

L.F. Ernst

NOTA 680

1 augustus 1972

Instituut voor Cultuurtechniek en Waterhuishouding
Wageningen

ALTERRA

Wageningen Universiteit & Research cent:
Omgevingswetenschappen
Centrum Water & Klimaat
Team Integraal Waterbeheer

FORMULES VOOR DE GRONDWATERSTROMING BIJ INFILTRATIE
VAN WATER VANUIT OPGESTUWDE OPEN LEIDINGEN

dr L.F. Ernst

Nota's van het Instituut zijn in principe interne communicatiemid-
delen, dus geen officiële publikaties.
Hun inhoud varieert sterk en kan zowel betrekking hebben op een
eenvoudige weergave van cijferreeksen, als op een concluderende
discussie van onderzoeksresultaten. In de meeste gevallen zullen
de conclusies echter van voorlopige aard zijn omdat het onderzoek
nog niet is afgesloten.
Bepaalde nota's komen niet voor verspreiding buiten het Instituut
in aanmerking

I N H O U D

	Blz.
1. DE DIFFERENTIAALVERGELIJKING BIJ HORIZONTALE GRONDWATERSTROMINGEN	1
2. OPLOSSING VAN (1) BIJ CONSTANTE FLUX DOOR HET FREATISCH OPPERVLAKE	1
3. OPLOSSING VAN VERGELIJKING (1) BIJ CONSTANTE FLUX DOOR HET FREATISCHE OPPERVLAKE EN BOVENDIEN ZONDER VERWAARLOZING VAN DE RADIALE STROMING	2
4. INFILTRATIE-FORMULES VOOR DE HORIZONTALE GRONDWATERSTROMING WAARBIJ v_{phr} AFHANKELIJK IS VAN DE DIEPTE VAN HET FREATISCHE OPPERVLAK BENEDEN MAAIVELD OF BENEDEN ONDERKANT WORTELZONE	6
5. DE BEHANDELING VAN DE INFILTRATIESTROMING BIJ VARIABELE v_{phr} EN ZONDER VERWAARLOZING VAN DE RADIALE STROMING	16
6. NIET-STATIONAIRE TOESTANDEN MET SPECIALE FUNCTIES VOOR DE STROMING IN DE ONVERZADIGDE ZONE	22
7. INFILTRATIE-FORMULES VOOR GELAAGDE GROND	31
LITERATUUR	41

1. DE DIFFERENTIAALVERGELIJKING BIJ HORIZONTALE GRONDWATERSTROMINGEN

Bij drainage en infiltratie tussen evenwijdige open leidingen zijn de grondwaterstromingsformules gelijk (gelijksoortig). Of er een instroming of uitstroming is door de bodems van de open leidingen of door de perforaties van de (drain) buizen maakt immers voor de vorm van de vergelijkingen geen verschil. Indien de grond homogeen is, de toestand stationair en de stroming als grotendeels horizontaal mag worden beschouwd, kan het probleem worden aangevangen met de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{1}{2} k \frac{d^2(h^2)}{dx^2} = v_{\text{phr}} \quad (1)$$

- k = doorlatendheid
h = stijghoogte van het grondwater ten opzichte van de ondoorlatende basis
x = coördinaat voor de horizontale afstanden
 v_{phr} = verticale snelheid (flux) in het freatisch oppervlak (phreatic surface)

2. OPLOSSING VAN VERGELIJKING (1) BIJ CONSTANTE FLUX DOOR HET FREATISCHE OPPERVLAAK

In vele gevallen mag worden aangenomen dat v_{phr} constant is (onafhankelijk van de plaats en de tijd) en dan is de oplossing van (1) een ellips of hyperbool. Bij infiltratie en capillaire opstijging is v_{phr} positief en heeft de grondwaterspiegel een hyperbolische vorm; bij inzijging en drainage is v_{phr} negatief en is er een elliptische vorm (fig. 1).

$$kh^2 = v_{\text{phr}} x^2 + a_1 x + a_0 \quad (2)$$

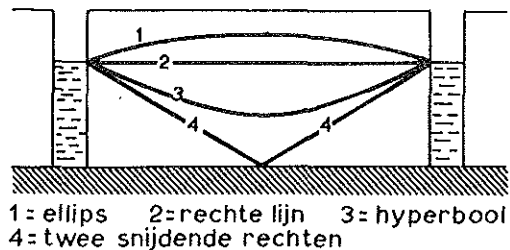


Fig. 1. Vorm van de grondwaterspiegel bij vrijwel horizontale, stationaire stroming naar volkomen drains in een homogeen pakket

Wordt de verticale as van de ellips of de hyperbool gelegd bij $x = 0$, dan verdwijnt de integratie constante a_1 . Bovendien kan in plaats van a_0 de stijghoogte $h(0)$ in het midden van het perceel als parameter worden gebruikt.

$$[h(x)]^2 - [h(0)]^2 = \frac{v_{phr}}{k} x^2 \quad (3)$$

Bij toenemende v_{phr} en vast slootpeil komt $h(0)$ tenslotte op de ondoorlatende basis te liggen en is de hyperbool ontaard in twee snijdende rechte lijnen (ERNST, 1963; in deze publikatie is een grafische voorstelling van de theoretische fout in (3)).

3. OPLOSSING VAN VERGELIJKING (1) BIJ CONSTANTE FLUX DOOR HET FREATISCHE OPPERVLAK EN BOVENDIEN ZONDER VERWAARLOZING VAN DE RADIALE STROMING

Voor die gevallen, waarbij de radiale stroming niet mag worden verwaarloosd, zijn in Nederland twee methodes in gebruik gekomen. In de eerste plaats kan worden genoemd de berekening volgens Hooghoudt, waarbij de reeds veel vroeger bekende vorm (3) in principe gehandhaafd blijft (HOOGHOUDT, 1940).

$$d^2 - (d + h_m - h_o)^2 = \frac{v_{phr}}{k} \left(\frac{L}{2}\right)^2 \quad (4)$$

ofwel:

$$- v_{phr} = \frac{4k(h_m - h_o)^2 + 8kd(h_m - h_o)}{L^2} \quad (5)$$

h_m = stijghoogte in het midden van het perceel

h_o = niveau van slotwater, drainbuis of infiltratiebuis

d = dikte van de 'equivalentlaag' (fig. 2)

L = afstand tussen de evenwijdige open leidingen

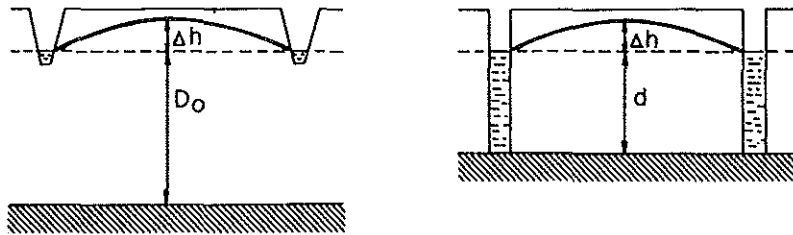


Fig. 2a. Werkelijke toestand met minimum dikte van de doorstroomde laag D_o bij de open leiding en met opbolling Δh in de grondwaterspiegel

Fig. 2b. Denkbeeldige toestand met volkomen drains; zowel invoer en uitvoer als opbolling Δh zijn gelijk aan fig. 2a; de 'equivalentlaag' moet daarbij een dikte d hebben kleiner dan D_o in fig. 2a

Een andere formule voor de grondwaterstroming tussen evenwijdige open leidingen is mogelijk door invoering van het begrip 'radiale weerstand', beter gezegd de extra weerstand in het gebied met radiale stroming (zie fig. 3 en ERNST, 1956, 1963):

$$h_o - h_m = v_{phr} \left(\frac{L^2}{8kD} + L\Omega \right) \quad (6)$$

ofwel:

$$\frac{h_o - h_m}{D} = \frac{v_{phr}}{8k} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left(1 + \frac{8kD\Omega}{L} \right) \quad (7)$$

D = (gemiddelde) dikte van de watervoerende laag

Ω = radiale weerstand

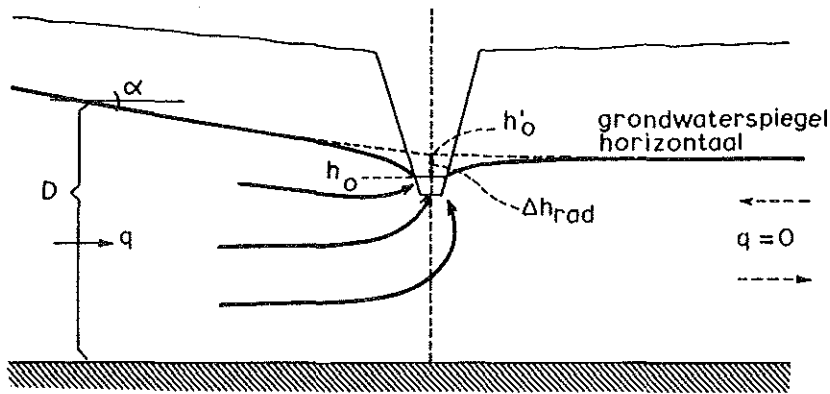


Fig. 3. Eenzijdige toestroming met radiaal gedeelte naar een lange rechte drain in een homogeen pakket

$$\Delta h_{rad} = h'_o - h_o = q\Omega$$

$$q = \text{toestroming van links} = kD \operatorname{tg} \alpha$$

Indien de grond homogeen doorlatend is en er geen grote hoogteverschillen in het freatisch oppervlak zijn, kan voor de radiale weerstand eventueel de volgende formule worden gebruikt:

$$\Omega = \frac{1}{\pi k} \ln \frac{D_o}{B_o} \quad (8)$$

D_o = dikte van de watervoerende laag bij de open leiding

B_o = (half cirkelvormige) natte omtrek van de open leiding

Uit (5) en (6) kan eveneens voor kleine ($h_m - h_o$), waarbij dus geldt $D \approx D_o$, het verband tussen d en Ω worden afgeleid:

$$\frac{d}{D} = \frac{L}{L + 8kD\Omega} \quad (9)$$

In formule (6) behoeft men D niet als een constante te lezen en is ook voor Ω een zekere aanpassing mogelijk. De radiale weerstand is vooral afhankelijk te beschouwen van q_o/kB_o , waarbij q_o de stroomsterkte door de bodem van de open leiding voorstelt (ERNST, 1962, fig. 28 c). Ziet men hiervan echter af om redenen van eenvoud en beschouwt men dus D en Ω in (6) als constanten, dan geeft deze formule een lineaire betrekking tussen $h_o - h_m$ en v_{phr} .

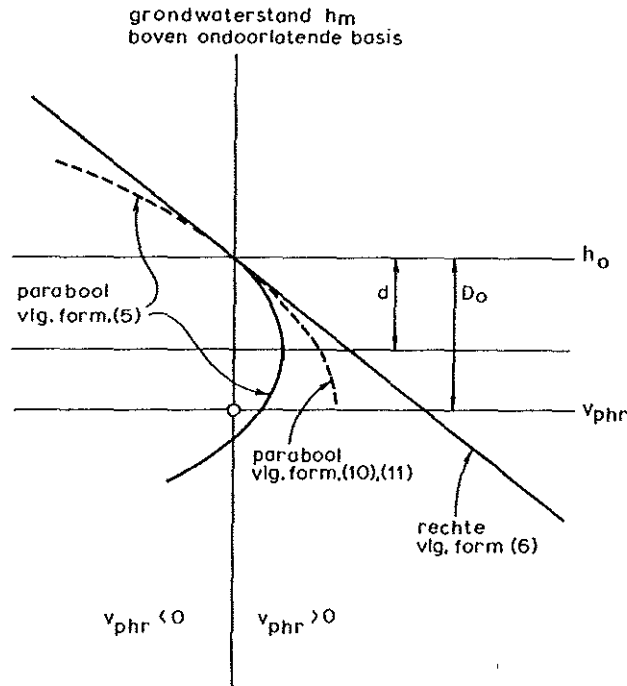


Fig. 4. Grafisch verband tussen flux door het freatisch oppervlak en grondwaterstand midden tussen de drains (stationaire toestanden met v_{phr} constant voor alle x)

Dit verband is in fig. 4 grafisch voorgesteld evenals het parabolische verband volgens formule (5). Ook dit parabolische verband is duidelijk niet geheel juist; immers een maximum waarde voor v_{phr} is niet te verwachten als h_m op een diepte d beneden h_o ligt, maar wordt eerst bereikt als h_m in de ondoorlatende basis ligt.

