j}$ (de bovenindex duidt de gebruikte methode aan) berekend voor maandmaxima in maand i en jaar j. Aangezien de werkelijke gebiedsneerslag niet bekend is, is hier een maandmaximum gedefinieerd door het rekenkundig gemiddelde van de puntneerslagen.

De drie methoden kunnen allereerst worden vergeleken op grond van hun schattingsvarianties. Algemeen geldt voor een lineaire schatter van een gebiedsgemiddelde op grond van k puntwaarnemingen in punten met coördinaten x_i voor de schattingsvariantie σ^2_s:

$$\sigma^2_s = 2 \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \bar{\gamma}(x_i;V) - \bar{\gamma}(V;V) - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i - x_j). \tag{23}$$

In het geval dat de kriging-methode toegepast wordt, worden de gewichten λ_i zodanig gekozen dat de schattingsvariantie σ^2_s geminimaliseerd wordt:

$$\sigma^2_{s,\,min} = - \bar{\gamma}\,(V;V) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \bar{\gamma}\,(x_i;V) + \mu. \tag{24}$$

Vergelijkingen (23) en (24) zijn standaardresultaten; zie hiervoor o.a. MATHERON (1971).

Indien het stelsel (19) in matrixnotatie wordt geschreven als:

$$\begin{bmatrix} \Gamma & 1_n \\ 1_n' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix},$$

zijn λ en μ als functie van Γ^{-1} en r te schrijven (CORSTEN; 1982). Invullen van deze oplossing voor λ en μ in de kriging-variantie, nu geschreven als;

$$\sigma^2_{s,min} = -\bar{\gamma}\ (V;V) + \lambda' r + \mu,$$

leidt tot:

$$\sigma^2_{s,min} = -\bar{\gamma}\ (V;V) + r'\Gamma^{-1}r - (1 - 1_n'\Gamma^{-1}r)\ (1_n'\ \Gamma^{-1}1_n)^{-1}(1 - 1_n'\Gamma^{-1}r). \qquad (25)$$

De laatste term in het rechterlid van (25) kan worden opgevat als de variantie van de schatting van de stationaire verwachting van het gebiedsgemiddelde, de som van de eerste twee termen als een schatting van de variantie van het residu ten opzichte van de regressie.

Berekening van σ^2_s en $\sigma^2_{s,min}$ geschiedt met (23), resp. (25). De term $\bar{\gamma}(x_i;V)$ in (23) is reeds berekend in hfdst. 2.3. Voor de berekening van $\bar{\gamma}(V;V)$ in (25) is gebruik gemaakt van de hulpfunctie F(a;b) (zie eveneens vgl. (21f):

$$F(a;b) = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{5} - \frac{1}{15}\frac{a^2}{b^2} - \frac{1}{15}\frac{b^2}{a^2}) + \frac{1}{15}\ (\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{a^2}) +$$

$$+ \frac{1}{6}\frac{a^2}{b} \ln \{b + (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}})/a\} + \frac{1}{6}\frac{b^2}{a} \ln \{(a + (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}})/b\}. \qquad (26)$$

Tabel 4 geeft voor de verschillende maanden van het jaar en voor de 3 beschouwde gebieden $\sigma^2_{s,min}$, $\sigma^2_{s,t}$ (bij Thiessen-schattingen) en $\sigma^2_{s,r}$ (bij schattingen door het rekenkundig gemiddelde). De schattingsvariantie van Thiessen-schattingen is meestal kleiner dan de schattingsvariantie bij schatting door het rekenkundig gemiddelde. Deze laatste schattingsmethode kan soms erg inefficiënt zijn als een gebied gekenmerkt wordt door enige relatief grote Thiessen-polygonen (Zeeland). Indien echter de ruimtelijke samenhang gering is (verhouding γ_o/θ in (12) hoog), zijn de rekenkundige gemiddelden efficiëntere schatters.

Maand	Gebied 1 (N-H)					Gebied 2 (Zeeland)					Gebied 3 (Veluwe)				
	RGM		TM		KM	RGM		TM		KM	RGM		TM		KM
	$\sigma^2_{s,r}$	eff.	$\sigma^2_{s,t}$	eff.	$\sigma^2_{s,min}$	$\sigma^2_{s,r}$	eff.	$\sigma^2_{s,t}$	eff.	$\sigma^2_{s,min}$	$\sigma^2_{s,r}$	eff.	$\sigma^2_{s,t}$	eff.	$\sigma^2_{s,min}$
jan.	0.27	87	0.27	87	0.23	0.83	49	0.43	94	0.40	0.53	89	0.51	92	0.47
febr.	0.25	89	0.25	87	0.22	0.33	90	0.35	85	0.30	0.31	75	0.25	95	0.23
mrt.	0.29	82	0.27	88	0.23	0.30	83	0.28	88	0.25	0.27	64	0.18	97	0.17
apr.	0.40	75	0.34	87	0.30	0.65	37	0.26	93	0.24	0.58	83	0.51	94	0.48
mei	0.81	87	0.81	87	0.71	1.00	37	0.39	93	0.37	1.20	79	1.00	95	0.95
juni	1.02	77	0.90	87	0.79	2.08	76	1.77	90	1.59	1.98	84	1.77	94	1.66
juli	2.75	90	2.84	87	2.48	3.85	49	2,03	94	1.90	3.14	80	2.65	94	2.51
aug.	6.21	83	5.85	88	5.13	4.69	95	5.42	82	4.45	3.15	80	2.69	94	2.53
sept.	1.79	86	1.76	88	1.54	2.99	68	2.23	92	2.04	1.32	77	1.07	95	1.02
oct.	0.92	82	0.85	88	0.75	2.26	52	1.26	94	1.18	0.69	72	0.52	96	0.50
nov.	0.65	76	0.57	87	0.50	0.65	95	0.75	82	0.62	0.45	84	0.40	94	0.38
dec.	0.68	94	0.73	87	0.63	0.79	100	1.04	76	0.79	0.66	99	0.75	88	0.66

Tabel 4: schattingsvarianties [mm^2] en efficienties [%] ten opzichte van $\sigma^2_{s,min}$ van verschillende schatters van gebiedsgemiddelden.

Uit de tabel blijkt duidelijk het nadeel van niet-optimale schatters: alhoewel ze soms efficiënte schattingen opleveren, doen ze dat onder andere omstandigheden niet. De efficiëntie van de Thiessen-schatter is overigens minder veranderlijk dan die van de rekenkundig gemiddelde-schatter.

Tenslotte zijn systematische verschillen en de relatieve grootte van verschillen tussen schattingen, ten opzichte van de krigingschattingen bepaald. Daartoe zijn allereerst per gebeurtenis verschillen $\underline{v}_{i,j}$ bepaald; bijv. bij vergelijken van de Thiessen-methode met de kriging-methode:

$$\underline{v}_{i,j} = \underline{g}^k_{i,j} - \underline{g}^t_{i,j},$$

waarin:

i,j: maand-, resp. jaarindex.

Deze verschillen zijn vervolgens voor elke maand over jaren gemiddeld: $\underline{v}_{i.}$. Door beschouwing van $\underline{v}_{i.}$ kunnen systematische verschillen tussen kriging-gemiddelden en andere gemiddelden worden geschat. Voorts is de relatieve grootte van de verschillen bepaald met behulp van $\underline{v}'_{i.}$:

$$\underline{v}'_{i.} = \frac{1}{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \{\underline{g}^{t}_{i,j} - \underline{g}^{k}_{i,j} | / \underline{g}^{k}_{i,j}\}, \qquad (28)$$

waarin:

ℓ = lengte van de waarnemingsperiode in jaren (ℓ = 29).

Waarden van $\underline{v}_{i.}$ en $\underline{v}'_{i.}$ voor de drie beschouwde gebieden zijn vermeld in tabel 5. Zoals te verwachten is, en zoals reeds elders gerapporteerd (b.v. DELHOMME; 1978), zijn de verschillen tussen de kriging- en de Thiessen-schattingen gering. Schatting door het rekenkundig gemiddelde levert slechtere resultaten op, vooral in de zomer en voor gebieden waar de waarnemingspunten onregelmatig verspreid liggen. Voorts blijken hier de Thiessen-gemiddelden steeds hoger en de rekenkundige gemiddelden in de meeste gevallen lager uit te vallen dan de kriging-gemiddelden. Overigens zij er nogmaals op gewezen, dat de in tabel 5 vermelde verschillen gemiddeld zijn over jaren; voor afzonderlijke gebeurtenissen kunnen de verschillen tussen de methoden veel groter zijn.

Maand	GEBIED											
	1				2				3			
	TM		RGM		TM		RGM		TM		RGM	
	$\underline{v}_{i.}$	$\underline{v}'_{i.}$	$\underline{v}_{i.}$	$\underline{v}'_{i.}$	$\underline{v}_{i.}$	$\underline{v}'_{i.}$	$\underline{v}_{i.}$	$\underline{v}'_{i.}$	$\underline{v}_{i.}$	$\underline{v}'_{i.}$	$\underline{v}_{i.}$	$\underline{v}'_{i.}$
jan.	-0.34	1.21	0.70	1.14	-0.21	0.97	0.68	3.03	-0.26	0.85	0.88	1.09
febr.	-0.58	1.38	0.74	1.10	-0.54	1.53	-0.31	1.98	-0.52	0.85	0.83	1.49
mrt.	-1.13	1.28	0.67	1.81	-0.68	1.54	-0.02	1.90	-0.32	0.68	1.61	1.91
apr.	-0.24	1.28	0.74	1.67	-0.15	0.76	1.93	5.29	-0.95	1.66	1.17	2.39
mei	-0.45	1.89	0.88	1.58	-0.17	1.51	1.78	7.41	-2.10	1.76	2.86	2.89
juni	0.68	1.57	2.46	2.33	-0.58	2.15	-2.04	4.54	-0.08	1.78	-1.48	2.08
juli	-1.90	2.39	1.21	2.94	-0.29	1.56	-3.21	7.80	-1.12	2.10	-1.21	2.26
aug.	-3.10	2.54	3.95	3.99	-0.46	3.53	-1.25	3.03	0.10	1.58	2.58	2.89
sept.	-0.34	1.89	1.00	2.18	0.98	1.66	-1.20	4.00	-0.02	0.78	1.10	1.95
okt.	-0.57	2.19	0.49	1.85	-0.42	1.27	-2.08	4.82	-0.32	1.26	1.39	2.02
nov.	-1.59	1.32	-0.59	1.22	-1.32	2.20	0.35	1.20	-0.76	0.92	0.96	1.13
dec.	-0.60	1.14	1.10	1.06	-0.46	2.93	-0.04	0.45	-1.52	1.59	0.61	0.51

Tabel 5: $\underline{v}_{i.}$ [mm] en $\underline{v}'_{i.}$ [%] ten opzichte van kriging-resultaten.

2.5 Conclusies

Elders was reeds geconcludeerd tot de toepasbaarheid van de ITF-0 theorie bij het berekenen van gebiedsgemiddelden van neerslagen over klimatologisch enigzins" homogene gebieden (DELHOMME; 1978, CHUA en BRAS; 1980). In deze studies werd alleen de orografie beschouwd als mogelijke oorzaak van heterogeniteiten in de ruimtelijke neerslagverdeling. Blijkens KNMI (1972) beinvloedt de orografie de ruimtelijke neerslagverdeling in het beschouwde gebied 3 (de Veluwe). Voor de andere hier beschouwde gebieden kunnen echter ook kust-land-effecten (gebieden 1 en 2), de invloed van de zeearmen (2) en eventueel een stedelijke invloed (1) gevolgen hebben voor de ruimtelijke neerslagverdeling. Op welke wijze dan ook veroorzaakt, in alle drie gebieden zijn gradiënten in het gemiddeld aantal dagen per maand met zware ($\geq$ 10.0mm) neerslag geconstateerd (KNMI; 1972). In WITTER (1982) werd geconcludeerd tot de mogelijkheid van indeling van Nederland in drie deelgebieden: een nat, een droog en een overig deel (zie fig. 8). Alle drie hier beschouwde gebieden behoren gedeeltelijk tot één en gedeeltelijk tot een ander van die deelgebieden.

Desondanks is het mogelijk de ITF-0 theorie toe te passen, zoals blijkt uit de vorm van het semi-variogram. Hierdoor is een eenvoudige berekening van de kriging-gewichten voor het bepalen van gebiedsgemiddelden mogelijk. De schaal van de veroorzaakte oneffenheden in de ruimtelijke neerslagverdeling is blijkbaar te gering vergeleken met de afmetingen van het gebied (MATHERON; 1971). Wel moet worden opgemerkt dat de variatie, zowel naar seizoen als naar gebied, tussen steekproefvariogrammen groot is.

Met betrekking tot de gestelde vraag (1) naar het effect van verschillende berekeningswijzen op de uitkomst van het gebiedsgemiddelde kan worden opgemerkt dat toepassing van kriging niet zozeer tot resultaten leidt die gemiddeld sterk verschillen ten opzichte van de resultaten van andere methoden (zie tabel 5), maar vooral tot efficiëntere schattingen leidt. Zo bedraagt bij schatten van gebiedsgemiddelden de efficiëntie van de Thiessen-schatters ten opzichte van de kriging-schatters in de maand met de hoogste schattingsvariantie (augustus)

0.88, 0.82 en 0.94 (voor resp. de gebieden 1, 2 en 3);

die van de rekenkundig gemiddelde-schatters:

0.83, 0.95 en 0.80.

Deze efficiëntie is relevant bij vragen naar het opzetten van een meetnet, indien daarbij als criterium de voorspellingsvariantie geldt.

In het vervolg van deze nota zullen, indien het verloop van de semi-variantie bevredigend kan worden geschat, gebiedsgemiddelden worden berekend met behulp van kriging.

3 DE STATISTISCHE GEBIEDSREDUCTIEFACTOR GRF

3.1 Inleiding

De statische gebiedsreductiefactor GRF is gedefinieerd (NERC; 1975) als het quotiënt van de punt- en gebiedsneerslag van dezelfde duur en optredend bij gelijke herhalingstijd voor een gebied van zekere omvang. Bij elk kwantiel x_p is de herhalingstijd T gedefinieerd door:

$$T = \frac{1}{1-F(x_p)} = \frac{1}{1-p}. \qquad (1)$$

De herhalingstijd is dus de verwachte wachttijd tot het eerste jaar met een overschrijding van een gegeven drempelwaarde.

Uit de definitie blijkt dat GRF een functie is van in elk geval de neerslagduur, de herhalingstijd en de oppervlakte van het gebied. Of GRF afhankelijk is van locatie is een punt van discussie. Zo wordt toepassing van in het Verenigd Koninkrijk (NERC; 1975) gevonden waarden van GRF aanbevolen in Nederland (BUISHAND en VELDS; 1980) en toepassing van in de Verenigde Staten (USWB; 1957-1960) gevonden waarden in Australië (PATTISON et al.; 1977).

Daarentegen melden MYERS en ZEHR (1980) variatie van GRF met locatie binnen de Verenigde Staten. BELL (1976) concludeert dat in het Verenigd Koninkrijk GRF mogelijk toeneemt met de geografische breedte. Deze mogelijke variatie is echter klein ten opzichte van allerlei onnauwkeurigheden bij practische toepassingen van het schatten van neerslagkwantielen. Bovendien zijn er nog te weinig gegevens van neerslagmeetnetten in het Noorden van het Verenigd Koninkrijk om de mate van variatie met redelijke nauwkeurigheid en betrouwbaarheid te schatten.

In dit hoofdstuk (3.2) zal allereerst een overzicht worden gegeven van enige mogelijke berekeningswijzen van GRF. Vervolgens zal in hfdst. 3.3. worden ingegaan op de vragen 2 t/m 7:

2. Leiden verschillen in berekeningswijze tot verschillen in GRF_{24}?
3. Zijn er verschillen in GRF_{24} tussen 3 ongeveer even grote gebieden in Nederland?
4. Verschilt de voor Nederland berekende GRF_{24} van die van andere landen?
5. Treden jaarmaxima van punt- en gebiedsneerslagen in hetzelfde seizoen op?

6. Is er verschil in GRF_{24} tussen het winterseizoen en het zomerseizoen voor de drie beschouwde gebieden in Nederland?
7. Hangt GRF_{24} af van de overschrijdingsfrequentie?

In hfdst. 3.4 worden enige conclusies geformuleerd.

3.2 Methoden ter berekening van GRF

Bij de beschrijving van de methoden is uitgegaan van N regenmeters en een waarnemingsperiode van n jaar. Enige methoden ter berekening van GRF zijn:

3.2.1 USWB (1957-1960):

(a) Bepaal het maximum $x_g(i)$ in jaar i van de gebiedsneerslag bij een gekozen duur. Noem het gemiddelde over de jaren $\bar{x}_g$.

(b) Bepaal het maximum $x_{s1}(i)$ in jaar i van de door regenmeter 1 gemeten puntneerslag bij deze duur. Noem het gemiddelde over de jaren $\bar{x}_{s1}$.

(c) Bepaal op analoge wijze $\bar{x}_{s2}, \bar{x}_{s3}, \ldots, \bar{x}_{sN}$ en bereken het gemiddelde

puntmaximum $\bar{x}_s = \sum_{j=1}^{N} \bar{x}_{sj}/N$.

(d) $GRF = \bar{x}_g/\bar{x}_s$.

Figuur 9 is overgenomen uit USWB (1957-1960) en geeft GRF als functie van de oppervlakte en van de neerslagduur.

3.2.2 NERC (1975):

(a) Bepaal het maximum in jaar i van de gebiedsneerslag bij een gekozen duur en noteer de ermee corresponderende puntneerslag:
$x'_{s1}(i), x'_{s2}(i), \ldots, x'_{sN}(i)$.

(b) Bepaal de maxima $x_{s1}(i), x_{s2}(i), \ldots, x_{sN}(i)$ in jaar i van de door de N regenmeters gemeten puntneerslag bij deze duur.

(c) Bepaal per jaar en per regenmeter het quotiënt
$q(i,j) = x'_{sj}(i)/x_{sj}(i)$.

(d) $GRF = \{\Sigma_i \Sigma_j q(i,j)\}/(n.N)$.

Figuur 10 is overgenomen uit NERC (1975) en geeft GRF als functie van de oppervlakte en van de neerslagduur.

De twee hierboven beschreven methoden maken geen gebruik van de volledige kansverdeling van extrema. Aangezien ze beide uitgaan van gemiddelde jaarmaxima vindt men de GRF die correspondeert met een herhalingstijd van 2.33 jaar, onder de veronderstelling dat de jaarmaxima volgens Gumbel verdeeld zijn. De volgende twee methoden berusten wel op de kansverdeling van extrema.

3.3.3 BELL (1976):

Dit onderzoek is een vervolg op NERC (1975), en gaat de juistheid na van een tweetal van daar gedane veronderstellingen: de invloed van de herhalingstijd op GRF is voor praktische doeleinden verwaarloosbaar, en GRF is ongeveer constant voor alle delen van het Verenigd Koningrijk. Bij herhalingstijden tot 5 jaar komen de in beide studies gevonden waarden van GRF goed overeen. Voor zeer extreme gebeurtenissen zijn de in NERC (1975) gevonden waarden echter te hoog.

Het bestaan van regionale verschillen in GRF kan niet overtuigend worden aangetoond. Voor toekomstige toepassingen wordt vanwege de invloed van de herhalingstijd op GRF de in BELL (1976) toegepaste methode aanbevolen:

(a) Vervaardig frequentiecurven voor pieken van puntneerslagen bij een gekozen duur; middel de curves voor de verschillende in het gebied gelegen neerslagstations ("puntcurve").
(b) Vervaardig een frequentiecurve voor pieken van de gebiedsneerslagen bij deze duur ("gebiedscurve").
(c) GRF bij zekere herhalingstijd vindt men door deling van het kwantiel van de gebiedscurve door dat van de puntcurve.

3.2.4 MYERS en ZEHR (1980):

Hier wordt uitgegaan van Chow's vergelijking voor kwantiel-analyse:

$$x_p = \mu + K_{1-p}\sigma, \qquad (2)$$

waarin:

x_p = kwantiel van de neerslag, met frequentie 1-p bereikt of overschreden
μ,σ = plaats en schaalparameter
K_{1-p} = "frequentie-factor"; deze hangt af van de verdelingsfunctie van $\underline{x}$ en van de overschrijdingskans 1-p.

Indien punt- en gebiedsneerslag bij een gekozen duur en met overschrijdingskans 1-p worden geschreven als resp. $x_p(\Delta t, 0)$ en $x_p(\Delta t, A)$, dan is GRF bij deze overschrijdingskans, duur en oppervlakte te berekenen als:

$$GRF = x_p(\Delta t,\ A)/x_p(\Delta t,\ 0)\cdot \tag{3}$$

Invullen van (2) in (3) en vervangen van de populatiegrootheden μ en σ^2 door de steekproefwaarden $\bar{x}$ en s^2 leidt tot:

$$GRF = \frac{\bar{x}\ (\Delta t,A) + K_{1-p}\ s(\Delta t,A)}{\bar{x}(\Delta t,0) + K_{1-p}s(\Delta t,0)}. \tag{4}$$

Delen van teller en noemer door $\bar{x}(\Delta t,0)$ leidt tot de formule:

$$GRF = \frac{\bar{x}'(\Delta t,A) + K_{1-p}\ s'(\Delta t,A)\cdot vc(\Delta t,0)}{1 + K_{1-p}\ vc(\Delta t,0)}, \tag{5}$$

waarin:

$vc(\Delta t,0) =$ variatiecoëfficiënt $= s(\Delta t,0)/\bar{x}(\Delta t,0)$

$\bar{x}'(\Delta t,A) = \bar{x}(\Delta t,A)/\bar{x}(\Delta t,0)$

$s'(\Delta t,A) = s(\Delta t,A)/s(\Delta t,0)$.

Uitgaande van (5) wordt in MYERS en ZEHR (1980) GRF berekend, waartoe $\bar{x}$ en s' worden bepaald als functie van Δt en A. De resulterende waarden van GRF bij een herhalingstijd van 2.3 jaar stemmen redelijk overeen met de resultaten van USWB (1957-1960).

Voor Nederland werd GRF berekend door KRAIJENHOFF (1963),VAN MONTFORT (1968) en BUISHAND (1977a).

3.2.5 KRAIJENHOFF (1963):

Uitgegaan wordt van een groep van 30, gelijkelijk over Nederland verspreide neerslagstations. Voor zomerdagen gedurende de periode 1932-1956 waarop op minstens één van deze stations meer dan 40 mm neerslag is geregistreerd, is op grond van het isohyetenpatroon de gebiedsneerslag berekend voor cirkelvormige gebieden met oppervlaktes van 10, 50, 100, 150, 250 en 500 km^2, met het beschouwde neerslagstation als middelpunt. Voor alle beschouwde oppervlaktes zijn de gebiedsneerslagen geordend, evenals de ermee corresponderende puntneerslagen, en tegen elkaar uitgezet op dubbel-logarithmisch papier. Met behulp van regressierekening zijn rechte lijnen aangepast (zie fig. 11). Merk op dat GRF hier een functie is van de neerslaghoeveelheid, die op zich weer afhangt van de herhalingstijd.

3.2.6 VAN MONTFORT (1968):

VAN MONTFORT (1968) berekent GRF door uit te gaan van een cirkelvormig gebied met straal R, een centraal gelegen station C en een willekeurig punt S op punt op afstand h < R. Door een gelijke verdeling te veronderstellen van neerslagmaxima in C en in S wordt de lineaire regressiecoëfficiënt van de neerslagsom in S op de neerslagsom in C geschat als de lineaire correlatiecoëfficiënt. Het toegepaste correlatiemodel luidt:

$$\rho(h) = e^{-\gamma h}, \qquad (6)$$

waarin:

γ = parameter.

Het regressiemodel luidt nu als volgt:

$$x(h) = \mu_c + (x(0) - \mu_c)\rho(h), \qquad (7)$$

waarin:

$x(h)$ = neerslag te S op afstand h van het maximum C

μ_c = de verwachting van het maximum in C

$x(0)$ = een grote waarde van het maximum in C.

Hieruit is af te leiden dat voor een cirkelvormig gebied met straal R geldt:

$$GRF = \frac{\mu_c}{x(0)} + \frac{x(0) - \mu_c}{x(0)} \left\{\frac{1 - (1 + \gamma R)e^{-\gamma R}}{\frac{1}{2}(\gamma R)^2}\right\}. \qquad (8)$$

Voor een cirkelvormig gebied met een oppervlakte van ongeveer 2.000 km^2 varieert GRF, berekend met (8), voor de periode september tot en met december tussen 0.87 en 0.92, afhankelijk van de herhalingstijd van de beschouwde gebeurtenis.

3.2.7 BUISHAND (1977a):

BUISHAND (1977a) schat het gebiedsgrootte-effect bij dagneerslagen volgens de methode van RODRÍGUEZ-ITURBE en MEJÍA (1974): Laat $\underline{x}_s(u,t)$ de puntneerslag zijn gedurende de periode t op het punt met coördinatenvector u. Verondersteld wordt dat het neerslagproces $\{\underline{x}_s(u,t)\}$ met verwachting μ_s en variantie σ_s^2 stationair en isotroop is. Het neerslag<u>volume</u> $\underline{h}(t)$ over een gebied met oppervlakte A is:

$$\underline{h}(t) = \int_A \underline{x}_s(u,t)du$$

en $E[\underline{h}(t)] = \mu_g.A$(met $\mu_g = E[\underline{x}_g]$).

De covariantie in het plaats- en tijdsdomein is:

$$Cov(\underline{h}(t)) = E[\underline{h}(t_1).\underline{h}\ (t_2)]-\{E[\underline{h}(t)]\}^2$$

$$=E[\int_A \underline{x}_s(u_1,t_1)du_1\int_A \underline{x}_s\ (u_2,t_1+\Delta t)du_2]-\mu_g^2A^2 \qquad (9)$$

$$=\int_A\int_A\{E[\underline{x}_s(u_1,t_1).\underline{x}_s(u_2,t_1+\Delta t)]-\mu_g^2\}du_1du_2.$$

Indien $t_1=t_2=t$:

$$Cov(\underline{h}(t)) = Var(\underline{h}(t)) = \sigma_h^2 = \int_A\int_A\{E[\underline{x}_s(u_1,t).\underline{x}_s(u_2,t)]-\mu_g^2\}du_1du_2.$$

Voor een stationair gebied geldt: $E[\underline{x}_g] = \mu_g = \mu_s$. Dus:

$$\sigma_h^2 = \int_A\int_A\{E[\underline{x}_s(u_1,t).\underline{x}_s(u_2,t)] - \mu_s^2\}du_1du_2 = \sigma_s^2\int_A\int_A r(u_1,u_2)du_1du_2, \qquad (10)$$

waarin:

$r(u_1,u_2)$ = ruimtelijke correlatiecoëfficiënt tussen neerslagen in de punten met coördinaten resp. u_1 en u_2.

Dus geldt:

$$\sigma_h^2 = A^2\ \sigma_s^2\ \bar{r}(A,A),$$

waarin:

$\bar{r}(A,A)$ = verwachting van $r(u_1,u_2)$, indien de punten met coördinaten u_1 en u_2 willekeurig worden gekozen in A.

Tenslotte:

$$var(\underline{x}_g) = \sigma_g^2 = \sigma_s^2\ \bar{r}(A,A). \qquad (11)$$

In Buishand (1977a) is ervan uitgegaan dat de punt- en gebiedsneerslag $\underline{x}_s$ en $\underline{x}_g$ een gamma-verdeling hebben met verwachting en variantie μ_s en $\sigma_s{}^2$, resp. μ_g en $\sigma_g{}^2$:

$$\mu_g = \mu_s, \qquad (12a)$$

$$\sigma_g{}^2 = f\sigma_s{}^2. \qquad (12b)$$

In plaats van een reductiefactor voor de variantie $f = \bar{r}(A,A)$ is in BUISHAND (1977a) beschouwd:

$$f = \rho[E(\underline{v})], \tag{13}$$

waarin:

$\underline{v}$ = kansvariabele die de afstand tussen twee willekeurige punten in A aanduidt.