Het juiste verband is in fig. 4 aangeduid door de gebroken lijn.

Men kan zich voorstellen dat formule (6) of formule (7) dit verband in principe geven kunnen, mits D (gemiddelde waarde) en Ω op de juiste manier afhangen van v_{phr} en eventueel andere grootheden. Een redelijke benadering hiervan kan men verkrijgen door (7) voor positieve v_{phr} als volgt te schrijven:

$$\frac{h_o - h_m}{\bar{D}} = \frac{v_{phr}}{8k} \left\{ \frac{L}{\bar{D}} \right\}^2 \left(1 + \frac{8kD_o \Omega_o}{L} \right) \quad (10)$$

\bar{D} = gemiddelde waarde van de laagdikte = $D_o - \frac{1}{2}(h_o - h_m)$

Ω_o = radiale weerstand bij $q_o \rightarrow 0$

Wordt met behulp van (9) en (10) ook (5) herschreven, dan ontstaat:

$$v_{phr} = \frac{8kd(h_o - h_m) - 4k \frac{d}{D_o} (h_o - h_m)^2}{L^2} \quad (11)$$

Samenvattend kan hieraan worden toegevoegd, dat voor kleine positieve en negatieve waarden van v_{phr} het lineaire verband volgens formule (6) een goede benadering geeft. Het parabolische verband volgens formule (5) kan voor alle negatieve waarden van v_{phr} worden aanbevolen. Voor alle positieve waarden (mits natuurlijk niet zo sterk positief, dat de ondoorlatende basis door het freatische oppervlak over twee evenwijdige lijnen ter weerszijde van $x = 0$ wordt bereikt) is een goede uitkomst te verwachten met een gewijzigde parabool volgens formule (11).

4. INFILTRATIE-FORMULES VOOR DE HORIZONTALE GRONDWATERSTROMING WAARBIJ v_{phr} AFHANKELIJK IS VAN DE DIEPTE VAN HET FREATISCH OPPERVLAKE BENEDEN MAAIVELD OF BENEDEN ONDERKANT WORTELZONE

De differentiaalvergelijking (1) is bij variabele v_{phr} , afhankelijk van de grondwaterstandsdiepte, vooral goed te behandelen als de variatie in de dikte van de watervoerende laag gering is. Dan kan van een constante waarde D voor de laagdikte worden gebruik gemaakt en (1) gaat over in:

$$kD \frac{d^2 h}{dx^2} = v_{phr} \quad (12)$$

Nu moet in het rechterdeel van (12) een uitdrukking worden gesubstitueerd, welke aangeeft hoe v_{phr} van h afhangt. Daar het hier om evenwichtstoestanden gaat met op elk niveau in de onverzadigde zone eenzelfde intensiteit van de verticale stroming, zullen zeer lage grondwaterstanden corresponderen met zeer kleine positieve waarden voor v_{phr} . Zeer grote waarden voor v_{phr} zijn in principe mogelijk als het freatisch oppervlak voldoende dicht onder de onderkant van de wortelzone ligt en daar een zekere uitdroging wordt gehandhaafd. Dit zal in de praktijk echter niet voorkomen, daar bij ondiepe grondwaterstanden de bovengrond zo vochtig zal blijven, dat er slechts een opwaartse stroming kan ontstaan voldoende om het verschil tussen (gemiddelde) neerslag en potentiële verdamping te overbruggen. In eerste benadering kan men dus een verband tussen v_{phr} en h aannemen als schematisch voorgesteld in fig. 5.

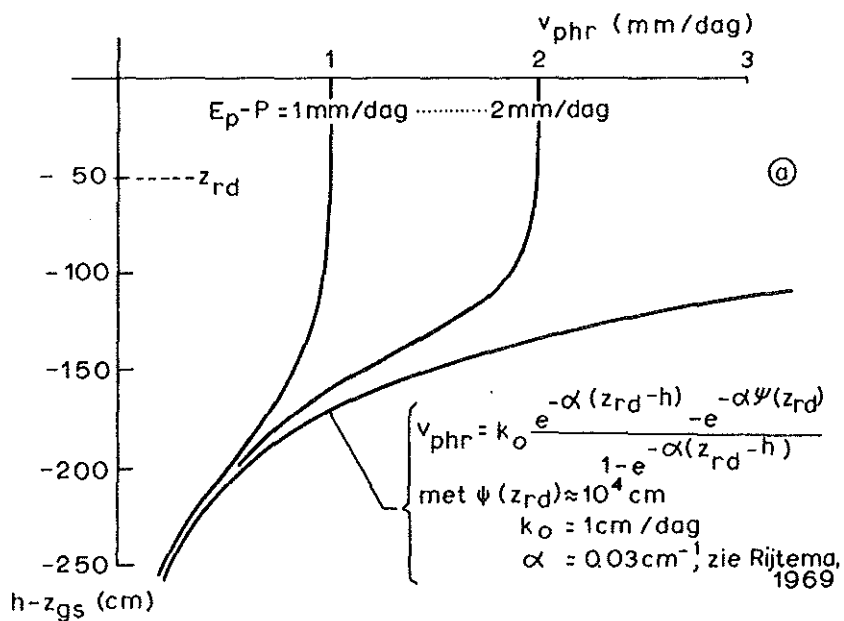


Fig. 5a. Grafisch verband tussen de verticale stroming (capillaire opstijging) in de onverzadigde zone en de diepte van het freatisch oppervlak (stationaire toestand: voor elke z geldt dezelfde waarde voor de verticale stroming, dus $v_z = v_{\text{phr}}$). Bij hoge potentiële verdamping E_p ontstaat een sterke uitdroging in de wortelzone: $\psi \approx 10^4$ cm. Daarbij is het mogelijk dat de verticale stroming v_z belangrijk beneden het neerslagtekort $E_p - P$ blijft. Bij minder hoge waarde van E_p blijft ψ lager en zal het verschil tussen v_z en $E_p - P$ kleiner zijn, tenzij de grondwaterstand daarvoor te diep is

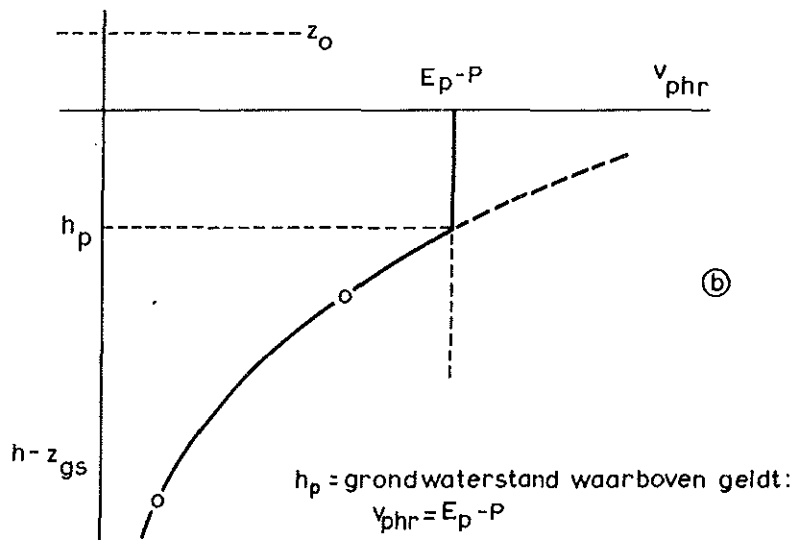


Fig. 5b. Vereenvoudiging van fig. 5a

Om echter een eenvoudige oplossing van vergelijking (12) mogelijk te maken is het nodig fig. 5a te vervangen door fig. 5b. Daarbij wordt dus aangenomen dat bij ondiepe grondwaterstanden de opwaartse stroming gelijk is aan het verschil tussen de potentiële verdamping E_p en de neerslag P . De potentiële verdamping E_p , wordt dikwijls door toevoeging van een zekere correctiefactor uit de verdamping van open water E_o afgeleid ($E_p = gE_o$). Voor diepere grondwaterstanden kan een ongeveer hyperbolisch verband worden aangenomen.

Wordt onder h^* verstaan de grondwaterstandsdiepte ten opzichte van een willekeurig niveau z_o , dus:

$$h^* = z_o - h \quad (13)$$

dan kan men trachten een eenvoudige eerste benadering te verkrijgen bijvoorbeeld met de volgende formule:

$$v_{phr} = \frac{a}{h^*} \quad (14)$$

Met (13) en (14), waarin de parameters z_o en a betrekkelijk vrij kunnen worden gekozen, kan men in 2 punten dekking verkrijgen met het werkelijke verband tussen v_{phr} en h .

Substitutie van (13) en (14) in (12) levert op:

$$kD \frac{d^2 h^*}{dx^2} = - \frac{a}{h^*} \quad (15)$$

Hieruit is de volgende oplossing voor de vorm van het freatisch

oppervlak te vinden (bij $x = 0$ behoort h_m^* , bij $\pm x_i$ behoort h_i^*):

$$\frac{|x_i|}{h_m^*} \sqrt{\frac{a}{2kD}} = \int_0^{\sqrt{\ln \frac{h_m^*}{h_i^*}}} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\ln \frac{h_m^*}{h_i^*}} \right) \quad (16)$$

Door differentiëren van (16) vindt men een uitdrukking voor de intensiteit q_i van de horizontale stroming bij het punt x_i :

$$q = kD \frac{dh^*}{dx} = kD \left(\frac{dx}{dh^*} \right)^{-1} \quad (17)$$

$$q(\pm x_i) = \pm \sqrt{2kDa \ln \frac{h_m^*}{h_i^*}} \quad (18)$$

Indien bijvoorbeeld gegeven zijn h_m^* en x_i , dan kan met behulp van (16) de bijbehorende waarde van h_i^* worden gevonden. Substitutie van deze waarde in (18) levert vervolgens een uitkomst voor $q(x_i)$. Een grafische voorstelling van de formules (16) en (18) vindt men in fig. 6.

Een tweede empirische formule voor het verband tussen v_{phr} en h^* , waarbij een eenvoudige oplossing kan worden afgeleid, is de volgende:

$$v_{\text{phr}} = b_1 e^{-\frac{h^*}{b_2}} \quad (19)$$

Ook hier zijn er twee vrijheidsgraden, respectievelijk

$$b_1 e^{-\frac{z_0}{b_2}} \quad \text{en} \quad b_2$$

en is dus dekking in 2 punten mogelijk.

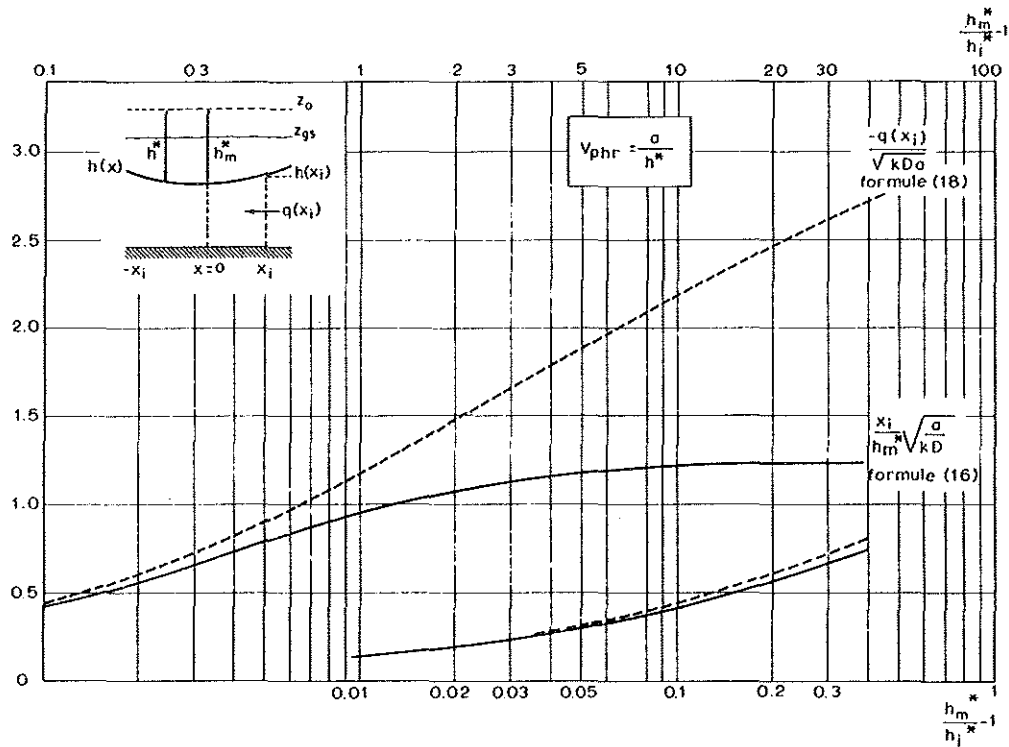


Fig. 6. Grafische voorstelling van formules (16) en (18).

Langs de horizontale as is uitgezet $\frac{h_m^*}{h_i^*} - 1$

Langs de verticale as respectievelijk $\frac{-q(x_i)}{\sqrt{kDa}}$ en $\frac{x_i}{h_m^*} \sqrt{\frac{a}{kD}}$

Substitutie van (13) en (19) in (12) levert op:

$$kD \frac{d^2 h^*}{dx^2} = -b_1 e^{-\frac{h^*}{b_2}} \quad (20)$$

Hieruit volgt als oplossing:

$$\frac{h_i^* - h_m^*}{2b_2} = \ln \cos \left(x_i \sqrt{\frac{b_1}{2kDb_2}} e^{-\frac{h_m^*}{2b_2}} \right) \quad (21a)$$

ofwel:

$$x_i \sqrt{\frac{b_1}{2kDb_2}} = e^{\frac{h_m^*}{2b_2}} \arccos e^{\frac{h_i^* - h_m^*}{2b_2}} \quad (21b)$$

Voor de horizontale stroomsterkte wordt gevonden:

$$q(\pm x_i) = kD \left(\frac{dh^*}{dx} \right)_{\pm x_i} = \mp \sqrt{2kDb_1 b_2} e^{-\frac{h_m^*}{2b_2}} \operatorname{tg}(x_i \sqrt{\frac{b_1}{2kDb_2}} e^{-\frac{h_m^*}{2b_2}}) \quad (22a)$$

ofwel na substitutie van (21b) in (22a):

$$q(\pm x_i) = \mp \sqrt{2kDb_1 b_2} e^{-\frac{h_m^*}{2b_2}} \operatorname{tg}(\arccos e^{\frac{h_i^* - h_m^*}{2b_2}})$$

$$= \mp \sqrt{2kDb_1 b_2} \left(e^{-\frac{h_i^*}{b_2}} - e^{-\frac{h_m^*}{b_2}} \right) \quad (22b)$$

Deze formules zijn grafisch weergegeven in de fig. 7, 8a en 8b.

Tenslotte moet er nog aan worden herinnerd, dat de formules (14), (22) slechts geldig zijn voor zover $h^* > h_p^*$, dat wil zeggen voor zover volgens (14) of (19) geldt dat $v_{\text{phr}} < E_p - P$. Indien $h_o^* < h_p^*$, dan kan men in het algemeen niet onmiddellijk aangeven, welke waarde van x_p eventueel volgens (16) of (21) behoort bij de gegeven h_p^* , daar immers ook h_m^* nog onbekend is.

De aanvullende betrekkingen, die om deze reden nodig zijn, kan men op de volgende manier verkrijgen uit de toestand in de randstroken langs de open leidingen. Daarbij moet worden verondersteld dat er symmetrie is, dat wil zeggen gelijke gegeven waarden voor de peilen van de open leidingen of de invoer. Omdat er geen radiale stroming wordt verondersteld kunnen eventuele verschillen in de afstanden tussen de evenwijdige open leidingen of verschillen in natte doorsnede niet van betekenis zijn.

In de randstroken geldt (zie fig. 9) de maximale waarde voor $v_{\text{phr}} = E_p - P$ en daaruit volgt:

$$h_p^* - h_o^* = \frac{(E_p - P)(L - 2x_p)^2}{8kD} + \frac{L - 2x_p}{2kD} q(-x_p) \quad (23)$$

$$-q_o = 2q(-x_p) + (E_p - P)(L - 2x_p) \quad (24)$$

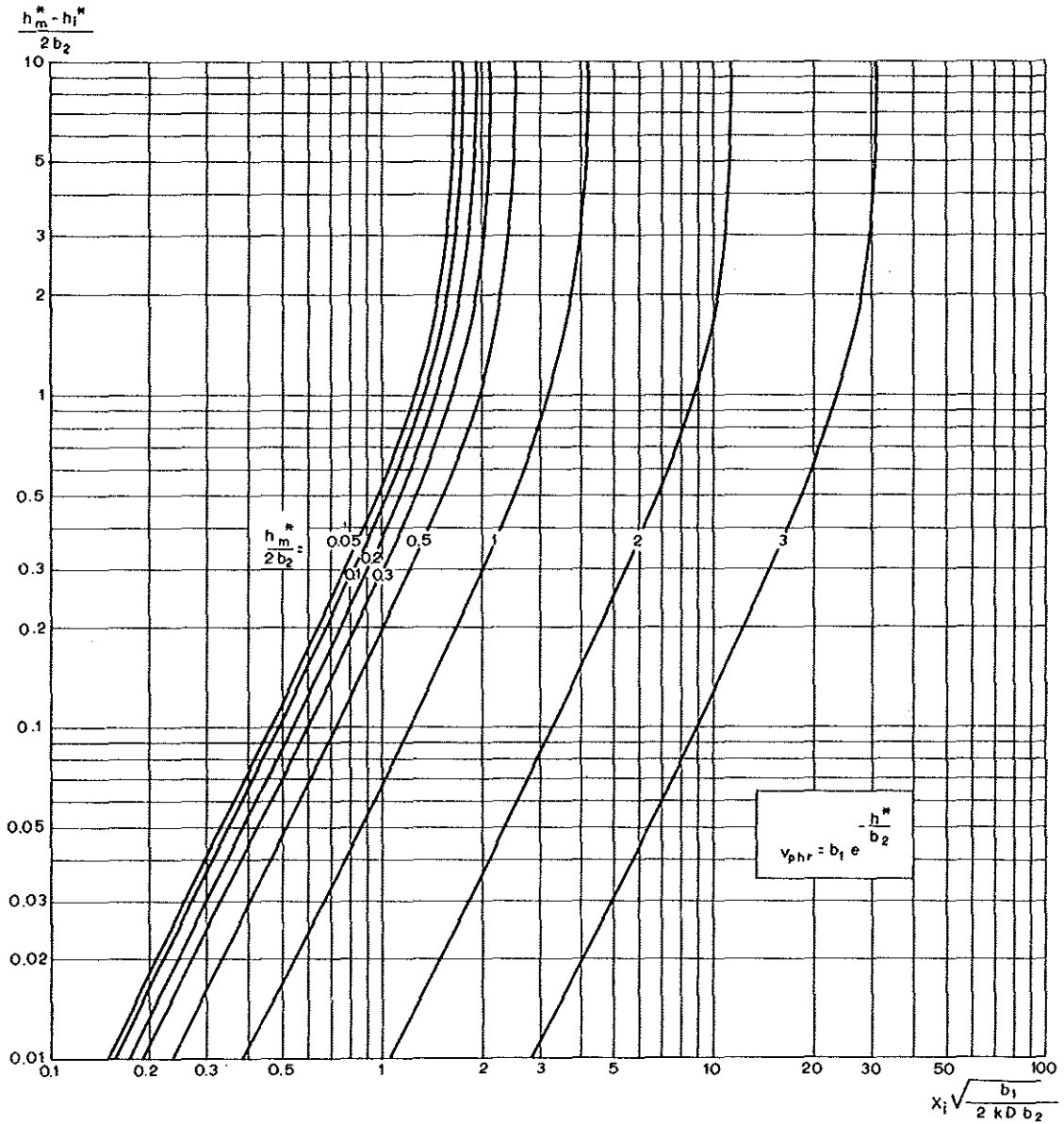


Fig. 7. Grafische voorstelling van formule (21)

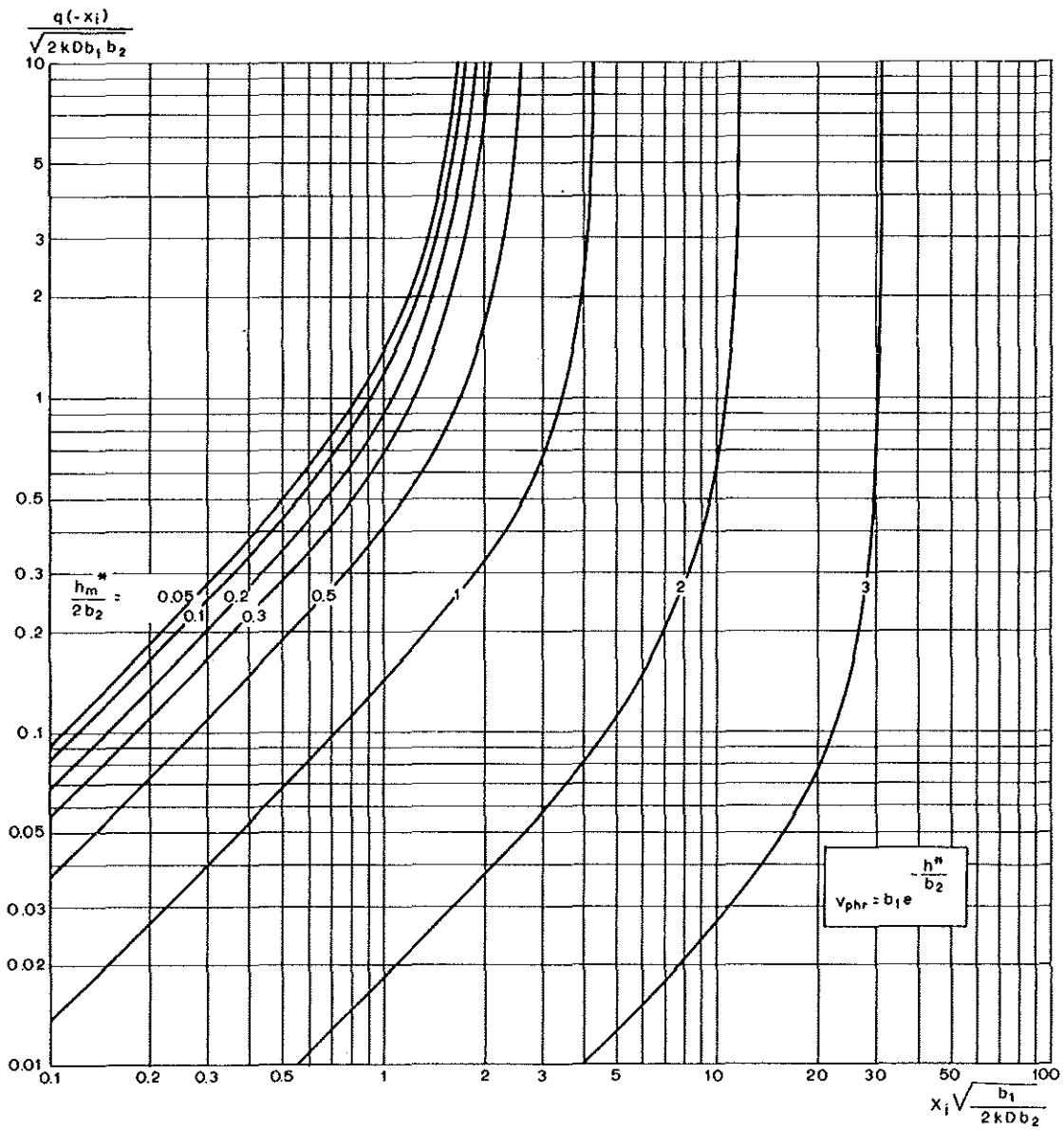


Fig. 8a. Grafische voorstelling van formule (22a)