Voor enkele gebieden van verschillende vorm en met oppervlakte 1 zijn waarden van $E(\underline{v})$ gegeven in BUISHAND (1977b). Met behulp van de daar eveneens gegeven correlatie-afstandrelatie is in BUISHAND (1977a) voor twee gebieden van 100 en van 1.000 km^2 $\rho[E(\underline{v})]$ bepaald voor het winter- en het zomerseizoen. Vervolgens is GRF_{24} berekend door kwantielen uit de verdeling van gebiedsneerslagen te delen door kwantielen uit de verdeling van puntneerslagen. De resultaten stemmen goed overeen met die van NERC (1975).

Deze methode ter berekening van GRF is aantrekkelijk indien er geen gegevens zijn van meetnetten, en zal in hoofdstuk 4 worden toegepast ter berekening van GRF_{24} en GRF_1. Merk op dat delen van kwantielen van de marginale verdeling van gebieds- en puntneerslagen de mogelijkheid impliceert van GRF >1 (zie eveneens NGUYEN et al.; 1981).

Zoals uit het voorafgaande blijkt, wordt de statistische GRF berekend als het quotiënt van kwantielen van de verdeling van maxima (methoden 1, 2 en 4), van de verdeling van overschrijdingen boven een drempelwaarde (methode 3) of van de marginale verdeling (methode 7). Aangezien de autocorrelatie van gebiedsneerslagen groter is dan die van puntneerslagen (BUISHAND; 1977b) zal methode 3 voor gebeurtenissen die, naar verwachting, meer dan eens per jaar voorkomen, GRF lager schatten dan methode 7.

In methode 5 wordt uitgegaan van overschrijdingen van een drempelwaarde, en worden bij berekening van GRF slechts die dagen beschouwd, waarop de puntneerslag op een zeker station een zekere drempelwaarde overschrijdt. Op deze dagen wordt de gebiedsneerslag bepaald en tenslotte worden de geordende steekproeven tegen elkaar uitgezet. Aangezien als criterium de puntneerslag geldt, is de kans aanwezig dat dagen met een hoge gebiedsneerslag, maar waarvoor de puntneerslag lager is dan de drempelwaarde van 40 mm., buiten beschouwing blijven.

Deze kans is overigens zeer gering indien de drempelwaarde hoog is. Merk op dat bij deze methode de dagen waarop puntneerslagen als een piek worden beschouwd, dezelfde zijn als die waarvoor gebiedsneerslagen in beschouwing zijn genomen. Dit element van gelijktijdigheid is nog sterker aanwezig bij methode 6.

In deze nota wordt GRF berekend volgens de methode van BELL (1976) indien puntgegevens op voldoende korte afstand van elkaar gemeten aanwezig zijn. Indien dit niet het geval is, wordt GRF berekend volgens de methode van BUISHAND (1977a). Beide methoden zijn bekend in de hydrologische praktijk en literatuur, zijn doorzichtig en geven een expliciet verband van GRF met T.
In het vervolg van dit hoofdstuk wordt GRF_{24} berekend volgens BELL (1976) met behulp van gegevens uit de gebieden 1, 2 en 3 (zie fig. 3 en appendix I).

3.3 Resultaten

Ter berekening van GRF_{24} zijn voor de drie beschouwde gebieden PBD-(Pieken Boven een Drempelwaarde; eng.: "Peaks Over Threshold") reeksen gevormd van de stationsreeksen en de reeksen met gebiedsneerslagen. GRF is berekend voor het gehele jaar en voor het zomer- en winterseizoen: resp. de maanden mei t/m september en de overige maanden. De drempel is zodanig gekozen dat gemiddeld per jaar of per seizoen 2 als onafhankelijk te beschouwen pieken geselecteerd zijn, dat wil zeggen gescheiden door minstens één dag zonder neerslag in het beschouwde gebied.

De pieken zijn verondersteld exponentieel verdeeld te zijn. Dit berust op het volgende, aannemelijk geachte kansmodel: als het aantal overschrijdingen in een reeks volgens Poisson verdeeld is, en de ermee corresponderende hoeveelheden (pieken) exponentieel verdeeld en onderling onafhankelijk zijn, dan zijn de jaarmaxima volgens Gumbel verdeeld.

De kansdichtheidsfunctie (kdf) van de pieken q is dus:

$$f(q) = \frac{1}{\beta} \exp[-(q - q_0)/\beta], \tag{14}$$

waarin:

q_0, β: te schatten locatie-, resp. schaalparameter.

Dus geldt voor de cumulatieve dichtheidsfunctie (cdf):

$$F(q) = 1 - \exp[-(q - q_0)/\beta]. \tag{15}$$

In het geval van $1/T_0$ pieken per jaar geldt in plaats van (1):

$$1-F(q_p) = T_0/T. \tag{16}$$

Substitutie van (16) in (15) leidt tot de vergelijking van de frequentiecurven:

$$\hat{q}_p = \hat{\beta}\ln(T/T_0) + \hat{q}_0. \tag{17}$$

Tot zuiverheid gecorrigeerde schatters volgens de methode van de Grootste Aannemelijkheid (MGA-schatters) voor β en q_0 zijn (NERC; 1975, dl.I, p.75, 76):

$$\hat{\underline{\beta}} = \frac{N}{N-1}\,(\bar{\underline{q}} - \underline{q}_{(\ell)}) \tag{18}$$

en

$$\hat{\underline{q}}_0 = \underline{q}_{(\ell)} - \hat{\underline{\beta}}/N, \tag{19}$$

waarin:

N = steekproefomvang

$\bar{\underline{q}}$ = steekproefgemiddelde

$\underline{q}_{(\ell)}$ = laagste waarde van $\underline{q}$ in de steekproef.

Aangezien waarnemingen op verschillende stations en van gelijke rangorde dezelfde herhalingstijd hebben, zijn de geordende pieken $\underline{q}_{(i)}$ van de reeksen $\{\underline{x}_s\}$ berekend als het rekenkundig gemiddelde van pieken op de verschillende stations met gelijk rangnummer. In BELL (1976) is bij het middelen een variant op de Thiessen-methode toegepast. Het berekenen van gebiedsgemiddelden geschiedt in deze nota met behulp van kriging, waarbij al naar gelang de maand waarin het maximum optrad, het bijbehorende stel kriging-gewichten is gebruikt. In appendix IV zijn de geordende pieken vermeld van gebiedsneerslagen en gemiddelde puntneerslagen.

De geordende pieken $\underline{q}_{(i)}$ van de reeksen $\{\underline{x}_s\}$ en $\{\underline{x}_g\}$ zijn voor de drie beschouwde gebieden in de figuren 12^1 t/m 12^9 uitgezet tegen de herhalingstijd en de "plotting position" $E(\underline{y}_{(i)})$. Dit is het verwachte steekproefkwantiel van de standaardexponentiële verdeling (met dichtheid e^{-y} voor $y \geq 0$ en nul elders). Er geldt $E(\underline{y}_{(i)}) = \sum_{j=1}^{i} (N+1-j)^{-1}$, met:

$$\underline{q} = q_0 + \beta\underline{y}, \tag{20}$$

dit is een verschoven exponentiële verdeling op het interval (q_0,∞) met standaardafwijking β; derhalve geldt:

$$E(\underline{q}_{(i)}) = q_0 + \beta E(\underline{y}_{(i)}). \tag{21}$$

Tabel 6 geeft MGA-schattingen van de parameters β en q_0 van de exponentiële verdeling voor gebiedsneerslagen en gemiddelde puntneerslagen voor de drie beschouwde gebieden, voor het hele jaar en voor het zomer- en winterseizoen. Tabel 7 geeft GRF_{24} bij enige herhalingstijden voor de drie beschouwde gebieden, voor het hele jaar en voor het zomer- en winterseizoen. De limietwaarde van GRF_{24} voor $T \to \infty$ is berekend als (zie (17)):

$$GRF \to \hat{\beta}_g \,/\, \hat{\beta}_s, \tag{22}$$

waarin:

$\hat{\beta}_g$ = schatting van β in (14) voor pieken van gebiedsneerslagen
$\hat{\beta}_s$ = schatting van β in (14) voor pieken van puntneerslagen.

	PBD-reeks voor					
	gebiedsneerslagen			gemiddelde puntneerslagen		
	1	2	3	1	2	3
zomer						
$\hat{\beta}$	5.8	6.2	7.9	7.7	7.8	10.3
$\hat{q}_0$	18.4	17.6	18.0	19.4	19.6	19.3
winter						
$\hat{\beta}$	6.2	6.3	5.2	6.5	6.9	5.5
$\hat{q}_0$	15.6	15.0	15.8	16.5	15.8	16.6
jaar						
$\hat{\beta}$	6.2	5.6	7.9	7.9	7.3	9.4
$\hat{q}_0$	21.2	21.5	20.6	22.6	23.2	22.6

Tabel 6: MGA-schattingen $\hat{\beta}$ [mm] en $\hat{q}_0$[mm] van de parameters in (14) voor gebiedsneerslagen en gemiddelde puntneerslagen in de drie beschouwde gebieden.

Getoetst dient te worden of de pieken exponentieel verdeeld geacht mogen worden. Als gegevens heeft men de grootste N waarnemingen, te ordenen tot $\underline{q}_{(1)} \leq \ldots \leq \underline{q}_{(N)}$. Als deze $\underline{q}_{(i)}$ $(i = 1,\ldots\ldots,N)$ trekkingen zijn uit een links afgeknotte ("truncated") exponentiële verdeling, dan zijn de gestandaardiseerde verschillen $(\underline{L}_i)$ tussen opeenvolgende steekproefkwantielen:

	zomer			winter			jaar		
Gebied	1	2	3	1	2	3	1	2	3
T									
0.5	0.950	0.897	0.933	0.950	0.953	0.953	0.938	0.924	0.912
1	0.906	0.876	0.889	0.951	0.944	0.949	0.909	0.897	0.895
2	0.877	0.862	0.864	0.951	0.939	0.947	0.889	0.877	0.884
5	0.852	0.849	0.844	0.952	0.934	0.944	0.871	0.859	0.874
10	0.839	0.843	0.833	0.952	0.932	0.943	0.861	0.849	0.869
25	0.826	0.836	0.823	0.952	0.929	0.941	0.851	0.839	0.864
∞	0.747	0.797	0.771	0.954	0.915	0.932	0.787	0.769	0.834

Tabel 7: GRF_{24} voor zomer, winter en het hele jaar bij enige herhalingstijden en voor het drietal beschouwde gebieden.

$$\underline{L}_i = i(\underline{q}_{(N+1-i)} - \underline{q}_{(N-i)}), \qquad (i=1,\ldots, N-1) \qquad (23)$$

onderling onafhankelijke exponentieel verdeelde variabelen. Na deze eliminatie van de plaatsparameter wordt de schaalparameter als volgt geëlimineerd.

Stel:

$$\underline{s} = \sum_{i=1}^{N-1} \underline{L}_i, \qquad (24)$$

$$\underline{z}_i = \sum_{j=1}^{i} \underline{L}_j/s \qquad (i = 1, \ldots\ldots, N-2). \qquad (25)$$

De reeks $(\underline{z}_1,\ldots,\underline{z}_{N-2})$ gedraagt zich als een geordende steekproef van omvang N-2 uit een uniforme verdeling op het interval (0,1) (DURBIN; 1961). Derhalve kan er een toetsingsgrootheid $\underline{T}$ worden berekend, met:

$$\underline{T} \approx -2\sum_{i=1}^{N-2} \ln \underline{z}_i \approx \underline{\chi}^2_{2(N-2)}. \qquad (26)$$

Niet-exponentieel verdeeld zijn der $\underline{q}_{(i)}$ kan zowel verhogend als verlagend werken op $\underline{T}$; derhalve wordt tweezijdig getoetst. Lage waarden van $\underline{T}$ wijzen op veel waarnemingen in de rechterstaart van de verdeling.

De berekende waarden van T zijn vermeld in tabel 8. Geconcludeerd wordt dat de exponentiële verdeling de verdeling van de pieken goed beschrijft.

Seizoen	Gebiedswaarnemingen			Puntwaarnemingen		
	Gebied			Gebied		
	1	2	3	1	2	3
zomer	119.69	136.04	95.87	100.54	109.27	98.11
winter	87.56*	135.67	94.54	89.37	105.54	94.98
jaar	103.85	133.87	100.02	100.32	106.73	94.64

Tabel 8: Waarden van de toetsingsgrootheid T in (26). N.B.: $\chi^2_{112;0.05} = 88.57$, $\chi^2_{112;0.95} = 137.70$. Waarden van T in het kritieke gebied zijn aangegeven met een *.

Teneinde na te gaan of andere berekeningswijzen van GRF_{24} leiden tot verschillende waarden van GRF_{24}, is GRF_{24} ook berekend volgens NERC (1975) en USWB (1957 - 1960). Gebiedsgemiddelden zijn hierbij weer berekend met behulp van de kriging-methode.
In tabel 9 wordt GRF_{24} bij T = 1.78 jaar volgens BELL (1976) vergeleken met de volgens de twee andere methoden berekende GRF_{24}, aangezien met een herhalingstijd van 2.33 jaar voor jaarmaxima een herhalingstijd correspondeert van 1.78 jaar voor waarnemingen boven een drempelwaarde.

	Gebied								
	1			2			3		
Seizoen	BELL	NERC	USWB	BELL	NERC	USWB	BELL	NERC	USWB
zomer	0.881	0.862	0.870	0.864	0.845	0.842	0.868	0.852	0.869
winter	0.951	0.943	0.953	0.940	0.947	0.948	0.947	0.939	0.953
jaar	0.892	0.871	0.883	0.880	0.860	0.852	0.885	0.868	0.877

Tabel 9: GRF_{24} volgens 3 verschillende berekeningswijzen.

Bij de interpretatie van tabel 9 is var(GRF_{24}) van belang. Deze is als volgt berekend. Op grond van de covariantiematrix van de schatters $\hat{\underline{\beta}}$ en $\hat{\underline{q}}_0$ (App.V) en (17) geldt:

$$\text{var}\ (\hat{\underline{q}}) = \frac{B^2}{N}\ \{\frac{(1-G)^2}{N-1} + G^2\}, \tag{27}$$

waarin:

$G = \ln\ (T/T_0)$.

Met behulp van (27) is de standaardafwijking van de schatter van de kwantielen van gebieds- en puntneerslagen, resp. $\hat{\underline{q}}_g$ en $\hat{\underline{q}}_s$, geschat. Voor var(GRF) geldt:

$$\text{var(GRF)} = \text{var}\ (\hat{\underline{q}}_g/\hat{\underline{q}}_s). \tag{28}$$

Voor de variantie van dit quotiënt geldt (KENDALL en STUART; 1977, p. 247):

$$\text{Var(GRF)} \approx \{E(\hat{\underline{q}}_g)/E(\hat{\underline{q}}_s)\}^2\ \{cv^2(\hat{\underline{q}}_g) + cv^2(\hat{\underline{q}}_s) - 2cc(\hat{\underline{q}}_g,\ \hat{\underline{q}}_s)\}, \tag{29}$$

waarin:

$E(\hat{\underline{q}}_g)$, $E(\hat{\underline{q}}_s)$ = verwachtingswaarde van $\underline{q}_g$, resp. $\underline{q}_s$ bij zekere herhalingstijd

$cv(\cdot)$ = variatiecoëfficiënt bij zekere herhalingstijd

$cc(\cdot)$ = covariatiecoëfficiënt bij zekere herhalingstijd.

Zinvolle berekening van cov $(\hat{\underline{q}}_g,\ \hat{\underline{q}}_s)$ in de covariatiecoëfficiënt in (29) is niet mogelijk, aangezien het aantal gebieden, en dus het aantal gepaarde waarnemingen waarover de covariantie kan worden berekend, 3 bedraagt.

BELL (1976) schatte GRF_{24} met behulp van gegevens van 9 gebieden. Voor elke beschouwde herhalingstijd waren er dus 9 gepaarde waarnemingen (die overigens "gestandaardiseerd" waren) waarover een correlatiecoëfficiënt r werd berekend volgens:

$$\text{cov}\ (\tilde{\underline{q}}_g,\tilde{\underline{q}}_s) = r\ (\text{Var}\ (\tilde{\underline{q}}_g)\ \text{Var}(\tilde{\underline{q}}_s))^{\frac{1}{2}}, \tag{30}$$

waarin:

$\tilde{\underline{q}}$ = gestandaardiseerde piek.

De door Bell toegepaste "standaardisatie" luidde:

$$\tilde{\underline{q}} = (\underline{q}-q_e)/q_e, \tag{31}$$

waarin:

q_e = schatting van de "werkelijke" of populatiewaarde van q bij de beschouwde herhalingstijd volgens NERC (1975).

Deze "standaardisatie" werd toegepast, aangezien de waarde van een piek q, gegeven de herhalingstijd, de neerslagduur en, indien relevant, de beschouwde oppervlakte, varieert met locatie. Er bleek $r \geq 0.76$. Hier is var(GRF) berekend volgens (29) en (30), met r = 0.70 en r = 0.80, zie tabel 10. Merk op dat var (GRF) afneemt bij toename van r.

		Gebied								
		1			2			3		
r	T	jaar	zomer	winter	jaar	zomer	winter	jaar	zomer	winter
0.7	1	0.017	0.019	0.021	0.015	0.018	0.022	0.020	0.023	0.018
	2	0.028	0.030	0.034	0.026	0.030	0.036	0.032	0.036	0.030
	5	0.038	0.040	0.046	0.035	0.040	0.047	0.043	0.046	0.042
	10	0.043	0.045	0.053	0.040	0.046	0.054	0.048	0.050	0.048
	25	0.049	0.049	0.059	0.046	0.051	0.060	0.054	0.055	0.054
0.8	1	0.014	0.016	0.017	0.013	0.015	0.018	0.016	0.019	0.015
	2	0.023	0.025	0.028	0.021	0.025	0.029	0.026	0.029	0.025
	5	0.031	0.033	0.038	0.029	0.033	0.039	0.035	0.037	0.034
	10	0.035	0.037	0.043	0.033	0.037	0.044	0.040	0.041	0.039
	25	0.040	0.040	0.048	0.037	0.042	0.049	0.044	0.045	0.044

Tabel 10: $\sqrt{\text{var}(GRF_{24})}$ volgens (33) bij enige waarden van T en voor r = 0.7, resp. 0.8.

Met behulp van tabel 10 en 9 kan worden geconcludeerd dat verschillen in berekeningswijze niet leiden tot practisch interessante verschillen in GRF_{24} voor gebeurtenissen met een herhalingstijd van ongeveer 2 jaar.

Tenslotte is de verdeling van maxima van punt- en van gebiedsneerslagen over het winter-en het zomerseizoen onderzocht. Het blijkt dat maxima van puntneerslagen meestal in hetzelfde seizoen vallen als maxima van de gebiedsneerslag. (tabel 11).

Geb. max. im:	Puntmax. in:	Gebied 1	2	3
zomer	zomer	91	86	90
	winter	9	13	10
winter	winter	61	65	53
	zomer	39	35	47

Tabel 11: Verdeling (%) van de puntmaxima over de seizoenen bij gegeven ligging van de gebiedsmaxima voor de 3 beschouwde gebieden.

Maxima van de gebiedsneerslag vallen meestal in de zomer (zie tabel 12). Gemiddeld over de 3 gebieden komen in 49% van de gevallen punt- en gebiedsmaxima op dezelfde dag voor.

Seizoen	gebied 1	2	3	gemiddeld
winter	38	41	21	33
zomer	62	59	79	67

Tabel 12: percentage van het aantal beschouwde jaren met het maximum van de gebiedsneerslag in de zomer dan wel in de winter.

3.4 Conclusies

Blijkens tabel 9 en 10 kan geconcludeerd worden dat verschillen in berekeningswijze niet leiden tot noemenswaardige verschillen in GRF_{24} voor gebeurtenissen met een herhalingstijd van ongeveer 2 jaar (vraag 2). De kleine verschillen in GRF_{24} (tabel 9) tussen de 3 beschouwde gebieden lijken, gezien het verloop ervan het gevolg te zijn van verschillende grootten van de gebieden (vraag 3). De verschillen tussen de 3 gebieden in verdeling van de pieken (fig. 12^1 t/m 12^9) heeft blijkbaar geen invloed op GRF_{24}.

In fig. 13 (overgenomen uit BELL (1976)) zijn de volgens NERC (1975) berekende waarden van GRF_{24} vergeleken met de resultaten van NERC (1975) en USWB (1957-

1960). Vooral met de resultaten van NERC (1975) stemmen ze redelijk overeen. Ook de overeenkomst met de resultaten in BELL (1976) is goed: voor T = 2, 10 en 20 jaar bedraagt GRF daar 0.91, 0.87, resp. 0.86, terwijl in dit onderzoek (tabel 7) voor deze herhalingstijden GRF 0.88 , 0.86, resp. 0.85 bedraagt. Voor $T \rightarrow \infty$ vond Bell een limietwaarde van GRF van 0.77, terwijl in dit onderzoek de gevonden limietwaarde 0.80 bedraagt. Dit ondersteunt de conclusie in BUISHAND en VELDS (1980) dat het toepassen in Nederland van GRF waarden uit NERC (1975) gerechtvaardigd is (vraag 4). Ook in overeenstemming met BUISHAND en VELDS (1980) is de sterke seizoensafhankelijkheid van GRF_{24} (vraag 6), veroorzaakt door de veel grotere ruimtelijke samenhang bij winterse neerslagen.

Met betrekking tot vraag 5 kan worden opgemerkt dat maxima van puntneerslagen meestal in hetzelfde seizoen vallen als maxima van de gebiedsneerslag (tabel 11). Deze laatste vallen meestal in de zomer (tabel 12). GRF_{24} is afhankelijk van de herhalingstijd (vraag 7). Het curieuze verloop van GRF_{24} voor de winter voor gebied 1 (tabel 7) laat zien dat deze afhankelijkheid in het winterseizoen gering is.

4 DE BEPALING VAN GRF UIT DE MARGINALE VERDELING VAN PUNTNEERSLAGEN EN HET RUIMTELIJK CORRELATIEVERLOOP

4.1 Inleiding

Met behulp van de in hoofdstuk 3.2 beschreven methode volgens BUISHAND (1977a) zal in dit hoofdstuk voor neerslagduren van een uur en van een dag GRF worden berekend als functie van de herhalingstijd en de oppervlakte.
De methode heeft als voordeel dat er geen gebruik hoeft te worden gemaakt van gegevens van meetnetten. Het is echter zinvol de toepasbaarheid van de methode na te gaan met behulp van dagneerslagen uit de drie reeds eerder beschouwde gebieden en met behulp van uurneerslagen uit het stroomgebied van de Hupselse Beek (zie fig. 3).

4.2 De toepasbaarheid van de methode: GRF_{24}

Uitgegaan wordt van punt- en gebiedsneerslagen $\underline{x}_s$, resp. $\underline{x}_g$, met verwachting en variantie μ_s en σ_s^2, resp. μ_g en σ_g^2. Indien de verdeling van $\underline{x}_s$ en $\underline{x}_g$ wordt beschreven met een gamma-verdeling, geldt voor de kansdichtheidsfunctie (kdf):

$$f(x) = \lambda(\lambda x)^{v-1} \exp(-\lambda x)/\Gamma(v), \qquad (o<x<\infty) \qquad (1)$$

waarin:

$\Gamma(\cdot)$= gammafunctie
λ, v = positieve parameters voor schaal, resp. vorm.

Verondersteld wordt:

$$\mu_g = \mu_s, \qquad (2a)$$

$$\sigma_g^2 = f\sigma_s^2, \qquad (2b)$$

met de reductiefactor $f = \bar{r}(A;A)$ zoals in RODRÍGUEZ-ITURBE en MEJÍA (1974).

De reductiefactor f kan ook worden geschreven als functie van de semivariantie. De methode waarbij GRF wordt geschat uit de marginale verdeling van puntneerslagen en het ruimtelijk correlatieverloop impliceert in (9), hfdst 3.2, de volgende veronderstellingen:

$$E[\underline{x}_s(u_i,t)] = \mu_s, \qquad \forall i \qquad (3a)$$

$$Var[\underline{x}_s(u_i,t)] = \sigma_s^2. \qquad \forall i \qquad (3b)$$

Dan is direct af te leiden:

$$f = \bar{r}(A;A) = 1-\bar{\gamma}(A;A)/\sigma_s^2. \qquad (4)$$

Ter berekening van f zijn voor alle drie gebieden de parameters geschat in het lineaire model voor de relatie tussen correlatie en afstand:

$$r(h) = \rho_o + \theta h, \qquad (5)$$

waarin: $r(h)$ = correlatiecoëfficiënt op afstand h
ρ_o, θ = te schatten parameters.

Indien (3) verondersteld wordt, is model (5) in overeenstemming met het in hoofdstuk 2 beschouwde, lineaire variogrammodel. Alhoewel minder vaak toegepast dan het exponentiële model voor de relatie tussen correlatie en afstand, is het lineaire model wel gebruikelijk (BUISHAND; 1977b, DE BRUIN; 1975).
Het is hier bovendien zeker gerechtvaardigd aangezien in de hier beschouwde gebieden de afstand h klein is (h < 40 km).

Voor elke maand afzonderlijk zijn correlatiecoëfficiënten berekend tussen waarnemingen van verschillende stations in het gebied. Vervolgens zijn de parameters ρ_o en θ in (5) geschat met de Kleinste-Quadratenmethode (MKK). Tabel 13 vermeldt voor de 3 beschouwde gebieden de schatters $\hat{\rho}_o$ en $\hat{\theta}$, $\bar{r}(A;A)$ en de residuele standaardafwijking s_r. Bij de berekening van $\bar{r}(A;A)$ is gebruik gemaakt van de hulpfunctie F(a;b) (zie (25), hoofdstuk 2). De berekende correlatiecoëfficiënten alsmede de aangepaste lineaire modellen zijn voor de maanden januari en augustus weergegeven in de figuren 14^1 t/m 14^6.

De berekende waarden s_r kunnen vergeleken worden met theoretische waarden. Bij N onafhankelijke trekkingen uit een twee-dimensionale Normale verdeling geldt (KENDALL en STUART; 1977, p. 258):

$$s_r^2 = var\ [\underline{r}(h)] \approx \frac{(1 - \rho^2(h))^2}{N}. \qquad (6)$$

	Gebied 1				Gebied 2				Gebied 3			
maand	$\hat{\rho}_o$	$\hat{\theta}$	$\bar{r}(A;A)$	s_r	$\hat{\rho}_o$	$\hat{\theta}$	$\bar{r}(A;A)$	s_r	$\hat{\rho}_o$	$\hat{\theta}$	$\bar{r}(A;A)$	s_r
jan.	.965	-.0026	.922	.013	.954	-.0025	.907	.014	.967	-.0025	.925	.015
febr.	.962	-.0024	.922	.016	.962	-.0028	.910	.015	.962	-.0023	.923	.013
mrt.	.963	-.0030	.913	.012	.964	-.0029	.910	.013	.959	-.0030	.909	.015
apr.	.957	-.0028	.911	.013	.942	-.0029	.887	.027	.957	-.0053	.868	.019
mei	.920	-.0045	.846	.037	.908	-.0057	.800	.045	.875	-.0037	.813	.039
juni	.922	-.0053	.835	.031	.917	-.0031	.859	.024	.916	-.0057	.820	.037
juli	.907	-.0057	.813	.022	.878	-.0046	.791	.046	.910	-.0064	.802	.048
aug.	.868	-.0068	.756	.058	.853	-.0067	.727	.039	.876	-.0067	.763	.027
sept.	.916	-.0044	.843	.045	.921	-.0056	.815	.028	.933	-.0053	.843	.027
oct.	.960	-.0036	.900	.018	.955	-.0036	.888	.017	.966	-.0031	.914	.025
nov.	.957	-.0030	.907	.018	.963	-.0033	.901	.013	.958	-.0027	.913	.022
dec.	.956	-.0017	.928	.013	.961	-.0028	.908	.019	.970	-.0020	.936	.014

Tabel 13: MKK-schattingen van ρ_o [-] en Θ [km^{-1}] in model (5), $\bar{r}(A;A)$ [-] en s_r [-].