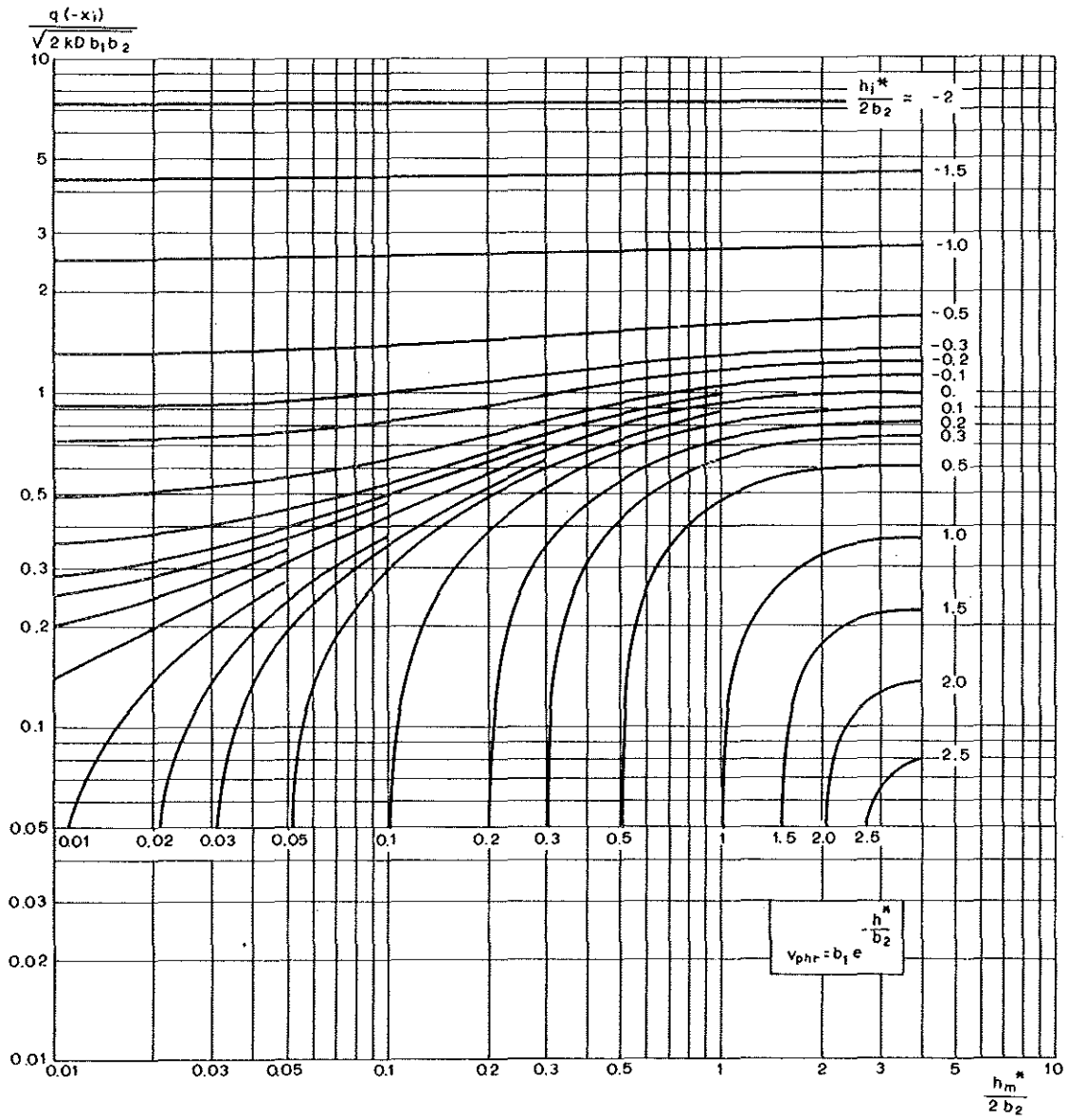


Fig. 8b. Grafische voorstelling van formule(22b)

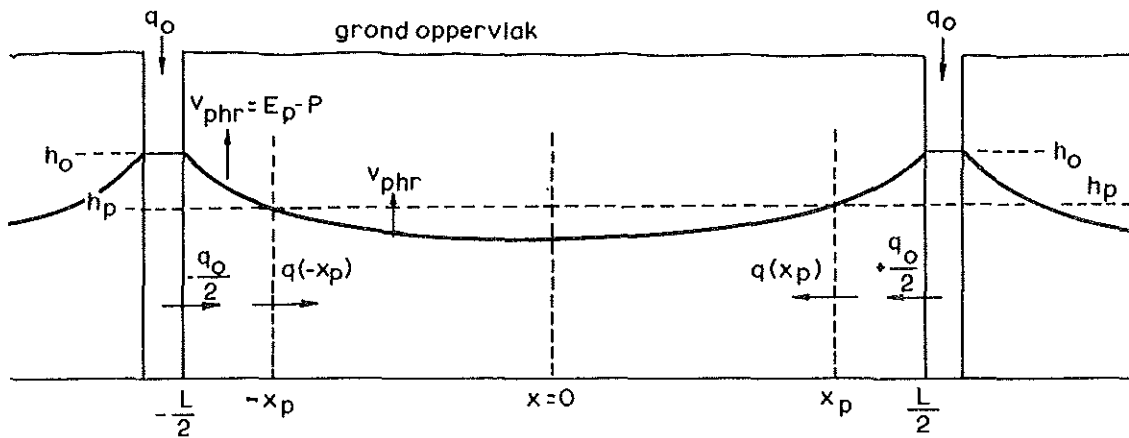


Fig. 9. Indeling van het gebied tussen twee lange rechte drains naar gelang van de diepte van de grondwaterspiegel onder het grondoppervlak.

Voor $-x_p < x < x_p$ geldt $h < h_p$ en $v_{phr} < E_p - P$

Voor $x < -x_p$ en voor $x > x_p$ geldt $h > h_p$ en $v_{phr} \approx E_p - P$

1. Stroming naar rechts en stroming naar boven worden positief gerekend.
2. De pijlrichting geeft de werkelijke stromingsrichting aan. Het symbool naast de pijl is soms van een minteken voorzien om te verkrijgen, dat de betrokken grootte een $\begin{cases} \text{positieve} \\ \text{negatieve} \end{cases}$ waarde heeft als de pijl naar $\begin{cases} \text{rechts} \\ \text{links} \end{cases}$ of naar $\begin{cases} \text{boven} \\ \text{beneden} \end{cases}$ is gericht
3. Bij $\begin{cases} \text{drainage} \\ \text{infiltratie} \end{cases}$ wordt de $\begin{cases} \text{uitvoer} \\ \text{invoer} \end{cases}$ met een $\begin{cases} \text{positieve} \\ \text{negatieve} \end{cases}$ q_0 aangeduid. Dus bij $\begin{cases} \text{drainage} \\ \text{infiltratie} \end{cases}$ $q(x_p) \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$ $q(-x_p) \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases}$ $q_0 \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$
4. Bij pompputten wordt meestal afgesproken: de uitvoer Q_0 is een negatieve grootte.

Al naar gelang h_0^* dan wel q_0 gegeven is, kan men ofwel (23) ofwel (24) gebruiken om na substitutie van $i = p$ de onbekende $q(\pm x_p)$ uit (18) of (22) te elimineren. Dit leidt tot een betrekking waarin als onbekenden nog voorkomen x_p en h_m^* . Eliminering van x_p is mogelijk door ofwel (16) ofwel (21b) in de tevoren afgeleide betrekking te

substitueren.

Hoewel dit geen principiële moeilijkheden geeft, worden vrij ingewikkelde formules verkregen, waarin als enige onbekende h_m^* impliciet aanwezig is.

Een andere behandelingsmethode lijkt voor de praktische toepassing meer aan te bevelen, daar hierbij de voorwaarde van symmetrie zonder bezwaar kan komen te vervallen. Men kan namelijk bij een gegeven h_o^* voor een van de open leidingen een geschatte waarde q_o voor dezelfde leiding invoeren of bij een gegeven q_o een schatting voor h_o^* aannemen. Substitutie van gegeven en geschatte waarden in (23) en (24) maakt het mogelijk $q(\pm x_p)$ en $L - x_p$ op te lossen. $L - 2x_p$ kan worden geëlimineerd door substitutie van (24) in (23). Er ontstaat dan een tweede graads vergelijking met als oplossing:

$$q(\pm x_p) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{q_o^2 - 8kD(E_p - P)(h_p^* - h_o^*)} \quad (25)$$

De gevonden waarde voor $q(\pm x_p)$ kan in (18) of (22b) worden gesubstitueerd (eventueel fig. 6 of fig. 8b gebruiken) en daarmee wordt de bijbehorende waarde voor h_m^* verkregen. Via formule (16) of (21b) volgt dan een waarde voor x_p en dus ook een uitkomst L' voor de afstand tussen de open leidingen. Het is niet te verwachten dat L' reeds bij een eerste poging voldoende overeenstemt met de werkelijke waarde L . Bij asymmetrie moet men nagaan hoe groot op de gegeven afstand L de afwijking is tussen het gevonden peil en het gegeven peil in de tweede open leiding. Er zijn dus enkele herhalingen nodig om een uitkomst van voldoende nauwkeurigheid te bereiken. Wordt bijvoorbeeld in de symmetrische gevallen een te hoge uitkomst voor L' gevonden, dan moet voor de nieuwe schatting een lagere waarde voor h_o^* of voor q_o worden ingevoerd: bij een te lage uitkomst voor L' geldt het omgekeerde.

5. DE BEHANDELING VAN DE INFILTRATIESTROMING BIJ VARIABELE v_{phr} EN ZONDER VERWAARLOZING VAN DE RADIALE STROMING

Toepassing van formules voor een zeker verband tussen v_{phr} en h^* (zie bijv. (14) of (19)) leidt in gebieden met radiale stroming tot een aanzienlijk moeilijker probleem. Oplossing van het gestelde probleem met

behulp van een differentiaalvergelijking van de soort als gegeven in (15) of (20) is in principe mogelijk door toevoeging van een zekere functie van x (eventueel van h , h_0 en x), respectievelijk aan de noemer in het rechterlid van (15) of aan de exponent in het rechterlid van (20). De daaraan verbonden moeilijkheden kan men echter vermijden en een voor de praktijk vermoedelijk wel aanvaardbare oplossing bereiken, die zelfs zeer nauwkeurig is als de gebieden met radiale stroming een relatief geringe breedte hebben ten opzichte van de totale perceelsbreedte. Het principe in het vorige hoofdstuk reeds toegepast om het perceel in een aantal stroken te verdelen en elke strook een aparte behandeling te geven, kan ook hier worden gebruikt.

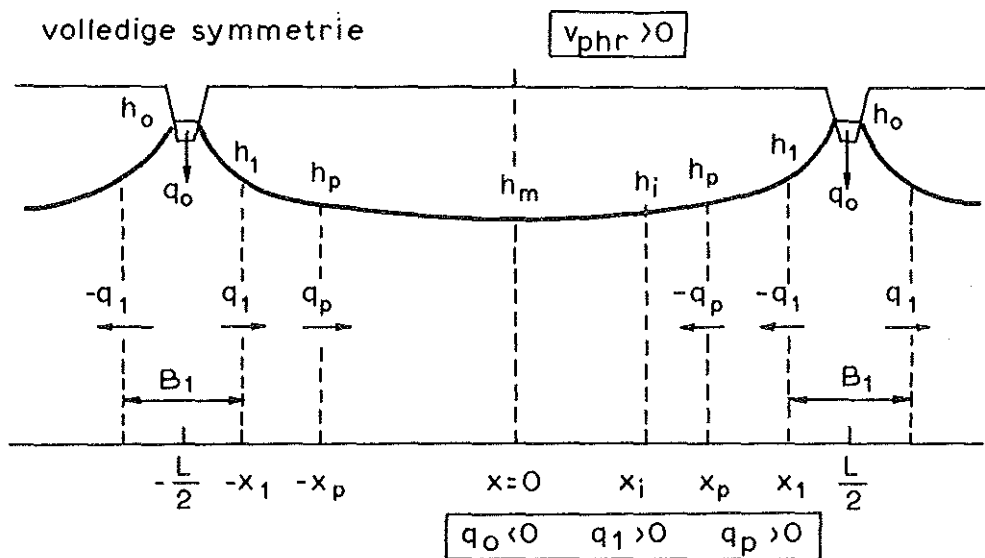


Fig. 10a. Vorm van het freatisch oppervlak en indeling in stroken bij volledige symmetrie en $v_{phr} > 0$. Lijnen van symmetrie vindt men hier zowel bij de open leidingen ($x = \pm \frac{L}{2}$) als midden er tussen ($x = 0$)

De breedte van het gebied, waarin de stroming overwegend radiaal is, zal worden aangeduid door B_1 (fig. 10). Bij homogeen doorlatende grond kan B_1 met goede benadering worden gelijk gesteld aan twee maal de laagdikte D_0 (zie fig. 2). Bij gelaagde grond met een duidelijk

slechter doorlatende bovenlaag is B_1 ongeveer gelijk aan het dubbele van de dikte van deze bovenlaag. Voor de strook B_1 kunnen in eerste benadering de volgende betrekkingen worden afgeleid door te veronderstellen dat er een constante onttrekkingsintensiteit $v_{phr, rad}$ is onafhankelijk van x en gelijk aan het gemiddelde van de werkelijke onttrekking.