Voor N = 900 (dit is ongeveer het aantal waarnemingen per maand) en $\rho = 0.90$ (gemiddelde situatie voor de winter) geldt $s_r = 0.006$. Voor $\rho = 0.75$ (gemiddelde situatie voor de zomer) geldt $s_r = 0.015$. Evenals in BUISHAND (1977b) wordt hier dus een aanzienlijk verschil gevonden tussen theoretische en empirische waarden van de residuele standaardafwijking, waarschijnlijk vooral tengevolge van autocorrelatie en vanwege het niet Normaal verdeeld zijn van de waarnemingen. Indien een Normaliteit bevorderende transformatie ($\sqrt[3]{}$) wordt toegepast op de neerslagen, resulteren bij aanpassing van model (5) aan de berekende correlatiecoëfficiënten belangrijk lagere waarden van s_r (wintermaanden: $s_r \approx$ 0012; zomermaanden: $s_r \approx 0.014$). Tengevolge van de autocorrelatie in de winter blijft s_r dan hoog.

Middelen over de gebieden en over de maanden december, januari en februari resulteert in:

$$r(h) = 0.962 - 0.0024h. \tag{7a}$$

Voor de maanden juni, juli en augustus wordt gevonden:

$$r(h) = 0.894 - 0.0057h. \tag{7b}$$

Vergeleken met het in BUISHAND (1977b) gevonden correlatie-afstand verloop neemt r(h) hier sterker af met de afstand. Dit wordt vermoedelijk veroorzaakt doordat in BUISHAND (1977b) grotere afstanden tussen stations voorkwamen.

Voor elke maand is vervolgens de empirische verdelingsfunctie (edf) bepaald voor gebiedsneerslagen en voor puntneerslagen. De edf voor puntneerslagen is bepaald over waarnemingen van alle stations binnen een beschouwd gebied. Bij het bepalen van de edf van een reeks puntneerslagen is het gewenst uit te gaan van verschoven neerslaghoeveelheden. In BUISHAND (1977c) wordt daartoe een drempelwaarde δ = 0.8 mm aanbevolen. Aangezien de neerslag geregistreerd wordt in tienden van millimeters, wordt δ-0,05 mm van de waarnemingen afgetrokken, waarbij negatieve verschoven neerslaghoeveelheden buiten beschouwing blijven.
Door uit te gaan van verschoven neerslaghoeveelheden leiden verschillen tussen waarnemers minder snel tot statistisch significante heterogeniteiten tussen of binnen reeksen.

Het lijkt logisch de verschoven gebiedsgemiddelden niet te berekenen als het gemiddelde van verschoven puntneerslagen, maar als het verschoven gemiddelde van puntneerslagen. In het laatste geval geldt veronderstelling (2a) echter niet meer. In verband hiermee is niet uitgegaan van verschoven neerslaghoeveelheden, maar is de verdeling bepaald van dagneerslagen op alle dagen. Keuze van een gammaverdeling is dan niet meer voor de hand liggend in verband met de vele nullen. Aangezien λ en ν in (1) hier geschat werden op een wijze waarbij de complicaties van nulwaarnemingen vermeden zijn, is hier toch gebruik gemaakt van de gamma-verdeling.

De gebiedsgemiddelden zijn weer geschat met behulp van de krigingmethode. De in hoofdstuk 2 berekende kriging-gewichten gelden echter alleen voor maandmaxima. Daarom zijn steekproef-semivariogrammen berekend van neerslagen op dagen met op minstens één van de stations minstens 0.5 mm neerslag. De steekproef-semivariogrammen alsmede de aangepaste (lineaire) semivariogrammodellen zijn voor de drie gebieden afgebeeld in de figuren 15 t/m 17. Aanpassing van het semivariogrammodel vindt plaats aan semivarianties van paren waarnemingspunten op afstand

$$h < L/2,$$

waarbij L de grootste afstand tussen waarnemingspunten in het beschouwde gebied is. MKK-schattingen van de parameters γ_0 en Θ in het lineaire model $\gamma(h) = \gamma_0\delta + \Theta h$ zijn vermeld in tabel 14. Vervolgens zijn de kriging-gewichten berekend op de in hoofdstuk 2 beschreven wijze. De kriging-gewichten zijn vermeld in appendix VI.

Tabel 14 toont hetzelfde beeld als tabel 13, alhoewel het seizoenverloop in tabel 14 iets regelmatiger is. Bij vergelijking van de hier gevonden schattingen $\hat{\gamma}_0$ en $\hat{\theta}$ met die van hoofdstuk 2 valt het op, dat hier in het algemeen zowel $\hat{\gamma}_0$ als $\hat{\theta}$ kleiner zijn. Omdat het quotiënt $\hat{\gamma}_0/\hat{\theta}$ hier niet zo sterk verschilt tussen maanden, is hier de tussen-maanden-variatie van de kriging-gewichten geringer dan bij de in hoofdstuk 2 berekende kriging-gewichten voor maandmaxima. Ook zijn hier de verschillen tussen stations geringer, omdat maanden met een zeer laag quotiënt $\hat{\gamma}_0/\hat{\theta}$ niet voorkomen. In maanden dat het quotiënt $\hat{\gamma}_0/\hat{\theta}$ ongeveer overeenkomt met de waarde die gevonden werd bij beschouwing van maandmaxima (gebied 1: mei, juli; gebied 2: juni; gebied 3: juni) komen de gewichten ongeveer overeen.

	Gebied 1			Gebied 2			Gebied 3		
maand	$\hat{\gamma}_0$	$\hat{\theta}$	$\hat{\gamma}_0/\hat{\theta}$	$\hat{\gamma}_0$	$\hat{\theta}$	$\hat{\gamma}_0/\hat{\theta}$	$\hat{\gamma}_0$	$\hat{\theta}$	$\hat{\gamma}_0/\hat{\theta}$
jan.	.55	.060	9.2	.55	.056	9.8	.71	.068	10.5
febr.	.43	.070	6.2	.71	.038	18.7	.63	.062	10.0
mrt.	.48	.060	8.1	.51	.046	11.2	.53	.066	8.0
apr.	.56	.078	7.3	.48	.082	5.8	.79	.132	6.0
mei	.89	.162	5.5	.77	.132	5.8	1.92	.227	8.5
juni	2.04	.263	7.7	2.64	.184	14.3	3.66	.328	11.2
juli	3.01	.370	8.1	4.03	.331	12.2	5.40	.369	14.7
aug.	3.46	.736	4.7	7.11	.392	18.1	4.31	.443	9.7
sept.	2.69	.400	6.7	2.52	.378	6.7	1.55	.289	5.4
oct.	1.29	.238	5.4	1.69	.222	7.6	1.49	.090	16.5
nov.	.82	.137	6.0	.82	.115	7.1	1.12	.070	16.0
dec.	.90	.085	10.6	1.30	.035	36.8	1.28	.058	22.0

Tabel 14: MKK-schattingen van de parameters γ_0[mm^2] en θ[mm$^2 \cdot$km^{-1}] in het lineaire variogrammodel, en schattingen van $\hat{\gamma}_0/\theta$[km].

Berekening van het gebiedsgemiddelde als het kriging-gemiddelde en niet als het rekenkundig gemiddelde heeft als consequentie dat (2a) wel geldt, maar niet: $\hat{\mu}_g = \hat{\mu}_s$. De verschillen zijn overigens gering, zie tabel 15.

	Gebied 1		Gebied 2		Gebied 3	
maand	$\hat{\mu}_s$	$\hat{\mu}_g$	$\hat{\mu}_s$	$\hat{\mu}_g$	$\hat{\mu}_s$	$\hat{\mu}_g$
jan.	2.18	2.18	1.96	1.97	2.31	2.33
febr.	1.74	1.75	1.66	1.66	1.88	1.89
mrt.	1.53	1.53	1.46	1.46	1.73	1.75
apr.	1.58	1.59	1.45	1.45	1.90	1.91
mei	1.50	1.51	1.44	1.44	1.94	1.95
juni	1.78	1.81	1.89	1.86	2.29	2.30
juli	2.35	2.36	2.20	2.16	2.74	2.77
aug.	2.86	2.88	2.58	2.55	2.96	2.98
sept.	2.67	2.67	2.34	2.35	2.26	2.28
oct.	2.57	2.58	2.41	2.41	2.11	2.12
nov.	2.88	2.88	2.66	2.69	2.50	2.52
dec.	2.55	2.56	2.21	2.21	2.65	2.66

Tabel 15: $\hat{\mu}_s$ en $\hat{\mu}_g$ [mm] voor de drie beschouwde gebieden.

Meestal geldt: $\hat{\mu}_g > \hat{\mu}_s$, dit in overeenstemming met de in hoofdstuk 2 getrokken conclusie bij het vergelijken van middelen met behulp van rekenkundige gemiddelden en van kriging-gemiddelden. Uit tabel 15 blijkt voorts dat gebied 2 tamelijk droog is en gebied 3 nat, en dat de kuststrook van Nederland gekenmerkt wordt door relatief veel neerslag in de maanden september, october en november.
De parameters γ en ν in de kdf (1) van puntneerslagen zijn allereerst geschat met behulp van de momentenmethode:

$$\hat{\lambda} = \bar{x}/s^2, \tag{8a}$$

$$\hat{\nu} = \bar{x}^2/s^2, \tag{8b}$$

waarin:

$\bar{x}$ = steekproefgemiddelde

s^2 = steekproefvariantie.

Aangezien bij kleine waarden van ν de momentenschatters erg inefficiënt zijn vergeleken bij MGA-schatters (BUISHAND; 1977c), zijn ze slechts gebruikt als beginwaarden bij het schatten van parameters volgens de methode der grootste aannemelijkheid.

Oplossingen van de aannemelijkheidsvergelijkingen zijn erg gevoelig voor de nauwkeurigheid van kleine waarnemingen. Zeker indien zoals hier niet wordt uitgegaan van verschoven neerslaghoeveelheden, is het op de gebruikelijke wijze uitwerken van de aannemelijkheidsvergelijkingen niet aan te bevelen. Daarom is de aannemelijkheid op een iets andere wijze bepaald (BUISHAND; 1977c), waarbij van neerslaghoeveelheden kleiner dan of gelijk aan een zekere waarde ε slechts het aantal geteld werd. Op grond van de kdf (1) is bij onafhankelijke waarnemingen de aannemelijkheid $L^*(\lambda,\nu)$ dan te schrijven als:

$$L^*(\lambda,\nu) = \frac{\lambda^{n\nu}}{(\Gamma(\nu))^n}\{\int_0^{\varepsilon} \exp(-\lambda x)x^{\nu-1}\,dx\}^n \frac{\lambda^{m\nu}}{(\Gamma(\nu)^m}\exp(-\lambda \sum_{i=1}^{m} x_i) \prod_{i=1}^{m} x^{\nu-1}, \qquad (9)$$

waarin:

$x_1, \ldots\ldots, x_m$: waarnemingen $> \varepsilon$ $\quad(\varepsilon = 0.95$ mm)

n = aantal waarnemingen $< \varepsilon$.

De integraal in (9) kan als volgt worden benaderd:

$$\int_0^{\varepsilon}\exp(-\lambda x)x^{\nu-1}dx \approx \int_0^{\varepsilon}(1 - \lambda x)x^{\nu-1}\,dx = \frac{\varepsilon\nu}{\nu}\,(1 - \frac{\lambda\nu\varepsilon}{\nu+1})\cdot \qquad (10)$$

De relatieve fout bij toepassen van benadering (10) bedraagt ongeveer 0.10% bij $\varepsilon = 0.95$ mm en de hier geldende waarden van λ en ν.

Bij het bepalen van de MGA-schattingen $\hat{\lambda}_s^*$ en $\hat{\nu}_s^*$ van de parameters van de verdeling van puntneerslagen is gebruik gemaakt van de in (BUISHAND; 1977c) beschreven Newton-Raphson procedure. De MGA-schattingen zijn vermeld in tabel 16.

Vervolgens zijn λ_g en ν_g geschat met behulp van f uit (2b):

$$\hat{\lambda}_g^* = \hat{\lambda}_s^*/f, \qquad (11a)$$

$$\hat{\nu}^*_g = \hat{\nu}^*_s/f. \tag{11b}$$

Deze schattingen zijn eveneens vermeld in tabel 16.

Met behulp van de Kolmogorov-Smirnov toets is een gamma-verdeling met parameters $\hat{\lambda}^*_g$ en $\hat{\nu}^*_g$ vergeleken met de steekproefverdeling van gebiedsneerslagen. Deze toets is vaak onvoldoende gevoelig voor afwijkingen in de staart van de verdeling (COX en HINKLEY; 1974). Door waarnemingen niet te combineren tot klassen neemt de gevoeligheid van de toets toe. Daarom zijn bij toetsing slechts in aanmerking genomen <u>afzonderlijke</u> waarnemingen > ε.
De toetsingsgrootheid D_{max} is:

$$D_{max} = \max_{x \geq \varepsilon+0.05} \{|F_o(x)-F_N(x)|\}, \tag{12}$$

waarin:

$F_0(x)$ = de aangepaste gamma-verdeling

$F_N(x)$ = edf, met $F_N(x) = k/N$, waarin k het aantal waarnemingen kleiner of gelijk x is, en $N = n+m$.

De berekende waarden van D_{max} zijn eveneens vermeld in tabel 16.

Kritieke waarden van D zijn bij toetsing van aanpassing van een gamma-verdeling afhankelijk van de grootte van de vormparameter ν. Aangezien kritieke waarden van D voor $\nu < 1$ niet zijn getabelleerd, is hier gebruik gemaakt van kritieke waarden van D bij toetsing van aanpassing van een exponentiële verdeling met een uit de steekproef geschatte schaalparameter (PEARSON EN HARTLEY; 1972, tabel 54, geval 3):

$$D_{0.10} = (0.990/(\sqrt{N} + 0.26 + 0.5/\sqrt{N})) + 0.2/N, \tag{13a}$$

$$D_{0.05} = (1.094/(\sqrt{N} + 0.26 + 0.5/\sqrt{N})) + 0.2/N. \tag{13b}$$

Van werkelijke toetsing is overigens geen sprake aangezien D_{max} slechts over waarnemingen $\geq \varepsilon$ is bepaald. Desondanks kan geconcludeerd worden dat de aanpassing bevredigend is. In fig. 18 zijn voor de maanden januari en augustus de edf en de aangepaste cdf van gebiedsneerslagen voor de 3 beschouwde gebieden vergeleken voor $\underline{x}_g > \varepsilon$.

	Gebied 1					Gebied 2					Gebied 3				
maand	$\hat{\nu}^*_s$	$\hat{\lambda}^*_s$	$\hat{\nu}^*_g$	$\hat{\lambda}^*_g$	D_{max}	$\hat{\nu}^*_s$	$\hat{\lambda}^*_s$	$\hat{\nu}^*_g$	$\hat{\lambda}^*_g$	D_{max}	$\hat{\nu}^*_s$	$\hat{\lambda}^*_s$	$\hat{\nu}^*_g$	$\hat{\lambda}^*_g$	D_{max}
jan.	.329	.145	.357	.157	.017	.328	.160	.362	.176	.019	.326	.135	.353	.146	.033°
febr.	.243	.134	.263	.145	.021	.263	.151	.289	.166	.016	.251	.128	.272	.139	.022
mrt.	.245	.152	.268	.166	.028	.252	.162	.277	.178	.014	.266	.145	.292	.160	.028
apr.	.227	.136	.250	.149	.018	.227	.147	.256	.166	.013	.255	.128	.294	.147	.028
mei	.187	.119	.221	.141	.019	.226	.148	.283	.185	.021	.229	.113	.282	.139	.019
juni	.157	.085	.188	.102	.031	.147	.075	.171	.087	.024	.184	.078	.225	.095	.032
juli	.192	.079	.236	.097	.038*	.178	.078	.225	.099	.015	.220	.078	.274	.097	.019
aug.	.220	.075	.291	.099	.028	.196	.074	.270	.102	.027	.242	.079	.302	.099	.031
sept.	.188	.069	.223	.082	.029	.184	.076	.226	.093	.025	.201	.086	.238	.102	.030
oct.	.207	.078	.230	.087	.028	.190	.077	.214	.087	.020	.200	.092	.219	.101	.019
nov.	.336	.113	.370	.125	.032	.312	.113	.346	.125	.030	.314	.121	.344	.133	.018
dec.	.318	.120	.343	.129	.022	.300	.130	.331	.143	.029	.289	.105	.305	.112	.021

Tabel 16: MGA-schattingen $\hat{\lambda}^*$ [mm^{-1}] en $\hat{\upsilon}^*$ [-] van de parameters van de gamma-verdelingen van puntneerslagen en (met behulp van (11)) voor gebiedsneerslagen, en waarden van de toetsingsgrootheid D_{max} in de Kolmogorov-Smirnov toets.
Waarden van D_{max} in het kritieke gebied zijn aangeduid met:
*(α = 0.05) of: o(α = 0.10).

4.3 De toepasbaarheid van de methode: GRF_1

In het hydrologisch proefgebied van de Hupselse Beek zijn gedurende de periode 1 oct. 1969 t/m 1 oct. 1973 op een drietal plaatsen kwartierneerslagen gemeten. Bij berekening met de definitie volgens USWB (1957-1960) bedraagt de oppervlakte van het gebied 5 km^2. De gegevens bieden de mogelijkheid de methode, waarbij GRF uit de marginale verdeling van neerslagen en het ruimtelijk correlatieverloop wordt berekend, te evalueren bij korte neerslagduren.

Het ruimtelijk correlatieverloop voor kwartierneerslagen kon niet goed worden geschat, vanwege de grote invloed van synchronisatiefouten bij kwartierneer-

slagen en de relatief grove discretisatie door het meetinstrument (kwartierneerslagen werden hier gemeten in eenheden van ongeveer 0.12 mm; deze meeteenheid is groter dan die welke gebruikt wordt bij het meten van dagneerslagen). In verband hiermee is de toepasbaarheid van de methode nagegaan voor uurneerslagen.

Aangezien de drie stations regelmatig verspreid liggen over het gebied, en de onderlinge afstanden tussen stations weinig verschillen (van 1100 t/m 1700 m), is de reductiefactor f in (2b) berekend als het gemiddelde van de drie geschatte correlatiecoëfficiënten (tabel 17).

Het over de drie paren van stations gesommeerde aantal gepaarde waarnemingen N is eveneens vermeld in tabel 17. Perioden met onbetrouwbare waarnemingen zijn bij de berekening buiten beschouwing gelaten. De relatief lage waarden van f voor de maanden januari en februari zijn waarschijnlijk het gevolg van wegsmeltende sneeuw. Doordat het wegsmelten relatief langzaam verloopt en sterk afhankelijk is van lokale condities (opwaaiing, zonlicht, e.d.), resulteren lage correlatiecoëfficiënten.

maand	f	N	maand	f	N
jan.	.841	8592	juli	.879	8400
febr.	.898	6264	aug.	.823	6048
mrt.	.924	8256	sept.	.859	7008
apr.	.922	6672	oct.	.904	7008
mei	.905	7440	nov.	.945	7704
juni	.889	7056	dec.	.927	8160

Tabel 17: De reductiefactor f in (2b) en het aantal waarnemingen N voor uurneerslagen.

Vervolgens is de edf bepaald van puntneerslagen door de drie reeksen samen te voegen. Indien de configuratie van waarnemingspunten in een gebied overeenstemt met die van de hoekpunten in een gelijkzijdige driehoek, wijkt het met behulp van kriging berekende gebiedsgemiddelde niet veel af van het rekenkundig gemiddelde. Dit is in te zien doordat bij interpolatie naar een punt op gelijke afstand van twee waarnemingspunten kriging altijd resulteert in een waarde, gelijk aan het rekenkundig gemiddelde van de waarnemingen. In verband hiermee zijn gebiedsneerslagen berekend als rekenkundige gemiddelden. Dit is ook rekentechnisch aantrekkelijker, omdat er een aantal perioden is met slechts voor twee van de drie neerslagstations betrouwbare registraties.

In tabel 18 zijn schattingen vermeld van de verwachting en van de variantie van punt- en gebiedsneerslagen ($\bar{x}_s$, s_s; $\bar{x}_g$, s_g). Voorts zijn vermeld de MM-schattingen $\hat{\nu}_s$ en $\hat{\lambda}_s$, de MGA-schattingen $\hat{\nu}^*_s$ en $\hat{\lambda}^*_s$, de met behulp van (11) berekende schattingen $\hat{\nu}^*_g$ en $\hat{\lambda}^*_g$ en waarden van de toetsingsgrootheid D_{max} in de Kolmogorov-Smirnov toets. Aangezien hier neerslagen zijn gemeten in eenheden van 0.12 mm, werd in (9) ε = 0.18 mm gesteld. De relatieve fout bij toepassen van benadering (10) bedraagt hier ongeveer 0.01%.

maand	$\bar{x}_s$ [mm]	s_s [mm]	$\bar{x}_g$ [mm]	s_g [mm]	$\hat{\nu}_s$ [-]	$\hat{\lambda}_s$ [mm^{-1}]	$\hat{\nu}^*_s$ [-]	$\hat{\lambda}^*_s$ [mm^{-1}]	$\hat{\nu}^*_g$ [-]	$\hat{\lambda}^*_g$ [mm^{-1}]	D_{max}
jan.	0.053	0.200	0.053	0.189	0.071	1.328	0.069	1.240	0.083	1.474	0.006
febr.	0.047	0.194	0.047	0.189	0.058	1.245	0.057	1.132	0.064	1.261	0.004
mrt.	0.065	0.272	0.065	0.265	0.056	0.871	0.067	0.983	0.073	1.064	0.006
apr.	0.095	0.410	0.095	0.399	0.054	0.567	0.048	0.486	0.052	0.527	0.010
mei	0.080	0.516	0.080	0.499	0.024	0.302	0.033	0.400	0.036	0.442	0.005
juni	0.082	0.481	0.082	0.461	0.029	0.354	0.026	0.315	0.030	0.355	0.007
juli	0.103	0.569	0.103	0.544	0.033	0.318	0.030	0.293	0.035	0.333	0.003
aug.	0.055	0.464	0.055	0.435	0.014	0.255	0.016	0.293	0.020	0.356	0.006
sept.	0.071	0.422	0.071	0.400	0.028	0.399	0.028	0.389	0.033	0.453	0.008
oct.	0.022	0.179	0.022	0.174	0.015	0.671	0.017	0.776	0.019	0.859	0.002
nov.	0.088	0.377	0.088	0.370	0.055	0.620	0.066	0.719	0.070	0.761	0.012
dec.	0.039	0.166	0.039	0.162	0.055	1.418	0.053	1.223	0.057	1.319	0.006

Tabel 18: MM- en MGA-schattingen van de parameters van de aangepaste gamma-verdelingen en waarden van de toetsingsgrootheid D_{max} in de Kolmogorov-Smirnov toets.

De aanpassing van de edf van gebiedsneerslagen door een verdeling met parameters gegeven door (11) is weer nagegaan op de in hoofdstuk 4.2 beschreven wijze. In geen van de maanden ligt D_{max} in het met behulp van (13a) berekende kritieke gebied. In fig. 19 zijn voor de maanden januari en augustus de edf en de aangepaste cdf van gebiedsneerslagen weergegeven voor $\underline{x}_g > \varepsilon$. Geconcludeerd wordt dat de aanpassing bevredigend is.

4.4 Resultaten

Met behulp van de in 4.2 en 4.3 toegepaste methode kan nu GRF_{24} en GRF_1 worden berekend voor verschillende gebiedsgrootten A en bij verschillende herhalingstijden T. De hierbij toe te passen procedure verloopt als volgt (BUISHAND; 1977a):

(a) Bepaal de puntneerslag x_s bij een gekozen duur en met zekere herhalingstijd, bijv. door het uitzetten van maandmaxima op passend waarschijnlijkheidspapier.

(b) Bepaal met behulp van de gamma-verdeling voor puntneerslagen de kans $P_s = Pr\{\underline{x}_s \leq x_s\}$

(c) Bepaal met behulp van de gamma-verdeling voor gebiedsneerslagen de neerslaghoeveelheid x_g waarvoor $Pr\{\underline{x}_g \leq x_g\} = P_s$

(d) $GRF = x_g/x_s$.

Op deze wijze is GRF_{24} berekend voor gebiedsgrootten van 25 tot 1000 km^2 en GRF_1 voor gebiedsgrootten van 10 tot 250 km^2; de herhalingstijd varieert van 1 tot 50 jaar in het geval van dagneerslagen, en van 1 tot 10 jaar in het geval van uurneerslagen.

4.4.1 GRF_{24}

De parameters ν en λ van de gamma-verdeling (1) van puntneerslagen zijn geschat aan de waarnemingen in alle drie gebieden. Eerst zijn momenten-schattingen berekend en vervolgens MGA-schattingen $\hat{\nu}_s^*$ en $\hat{\lambda}_s^*$. De MGA-schattingen zijn vermeld in tabel 19. De parameters $\bar{\rho}_o$ en $\bar{\theta}$ in de over de drie gebieden gemiddelde correlatie-afstand relatie (5) zijn eveneens vermeld in tabel 19. Ze zijn berekend als het rekenkundig gemiddelde van de voor de drie gebieden afzonderlijk gevonden coëfficiënten $\hat{\rho}_o$ en $\hat{\theta}$ (tabel 13). De parameters van de verdeling van maandmaxima zijn weer geschat met behulp van aantallen en grootte van overschrijdingen van een drempelwaarde ("pieken"), waarbij de drempelwaarde zo is gekozen, dat per maand gemiddeld één piek optrad. Voor elk station zijn de pieken geordend tot een PBD-reeks. Op een station gemeten pieken die niet zijn gescheiden door een neerslagloze dag zijn als afhankelijke waarnemingen beschouwd; slechts het maximum van dergelijke pieken is in de steekproef opgenomen. De over de stations gemiddelde PBD-reeks is berekend als het rekenkundig gemiddelde van steekproefelementen met gelijk rangnummer uit de PBD-reeksen van de afzonderlijke stations. Deze pieken zijn verondersteld eveneens exponentieel verdeeld te zijn, en parameters q_o en β zijn geschat volgens (19) en (20), hfdst. 3. De aanpassing van de exponentiële verdeling is nagegaan met behulp van de toetsingsgrootheid $\underline{T}$ volgens (26), hfdst. 3. In geen van de maanden ligt $\underline{T}$ in het kritieke gebied bij tweezijdige toetsing en $\alpha = 0.10$ (zie eveneens tabel 19). In fig. 20^1 en 20^2 zijn de geordende steekproeven uitgezet, voor de maanden januari en augustus bij veronderstelde exponentiële verdeling.

De reductiefactor f is berekend met behulp van de correlatie-afstand relatie en van (26), hfdst. 2. Vervolgens zijn MGA-schattingen $\hat{\nu}^*_g$ en $\hat{\lambda}^*_g$ van de parameters in de kdf van gebiedsneerslagen berekend. GRF_{24} is berekend voor oppervlaktes van 25, 100, 250 en 1000 km^2 en voor herhalingstijden van 1,5, 10 en 50 jaar. In de figuren 21^1 en 21^2 zijn voor de maanden januari en augustus aan de berekende waarden curves aangepast van GRF_{24} als functie van de oppervlakte, bij de beschouwde herhalingstijden.

maand	$\hat{\nu}^*_s$ [-]	$\hat{\lambda}^*_s$ [mm]	$\hat{\rho}_o$ [-]	$\hat{\theta}$ [km^{-1}]	$\hat{q}_o$ [mm]	$\hat{\beta}$ [mm]	$\underline{T}$ [-]
januari	.327	.0146	0.962	-0.0025	10.3	4.3	49.8
februari	.252	.0137	0.962	-0.0025	8.4	4.9	58.3
maart	.254	.0152	0.962	-0.0030	8.4	4.2	59.5
april	.235	.0136	0.952	-0.0037	9.2	4.6	56.0
mei	.212	.0124	0.901	-0.0046	9.2	5.4	51.3
juni	.162	.0079	0.918	-0.0047	12.1	7.7	47.1
juli	.196	.0078	0.898	-0.0056	13.8	9.1	47.3
augustus	.219	.0076	0.866	-0.0067	15.5	8.5	51.5
september	.190	.0076	0.923	-0.0051	13.1	7.9	51.8
october	.199	.0082	0.960	-0.0034	12.1	8.6	52.8
november	.320	.0115	0.959	-0.0030	11.3	6.5	62.6
december	.300	.0117	0.962	-0.0022	10.6	7.2	42.9

Tabel 19: waarden van enige parameters, benodigd bij het schatten van GRF_{24}.

4.4.2 $\underline{GRF_1}$

De parameters ν en λ van de gamma-verdeling (1) van puntneerslagen zijn geschat aan de waarnemingen van het station De Bilt (1906 t/m 1977). Eerst zijn de momenten-schattingen berekend en vervolgens MGA-schattingen $\hat{\nu}^*_s$ e $\hat{\lambda}^*_s$. Bij de berekening van de MGA-schattingen geldt voor ε in (9) ε = 0.45 mm. De MGA-schattingen zijn vermeld in tabel 20.

Een correlatie-afstand relatie volgens (5) is aangepast aan drie correlatiecoëfficiënten berekend over de uurwaarnemingen in het Hupselsche Beek gebied en aan de correlatiecoëfficiënt berekend over het stationspaar De Bilt-Soesterberg (periode van waarneming: 1-6-'74 t/m 31-12-'77). MKK-schattingen van ρ_o en Θ in (5) zijn eveneens vermeld in tabel 20. De parameters van de verdeling van maandmaxima zijn weer geschat met behulp van aantallen en grootte van pieken. Pieken die niet zijn gescheiden door een neerslagloze periode van minstens 24 uur zijn

als afhankelijke waarnemingen beschouwd en slechts het maximum van dergelijke pieken is in de steekproef opgenomen. Tabel 20 vermeldt schattingen van β en q_0, de parameters van de aangepaste exponentiële verdeling, alsmede waardes van de toetsingsgrootheid $\underline{T}$, behorende bij de toets op aanpassing. De geordende steekproeven voor de maanden januari en augustus zijn in de fig. 22^1 en 22^2 uitgezet onder veronderstelling van exponentiële verdeling.

GRF_1 is geschat voor oppervlaktes van 10, 50, 100 en 250 km^2 en herhalingstijden van 1, 2, 5 en 10 jaar. Op het oog aan de berekende waarden aangepaste curves van GRF_1 als functie van de oppervlakte zijn in de figuren 21^1 en 21^2 afgebeeld voor de beschouwde herhalingstijden (maanden: januari en augustus).

maand	$\hat{v}_s^*$ [-]	$\hat{\lambda}_s^*$ [mm]	$\hat{\rho}_o$ [-]	$\hat{\theta}$ [km^{-1}]	$\hat{q}_o$ [mm]	$\hat{\beta}$ [mm]	$\underline{T}$ [-]
januari	0.0663	0.701	.9133	-.0504	2.9	1.0	131.5
februari	0.0541	0.687	.9892	-.0661	2.6	1.1	128.0
maart	0.0491	0.700	1.	-.0578	2.7	1.1	137.7
april	0.0447	0.591	1.	-.0591	3.2	1.5	113.7
mei	0.0330	0.429	1.	-.0880	4.3	3.1	115.3
juni	0.0306	0.330	1.	-.0856	5.3	4.9	90.2*
juli	0.0320	0.306	.9859	-.0758	6.6	4.0	133.1
augustus	0.0337	0.283	.8511	-.0192	6.6	5.2	153.0
september	0.0392	0.394	.9477	-.0620	4.9	2.6	160.6
october	0.0486	0.489	.9767	-.0503	3.8	2.1	99.7*
november	0.0648	0.591	1.	-.0596	3.1	1.7	165.8
december	0.0702	0.654	1.	-.0573	3.0	1.2	149.9

Tabel 20: waarden van enige parameters, benodigd bij het schatten van GRF_1. Waarden van T in het kritieke gebied zijn aangeduid met $*(\alpha = 0.05)$ of $^{o}(\alpha = 0.10)$.

In fig. 23 zijn de voor de afzonderlijke maanden bij zekere oppervlakte en herhalingstijd berekende GRF_1 en GRF_{24} gemiddeld tot seizoenswaarden (winter en zomer) van GRF_1 en GRF_{24}. Bij het berekenen van gebiedsdagneerslagsommen bij een zekere herhalingstijd kan gebruik gemaakt worden van de in hfdst. 3.2 geschatte frequentiecurven voor dagneerslagen in een punt. Voor uurneerslagen zijn MGA-schattingen van de parameters β en q_0 van frequentiecurven volgens model (18), hfdst. 3.2:

$\hat{\beta}$ = 5.6 mm, $\hat{q}_o$ = 11.6 mm (zomer),

$\hat{\beta}$ = 2.0 mm, $\hat{q}_o$ = 5.6 mm (winter),

waarbij voor T_o in (18) geldt: $T_o = 1$. Het aanpassen van frequentiecurven volgens (18) berust op de veronderstelling dat de pieken exponentieel verdeeld zijn. Dit is op de reeds bekende wijze getoetst, waarbij de toetsingsgrootheid voor de zomerwaarnemingen 137.0 bedroeg en voor de winterwaarnemingen 110.9; deze laatste waarde ligt in het kritieke gebied bij tweezijdige toetsing en $\alpha = 0.10$.

4.5 Conclusies

Bij vergelijking van fig. 23 met fig. 9 en met tabel 9 kan geconcludeerd worden dat berekening van GRF uit de marginale verdeling van puntneerslagen en het ruimtelijk correlatieverloop tot bruikbare schattingen van GRF leidt, zowel ten opzichte van resultaten uit het buitenland als ten opzichte van schattingen van GRF_{24} voor Nederland met behulp van andere methoden (hfdst. 3). De schattingen van GRF_1, op basis van fig. 23 en fig. 9 lopen wel enigszins uiteen. Dit is waarschijnlijk het gevolg van de geringe hoeveelheid gegevens die hier ten dienste stond bij het schatten van GRF_1 (volgens fig. 23). Op korte termijn zal het gegevensbestand om GRF_1 te schatten enigszins worden uitgebreid, met 5 jaar extra gegevens voor het stationspaar De Bilt-Soesterberg en met 1 jaar extra gegevens voor de 3 stations in het proefgebied van de Hupselsche Beek. Op wat langere termijn kan ook gebruik worden gemaakt van de gegevens van het netwerk van zelfregistrerende regenmeters van het Hoogheemraadschap West-Brabant. Dit is operationeel vanaf 1 mei 1982.

In tabel 21 worden enige resultaten van eerdere berekeningen van GRF_{24} voor Nederlandse omstandigheden vergeleken met de hier verkregen schattingen van GRF_{24}. Deze verschillen zijn eveneens gering.

Auteur	Neerslag [mm]	A[km²]	GRF_{24}	GRF_{24} volgens fig. 23
KRAIJENHOFF (1963)	40 (zomer)	500	0.918	0.89
VAN MONTFORT (1968)	30 (winter	2.000	0.917	0.92
	40 (winter)	2.000	0.896	0.91
BUISHAND (1977a)	19 (juli)	100	0.926	0.93
	19 (juli)	1.000	0.895	0.89
	32 (juli)	100	0.900	0.90
	32 (juli)	1.000	0.866	0.86

Tabel 21: schattingen van GRF_{24} voor Nederlandse omstandigheden.

5 SAMENVATTING EN CONCLUSIES

In deze nota zijn gebiedsreductiefactoren berekend voor neerslagduren van 1 en 24 uur (resp. aangeduid met GRF_1 en GRF_{24}), waarbij is uitgegaan van in Nederland gemeten neerslagen. De invloed van het seizoen en van de herhalingstijd op GRF is nagegaan. Een aantal methoden ter berekening van GRF is met elkaar vergeleken. Gebiedsgemiddelden van de neerslag zijn in het algemeen berekend met behulp van kriging; hierbij is gebruik gemaakt van de ITF-0 theorie.

Geconcludeerd kan worden dat kriging een efficiëntere schatter van het gebiedsgemiddelde is dan twee gebruikelijke schatters: het rekenkundig gemiddelde en het Thiessen-gemiddelde (hfdst.2).

GRF blijkt sterk af te hangen van het seizoen en, gedurende de zomer, van de herhalingstijd. Bij beschouwing van dagneerslagen vallen maxima van de gebiedsneerslag echter vooral in de zomer. Verschillende procedures tot het schatten van GRF (NERC; 1975, USWB; 1957-1960, BELL; 1976) leiden voor overeenkomstige herhalingstijden tot praktisch dezelfde resultaten. De hier gevonden waarden van GRF wijken niet sterk af van resultaten in het buitenland (VS, VK). Hieruit mag echter niet worden geconcludeerd dat GRF onafhankelijk is van het klimaat: de seizoensafhankelijkheid van GRF is hiermee in strijd.

GRF_1 en GRF_{24} als functie van de oppervlakte van het beschouwde gebied en van de herhalingstijd zijn in hfdst. 4 berekend uit de marginale verdeling van puntneerslagen en het ruimtelijk correlatieverloop. De uitkomsten stemmen overeen met de in hoofdstuk 3 verkregen uitkomsten. Ook ten opzichte van eerdere berekeningen van GRF_{24} voor Nederlandse omstandigheden (KRAIJENHOFF; 1963, VAN MONTFORT; 1968, BUISHAND; 1977a) en van berekeningen van GRF_{24} in het buitenland zijn de verschillen gering. De in hfdst. 4 berekende waarden van GRF_1 wijken wel enigszins af van resultaten uit het buitenland. Waarschijnlijk is dit het gevolg van de geringe hoeveelheid gegevens, die hier ten dienste stond bij de berekening van GRF_1.

6. LITERATUUR.

ANDERSON, T.W. (1958): "An introduction to multivariate statistical analysis" (Chapman and Hall; London).

BELL, F.C. (1976): "The areal reduction factor in rainfall frequency estimation" (Institute of Hydrology; Wallingford).

BOYER, M.C. (1957): "A correlation of the characteristics of great storms" (Trans. AGU 38, p. 233-238).

BRAS, R.L. en COLÓN, R. (1978): "Time-averaged areal mean of precipitation estimates and network design" (WRR 14, p. 878-888).

BRAS, R.L. en RODRIGUEZ-ITURBE, I. (1976): "Evaluation of the mean square error involved in approximating the areal average of a rainfall event by a discrete summation" (WRR 12, p.181-184).

BUISHAND, T.A. (1977a): "Het gebiedsgrootte-effect bij dagneerslagen" (Interne nota Vakgroep Wiskunde van de Landbouwhogeschool; Wageningen).

BUISHAND, T.A. (1977b): "De variantie van de gebiedsneerslag als functie van puntneerslagen en hun onderlinge samenhang". (Veenman & Zonen; Wageningen).

BUISHAND, T.A. (1977c): "Stochastic modelling of daily rainfall sequences" (Veenman & Zonen; Wageningen).

BUISHAND, T.A. en VELDS, C.A. (1980): "Neerslag en verdamping" (KNMI; De Bilt).

BIJKERK, C. (1963): "Problemen van waterafvoer in agrarische gebieden" in: "CHO-TNO Verslag van de Technische Bijeenkomst 18" (TNO; Den Haag).

CHOW, V.T. (1954): "Discussion on rainfall studies using rain-gage networks and radar" (Trans. Am. Soc. Civil Engrs. 119, p. 274-275).

CHOW, V.T. (1958): "Discussion of a'correlation of the characteristics of great storms'"(Trans. Am. Geophys. Union 39, p. 124, 125).

CHUA, S.H. en BRAS, R.L. (1980): "Estimation of stationary and non-stationary random fields: kriging in the analysis of orographic precipitation" (MIT Rep. 255; Cambridge Mass.).

CORSTEN, L.C.A. (1982): "Geregionaliseerde stochastische functies" (Vakgroep Wiskunde; Wageningen).

COURT, A. (1961): "Area-depth rainfall formulas" (J. Geophys. Res. 66, p. 1823-1831).

COX, D.R. en HINKLEY, D.V. (1974): "Theoretical statistics" (Chapman and Hall; London).

CULTUURTECHNISCHE VERENIGING (1971): "Cultuurtechnisch vademecum" (Cultuurtechnische Vereniging; Utrecht).

DE BRUIN, H.A.R. (1975): "Over het interpoleren van de neerslaghoogte" (KNMI WR 75-2; De Bilt).

DELFINER, P. (1975): "Linear estimation of non stationary spatial phenomenea", in M. Guarascio et al. (ed.): "Advanced geostatistics in the mining industry"(Reidel; Dordrecht).

DELHOMME, J.P. (1978): "Kriging in the hydrosciences" (Adv. in Water Res. 1, p. 251-266).

DURBIN, J. (1961): "Some methods of constructing exact tests" (Biometrika 48, p. 41-55).

EAGLESON, P.S. (1967): "Optimum density of rainfall networks" (WRR 3 , p. 1021-1033).

EAGLESON, P.S. (1970): "Dynamic hydrology" (McGraw-Hill; New York).

FOGEL, M.M. en DUCKSTEIN, L. (1969): "Point rainfall frequencies in convective storms" (WRR 5, p 1229-1237).

FRUEHLING, A. (1894): "Ueber Regen- und Abflussmengen für städtische Entwässerungskanäle" (Der Civilingenieur 40, p. 541-558, 623-643).

GANDIN, L.S. (1965): "Objective analysis of meteorological fields" (Israel Program for Scientific Translations; Jerusalem).

HERSFIELD, D.M. (1967): "Rainfall input for hydrological models" (paper presented at the general Assembly of Bern 23.9.67-7.10.67; IAHS).

HERSFIELD, D.M. en WILSON, W.T. (1960): "A comparison of extreme rainfall depths from tropical and nontropical storms" (J. Geophys. Res. 65, p. 959-982).

HORTON, R.E. (1924): "Discussion of 'the distribution of intense rainfall and some other factors in the design of storm-water drains', by Frank A. Marston" (Proc. Am. Soc. Civil Engrs.50, p. 660-667).

HUFF, F.A. en STOUT, G.E. (1952): "Area-depth studies for the thunderstorm rainfall in Illinois": (Trans. Am. Geophys. Union 33, p. 495-498).

JOURNEL, A.G. en HUIJBREGTS, Ch. J. (1978): "Mining geostatistics" (Academic Press; New York).

KENDALL, M.G. en STUART, A. (1977): "The advanced theory of statistics, Vol. 1" (Charles Griffin; London).

KNMI (1972): "Klimaatatlas van Nederland" (Staatsuitgeverij; Den Haag).

KRAIJENHOFF, D.A. (1958): "Discussion of'a correlation of the characteristics of great storms'"(Trans. Am. Geophys. Union 39, p. 125-127).

KRAIJENHOFF, D.A. (1963): "Areal distribution of extreme summer rainfalls in the Netherlands" (lecture tour United States).

MATHERON, G. (1971): "The theory of regionalized variables and its applications" (École Nationale Supériere des Mines de Paris; Paris).

NGUYEN, V.T., ROUSSELLE, J. en McPHERSON, M.B. (1981): "Evaluation of areal versus point rainfall with sparse data" (Can. J. of Civ. Eng. 8, p. 173-178).

VAN MONTFORT, M.A.J. (1968): "Enige statistische opmerkingen over neerslag en afvoer" (TNO Verslagen en Mededelingen No. 14; Den Haag).

MYERS, V.A. en ZEHR, R.M. (1980): "A methodology for point-to-area rainfall frequency ratios" (NOAA Techn.Rep. NWS 24; Washington D.C.).

NERC (1975): "Flood studies report" (5 Vol.) (Natural Environment Research Council; London).

PATTISON, A. (1977): "Australian rainfall and runoff; Flood analysis and design" (Institute of Engineers; Canberra).

PEARSON, E.S. en HARTLEY, H.O. (1972): "Biometrika tables for statisticians, Vol. 2" (Cambridge University Press; Cambridge).

RODRIGUEZ-ITURBE, I en MEJIA, J.M. (1973): "The design of rainfall networks in time and space" (MIT Rep. 176; Cambridge Mass.).

RODRIGUEZ-ITURBE, I. en MEJIA, J.M. (1974): "On the transformation of point rainfall to areal rainfall" (WRR 10, p. 729-736).

STOL, Ph. Th. (1972): "The relative efficiency of the density of rain-gage networks" (J.H. 15, p. 193-208).

STOL, Ph. Th. (1981): "Rainfall interstation correlation functions 1. An analytical approach" (J.H. 50, p. 45-72).

SUKHATME, P.V. (1937): "Tests of significance for the χ^2 population with two degrees of freedom" (Ann. of Eugenics 8, p. 52-56).

USWB (1957-1960): "Rainfall intensity-frequency regime" (5 Vol.) (US. Department of Commerce; Washington D.C.).

WERKGROEP AFVOERBEREKENINGEN (1980): "Richtlijnen voor het berekenen van afwateringsstelsels in landelijke gebieden" (Studiekring voor Cultuurtechniek; Drachten).

WITTER, J.V. (1982): "Homogeniteitsonderzoek met betrekking tot frequenties van zware dagneerslagsommen" (Vakgroep Hydraulica en Afvoerhydrologie; Wageningen).

WMO, (1969): "Depth-area-duration analysis of storm precipitation" (WMO; Genève).

WOOLHISER, D.A. en SCHWALEN, H.C. (1959): "Area-depth-frequency relations for thunderstorm rainfall in Southern Arizona" (University of Arizona Techn. Paper 527; Tucson).

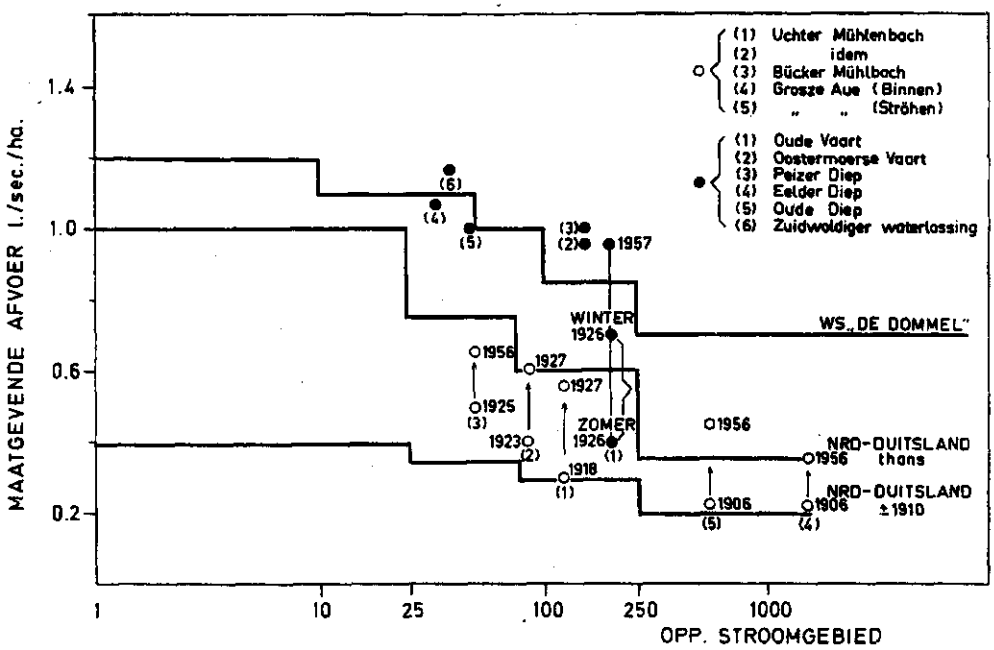


fig. 1 : Verband tussen afvoernormen en oppervlakte (km^2).
Uit: BIJKERK (1963).

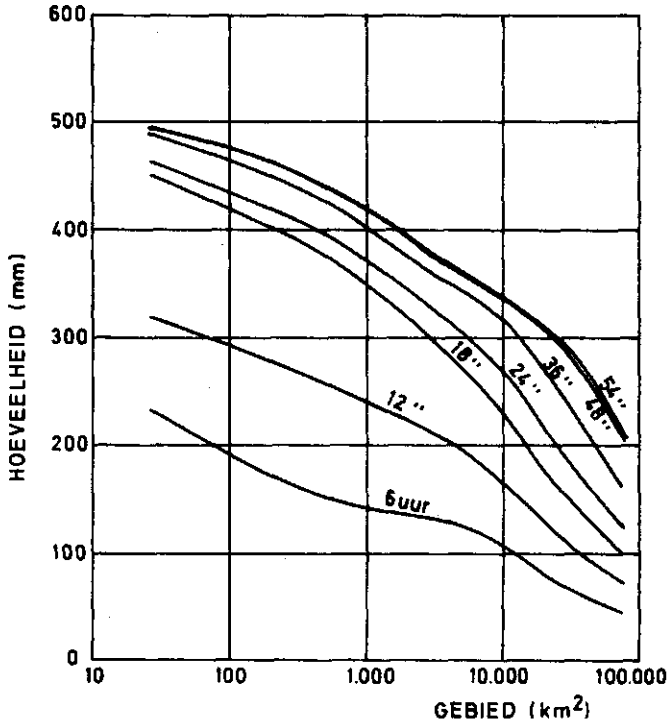


fig. 2 : Voorbeeld van een maximale-neerslaghoeveelheid-oppervlakte-curve voor een bepaalde neerslaggebeurtenis. Uit : WMO; 1969.

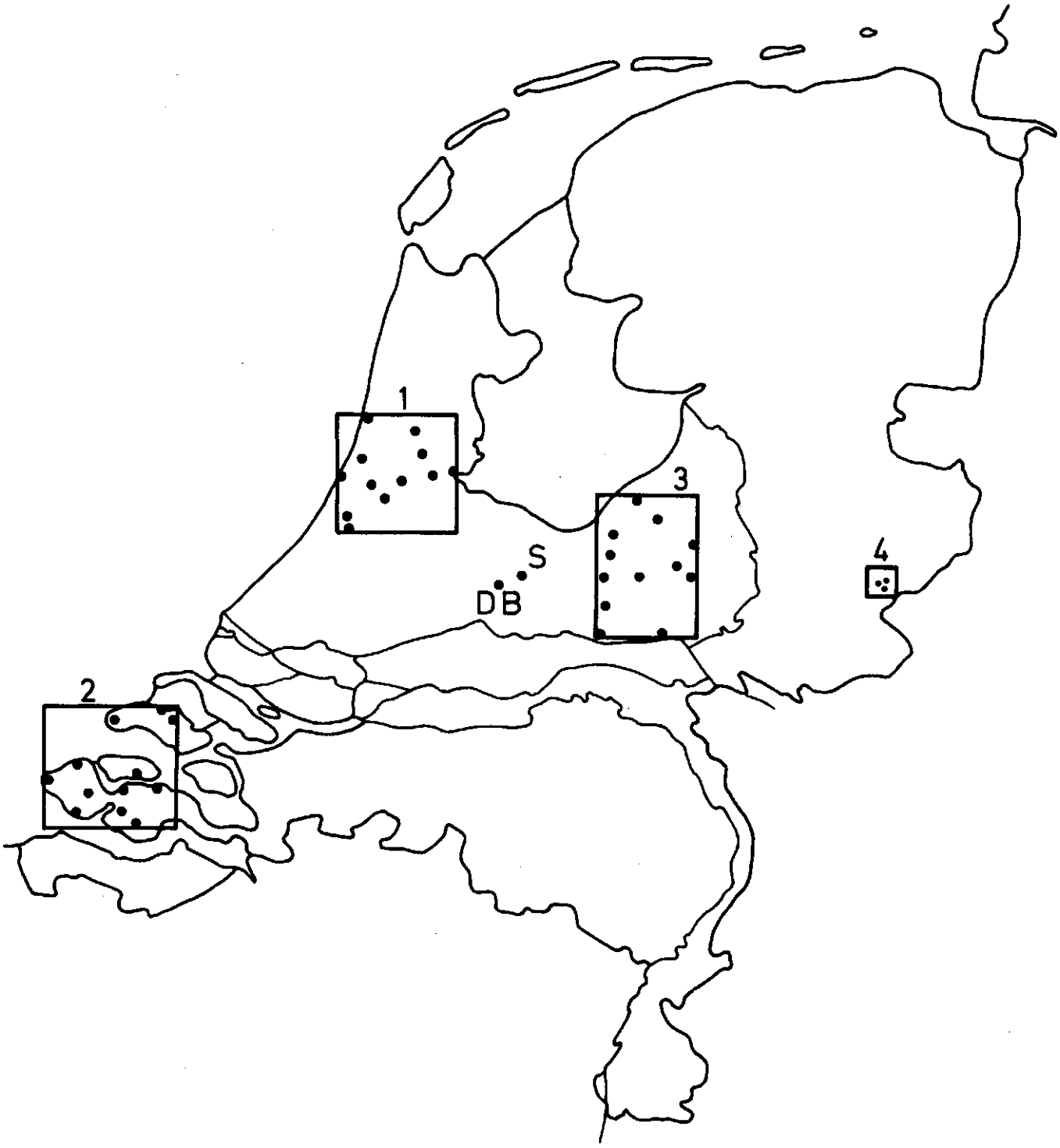


fig. 3 : Ligging van de beschouwde neerslagstations en beschouwde gebieden.

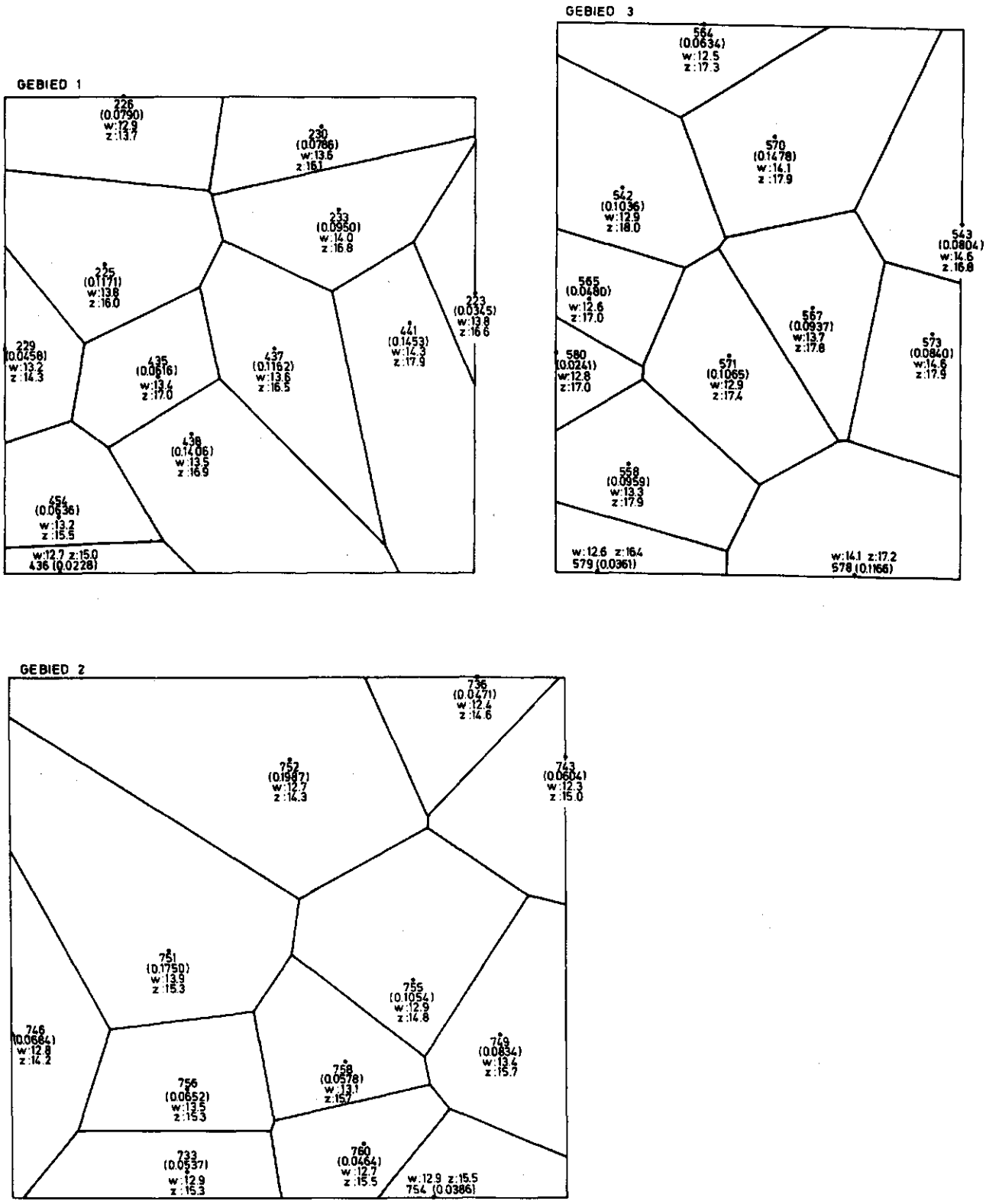


fig. 4: Thiessen-polygonen voor de beschouwde gebieden.
De waarnemingspunten zijn genummerd (KNMI) en het Thiessen-gewicht is vermeld.
w : gemiddeld winters maandmaximum [mm].
z : gemiddeld zomers maandmaximum [mm].