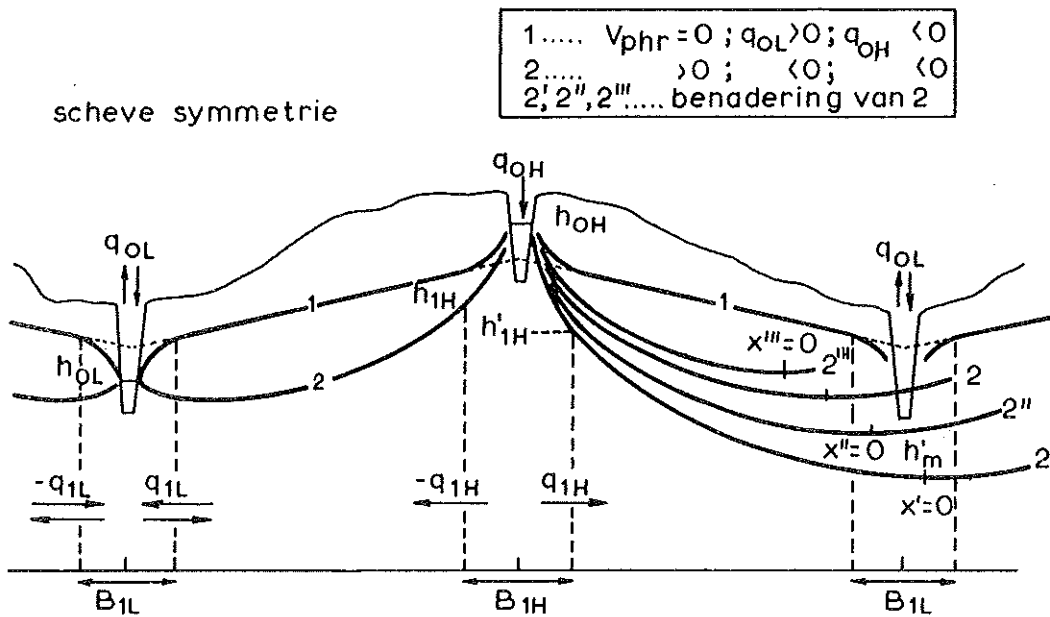


Fig. 10b. Vorm van het freatisch oppervlak bij scheve symmetrie.
 Lijnen van symmetrie alleen bij de open leidingen

Indien er bij een gegeven open leiding een gelijkheid in afstroming naar beide zijden is en er is geen stroming door het freatisch oppervlak, dus $v_{phr} = 0$ en $q_o = 2q_1$ (fig. 10b), dan is er een gelijkvormigheid in het freatische oppervlak. Voor het gebied met overwegend radiale stroming kan onder deze voorwaarden de gemiddelde hoogte van het freatisch oppervlak worden vervangen door de uitdrukking in het rechterlid van formule (26). De coëfficiënt α_1 , welke in deze formule voorkomt, kan in de meeste gevallen $\approx 2/3$ worden gesteld.

$$h_{rad}^* = (1 - \alpha_1) h_o^* + \alpha_1 h_1^* \approx \frac{1}{3} h_o^* + \frac{2}{3} h_1^* \quad (26)$$

Indien $v_{\text{phr}} > 0$ en dus $|q_0| > 2q_1$, dan is er ook gelijkvormigheid aan te tonen voor zover er een constante verhouding is tussen q_0 en q_1 en daarbij zou dan een iets hogere waarde voor α_1 moeten worden ingevoerd. Bij willekeurige omstandigheden is de constantheid van α_1 niet meer vol te houden. Gezien de geringe variaties, die mogelijk zijn, zal er in de praktijk vermoedelijk weinig bezwaar zijn, om ook onder deze omstandigheden formule (26) met $\alpha_1 = 2/3$ te blijven gebruiken.

Een nauwkeurige afleiding van de gemiddelde waarde van v_{phr} voor ditzelfde gebied is veel moeilijker. Analoog aan (26) zou men de volgende uitdrukking kunnen gebruiken, waarbij de coëfficiënt α_2 een wat hogere waarde moet hebben ($\alpha_2 \approx \frac{4}{5}$):

$$v_{\text{phr,rad}} = (1 - \alpha_2) v_{\text{phr,0}} + \alpha_2 v_{\text{phr,1}} \approx \frac{1}{5} v_{\text{phr,0}} + \frac{4}{5} v_{\text{phr,1}} \quad (27)$$

In sommige gevallen kan het gewenst zijn de behandeling zoveel mogelijk te vereenvoudigen. Dan is eventueel bij benadering de gemiddelde flux te vervangen door de flux bij de gemiddelde grondwaterstand, hetgeen als volgt kan worden geschreven:

$$v_{\text{phr,rad}} = v_{\text{phr}}(h_{\text{rad}}^*) \quad (28)$$

Zodoende kan onmiddellijk worden gesteld (voor plus- en mintekens zie fig. 10):

$$v_{\text{phr,rad}} = \frac{-q_0 - 2q_1}{B_1} \quad (29) \text{ bijv. } \begin{cases} = \frac{3a}{h_o^* + 2h_1^*} & (30a) \\ = b_1 e^{-\frac{h_o^* + 2h_1^*}{2b_2}} & (30b) \end{cases}$$

terwijl voor de horizontale stroming in de strook B_1 wegens de veronderstelde constante onttrekkingsintensiteit kan worden afgeleid:

$$h_1^* - h_o^* = -q_0 \Omega - \frac{\frac{1}{2} q_0 \cdot \frac{1}{2} B_1}{kD} - \frac{v_{\text{phr,rad}} B_1^2}{8kD}$$

$$\text{ofwel: } \frac{h_1^* - h_o^*}{B_1} = -\frac{q_0}{kD} \left(\frac{1}{4} + \frac{kD\Omega}{B_1} \right) - \frac{v_{\text{phr,rad}} B_1}{8kD} = -\frac{q_0}{8kD} \left(1 + \frac{8kD\Omega}{B_1} \right) + \frac{q_1}{4kD} \quad (31)$$

Hiermee is een voldoende beschrijving gegeven van de toestand in het gebied met radiale stroming. Hoeveel bewerkingen er verder moeten gebeuren, hangt af van de ligging van h_p ten opzichte van de nog onbekende h_l en h_m . In vele gevallen zal men niet zonder meer kunnen aangeven, welke van de volgende drie mogelijkheden zal optreden.

- a. $h_p^* > h_m^*$. Onder deze omstandigheden geldt voor alle x een constante flux: $v_{phr} = E_p - P$. De behandelingsmethode uit de hoofdstukken 2 en 3 kan worden gehandhaafd.
- b. $h_l^* < h_p^* < h_m^*$. Deze ligging van h_p ten opzichte van h_l en h_m vindt men in fig. 10a aangegeven.

Voor dit geval moeten enkele van de afgeleide formules, te weten (23), (24) en (29) in een iets andere vorm worden gebracht:

$$h_l^* - h_p^* = \frac{(E_p - P)(x_l - x_p)^2}{2kD} + \frac{x_l - x_p}{kD} q_p \quad (32)$$

$$q_l - q_p = (E_p - P)(x_l - x_p) \quad (33)$$

$$-q_o - 2q_l = (E_p - P) B_l \quad (34)$$

Van formule (31) kan een deel zonder verandering worden herhaald:

$$\frac{h_l^* - h_o^*}{B_l} = \frac{q_o}{8kD} \left(1 + \frac{8kD\Omega}{B_l}\right) + \frac{q_l}{4kD} \quad (35)$$

Men kan het probleem nu als volgt omschrijven. Alle omstandigheden moeten bekend zijn, behalve de 6 grootheden q_o , q_l , q_p , h_l^* , h_m^* en x_p in het geval dat h_o^* gegeven is, ofwel q_l , q_p , h_o^* , h_l^* , h_m^* en x_p in het geval dat q_o gegeven is.

Voor de berekening van deze onbekenden zijn reeds voldoende betrekkingen afgeleid, namelijk de formules (16), (18), (32), (33), (34) en (35), eventueel de formules (16) en (18) te vervangen door (21) en (22). Door de ingewikkeldheid van de formules (16), (18), (21) en (22) is hier evenals in het vorige hoofdstuk geen directe oplossing te verwachten en kan eenzelfde iteratieve methode worden aanbevolen.

Bij een gegeven en een geschatte waarde voor h_o^* en q_o kan men met behulp van (34) en (35) een oplossing voor h_l^* en q_l vinden. Deze waarden gesubstitueerd in (32) en (33) leveren uitkomsten voor q_p en $x_l - x_p$.

Met behulp van (18) of (22b) en substitutie van $h_i^* = h_p^*$ volgt een bijbehorende waarde voor h_m^* .

De mogelijkheid, dat men hier een uitkomst voor het laagste punt van het freatisch oppervlak zal vinden gelegen boven h_p , kan men wel uitsluiten daar dit al bij een controle volgens (a) had moeten blijken. Men kan echter niet uitsluiten dat men langs deze weg tot de conclusie komt, dat aan de voorwaarde $h_1^* < h_p^* < h_m^*$ niet kan worden voldaan en men verder moet gaan met een bewerking als hierna onder (c) beschreven.

Heeft men inderdaad voor h_1^* , h_p^* en h_m^* een ligging in de juiste volgorde gevonden, dan ligt het voor de hand de bewerking voort te zetten met behulp van formule (16), c.q. (21b). Met de daaruit af te leiden waarde voor x_p kan voor het volledig symmetrische geval onmiddellijk worden nagegaan in hoever de som $B + 2(x_1 - x_p) + 2x_p$ nog afwijkt van de gegeven waarde van L.

In scheef-symmetrische gevallen zal een wat langere bewerking moeten worden uitgevoerd. Men kan bijvoorbeeld beginnen bij de hogere leiding (zie midden fig. 10b) en volgens de tevoren aangegeven methode een eerste benadering van het freatisch oppervlak berekenen bij een gegeven en een geschatte waarde voor h_{0H} en q_{0H} . Deze eerste benadering bevat een minimum h_m' , waarbij $x' = 0$ kan worden gesteld. Ten opzichte van dit minimum kan de gevonden kromme naar buiten (bijv. zoals in fig. 10b naar rechts) door spiegeling worden voortgezet. Ergens in dit gebied valt de (linker)rand van de B_{jL} -strook waar de voortzetting een hoogte h_{jH}' heeft. Met de gegeven formules kan men h_{jL}' en q_{jL}' berekenen als eerste benadering van h_{jL} en q_{jL} . Het hangt van de ligging van h_{jL}' af of de voortzetting binnen de B_{jL} strook behoort tot geval (b) dan wel geval (c). Voor een berekening van h_{0L}' en q_{0L} kunnen de formules (35) en (30a) of (30b) of (34) worden gebruikt. Welk geval men ook treft, vrijwel altijd zullen meerdere herhalingen nodig zijn om tot een benadering van voldoende nauwkeurigheid te geraken.

c. $h_p^* < h_1^*$. In dit geval zijn er slechts 4 onbekenden op te lossen, namelijk q_0 , h_1^* , q_1 , h_m^* in het geval dat h_0^* gegeven is, ofwel h_0^* , h_1^* , q_1 , h_m^* in het geval dat q_0 gegeven is. De oplossing van q_0 en h_1^* of van h_0^* en h_1^* met behulp van (30a) en (35) kan onmiddellijk worden gegeven (tweede graads vergelijking). In het geval dat (30b) en (35) moeten worden gebruikt, is de oplossing al wat moeilijker, maar onmiddellijke aflezing in een grafische voorstelling is mogelijk; een be-

perkte afleesnauwkeurigheid kan daarbij enig bezwaar geven. Substitutie van deze uitkomsten in (16) en (18) of in (21) en (22) geeft echter opnieuw zodanig ingewikkelde vergelijkingen, dat ook hier dezelfde iteratieve methode als in vorige gevallen, te beginnen met een gegeven en een geschatte waarde voor h_o^{**} en q_o (eventueel voor h_{OH}^{**} en q_{OH}) voor de praktische toepassing, wel het meest geschikt lijkt.