Fig.5 1: Gemiddelde steekproef semi-variogrammen gebied 1 ; zomer.
Tussen haakjes: de steekproefstandaard-afwijking van de resultaten.

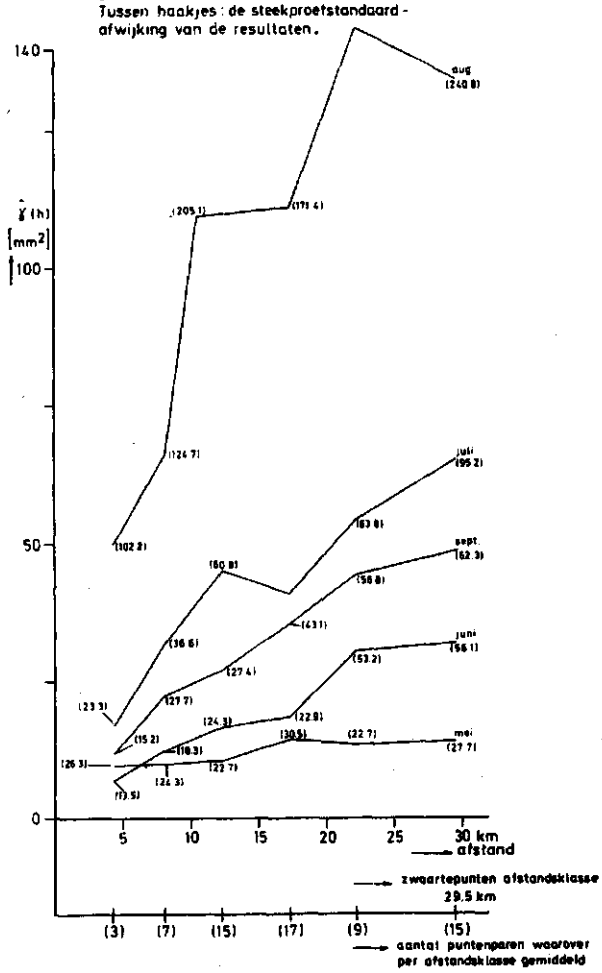


Fig.5 2: Gemiddelde steekproef semi-variogrammen gebied 1 ; winter.
Tussen haakjes: de steekproefstandaard-afwijking van de resultaten.

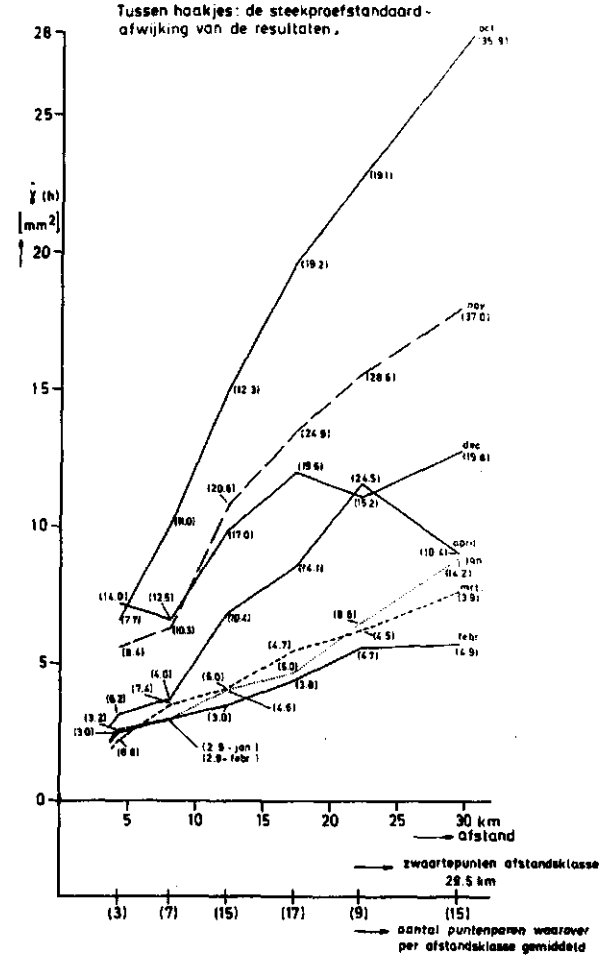


Fig.6.2: Gemiddelde steekproef semi-variogrammen gebied 2 ; winter.

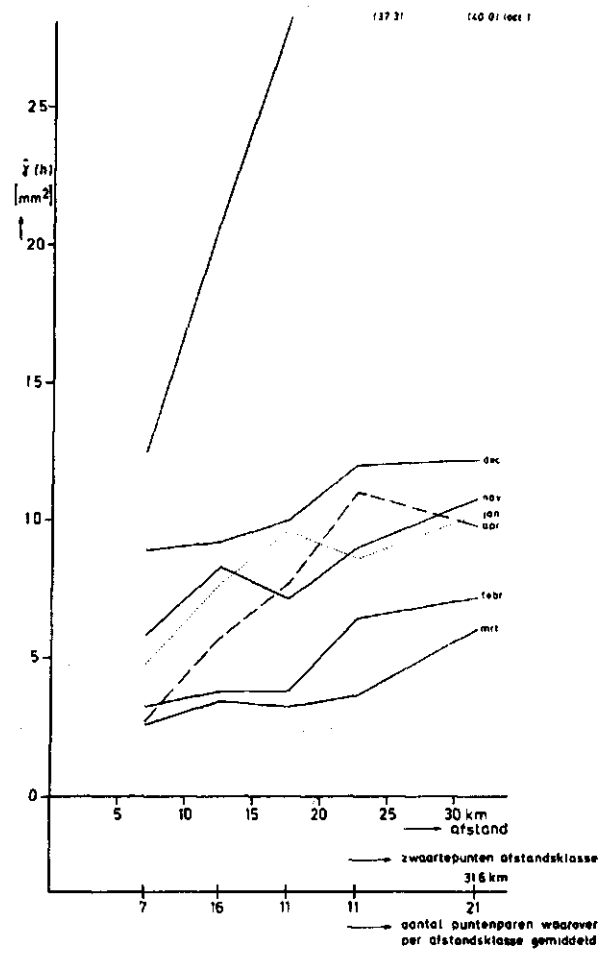


Fig 6.1: Gemiddele steekproef semi-variogrammen gebied 2 , zomer.

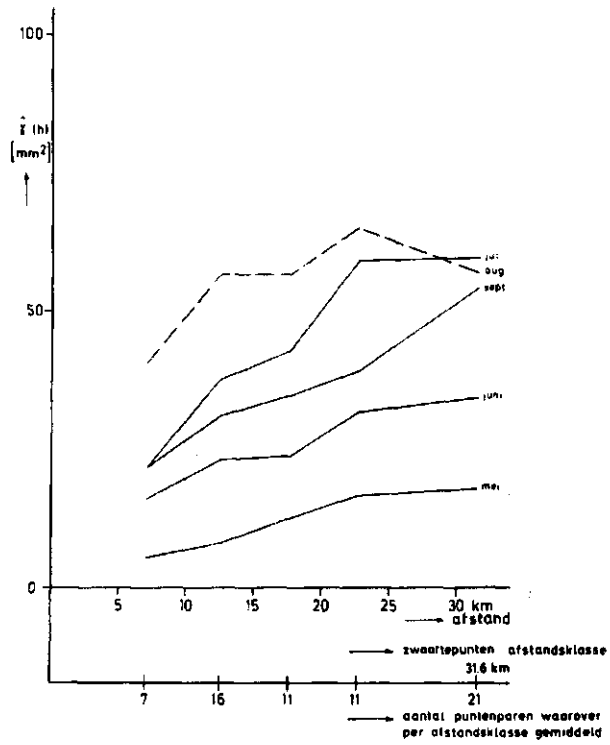


Fig 7.1: Gemiddelde steekproef semi-variogrammen gebied 3 ; zomer.

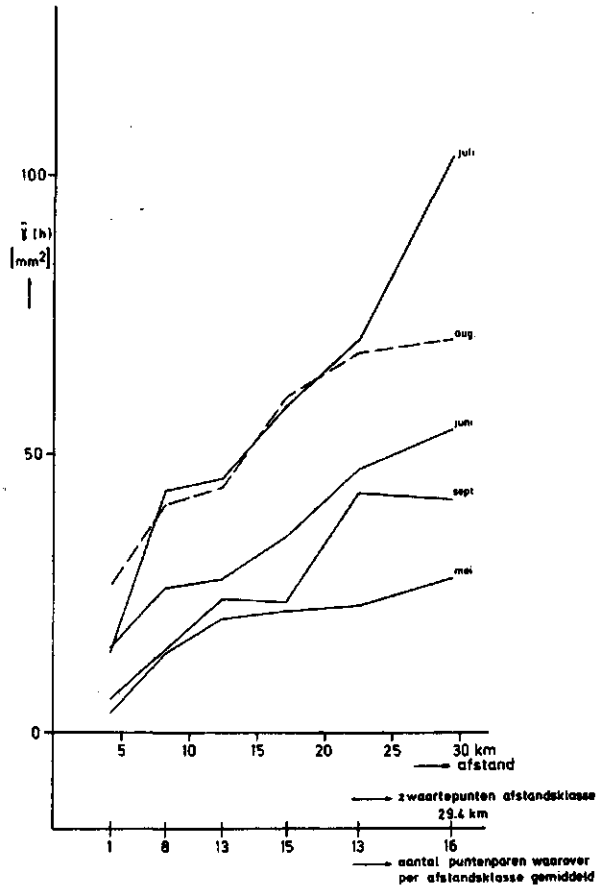


Fig. 7.2: Gemiddelde steekproef semi-variogrammen gebied 3 ; winter.

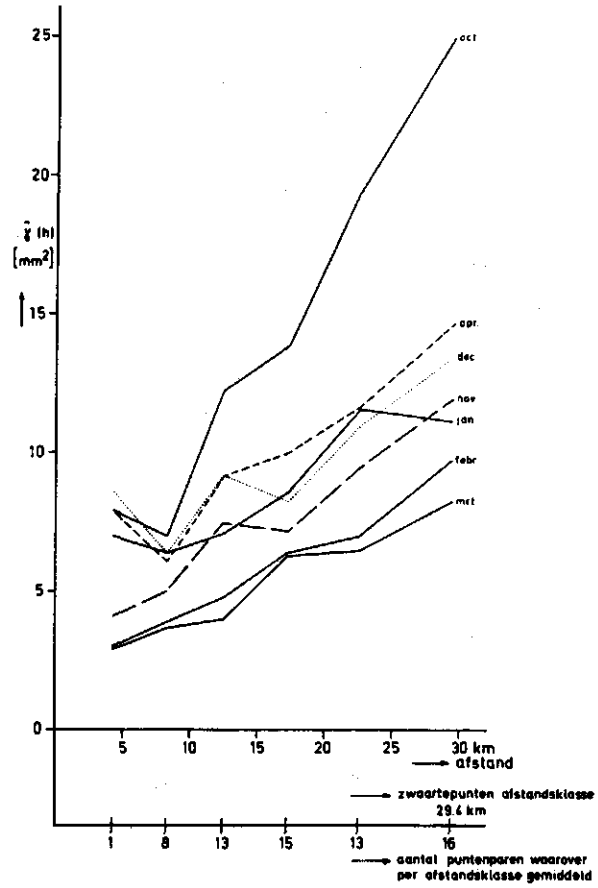


fig. 8: Gebiedsindeling in 3 deelgebieden, corresponderend met een indeling in een nat (1), een droog (2) en een overig deel van Nederland.

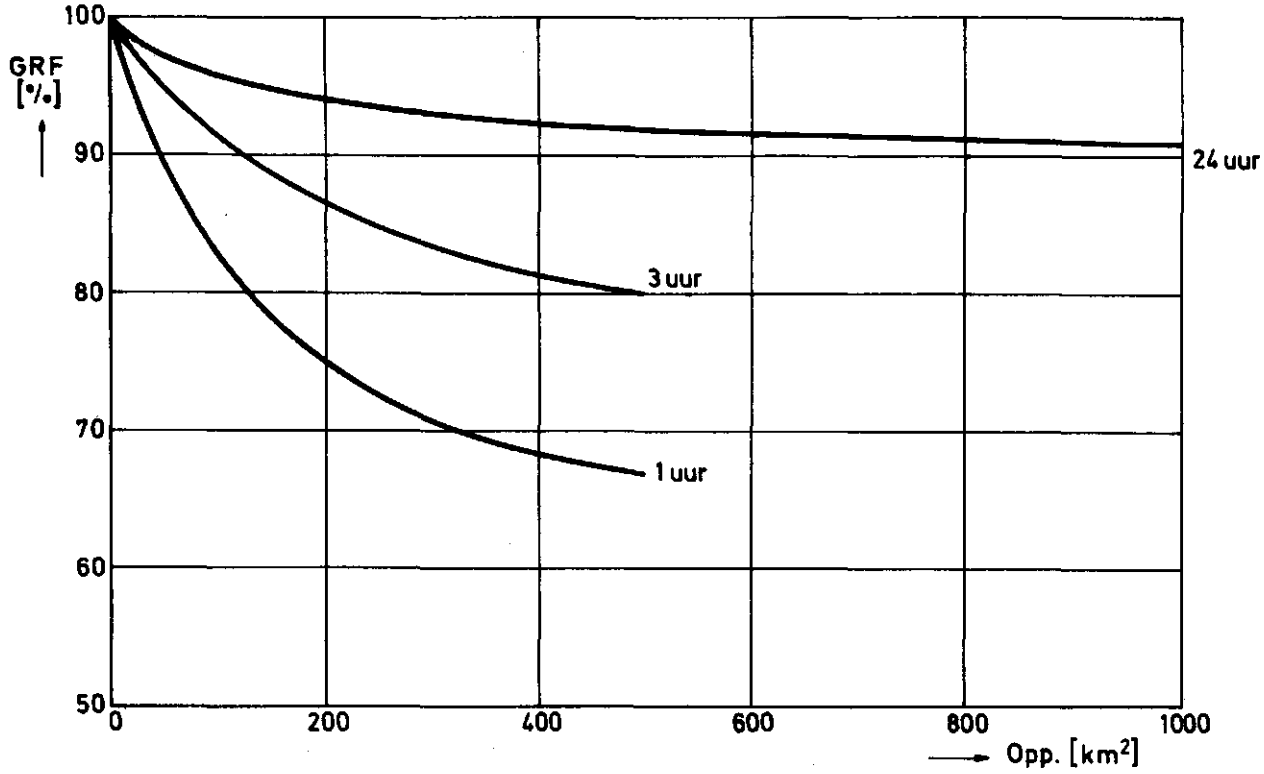


fig. 9 : GRF volgens USWB (1957-1960) (Geldig bij T = 2.3 jaar).

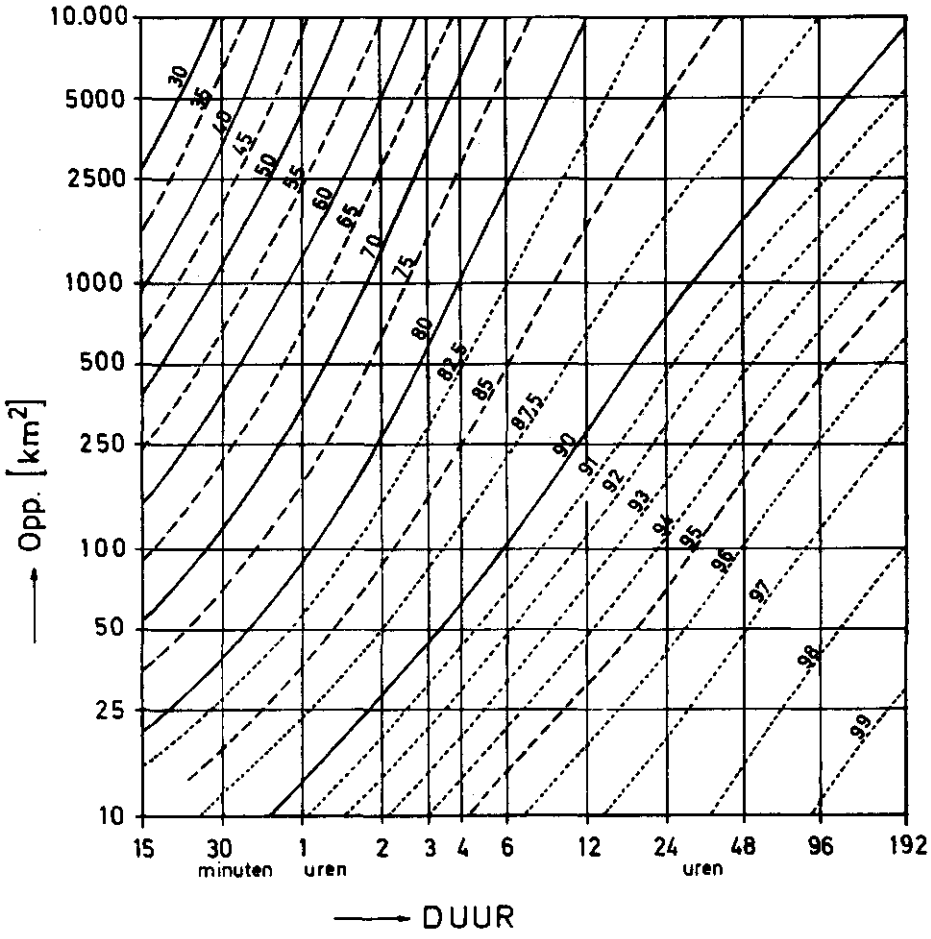


fig. 10 : GRF volgens NERC (1975) (Geldig bij T = 2.3 jaar).

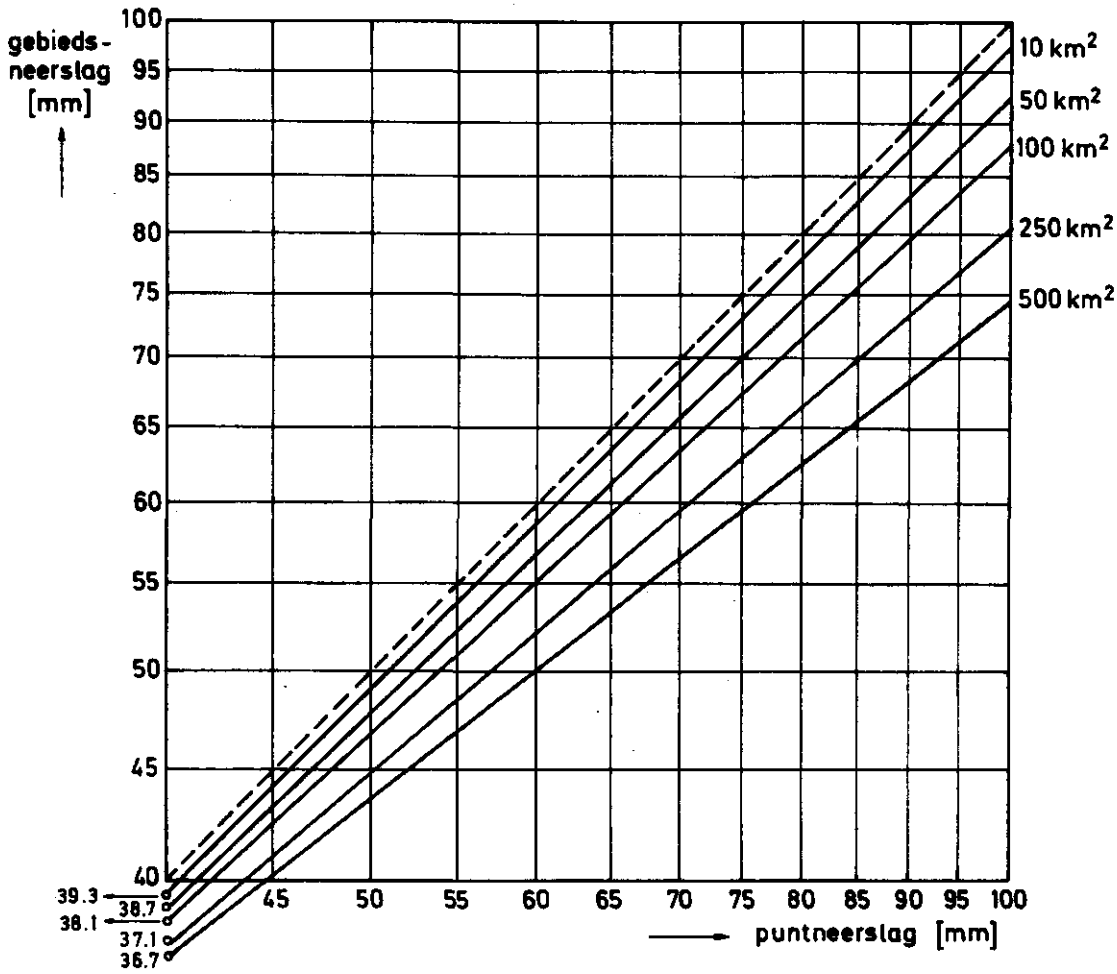


fig. 11 : puntneerslag vs. gebiedsneerslag volgens KRAIJENHOFF (1963).

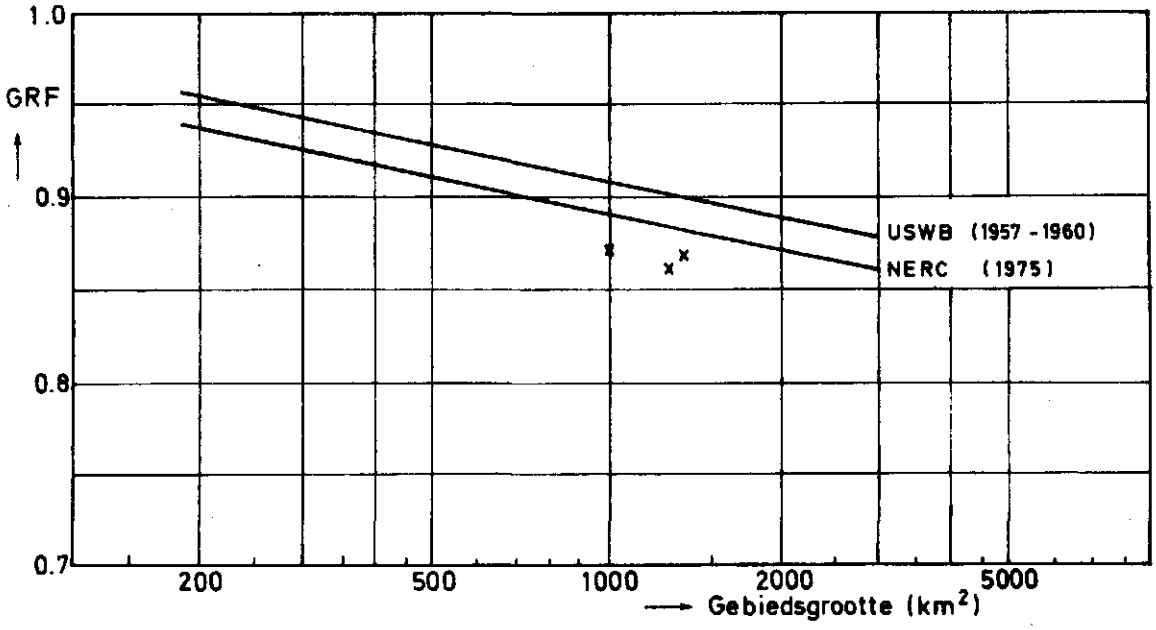


fig. 13 : Voor 3 Nederlandse gebieden berekende GRF_{24} (x) en GRF_{24} volgens NERC (1975) en USWB (1957-1960)
(Geldig bij T = 2.3 jaar).

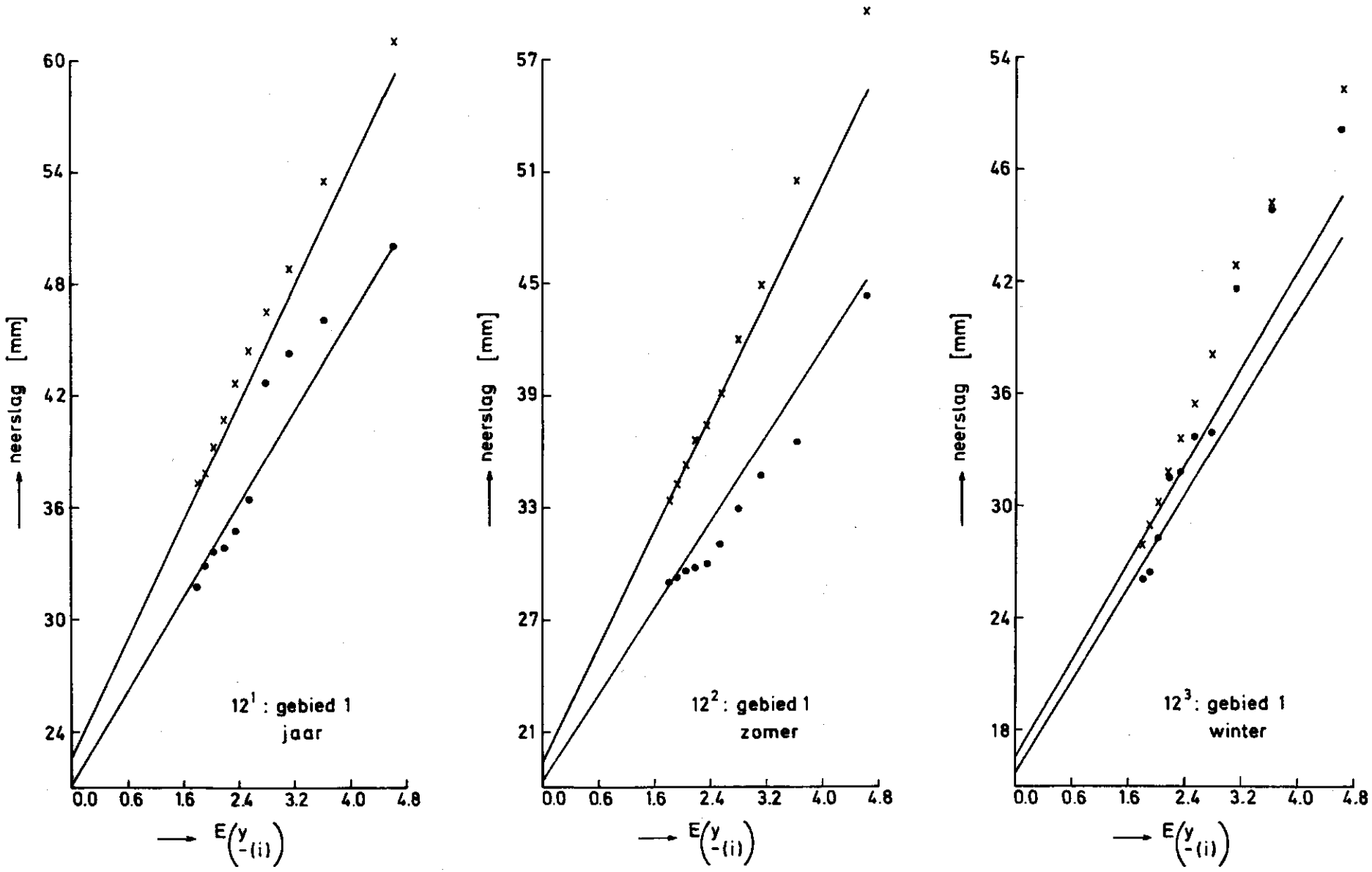


fig. 12 : Geordende steekproeven van punt-en gebiedsneerslagen, alsmede de aangepaste exponentiële verdelingsfuncties. De 10 hoogste gebiedsneerslagen zijn aangegeven met • , de 10 hoogste puntneerslagen met x .