6. NIET-STATIONAIRE TOESTANDEN MET SPECIALE FUNCTIES VOOR DE STROMING IN DE ONVERZADIGDE ZONE

Bij de vrij gecompliceerde gevallen, die hieronder zullen worden behandeld, heeft het zin het beschouwde gebied naar plaats en tijd in een aantal zo mogelijk gelijke stukken te verdelen, aan de hand hiervan een systeem van differentie-vergelijkingen samen te stellen en daaruit de gevraagde oplossing af te leiden.

Een geschikte onderverdeling wordt getoond in fig. 11. In horizontale richting is er een verdeling in stukken met constante breedte Δx , behalve bij de open leidingen waar een radiale stromingscomponent dwingt tot een andere behandeling. Evenals in het vorige hoofdstuk zouden daar aparte blokken met breedte B_1 kunnen worden aangenomen. Eenvoudigheidshalve is er symmetrie verondersteld in fig. 11 ten opzichte van de open leidingen, zodat er telkens twee gelijke blokken met de breedte $B_1/2$ kunnen worden onderscheiden.

In verticale richting zou men om zeer nauwkeurige resultaten te bereiken een indeling in een zeer groot aantal lagen moeten invoeren en daarbij bovendien met zeer korte tijdsintervallen werken. Eenvoudigheidshalve zullen hier slechts drie lagen worden onderscheiden.

- Een verzadigde zone vanaf de ondoorlatende basis tot een (horizontaal) peil z_o dat overal onder het freatisch oppervlak ligt.
- Een gedeeltelijk onverzadigde zone vanaf z_o tot de onderkant van de wortelzone z_d . In deze laag loopt de vochtspanning Ψ van beneden naar boven op van 0 tot Ψ_{sd} .
- De bewortelde zone, waarin een vochtgehalte w_u en een vochtspanning Ψ_u worden verondersteld, die beide onafhankelijk van de verticale coördinaat z zijn, maar wel afhankelijk van de tijd t (RIJTEMA, 1969).

Wordt er voor de eerste en de tweede laag een verschil in grondsoort

aangenomen, dan zullen w_u en w_{sd} in het algemeen verschillend zijn, maar altijd en overal zal gelden: $\Psi_u = \Psi_{sd}$

Om de ontwikkeling van de toestand met de tijd te kunnen berekenen moet voor een of andere tijd t_0 een begintoestand volledig bekend zijn. Hieronder dient te worden verstaan dat voor alle h_j en alle $\Psi_{u,j}$ (zie fig. 11) bepaalde waarden gegeven zijn. Daaruit zal men de toestand voor de tijd t_1 willen berekenen, vervolgens uit de toestand voor t_1 een daaropvolgende toestand voor t_2 enz.

Zodra de berekening voor een willekeurige tijd t_i is voltooid, zal men deze toestand als een begintoestand kunnen beschouwen met voor alle x_j bekende waarden voor $h_{j,i}$ en $\Psi_{u,j,i}$, die op dezelfde manier als bij de voorafgaande tijden in een zeker stelsel van formules worden gesubstitueerd om daaruit voor t_{i+1} de nieuwe $h_{j,i+1}$ en $\Psi_{u,j,i+1}$ af te leiden.

Om het schema van formules zo eenvoudig mogelijk te houden zal men de tijdsintervallen $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ zoveel mogelijk constant houden. Kunnen perioden met snelle veranderingen en perioden met langzame veranderingen worden onderscheiden dan kan het wel van voordeel zijn voor de perioden met trage beweging Δt een geheel aantal malen groter te nemen. In vele gevallen zal $\Delta t = 24$ uur of $\Delta t = 7$ dagen worden gekozen, in welke gevallen men kan spreken van de toestand voor de vorige dag (week) en de toestand voor de nieuwe dag (week).

Voor alle blokken met horizontale stroming in de verzadigde zone (blokbreedte Δx) kan men de volgende formules (36) (51) gebruiken.

Voor de intensiteit van de horizontale stroming kan onmiddellijk worden gesteld (volgens fig. 11 voor j alleen even gehele getallen):

$$q_{j-1,i} = kD \frac{h_{j-2,i} - h_{j,i}}{\Delta x} \quad (36)$$

$$q_{j+1,i} = kD \frac{h_{j,i} - h_{j+2,i}}{\Delta x} \quad (37)$$

Vervolgens kan ook de verticale flux door het freatisch oppervlak $v_{h,j,i}$ gemakkelijk worden berekend, daar immers geldt:

$$v_{h,j,i} \Delta x = q_{j-1,i} - q_{j+1,i} \quad (38)$$

De verticale flux door de onderkant van de wortelzone is minder eenvoudig te bepalen. Hiervoor is een benaderende betrekking in te voeren, waarbij gebruik wordt gemaakt van een bekende uitdrukking voor de stationaire verticale stroming in de onverzadigde zone bij matige uitdroging (RIJTEMA, 1965, 1969). Daar het hier om een stroming in de tussenlaag gaat, wordt een index s toegevoegd bij de grootheden k_0 en α :

$$\frac{v_{d,j,i} + v_{h,j,i}}{2} = k_{os} \frac{e^{-\alpha_l(z_d - h_{j,i})} - e^{-\alpha_s \Psi_{u,j,i}}}{1 - e^{-\alpha_s(z_d - h_{j,i})}} \quad (39)$$

Met behulp van (36) (39) is het nu mogelijk de vier grootheden $q_{j-1,i}$, $q_{j+1,i}$, $v_{h,j,i}$ en $v_{d,j,i}$ te vinden. Alleen de laatstgenoemde twee grootheden zijn nodig om de berging (waterinhoud) aan het begin van de betrokken periode en de bergingsverandering over die periode te kunnen berekenen.

Naast een zekere kennis van de grootheden k_{os} en α_s in formule (39), zal men hier bij de bepaling van de berging het verband tussen vochtgehalte w en vochtspanning Ψ nader moeten aangeven. Men kan van speciaal daartoe verrichte metingen gebruik maken ofwel afgaan op de gegevens, die in de literatuur voor een groot aantal grondsoorten worden verstrekt (RIJTEMA, 1965, 1969).

Eventueel kunnen voor de bovenlaag en de tussenlaag twee verschillende betrekkingen $\Psi = f(w)$ worden gebruikt. Dit kan als volgt worden uitgedrukt, waarbij f^{-1} de inverse functie voorstelt:

$$w_{u,j,i} = f_u^{-1}(\Psi_{u,j,i}) \quad (40)$$

$$w_{sd,j,i} = f_s^{-1}(\Psi_{sd,j,i}) \quad (41)$$

waarbij $\Psi_{sd,j,i} = \Psi_{u,j,i}$ (42)

Voor de vochtvoorraad in de bovenlaag geldt:

$$W_{u,j,i} = w_{u,j,i}(z_{gs} - z_d) \quad (43)$$

z_{gs} = niveau van grondoppervlak

z_d = niveau van onderkant van de wortelzone

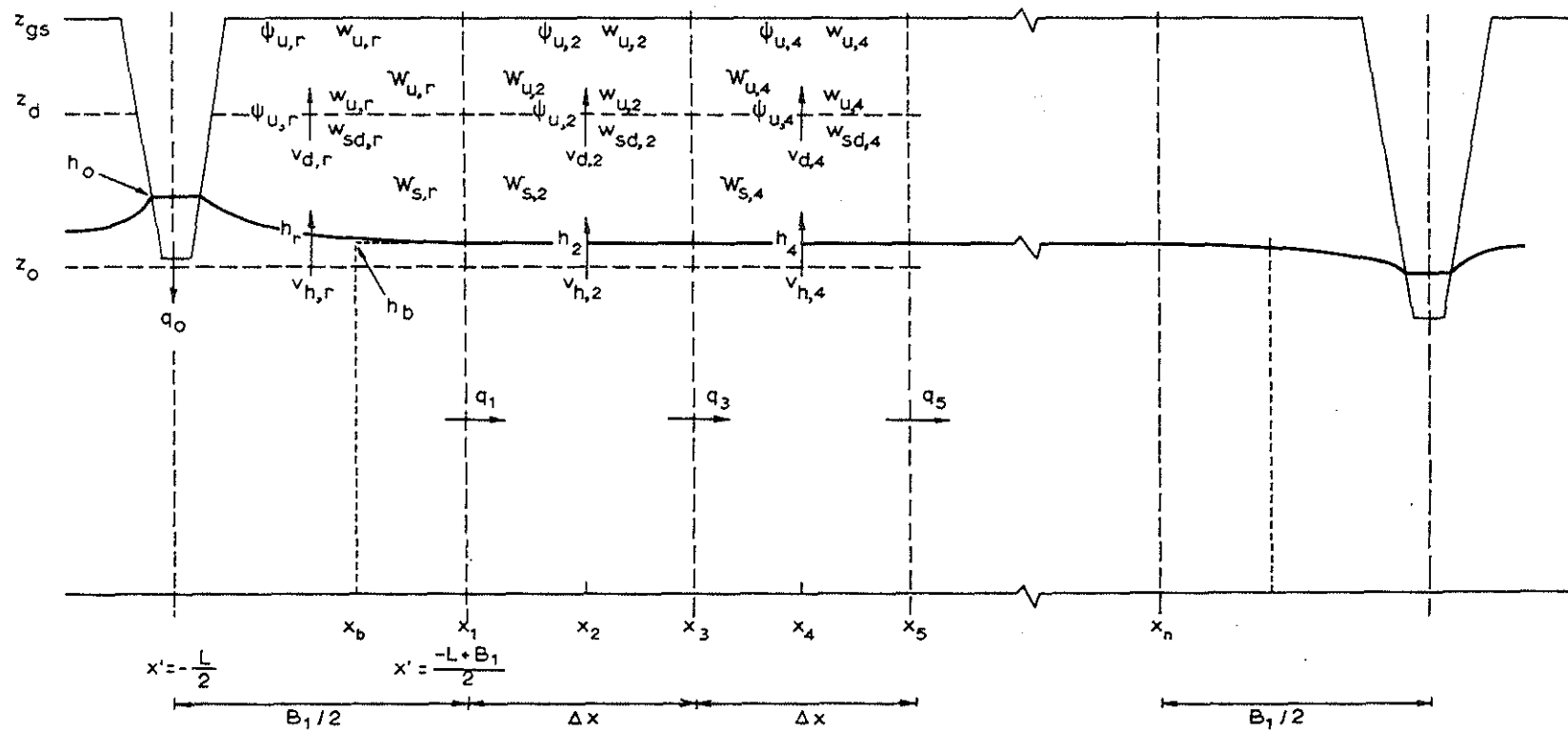


Fig. 11. Symbolen, welke worden gebruikt bij behandeling van de stroming in de onverzadigde zone.