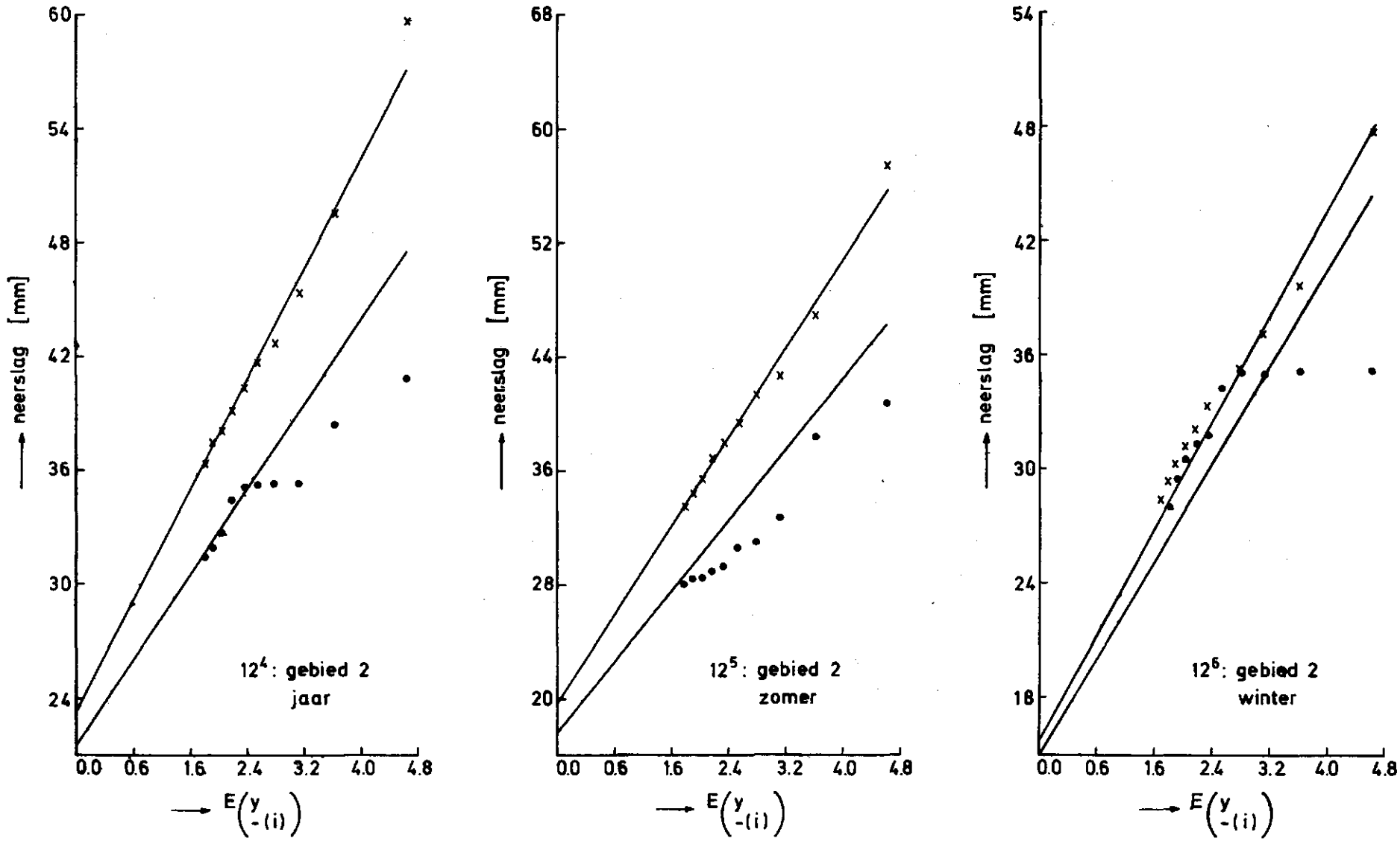


fig. 12: (vervolg)

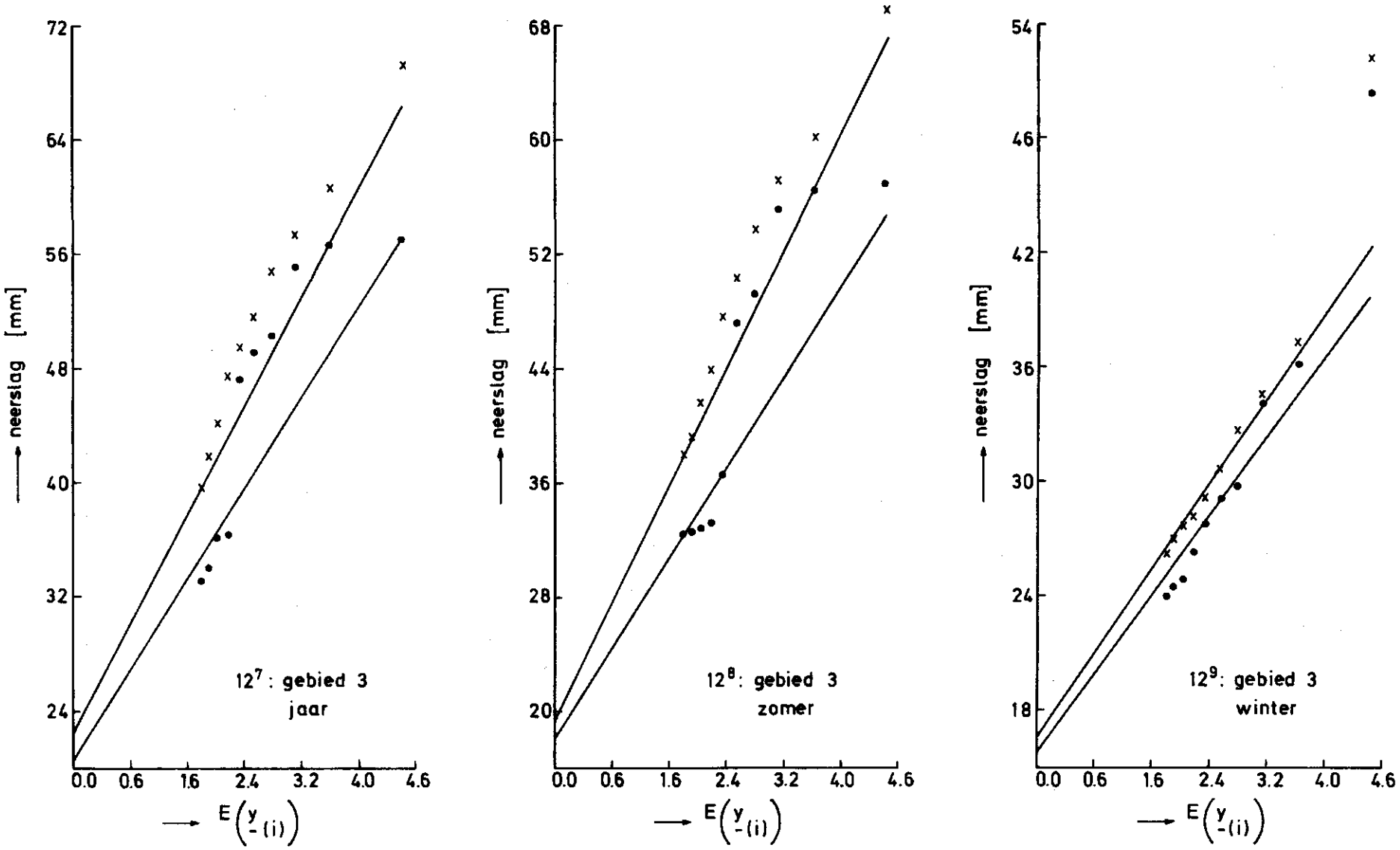


fig. 12: (vervolg)

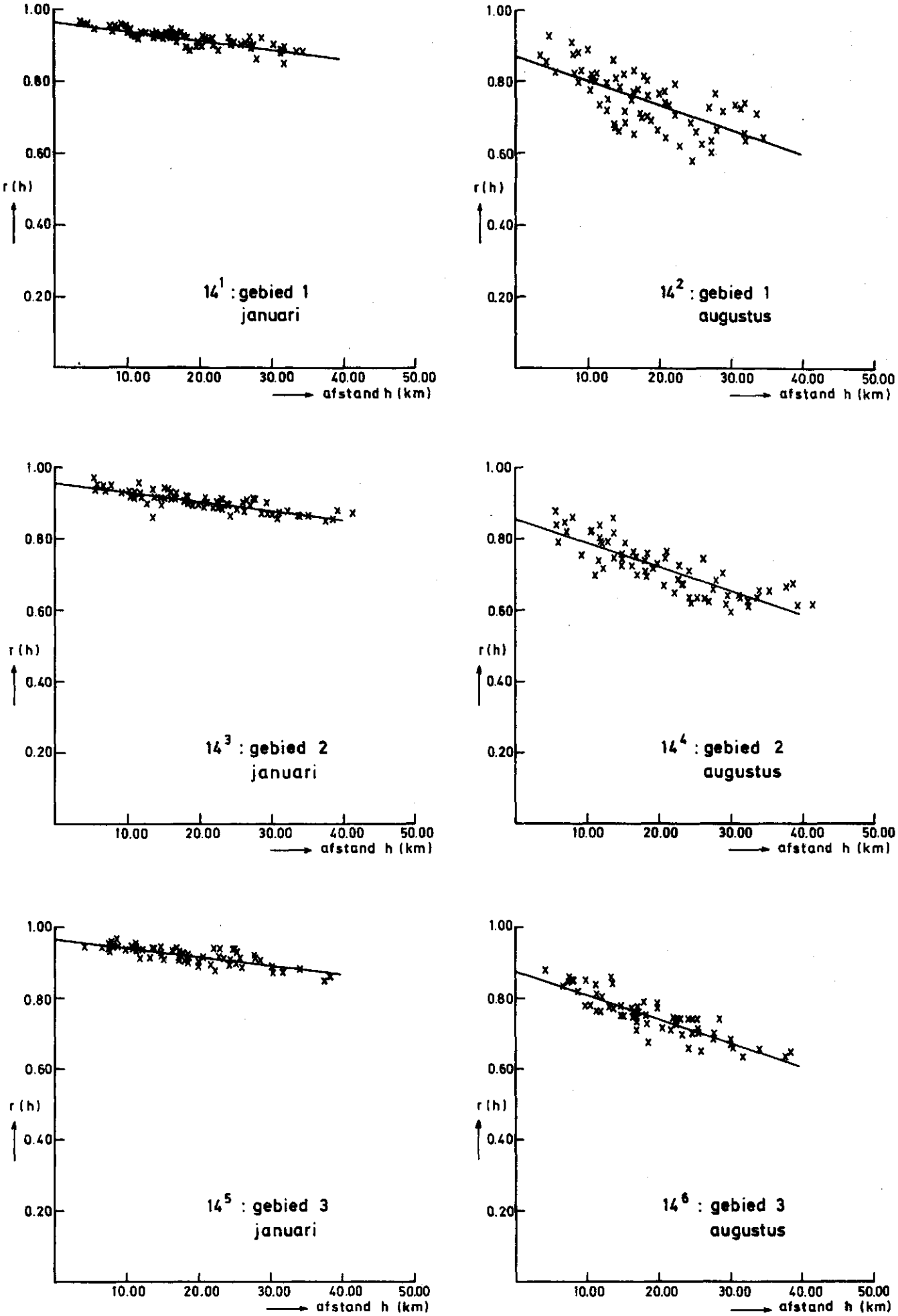


fig. 14: Berekende correlatiecoëfficiënten alsmede de aangepaste lineaire modellen.

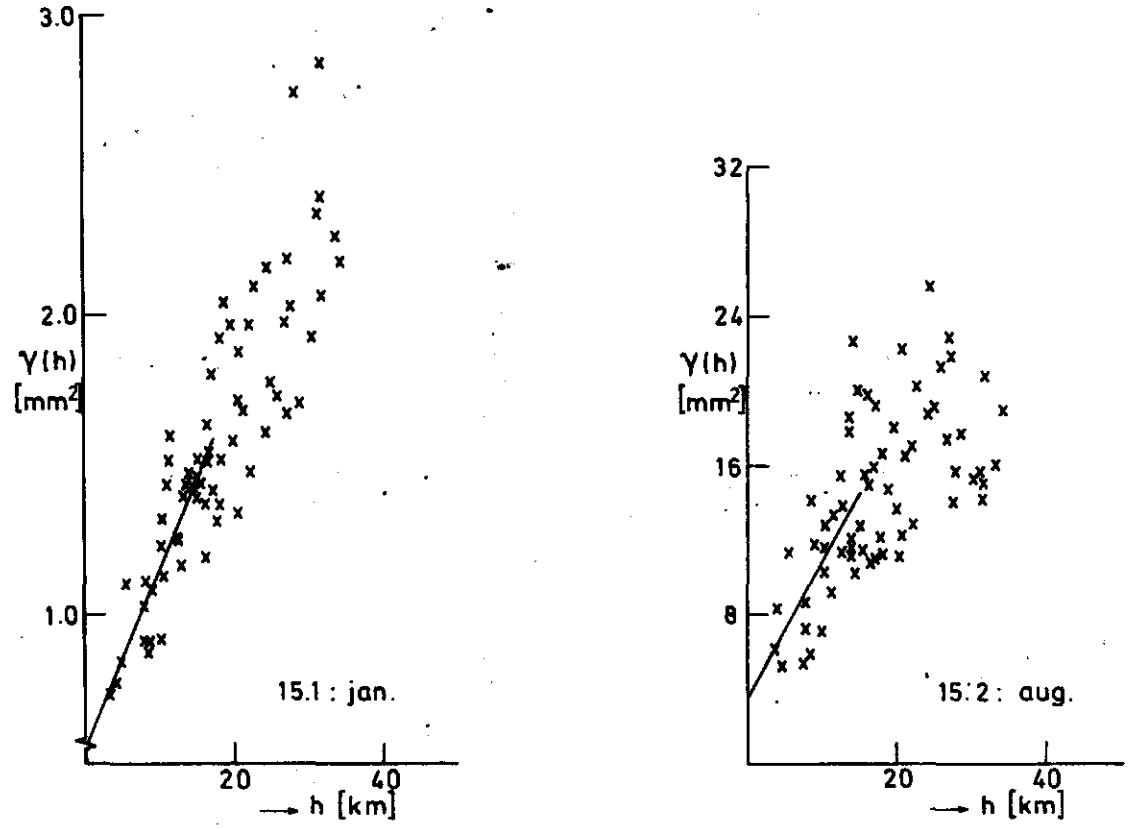


fig. 15: Steekproef-semivarianties en aangepast lineair semivariogram-model voor gebied 1.

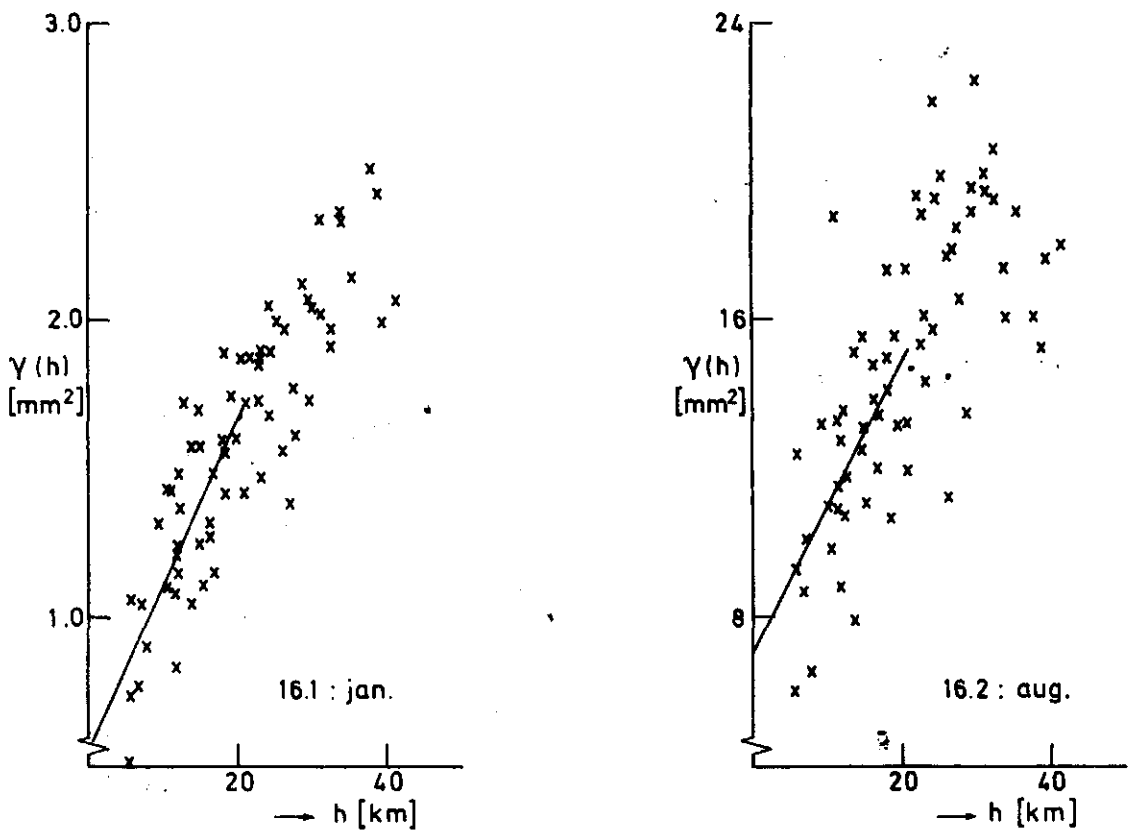


fig. 16: Steekproef-semivarianties en aangepast lineair semivariogram-model voor gebied 2.

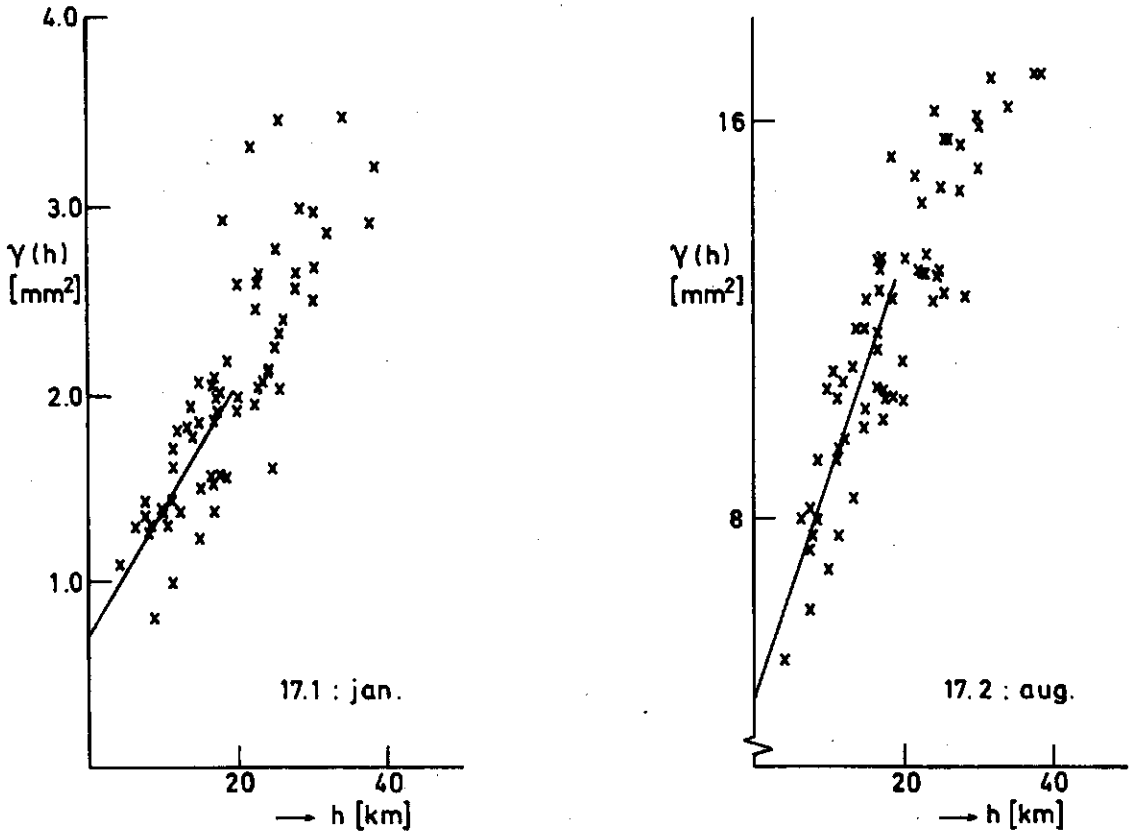
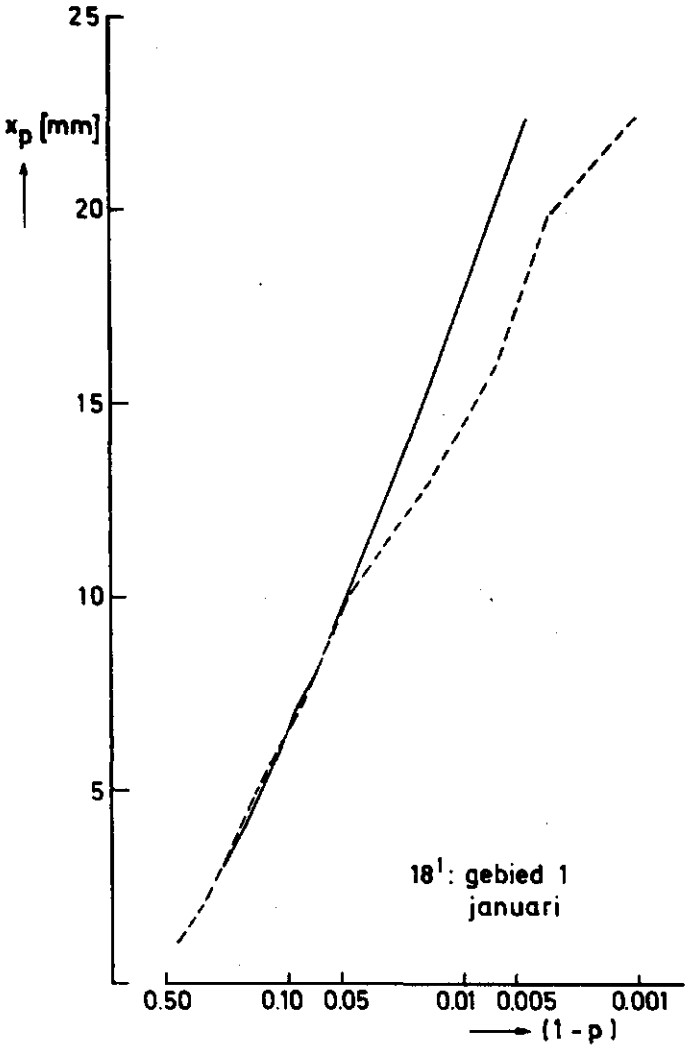
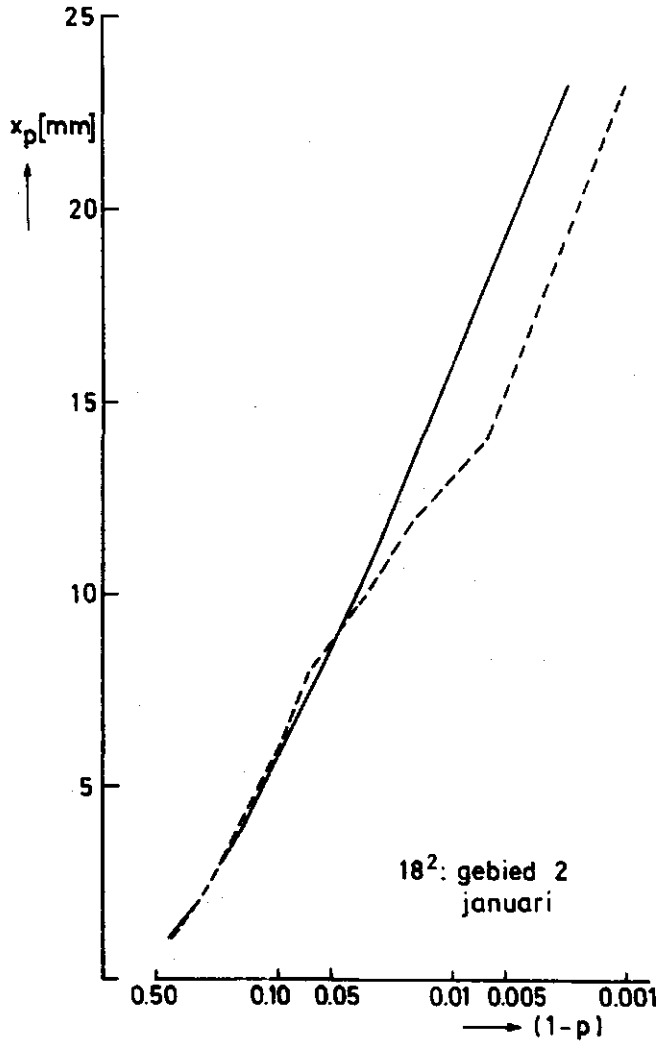


fig. 17: Steekproef-semivarianties en aangepast lineair semivariogram-model voor gebied 3.





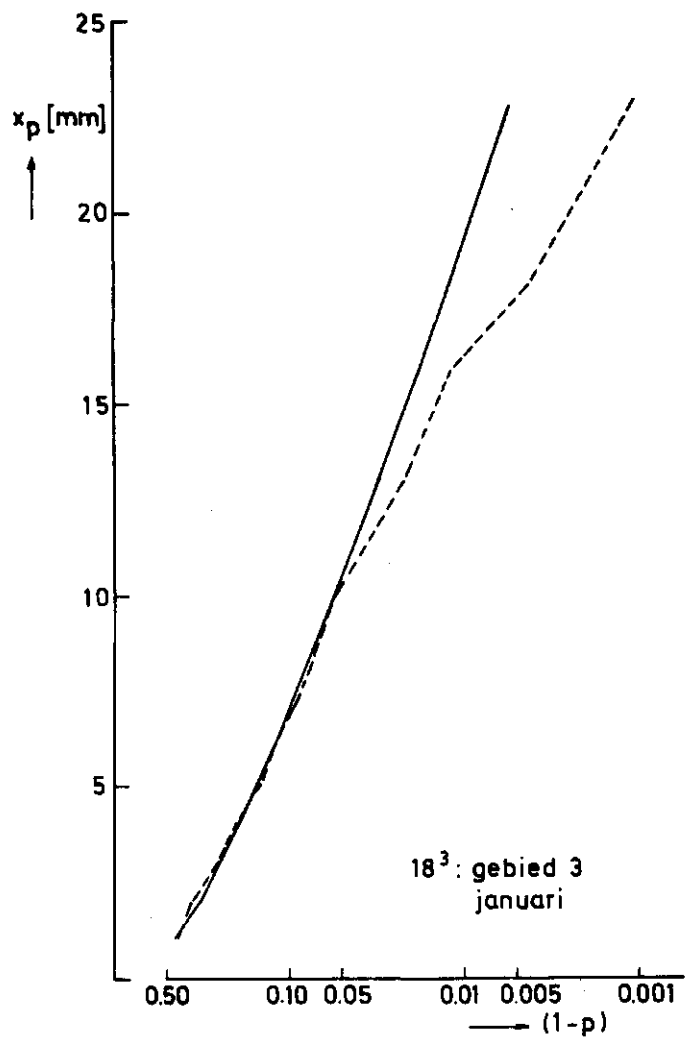


fig. 18: Linker p-punten x_p van gebieds - neerslagen als functie van de over - schrijdingskans 1-p (log schaal) ; p werd bepaald mbv. de edf (------) en de cdf (———).

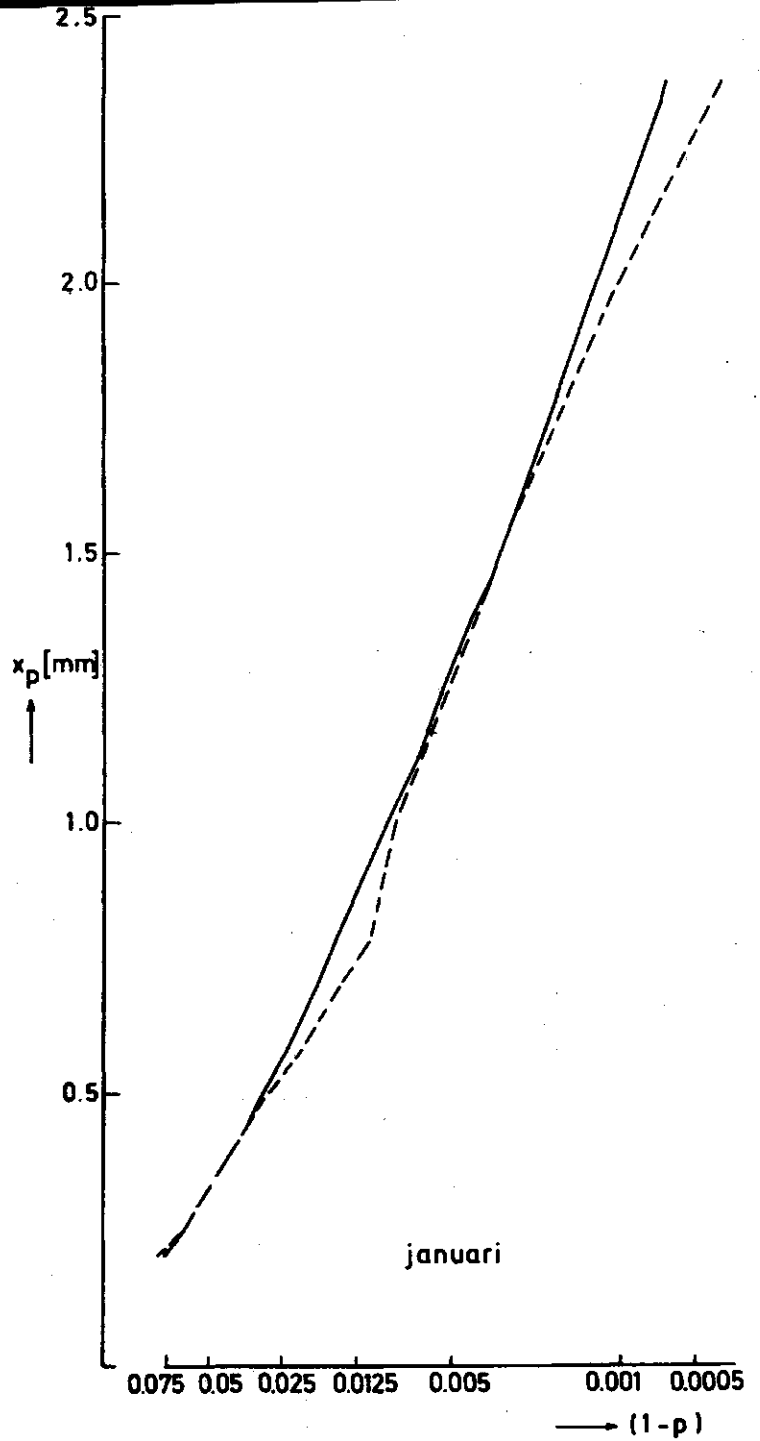
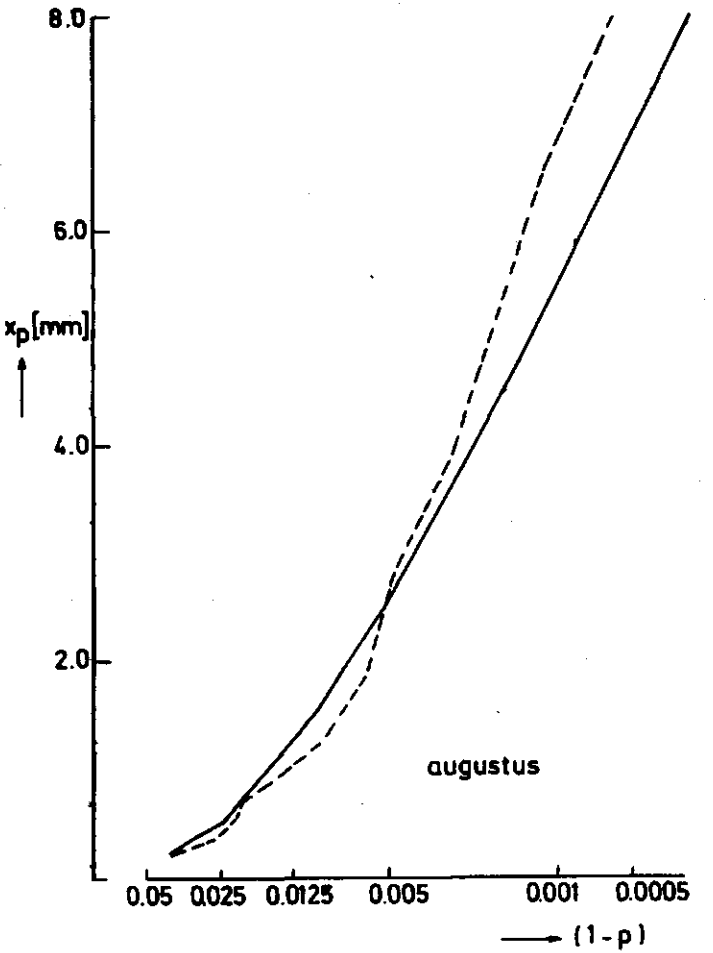


fig. 19: Linker p-punten x_p van gebiedsneerslagen als functie van de overschrijdingskans 1-p (log. schaal); p werd bepaald mbv. de edf (-----) en de cdf (———).



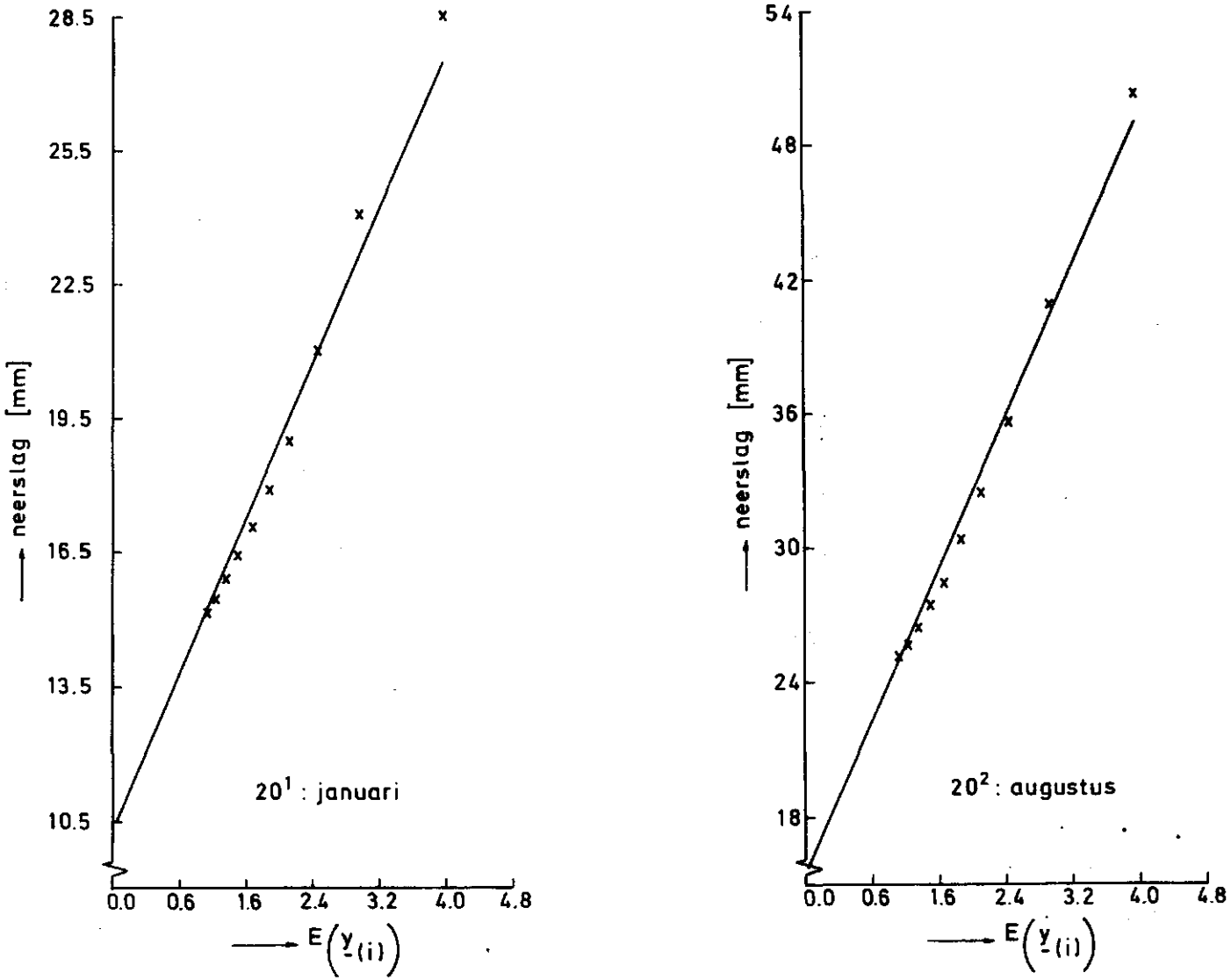
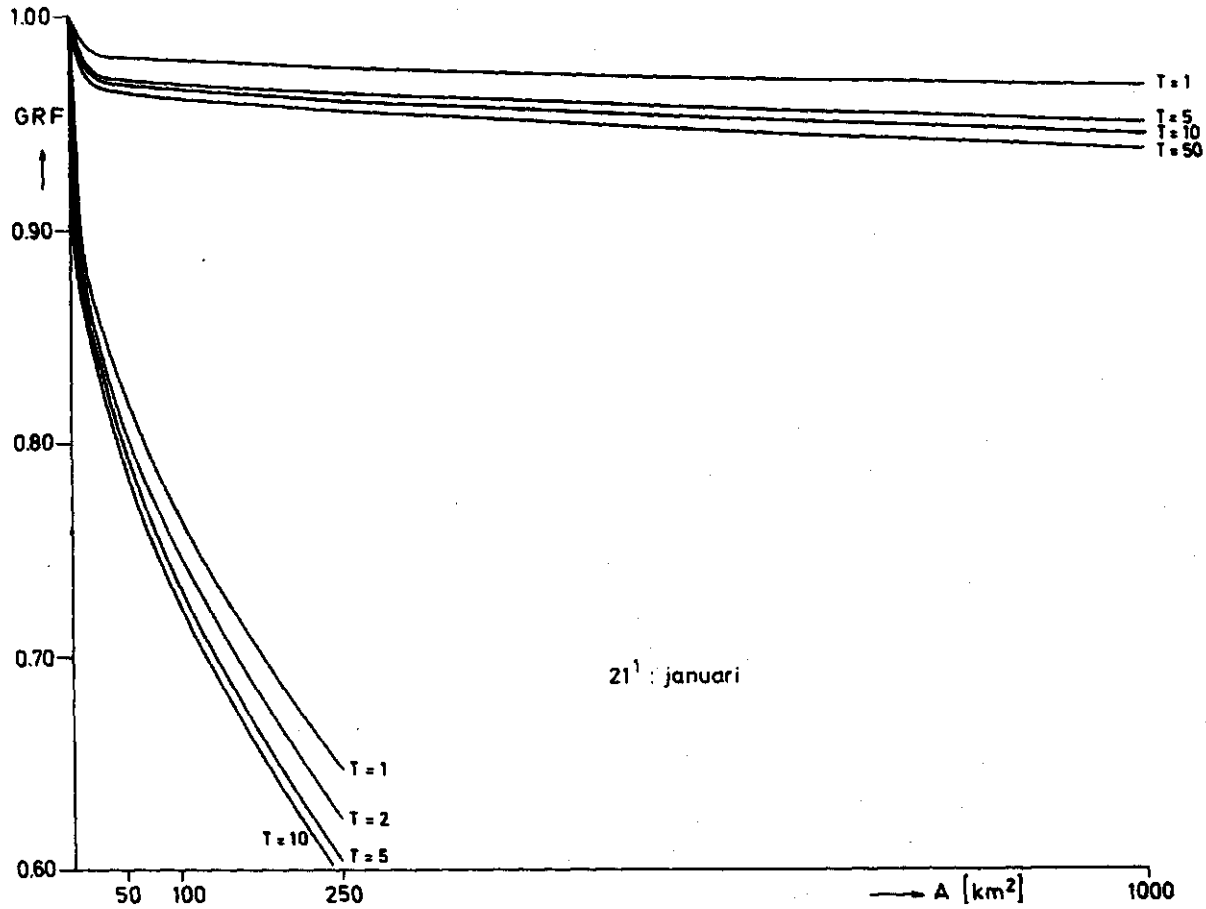


fig. 20: Geordende steekproeven van puntneerslagen (alleen de 10 hoogste zijn aangegeven) en aangepaste exponentiële verdelingen.



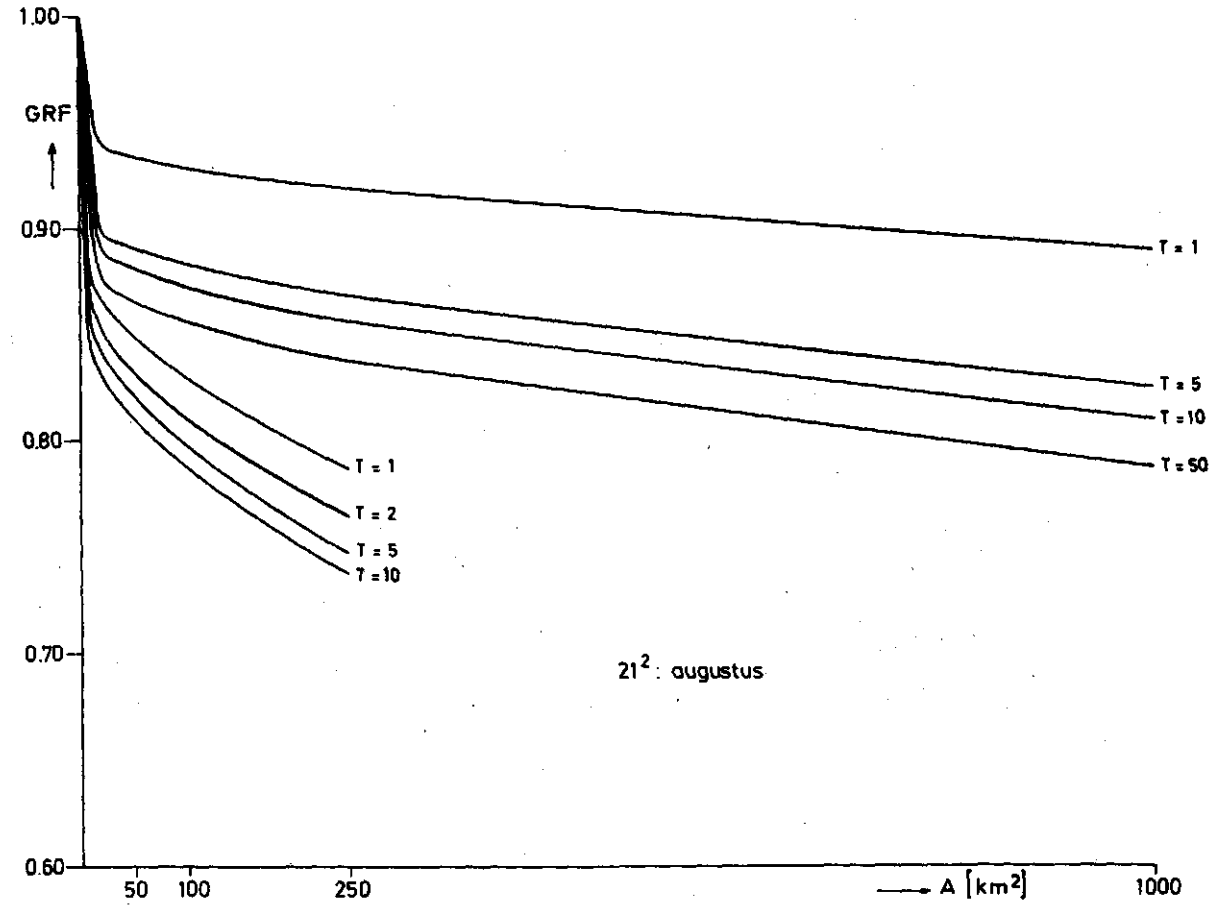


fig. 21: GRF_1 en GRF_{24} als functie van de gebiedsgrootte A en de herhalingstijd T [jaar] .

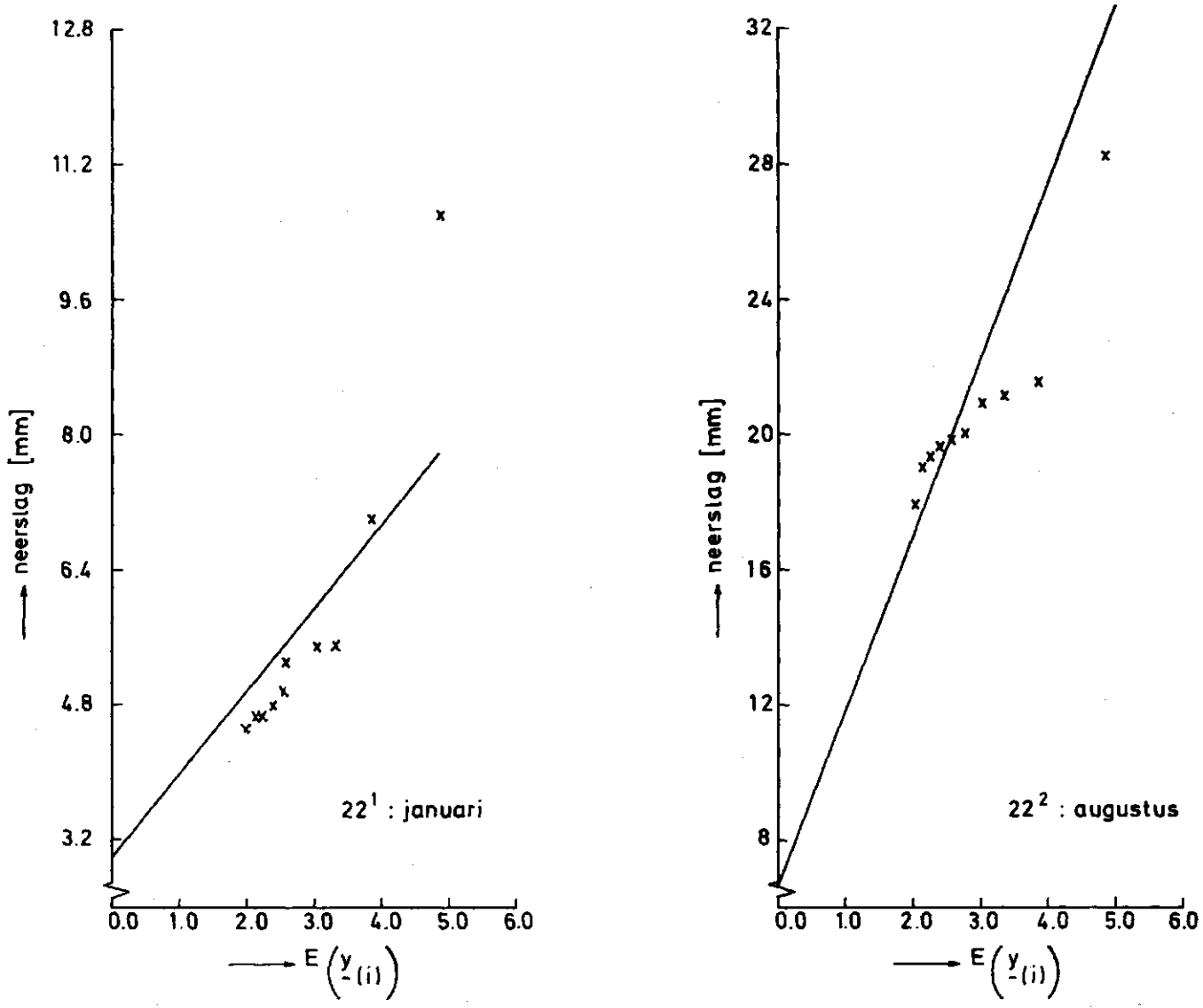
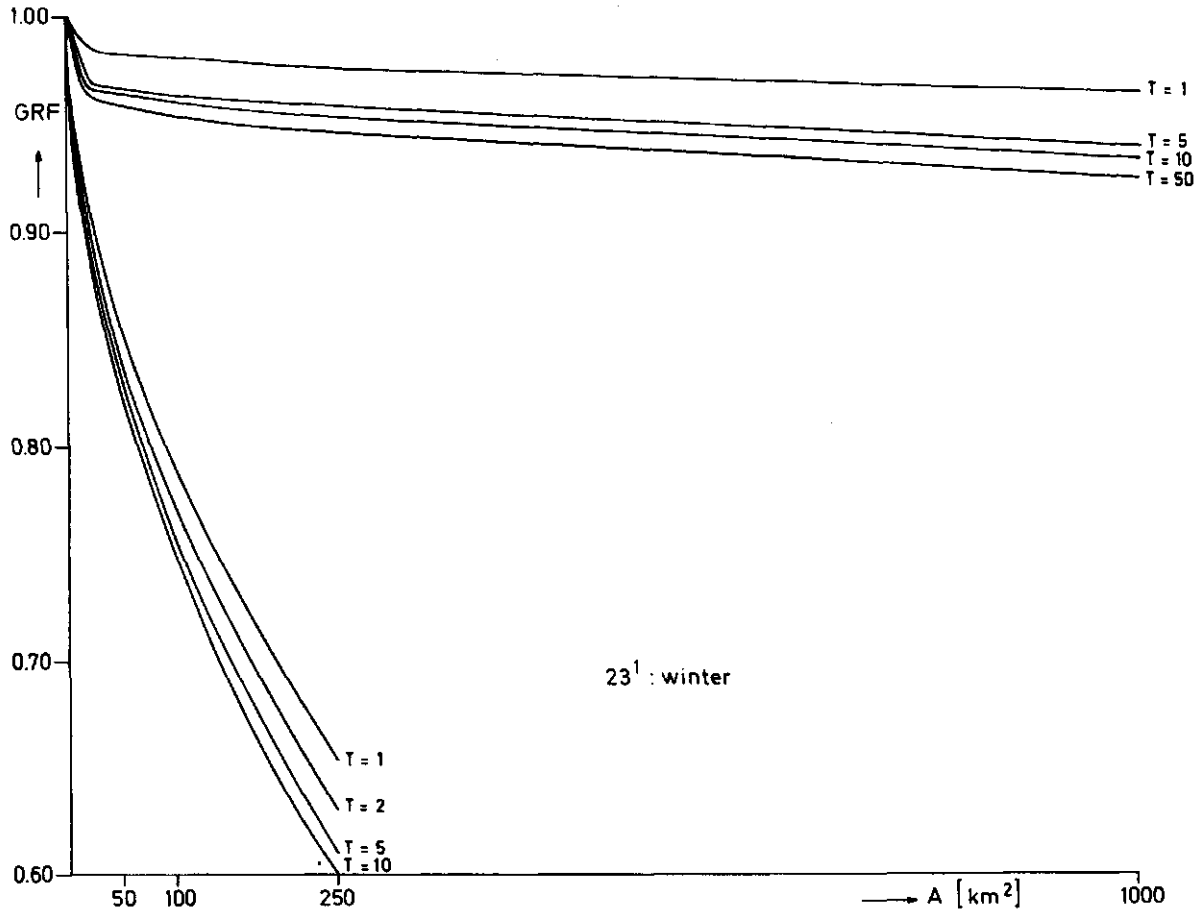


fig. 22: Geordende steekproeven van puntneerslagen (alleen de 10 hoogste zijn aangegeven) en aangepaste exponentiële verdelingen.



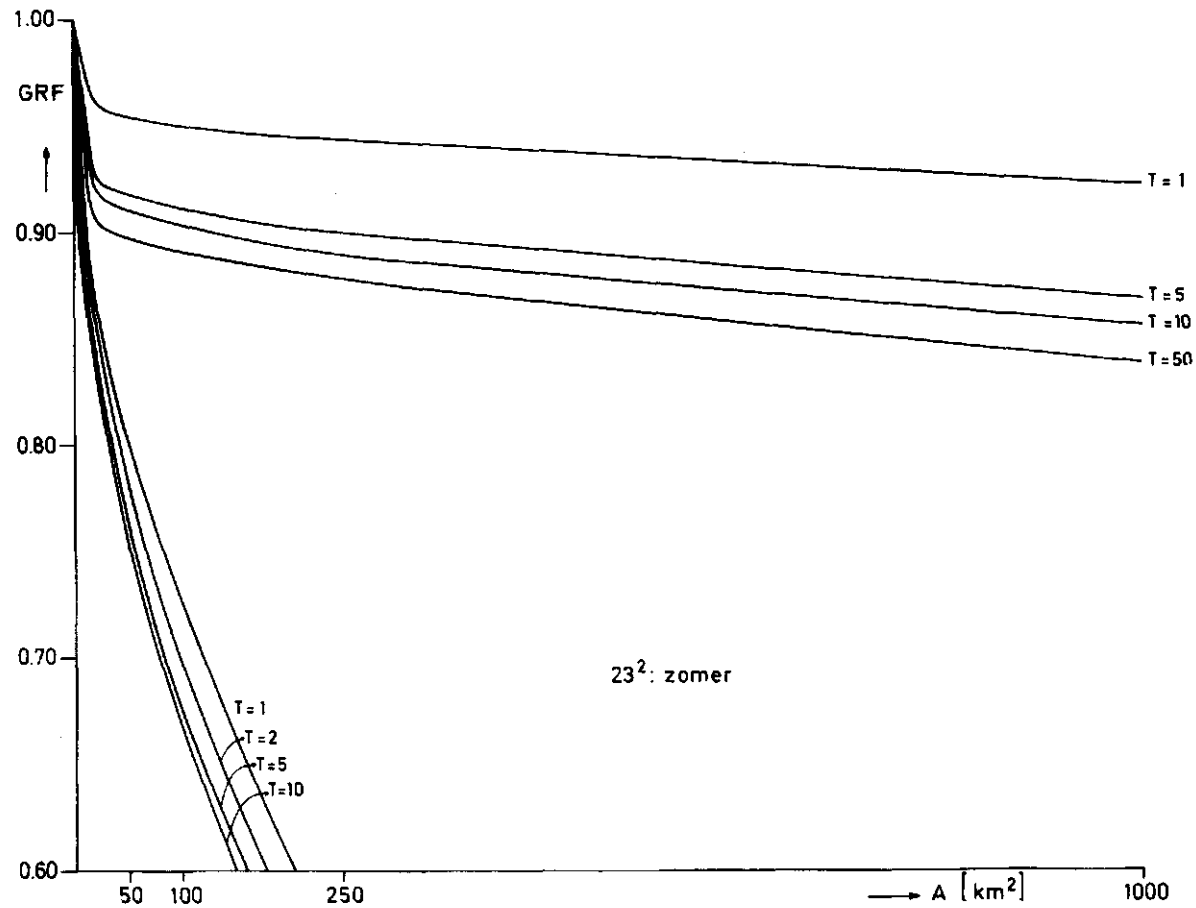


fig. 23: GRF_1 en GRF_{24} voor het winter- en het zomerseizoen als functie van de gebiedsgrootte A en de herhalingstijd T [jaar].

APPENDIX I: Beschouwde stations bij berekening van GRF_{24}.

Periode van waarneming: 1951 t/m 1979.