$W_{u,4}$ en $W_{s,4}$ duiden aan de berging W , respectievelijk in de bovenlaag (upper layer) en de onderlaag (sub layer) bij x_4 . Op de dag i worden deze grootheden aangeduid door

$W_{u,4,i}$ en $W_{s,4,i}$

v_h = verkorte notatie voor v_{phr}

r = index voor gebied met radiale stroming

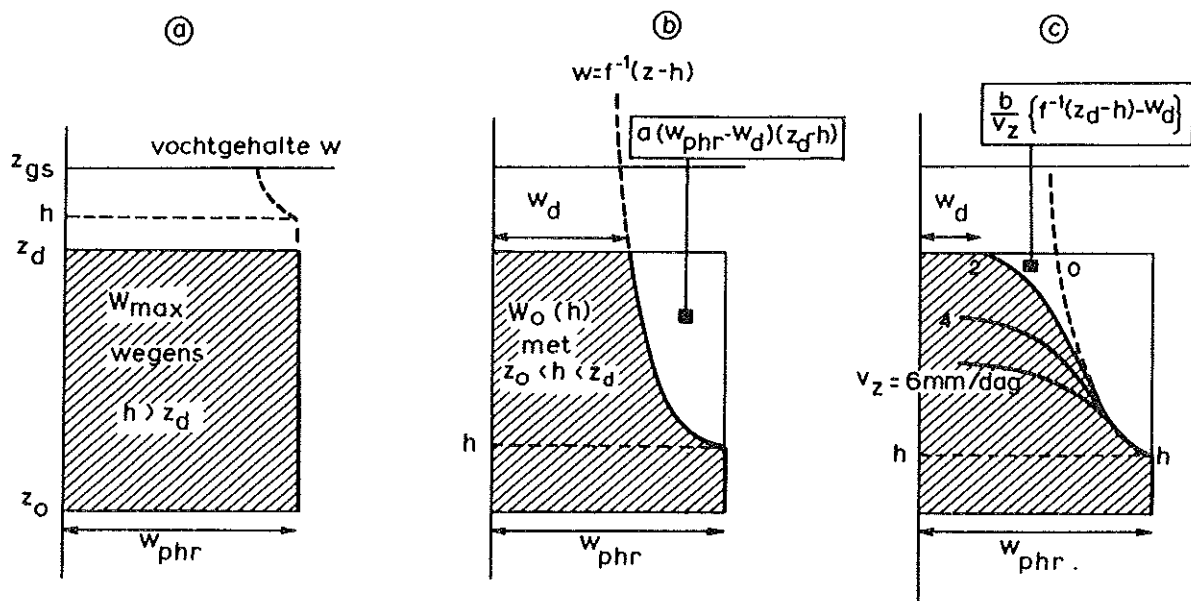


Fig. 12. Verdeling van het vochtgehalte in de laag tussen een willekeurig niveau z_0 en de onderkant z_d van de wortelzone

- Volledige verzadiging: W_{\max} = maximale vochtvoorraad tussen z_0 en $z_d = w_{\text{phr}}(z_d - z_0)$
- Geen stroming in de onverzadigde zone. $W_0(h)$ = vochtvoorraad bij $v_z = 0$ en een grondwaterstand h gelegen tussen z_0 en z_d
- Vochtverdeling bij capillaire opstijging, waarbij v_z constant voor alle z . De vochtvoorraad kan nu worden aangeduid door $W_v(h)$, waarbij de index v bijvoorbeeld de waarde van v_z in mm/dag heeft

Voor de tussenlaag (index s) is een precieze formule voor de berging moeilijk af te leiden. Omdat bij de meeste grondsoorten, als er geen stroming in de onverzadigde zone is ($v_z = 0$), de vochtverdeling in verticale richting een zekere gelijkvormigheid heeft, kan onder die voorwaarde worden gesteld (fig. 12b):

$$W_0(h) = w_{\text{phr}}(z_d - z_0) - a\{w_{\text{phr}} - f^{-1}(z_d - h)\}(z_d - h) \quad (44)$$

$a \approx 0,7$ voor zavel en klei $\approx 0,6$ voor zand en komklei $\approx 0,4$ voor leem (löss)	}	afgeleid uit RIJTEMA, 1969
--	---	----------------------------

In die gevallen dat er een constante opwaartse stroming is, kan aan (44) een term worden toegevoegd, waarmee alhoewel iets minder nauwkeurig voor de meeste gevallen een vermoedelijk wel voldoende nauwkeurigheid kan worden verkregen (fig. 12c).

$$W_v(h) = w_{phr}(z_d - z_o) - a\{w_{phr} - f^{-1}(z_d - h)\}(z_d - h) - \frac{b}{v_2}\{f^{-1}(z_d - h) - w_d\} \quad (45a)$$

of met enige herschrijving ter aanpassing aan het te volgen reken-schema:

$$W_{s,j,i} = W_{s,max} - a_s\{w_{phr} - f_s^{-1}(z_d - h_{j,i})\}(z_d - h_{j,i}) - \frac{b_s}{v_{d,j,i}}\{f_s^{-1}(z_d - h_{j,i}) - w_{sd,j,i}\} \quad (45b)$$

b en $b_s \approx 500$ tot $1000 \text{ mm}^2/\text{dag}$ (afgeleid uit RIJTEMA, 1969).

Met behulp van de formules (40) (43) en (45b) kunnen uitkomsten worden gevonden voor $w_{u,j,i}$, $w_{sd,j,i}$, $W_{u,j,i}$ en $W_{s,j,i}$. Tevoren zijn uit de formules (36) (39) reeds uitkomsten voor $v_{h,j,i}$ en $v_{d,j,i}$ verkregen.

Er ontbreekt nu nog maar weinig om de berging in de beide lagen voort t_{i+1} te berekenen. Daarvoor geldt immers:

$$W_{u,j,i+1} = W_{u,j,i} + \delta W_{u,j,i} = W_{u,j,i} + P_i - E_{j,i} + v_{d,j,i} \quad (46)$$

$$W_{s,j,i+1} = W_{s,j,i} + \delta W_{s,j,i} = W_{s,j,i} + v_{h,j,i} - v_{d,j,i} \quad (47)$$

Behalve de gegeven neerslag P_i op de betrokken dag moet ook een waarde worden ingevoerd voor de werkelijke verdamping $E_{j,i}$, welke ofwel gelijk is aan de potentiële verdamping $E_p = gE_o$ (hierbij is E_o de verdamping van open water, g is een coëfficiënt afhankelijk van bodembedekkingsgraad, gewasontwikkeling en jaargetijde) ofwel een lagere waarde heeft. Een nauwkeurige bepaling van de verdampingsreductie is vrij moeilijk (RIJTEMA, 1965), maar in eerste benadering zou men een afhankelijkheid van de vochtspanning $\Psi_{u,j,i}$ kunnen veronderstellen (VISSER, 1963, 1968; BLOEMEN, 1966).

Na invoering van zekere waarden voor P, E en v in de formules (46) en (47) kan men dus uitkomsten voor $W_{u,j,i+1}$ en $W_{s,j,i+1}$ verkrijgen en door substitutie van deze uitkomsten in de volgende uitdrukkingen zijn vervolgens het vochtgehalte en de vochtspanning voor t_{i+1} te vinden.

$$w_{u,j,i+1} = \frac{W_{u,j,i+1}}{z_{gs} - z_d} \quad (48)$$

$$\Psi_{sd,i,j+1} = \Psi_{u,j,i+1} = f_u(w_{u,j,i+1}) \quad (49)$$

$$w_{sd,j,i+1} = f_s^{-1}(\Psi_{sd,i,j+1}) \quad (50)$$

Tenslotte wordt nogmaals formule (45b) gebruikt om ook de grondwaterstand $h_{j,i+1}$ voor de nieuwe dag te kunnen vinden:

$$W_{s,j,i+1} = W_{s,max} - a_s \{w_{phr} - f_s^{-1}(z_d - h_{j,i+1})\} (z_d - h_{j,i+1}) - \frac{b_s}{v_{d,j,i+1}} \{f_s^{-1}(z_d - h_{j,i+1}) - w_{sd,j,i+1}\} \quad (51)$$

Voor het gebied met radiale stroming in de verzadigde zone zijn de formules (36) ... (51) niet zonder meer over te nemen. Namelijk de formules (36) ... (39) vragen een nadere beschouwing. Formule (39) kan gehandhaafd blijven. Daar de breedte B_1 van dit blok relatief groot kan zijn en de waarden van $v_{d,r,i}$, $v_{h,r,i}$ en h vrij grote variaties kunnen hebben, zal door invoering van gemiddelde waarden in linker- en rechterdeel van (39) de nauwkeurigheid van deze formule op dit punt iets minder goed kunnen zijn. Bij toepassingen in de praktijk zal dit echter nauwelijks van belang zijn.

$$\frac{v_{d,r,i} + v_{h,r,i}}{2} = k_{os} \frac{e^{-\alpha_s(z_d - h_{r,i})} - e^{-\alpha_s \Psi_{u,r,i}}}{1 - e^{-\alpha_s(z_d - h_{r,i})}} \quad (52)$$

Formule (38) verandert in geval van symmetrie slechts weinig:

$$v_{h,r,i} B_1 = -q_{o,i} - 2q_{1,i} \quad (53)$$

Hieraan kan slechts een vergelijking in vorm overeenkomende met (36) en (37) worden toegevoegd (indien $\Delta x > B_1$, dan is het geen bezwaar dat x_b aan de andere kant van de open leiding komt te liggen, daar h_b slechts als een denkbeeldige hulpgrootheid is op te vatten):

$$q_{1,i} = kD \frac{h_{b,i} - h_{2,1}}{\Delta x} \quad (54)$$

Nu ontbreekt er nog slechts een betrekking. Bij symmetrie ten opzichte van de open leiding kan hierin worden voorzien met behulp van (35), een van de formules afgeleid aan het einde van het vorige hoofdstuk:

$$\frac{h_{o,i} - h_{1,i}}{B_1} = -\frac{q_{o,i}}{8kD} \left(1 + \frac{8kD\Omega}{B_1}\right) + \frac{q_{1,i}}{4kD} \quad (55)$$

Hierbij moet worden opgemerkt, dat aan de gegeven waarden voor h_r , h_2 , h_4 , nog twee waarden voor h_1 en h_b moeten worden toegevoegd. Om hierin te voorzien kunnen de volgende twee formules worden gebruikt:

$$h_{1,i} = \frac{h_{b,i} + h_{2,i}}{2} \quad (56)$$

$$h_{r,i} = \frac{h_{o,i} + 2h_{1,i}}{3} \quad (57)$$

Terwijl formule (56) bij voldoende kleine Δx zeer nauwkeurig is, hangt de nauwkeurigheid van de laatste formule af van de keuze van de coëfficiënten $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3}$. Hierop werd ook al gewezen in het vorige hoofdstuk bij de afleiding van formule (26).

Bij asymmetrie ten opzichte van een open leiding verdubbelen in de B_1 -strook alle onbekende grootheden in aantal, behalve h_o of q_o . Waar in het symmetrische geval de 6 formules (52), (57) worden gebruikt, moeten in een asymmetrisch geval dus 11 eventueel nieuwe formules worden opgesteld.

Het is duidelijk dat bij een open leiding, waar de stroming aan linker- en rechterkant verschillend is, de formules (52), (54), (56) en (57) voor linker- en rechterkant kunnen worden verdubbeld door invoering van positieve en negatieve indices ($+l$, $+r$, $+b$, $+j$, enz.)

voor rechter- en linkerkant van de open leiding. Bij de praktische uitwerking van concrete gevallen, waarbij meerdere open leidingen en daardoor een vrij groot aantal vergelijkingen moeten worden betrokken, zal het vermoedelijk beter zijn een doorlopende nummering te gebruiken, beginnend bij nul en doorlopend naar een zeker positief geheel getal. De betekenis ervan moet dan duidelijk gemaakt worden door toevoeging van een situatieschets waarin alle nummers voorkomen.

Formule (53) kan slechts door 1 nieuwe formule worden vervangen:

$$(v_{h,-r,i} + v_{h,r,i}) \frac{B_1}{2} = -q_{0,i} - q_{-1,i} - q_{1,i} \quad (58)$$

In plaats van formule (55) komen nu (59) en (60):

$$\frac{2h_{0,i} - h_{-1,i} - h_{1,i}}{2B_1} = \frac{-q_{0,i}}{8kD} \left(1 + \frac{8kD\Omega}{B_1}\right) + \frac{q_{-1,i} + q_{1,i}}{8kD} \quad (59)$$

$$q_{1,i} - q_{-1,i} = 2kD \frac{h_{-1,i} - h_{1,i}}{B_1} \quad (60)$$

Hieruit blijkt dus dat tezamen met de verdubbeling van (52), (54), (56) en (57) bij elke open leiding met asymmetrische stroming inderdaad 11 formules beschikbaar zijn.