Gebied	Naam station	Station No. (K.N.M.I.)	Aantal dagen zonder waarn.	Aanvullingen
1	Schellingwoude	223	28	febr. '57 m.b.v. 441
	Overveen	225	0	
	Wijk aan Zee	226	31	jan. '53 m.b.v. 225
	Zandvoort	229	0	
	Zaandijk	230	0	
	Zaandam	233	92	juni t/m aug. '58 m.b.v. 230
	Heemstede	435	61	dec. '73 en jan '74 m.b.v. 438
	Sassenheim (L.)	436	0	
	Lijnden	437	0	
	Hoofddorp	438	0	
	Amsterdam (Hortus)	441	0	
	Lisse	454	0	
2	Vlissingen	733	0	
	Brouwershaven	736	90	oct. '52 en feb./mrt. '53 m.b.v. 751
	Noordgouwe	743	59	feb./mrt. '53 m.b.v. 751
	Westkapelle	746	0	
	Wilhelminadorp	749	0	
	Oranjezon	751	0	
	Haamstede	752	28	feb. '53 m.b.v. 751
	Ovezande	754	0	
	Kortgene	755	90	jan. t/m mrt. '53 m.b.v. 751
	Middelburg	756	0	
	Wolphaartsdijk	758	31	jan. '51 m.b.v. 749
	's-Heerenhoek	760	0	
3	Putten (Gld.)	542	0	
	Apeldoorn	543	0	
	Lunteren	558	0	
	Hulshorst	564	0	
	Voorthuizen	565	0	
	Kootwijk	567	31	nov. '53 m.b.v. 543
	Elspeet	570	0	
	Harskamp	571	39	21 t/m 28 feb. '55 en dec. '55 m.b.v. 573
	Beekbergen	573	0	
	Oosterbeek	578	0	
	Veenendaal	579	0	
	Barneveld	580	81	nov./dec. '55 en 10 t/m 30 sept. '56 m.b.v. 565

APPENDIX II: De schattingsvariantie van $\hat{\gamma}_V(h)$.

Indien $\underline{X} = (\underline{X}_1, \underline{X}_2, \underline{X}_3, \underline{X}_4)$ simultaan Normaal verdeeld is met verwachtingsvector 0 en covariantiematrix $\Sigma = (\sigma_{ij})$, dan geldt:

$$E(\underline{X}_1\underline{X}_2\underline{X}_3\underline{X}_4)=\sigma_{12}\sigma_{34} + \sigma_{13}\sigma_{24} + \sigma_{14}\sigma_{23}. \qquad \text{(II-1)}$$

(II-1) kan worden bewezen met behulp van karakteristieke functies; zie ANDERSON (1958).

Dus geldt:

$$E[\{Z(x+h)-Z(x)\}^2\{Z(y+h)-Z(y)\}^2]$$

$$=E[\{Z(x+h)-Z(x)\}\{Z(x+h)-Z(x)\}\{Z(y+h)-Z(y)\}\{Z(y+h)-Z(y)\}]$$

$$=Var[Z(x+h)-Z(x)]Var[Z(y+h)-Z(y)]+$$
$$+2Cov^2[\{Z(x+h)-Z(x)\},\{Z(y+h)-Z(y)\}]. \qquad \text{(II-2)}$$

Hier is $Z(x)$ een intrinsieke toevalsfunctie, gedefinieerd op de rechte R^1, waarvan de aangroeiingen $\{Z(x+h)-Z(x)\}$ Normaal verdeeld zijn.
Algemeen geldt:

$$Cov[\{Z(x+h)-Z(x)\},\{Z(y+h)-Z(y)\}] = Cov[Z(x+h),Z(y+h)]-$$

$$-Cov[Z(x+h),Z(y)]-Cov[Z(x),Z(y+h)]+Cov[Z(x),Z(y)]$$

$$=-2\gamma(x-y)+\gamma(x-y+h)+\gamma(x-y-h). \qquad \text{(II-3)}$$

Voorts geldt:

$$Var[\{Z(x+h)-Z(x)\}]=Var[\{Z(y+h)-Z(y)\}]=2\gamma(h). \qquad \text{(II-4)}$$

Substitutie van (II-3) en (II-4) in (II-2) levert op:

$$E[\{Z(x+h)-Z(x)\}^2\{Z(y+h)-Z(y)\}^2]$$
$$=4\gamma^2(h)+2[\gamma(x-y+h)+\gamma(x-y-h)-2\gamma(x-y)]^2, \qquad \text{(II-5)}$$

waarin:

$$4\gamma^2(h)=\{E[\{Z(x+h)-Z(x)\}^2]\}^2.$$

Hieruit volgt dat:

$$Cov[\{Z(x+h)-Z(x)\}^2,\{Z(y+h)-Z(y)\}^2] =$$

$$=2[\gamma(x-y+h)+\gamma(x-y-h)-2\gamma(x-y)]^2.$$

Indien nu het semivariogram wordt geschat door $\hat{\gamma}_V(h)$, gebaseerd op perfecte kennis van de ene realisatie z(x) van Z(x) op V geldt dus:

$$4E\{Var[\hat{\gamma}_V(h)]\}= \frac{1}{(L-h)^2} \int_o^{L-h} \int_o^{L-h} 2[\gamma(x-y+h) + \gamma(x-y-h) - 2\gamma(x-y)]^2 \, dx \, dy.$$

Bij een lineair semivariogram model $\gamma=a|h|$:

$$Var[\hat{\gamma}_V(h)] = \frac{1}{(L-h)^2} \int_o^{L-h} \int_o^{x} 2[\gamma(x-y+h) + \gamma(x-y-h) - 2\gamma(x-y)]^2 \, dxdy$$

$$= \frac{4a^2}{(L-h)^2} \int_o^{L-h} \int_{Sup\,(0,(x-h))}^{x} [h-x+y]^2 dxdy.$$

Voor $h \leq L/2$:

$$Var[\hat{\gamma}_V(h)] = \left(\frac{4}{3} \frac{h}{L-h} - \frac{1}{3} \frac{h^4}{(L-h)^2} \right) a^2.$$

Voor $h > L/2$:

$$Var[\hat{\gamma}_V(h)] = \left(2h^2 + \frac{1}{3} (L-h)^2 - \frac{4}{3} h(L-h)\right) a^2. \qquad \text{(II-8)}$$

APPENDIX III: **Gewichten bij het berekenen van kriging-gemiddelden van maandmaxima.**

gebied 1

maand	223	225	226	229	230	233	435	436	437	438	441	454
jan.	1.08	1.05	0.90	0.66	0.88	0.97	0.90	0.81	1.37	1.33	1.30	0.[illegible]
febr.	1.09	1.04	0.90	0.68	0.89	0.98	0.93	0.81	1.35	1.29	1.28	0.[illegible]
mrt.	1.06	1.10	0.90	0.61	0.86	0.94	0.82	0.80	1.43	1.42	1.34	0.[illegible]
apr.	1.00	1.20	0.90	0.56	0.85	0.89	0.63	0.80	1.50	1.59	1.41	0.[illegible]
mei	1.08	1.05	0.90	0.66	0.88	0.97	0.90	0.81	1.37	1.33	1.30	0.[illegible]
juni	1.02	1.16	0.90	0.58	0.85	0.90	0.71	0.80	1.48	1.53	1.38	0.[illegible]
juli	1.10	1.02	0.90	0.69	0.90	0.99	0.94	0.81	1.33	1.27	1.27	0.[illegible]
aug.	1.06	1.10	0.90	0.62	0.86	0.94	0.83	0.80	1.42	1.41	1.34	0.[illegible]
sept.	1.08	1.06	0.90	0.64	0.88	0.96	0.88	0.80	1.39	1.35	1.31	0.[illegible]
oct.	1.05	1.11	0.90	0.61	0.86	0.93	0.81	0.80	1.44	1.43	1.35	0.[illegible]
nov.	1.02	1.17	0.90	0.57	0.85	0.90	0.68	0.80	1.48	1.55	1.39	0.[illegible]
dec.	1.11	1.00	0.90	0.74	0.93	1.01	0.97	0.83	1.27	1.20	1.23	0.[illegible]

gebied 2

	733	736	743	746	749	751	752	754	755	756	758	760
jan.	0.57	0.85	0.75	1.28	0.92	1.82	2.19	0.45	1.17	0.79	0.75	0.[illegible]
febr.	0.80	1.09	0.95	1.21	0.86	1.37	1.54	0.63	1.02	0.95	0.87	0.[illegible]
mrt.	0.75	1.06	0.91	1.25	0.86	1.46	1.68	0.57	1.05	0.93	0.85	0.[illegible]
apr.	0.55	0.75	0.72	1.26	0.95	1.93	2.33	0.45	1.22	0.72	0.69	0.[illegible]
mei	0.55	0.75	0.72	1.26	0.95	1.93	2.33	0.45	1.22	0.72	0.69	0.[illegible]
juni	0.70	1.03	0.87	1.27	0.86	1.55	1.80	0.52	1.03	0.90	0.83	0.[illegible]
juli	0.57	0.86	0.75	1.28	0.91	1.81	2.18	0.45	1.17	0.79	0.75	0.[illegible]
aug.	0.86	1.09	0.98	1.17	0.88	1.26	1.39	0.72	1.01	0.97	0.90	0.[illegible]
sept.	0.65	0.98	0.83	1.28	0.87	1.64	1.93	0.49	1.11	0.87	0.81	0.[illegible]
oct.	0.58	0.88	0.76	1.28	0.91	1.79	2.14	0.45	1.16	0.81	0.76	0.48
nov.	0.86	1.09	0.98	1.17	0.88	1.27	1.40	0.71	1.01	0.97	0.90	0.[illegible]
dec.	0.96	1.04	1.01	1.05	0.96	1.07	1.11	0.91	1.00	0.99	0.97	0.[illegible]

gebied 3

	542	543	558	564	565	567	570	571	573	578	579	580
jan.	0.99	1.12	0.89	1.08	0.75	1.18	1.26	1.12	1.14	1.15	0.70	0.[illegible]
febr.	1.02	1.07	0.95	1.07	0.66	1.22	1.39	1.22	1.11	1.23	0.59	0.[illegible]
mrt.	1.05	1.03	1.02	1.04	0.62	1.23	1.47	1.28	1.09	1.27	0.52	0.[illegible]
apr.	1.00	1.10	0.91	1.08	0.70	1.20	1.32	1.17	1.13	1.19	0.65	0.[illegible]
mei	1.01	1.08	0.93	1.07	0.68	1.22	1.36	1.20	1.12	1.21	0.61	0.[illegible]
juni	1.00	1.10	0.90	1.08	0.71	1.20	1.31	1.16	1.13	1.18	0.65	0.[illegible]
juli	1.01	1.09	0.92	1.08	0.68	1.21	1.35	1.19	1.12	1.20	0.62	0.[illegible]
aug.	1.01	1.09	0.92	1.08	0.69	1.21	1.34	1.19	1.12	1.20	0.63	0.53
sept.	1.02	1.08	0.94	1.07	0.67	1.22	1.37	1.21	1.12	1.22	0.60	0.4[illegible]
oct.	1.03	1.06	0.96	1.06	0.65	1.23	1.41	1.23	1.11	1.24	0.57	0.4[illegible]
nov.	1.00	1.10	0.90	1.08	0.71	1.20	1.31	1.16	1.13	1.18	0.66	0.5[illegible]
dec.	0.99	1.08	0.93	1.04	0.92	1.06	1.08	1.02	1.07	1.03	0.90	0.8[illegible]

N.B.: De gewichten zijn vermenigvuldigd met het aantal stations (=12).
De getallen boven de kolommen zijn KNMI stationsnummers.

APPENDIX IV: Geordende pieken [mm] van punt- en gebiedsneerslagen.

Puntneerslagen									Gebiedsneerslagen								
Gebied 1			Gebied 2			Gebied 3			Gebied 1			Gebied 2			Gebied 3		
j	z	w	j	z	w	j	z	w	j	z	w	j	z	w	j	z	w
22.7	19.5	16.6	23.3	19.7	15.9	22.7	19.5	16.6	21.3	18.5	15.7	21.6	17.7	15.2	20.7	18.2	15.9
22.8	19.6	16.7	23.5	19.8	16.1	22.9	19.6	16.8	21.3	18.6	15.8	21.6	17.8	15.3	21.1	18.2	16.1
22.9	19.8	16.8	23.6	20.0	16.1	23.0	19.8	16.9	21.5	19.1	15.8	21.7	17.9	15.3	21.1	18.2	16.2
23.0	20.0	16.9	23.7	20.1	16.2	23.1	20.0	17.0	21.5	19.2	15.9	21.7	18.4	15.3	21.2	18.3	16.4
23.2	20.1	17.0	23.9	20.4	16.3	23.3	20.3	17.1	21.5	19.4	16.0	21.7	18.6	15.4	21.4	18.3	16.5
23.3	20.2	17.1	24.1	20.5	16.4	23.5	20.5	17.2	21.5	19.5	16.0	22.1	18.7	15.5	21.4	18.4	16.5
23.4	20.3	17.2	24.2	20.8	16.4	23.6	20.6	17.3	21.8	19.6	16.4	22.5	18.7	15.5	21.4	18.5	16.6
23.5	20.5	17.3	24.3	20.9	16.5	23.7	20.8	17.4	21.9	19.6	16.4	22.9	18.8	15.5	21.4	18.6	16.9
23.7	20.5	17.3	24.5	21.1	16.7	23.8	21.0	17.5	22.0	19.7	16.4	22.9	18.8	15.6	21.5	18.6	16.9
23.8	20.6	17.5	24.6	21.2	16.8	23.9	21.2	17.6	22.3	19.8	16.4	22.9	19.3	15.6	22.0	18.8	17.0
23.9	20.8	17.6	24.8	21.4	16.9	24.2	21.5	17.7	22.3	19.9	16.5	23.2	19.5	15.8	22.2	19.1	17.0
24.1	21.0	17.6	24.9	21.6	17.1	24.3	21.6	17.8	22.5	19.9	16.8	23.2	19.7	15.8	22.3	19.2	17.1
24.2	21.2	17.7	25.1	21.8	17.2	24.5	21.8	18.0	22.5	20.0	16.9	23.2	19.9	15.9	22.4	19.3	17.1
24.4	21.4	18.0	25.3	22.0	17.3	24.7	22.0	18.0	22.7	20.1	16.9	23.3	19.9	15.9	22.9	19.5	17.1
24.6	21.7	18.0	25.4	22.2	17.3	24.8	22.2	18.2	23.1	20.2	17.2	23.4	20.1	16.1	22.9	19.6	17.3
24.8	21.9	18.1	25.5	22.4	17.5	25.0	22.4	18.3	23.2	20.3	17.2	23.5	20.2	16.1	23.2	20.2	17.4
24.9	22.0	18.3	25.7	22.5	17.7	25.2	22.6	18.5	23.2	20.4	17.3	23.5	20.5	16.5	23.2	20.4	17.5
25.1	22.1	18.4	25.9	22.8	17.8	25.4	22.8	18.6	23.3	20.6	17.3	23.7	20.5	16.7	23.2	20.5	17.9
25.3	22.3	18.6	26.0	22.9	18.0	25.6	23.1	18.7	23.6	20.7	17.4	23.8	20.8	17.0	23.3	20.6	18.1
25.4	22.5	18.7	26.3	23.1	18.1	25.8	23.2	18.9	23.7	20.7	17.6	23.9	20.9	17.0	23.6	20.6	18.2
25.7	22.7	18.8	26.4	23.4	18.4	26.0	23.4	19.0	24.0	21.2	17.6	24.5	21.1	17.1	23.6	20.7	18.2
25.8	22.9	19.0	26.6	23.6	18.5	26.1	23.6	19.3	24.1	21.3	17.8	24.5	21.1	17.4	23.7	21.4	18.4
26.1	23.1	19.1	26.8	23.7	18.9	26.4	23.7	19.3	24.2	21.3	18.0	24.6	21.6	17.5	23.8	21.4	18.5
26.3	23.3	19.3	27.0	24.0	19.0	26.7	24.0	19.4	24.5	21.5	18.2	24.7	21.6	17.8	24.0	21.5	18.6
26.6	23.5	19.4	27.2	24.2	19.2	26.9	24.4	19.5	24.5	21.5	18.4	24.8	21.7	17.9	24.5	22.0	18.7
26.7	23.7	19.5	27.3	24.4	19.4	27.1	24.5	19.6	24.8	21.8	18.7	25.1	21.7	17.9	24.7	22.2	18.8
27.0	23.9	19.7	27.7	24.6	19.6	27.4	24.8	19.8	24.9	22.0	18.9	25.4	22.5	18.2	24.9	22.4	18.9
27.3	24.1	19.8	27.9	24.9	20.1	27.7	25.1	20.0	25.0	22.5	19.0	25.5	22.9	18.3	24.9	22.9	18.9
27.6	24.3	20.0	28.1	25.1	20.4	28.0	25.4	20.1	25.0	23.1	19.6	26.0	22.9	18.5	25.0	23.2	19.1
27.8	24.6	20.3	28.4	25.3	20.7	28.2	25.7	20.3	25.5	23.2	19.8	26.1	23.2	18.9	25.3	23.2	19.2
28.2	24.8	20.5	28.7	25.6	21.0	28.6	26.0	20.5	26.0	23.2	19.8	26.6	23.2	19.3	25.6	23.6	19.2
28.4	25.0	20.7	29.1	25.8	21.3	28.9	26.4	20.6	26.1	23.3	20.0	26.8	23.3	20.1	26.0	23.6	19.3
28.8	25.4	21.2	29.3	26.1	21.5	29.3	26.8	20.9	26.2	23.6	20.0	26.9	23.5	20.3	26.0	23.8	19.6
29.0	25.6	21.4	29.6	26.4	21.9	29.6	27.0	21.1	26.3	23.7	20.2	27.5	23.5	20.9	26.2	24.7	19.8
29.4	26.0	21.5	29.9	26.5	22.2	30.0	27.5	21.1	26.4	24.0	20.3	27.8	23.8	21.0	26.2	24.9	20.0
29.7	26.4	21.8	30.2	26.8	22.5	30.6	28.0	21.5	26.5	24.1	21.1	27.9	24.5	21.2	26.3	25.0	20.3
30.0	26.8	22.1	30.5	27.1	22.8	31.1	28.3	21.8	27.8	24.2	21.3	27.9	24.5	21.7	26.5	25.3	20.7
30.3	27.3	22.6	30.9	27.6	23.3	31.5	28.8	22.0	28.1	24.5	21.5	28.0	24.6	22.1	26.7	25.6	20.7
30.8	27.6	23.0	31.3	27.9	23.7	32.2	29.6	22.2	28.4	25.0	21.5	28.0	24.7	22.9	27.8	26.0	21.1
31.4	28.1	23.2	31.7	28.3	23.9	32.6	30.4	22.4	28.4	25.5	21.9	28.1	25.1	23.2	27.9	26.0	21.1
31.8	28.5	23.6	32.2	28.6	24.4	32.9	31.0	22.6	28.9	26.1	22.3	28.4	25.4	23.4	28.3	26.2	21.2
32.4	28.8	24.0	32.7	28.9	24.9	33.4	31.6	22.9	29.0	26.2	22.3	28.5	25.5	23.7	28.4	26.2	21.4
32.9	29.3	24.4	33.2	29.3	25.2	33.9	32.3	23.3	29.3	26.3	22.5	29.0	26.0	23.9	29.2	26.5	21.4
33.7	29.8	24.8	33.7	29.7	25.6	34.6	32.8	23.6	29.7	26.4	22.7	29.3	26.6	24.8	29.8	26.7	22.3
34.5	30.3	25.2	34.1	30.3	26.1	35.4	33.4	24.0	29.8	27.8	24.5	29.5	26.9	26.1	29.8	27.9	22.9
35.4	30.8	25.6	34.5	31.1	27.0	36.4	34.1	24.5	30.0	28.1	24.8	30.6	27.8	26.8	32.4	28.3	23.2
35.9	31.5	26.4	34.8	32.0	27.7	37.3	34.8	25.0	31.1	28.4	24.9	30.7	27.9	27.5	32.6	28.4	23.3
36.6	32.5	27.2	35.7	32.8	28.5	38.6	36.1	25.6	31.8	28.9	25.0	31.0	28.0	27.9	32.9	29.8	23.7
37.3	33.4	27.9	36.3	33.5	29.5	39.7	38.0	26.3	31.8	29.0	26.0	31.4	28.1	28.0	33.2	32.4	24.0
37.9	34.2	29.0	37.4	34.4	30.4	41.8	39.2	27.0	33.0	29.3	26.5	31.9	28.4	29.5	34.1	32.6	24.5
39.2	35.3	30.1	38.0	35.4	31.3	44.1	41.6	27.7	33.7	29.7	28.4	32.7	28.5	30.7	36.2	32.9	24.9
40.8	36.6	31.5	39.1	36.9	32.2	47.4	43.9	28.2	33.9	29.8	31.8	34.4	29.0	31.4	36.5	33.2	26.3
42.7	37.4	33.5	40.3	38.0	33.4	49.4	47.6	29.2	34.8	30.0	31.8	35.1	29.3	31.9	47.2	36.5	27.8
44.4	39.1	35.4	41.6	39.4	34.4	51.5	50.3	30.6	36.5	31.1	33.7	35.2	30.6	34.4	49.2	47.2	29.2
46.5	42.0	38.1	42.7	41.3	35.4	54.7	53.7	32.7	42.8	33.0	33.9	35.3	31.0	35.1	50.3	49.2	29.8
48.8	44.9	41.6	45.3	42.7	37.2	57.3	57.1	34.6	44.3	34.8	42.8	35.3	32.7	35.2	55.1	55.1	34.1
53.5	50.5	45.7	49.5	46.9	39.7	60.6	60.1	37.3	46.1	36.5	46.1	38.4	38.4	35.3	56.5	56.5	36.2
61.0	59.5	52.2	59.5	57.4	47.7	69.1	69.0	52.2	50.0	44.3	50.0	40.8	40.8	35.3	56.9	56.9	50.3

APPENDIX V: Covariantiematrix van de schatters $\hat{q}_o$ en $\hat{\beta}$.

(Zie: NERC (1975), dl.I.p.195).

ML-schatters voor $\hat{\beta}$ en $\hat{q}_o$ in (14), hfdst. 3, zijn (NERC; 1975, dl.I, p.75, 76):

$$\hat{\underline{q}}_o = \underline{q}_{(\ell)} - \hat{\underline{\beta}}/N, \tag{V-1}$$

$$\hat{\underline{\beta}} = \frac{N}{N-1}(\bar{\underline{q}} - \underline{q}_{(\ell)}). \tag{V-2}$$

Bij de bepaling van de covariantiematrix C van $\hat{\underline{q}}_o$ en $\hat{\underline{\beta}}$ is gebruik gemaakt van de volgende resultaten:

$$2(N-1)\hat{\underline{\beta}}/\beta \simeq \underline{\chi}^2_{2(N-1)} \quad \rightarrow \text{var } \hat{\underline{\beta}} = \beta^2/(N-1), \quad \text{(SUKHATME; 1937)} \tag{V-3}$$

$$\text{Cov}(\underline{q}_{(\ell)}, \hat{\underline{\beta}}) = 0 \quad \text{(SUKHATME; 1937)}, \tag{V-4}$$

$$\text{var}(\underline{q}_{(\ell)}) = \beta^2/N^2. \tag{V-5}$$

Uit (V-4), (V-5) en (V-1) volgen:

$$\text{var } \hat{\underline{q}}_o = \beta^2/[N(N-1)], \tag{V-6}$$

en

$$\text{cov}(\hat{\underline{q}}_o, \hat{\underline{\beta}}) = -\beta^2/[N(N-1)]. \tag{V-7}$$

Dus geldt voor C:

$$C = \frac{\beta^2}{N-1}\begin{bmatrix} 1 & -1/N \\ -1/N & 1/N \end{bmatrix} \tag{V-8}$$

APPENDIX VI: Gewichten bij het berekenen van kriging-gemiddelden van de neerslag.

gebied 1

maand	223	225	226	229	230	233	435	436	437	438	441	454
jan.	1.10	1.02	0.90	0.69	0.90	0.99	0.94	0.81	1.32	1.27	1.27	0.78
febr.	1.09	1.05	0.90	0.66	0.88	0.97	0.91	0.81	1.37	1.32	1.29	0.76
mrt.	1.10	1.03	0.90	0.68	0.90	0.98	0.93	0.81	1.34	1.28	1.28	0.77
apr.	1.09	1.04	0.90	0.67	0.89	0.98	0.92	0.81	1.35	1.30	1.28	0.76
mei	1.08	1.06	0.90	0.65	0.88	0.96	0.89	0.80	1.38	1.34	1.30	0.75
juni	1.10	1.03	0.90	0.68	0.89	0.98	0.93	0.81	1.34	1.29	1.28	0.77
juli	1.10	1.03	0.90	0.68	0.90	0.98	0.93	0.81	1.34	1.28	1.28	0.77
aug.	1.08	1.07	0.90	0.64	0.87	0.96	0.88	0.80	1.39	1.36	1.31	0.74
sept.	1.09	1.04	0.90	0.67	0.89	0.97	0.91	0.81	1.36	1.31	1.29	0.76
oct.	1.08	1.06	0.90	0.65	0.88	0.96	0.89	0.80	1.38	1.34	1.30	0.75
nov.	1.09	1.05	0.90	0.66	0.88	0.97	0.90	0.81	1.37	1.32	1.30	0.75
dec.	1.11	1.02	0.90	0.70	0.91	0.99	0.95	0.82	1.31	1.25	1.26	0.78

gebied 2

	733	736	743	746	749	751	752	754	755	756	758	760
jan.	0.65	0.98	0.82	1.28	0.87	1.64	1.93	0.49	1.11	0.87	0.81	0.55
febr.	0.72	1.04	0.88	1.26	0.86	1.52	1.76	0.54	1.07	0.91	0.84	0.61
mrt.	0.66	0.99	0.84	1.28	0.87	1.62	1.90	0.49	1.10	0.88	0.82	0.56
apr.	0.61	0.93	0.78	1.28	0.89	1.72	2.05	0.46	1.14	0.84	0.78	0.51
mei	0.61	0.93	0.78	1.28	0.89	1.72	2.05	0.46	1.14	0.84	0.79	0.51
juni	0.69	1.02	0.86	1.27	0.86	1.57	1.83	0.51	1.08	0.90	0.83	0.58
juli	0.67	1.00	0.84	1.27	0.86	1.60	1.88	0.50	1.09	0.89	0.82	0.57
aug.	0.71	1.04	0.88	1.26	0.86	1.52	1.77	0.54	1.07	0.91	0.84	0.61
sept.	0.62	0.94	0.79	1.28	0.88	1.70	2.03	0.47	1.13	0.84	0.79	0.52
oct.	0.63	0.95	0.80	1.28	0.88	1.68	2.00	0.47	1.12	0.85	0.80	0.53
nov.	0.62	0.95	0.80	1.28	0.88	1.69	2.01	0.47	1.13	0.85	0.80	0.52
dec.	0.79	1.08	0.95	1.22	0.86	1.38	1.56	0.62	1.03	0.95	0.87	0.69

gebied 3

	542	543	558	564	565	567	570	571	573	578	579	580
jan.	1.00	1.10	0.91	1.08	0.71	1.20	1.32	1.16	1.13	1.18	0.65	0.56
febr.	1.00	1.10	0.91	1.08	0.70	1.21	1.32	1.17	1.13	1.19	0.65	0.55
mrt.	1.01	1.09	0.92	1.08	0.69	1.21	1.35	1.19	1.12	1.20	0.63	0.52
apr.	1.02	1.07	0.94	1.07	0.67	1.22	1.38	1.21	1.12	1.22	0.60	0.49
mei	1.01	1.09	0.92	1.08	0.69	1.21	1.34	1.18	1.12	1.20	0.63	0.53
juni	1.00	1.10	0.90	1.08	0.71	1.20	1.31	1.16	1.13	1.18	0.66	0.57
juli	0.99	1.11	0.89	1.08	0.73	1.19	1.28	1.13	1.13	1.16	0.68	0.61
aug.	1.00	1.10	0.91	1.08	0.70	1.21	1.32	1.17	1.13	1.19	0.64	0.55
sept.	1.02	1.07	0.95	1.07	0.66	1.22	1.39	1.22	1.11	1.23	0.59	0.47
oct.	0.99	1.12	0.89	1.08	0.74	1.18	1.27	1.12	1.14	1.15	0.69	0.62
nov.	0.99	1.12	0.89	1.08	0.74	1.18	1.27	1.13	1.14	1.15	0.69	0.62
dec.	0.99	1.13	0.88	1.08	0.77	1.17	1.23	1.10	1.14	1.13	0.72	0.66

N.B.: De gewichten zijn vermenigvuldigd met het aantal stations (=12).
De getallen boven de kolommen zijn KNMI stationsnummers.