Met de formules in dit hoofdstuk afgeleid is het dus principieel mogelijk, ook al kan het grote aantal vergelijkingen een praktisch bezwaar vormen, om bij een volledig bekende toestand voor de tijd t_i , de toestand voor een volgende tijd t_{i+1} evenzo volledig te berekenen. Voor de stapgrootte $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ wordt in het algemeen een vrij kleine, constante waarde genomen. Het is bekend, dat in gevallen met een constante bergingscoëfficiënt μ bij overschrijding van een bepaalde grens, namelijk $\Delta t \geq \frac{1}{2} \mu (\Delta x)^2 (kD)^{-1}$, er instabiliteit ontstaat (MILNE, 1953).

De gevonden uitkomsten voor $h_r, \psi_r, h_2, \psi_2, h_4, \psi_4, \dots$ voor de tijd t_{i+1} kan men beschouwen als de begintoestand voor een nieuw tijdsinterval Δt . Na substitutie in bovenstaande formules is de gehele berekening te herhalen. Daarmee kan naar believen worden verder gegaan voor zover er een gesloten reeks van gegevens voor P_i en E_i (eventueel ook $h_{0,i}$) beschikbaar is.

Tenslotte kan worden opgemerkt dat een stelsel formules, als hierboven afgeleid, ook kan worden gebruikt bij stationaire toestanden. Men moet dan twee gevallen onderscheiden:

- a. Gegeven h_0 of $h_{0,i}$
 Onbekend q_0 of $q_{0,i}$
- b. Gegeven q_0 of $q_{0,i}$
 Onbekend h_0 of $h_{0,i}$

Een eenvoudige manier om daarbij een oplossing te vinden is mogelijk in de symmetrische gevallen, waarbij alle open leidingen gelijk zijn en er overal evenveel water wordt ingevoerd (volledige symmetrie) ofwel dat er afwisselend hoge en lage leidingen zijn, waarbij alle hoge leidingen gelijk peil en gelijke invoer hebben en alle lage leidingen gelijk peil en gelijke uitvoer (scheve symmetrie). In dergelijke gevallen kan men bij een van de open leidingen beginnen met de gegeven waarde voor h_0 (of q_0) en daaraan op goed geluk een waarde van q_0 (of h_0), toevoegen. Vervolgens is het mogelijk het gehele gebied door te werken. Door middel van enkele herhalingen tracht men een voldoende benadering van de juiste uitkomst te vinden.

Bij de volledig symmetrische gevallen is dit bereikt als de uitkomst $q = 0$ of de omkering van het teken voor q_j voldoende dicht bij het midden van de gebiedsstrook wordt gevonden. Bij de scheef-symmetrische gevallen (zie bijv. fig. 11) begint men bij de hoge leiding en controleert of de waarde, die voor h_0 of q_0 tenslotte bij de lage leiding wordt gevonden, wel voldoende met de feitelijke waarde overeenstemt.

7. INFILTRATIE-FORMULES VOOR GELAAGDE GROND

Indien de grond niet homogeen doorlatend is, maar opgebouwd uit afwisselend goed en slecht doorlatende lagen, dan is het gebruikelijk te veronderstellen, dat in de goed doorlatende lagen de stroming horizontaal is en in de slecht doorlatende lagen de stroming een verticale richting heeft. Afgezien van de gebieden waar een radiaal gerichte stroming mogelijk overheersend is (omgeving van open leidingen), kan men dus voor het geval, dat afgebeeld is in fig. 13a (het zogenaamde drielaagsprobleem), de volgende twee differentiaalvergelijkingen gebruiken met twee onafhankelijke variabelen h en ϕ .

$$k_1 D_1 \frac{d^2 h}{dx^2} = v_{phr} - \frac{\phi_2 - \phi_1}{c} \quad (61)$$

$$k_3 D_3 \frac{d^2 h}{dx^2} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{c} \quad (62)$$

waarbij

$$c = \frac{D_2}{k_2} \quad (63)$$

Voor het vier-lagen-probleem (fig. 13b) zijn de volgende drie formules geldig met drie onafhankelijke variabelen h , ϕ_1 en ϕ_2 .

$$\frac{\phi_1 - h}{c_1} = v_{phr} \quad (64)$$

$$k_2 D_2 \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} = \frac{\phi_1 - h}{c_1} - \frac{\phi_2 - \phi_1}{c_3} \quad (65)$$

$$k_4 D_4 \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{c_3} \quad (66)$$

met

$$c_1 = \frac{D_1}{k_1} \quad c_3 = \frac{D_3}{k_3} \quad (67)$$

Ook dicht bij de open leidingen met een meer of minder sterke radiale component in de grondwaterstroming blijven vergelijkingen van deze soort goed bruikbaar, mits men bij voortzetting van de potentiaalverdeling in de bovenste watervoerende laag $[h(x)$ of $\phi_1(x)]$ volgens bovenstaande formules, deze onjuiste geëxtrapoleerde voortzetting op een afwijkende manier aanduidt $[$ bijv. $h'(x)$ of $\phi_1'(x)]$ en aldaar de invloed van de radiale component in rekening brengt door middel van een van beide, hierna volgende formules (vergelijk fig. 3).

Voor het drie-lagen-probleem en het vier-lagen-probleem respectievelijk:

$$\Delta h_{rad} = h'_o - h_o = q_o \Omega \quad (68a)$$

$$\Delta \phi_{1,rad} = \phi'_{1,0} - \phi_{1,0} = q_o \Omega \quad (68b)$$

Indien het om symmetrische, stationaire toestanden gaat met een constante waarde voor v_{phr} (onafhankelijk van x en t), dan levert de afleiding van een drainage(infiltratie)-formule analoog aan (6) geen principiële moeilijkheden op (ERNST, 1956, 1962). Voor de radiale weerstand Ω

kan men dikwijls bij drie- en vier-lagen-probleem toch wel van (8) of soortgelijke formules gebruik maken (ERNST, 1963).

Bij een v_{phr} afhankelijk van $z_{gs} - h$ wordt het probleem echter zoveel moeilijker dat het raadzaam is de oplossingsmethode uit hoofdstuk 6 te gebruiken. Daarmee kan langs een bekende weg altijd een goede benadering worden gevonden ook in die gevallen dat de toestand niet symmetrisch is.

Asymmetrie is overal aanwezig waar hoogteverschillen in het grondoppervlak en in de peilen van het open water er oorzaak van zijn dat wegzijgings- en kwelstromingen ontstaan. Een dergelijke toestand strekt zich dikwijls uit over grote gebieden met een doorsnede van meerdere kilometers. In zulk een doorsnede kunnen een vrij groot aantal (evenwijdige) open leidingen voorkomen en daaruit volgt dat volledige doorvoering van het rekensysteem uit het vorige hoofdstuk nu tot een nog veel omvangrijker werk zou leiden.

Dit leidt er toe dat behalve in de gevallen met volledige symmetrie en met scheve symmetrie, ook in de asymmetrische gevallen men zich graag zal beperken tot de behandeling van een enkele strook tussen twee evenwijdige open leidingen. Dit houdt in dat de verdeling van kwel en wegzijging over het gebied bekend moet zijn (eventueel een ruwe schatting) en dat voor een te onderzoeken strook dus 4 waarden kunnen worden opgegeven voor invoer of uitvoer van grondwater door elk van de 2 watervoerende lagen bij elk van de 2 open leidingen.

Voor een groot deel blijven de formules uit hoofdstuk 6 bruikbaar. Dit geldt voor de formules (39), (52), (56) en (57), maar niet geheel en al voor (36), (38), (53), (55) en (58), (60). De reeds verkregen vergelijkingen moeten zodanig worden aangevuld, dat indien op de tijd t_i voor alle x_j gegeven zijn de waarden $h_{j,i}$, daaruit alle overige onbekende grootheden kunnen worden berekend.

Dit zal achtereenvolgens worden uiteengezet voor het drie-lagen-probleem en voor het vier-lagen-probleem. Evenals in het vorige hoofdstuk mag worden aangenomen, dat de potentialen en verticale fluxen bij even waarden van j , de horizontale stromingsintensiteiten q_1 en q_2 bij on-even waarden van j zullen worden berekend.

(a) Bij het drie-lagen-probleem (fig. 13a) kan formule (38) worden vervangen door:

$$v_{h,j,i} \Delta x = q_{i,j-1,i} - q_{i,j+1,i} + v_{c,j,i} \Delta x \quad (69)$$

Formule (55) behoeft slechts van een extra term in het rechterlid te worden voorzien om bruikbaar te blijven:

$$\begin{aligned} \frac{h_{o,o,i} - h_{l,i}}{B_1} &= \frac{-q_{o,o,i}}{8k_1 D_1} \left(1 + \frac{8k_1 D_1 \Omega}{B_1}\right) + \frac{q_{l,l,i} - q_{l,L,i}}{4k_1 D_1} + \frac{q_{l,L,i}}{2k_1 D_1} = \\ &= \frac{-q_{o,o,i}}{8k_1 D_1} \left(1 + \frac{8k_1 D_1 \Omega}{B_1}\right) + \frac{q_{l,l,i} + q_{l,L,i}}{4k_1 D_1} \end{aligned} \quad (77)$$

Voor de stroming in de tweede watervoerende laag bij $q_{2,i} = 0$, dat is dus in een symmetrisch geval, zou gelden:

$(\phi_{o,i} - \phi_{l,i}) / (\phi_{l,i} - \phi_{2,i}) = B_1 / 2\Delta x$. Wegens de gegeven invoer $q_{2,L} \neq 0$ van buiten het gebied moet ook hier een term worden toegevoegd, zodat de stroming in de tweede laag onder de open leiding kan worden voorgesteld door:

$$\phi_{o,i} - \phi_{l,i} - \frac{B_1}{2\Delta x} (\phi_{l,i} - \phi_{2,i}) = \frac{B_1 q_{2,L,i}}{4k_3 D_3} \quad (78)$$

Voor de verticale stroming in de c-laag onder de open leiding kunnen de formules (72) en (73) worden vervangen door:

$$v_{c,r,i} = \frac{\phi_{r,i} - h_{r,i}}{c} \quad (79)$$

$$= (q_{2,L,i} - q_{2,l,i}) \frac{2}{B_1} \quad (80)$$

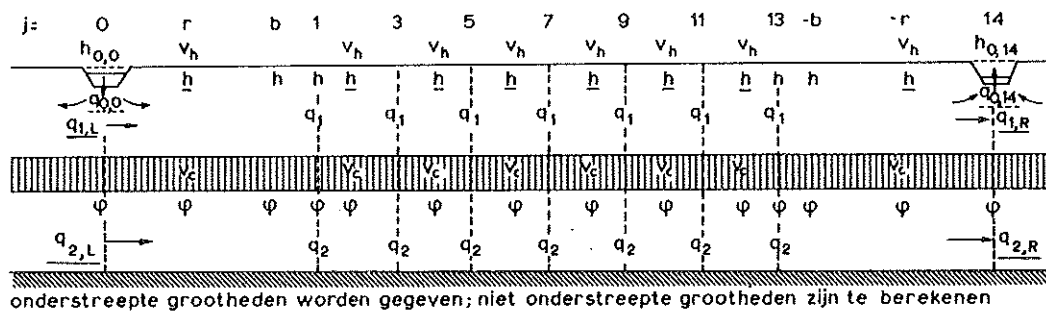
Tenslotte zijn er nog de 'onregelmatige' grenzen x_b en x , waar de betrokken potentialen met behulp van de volgende formules analoog aan (56) en (57) moeten worden afgeleid:

$$h_{l,i} = \frac{h_{b,i} + h_{2,i}}{2} \quad (81)$$

$$h_{r,i} = \frac{h_{o,o,i} + 2h_{l,i}}{3} \quad (82)$$

$$\phi_{l,i} = \frac{\phi_{b,i} + \phi_{2,i}}{2} \quad (83)$$

$$\phi_{r,i} = \frac{2\phi_{o,i} + \phi_{l,i}}{3} \quad (84)$$



onderstreepte grootheden worden gegeven; niet onderstreepte grootheden zijn te berekenen

$\left. \begin{matrix} h_{0,0} \\ q_{0,0} \end{matrix} \right\}$ een van beide grootheden is gegeven; de andere grootheid is te berekenen
 er zijn 6 middenstroken: $n=6$; aantal onbekenden = aantal vergelijkingen = $5n + 20 = 50$

	74	82	81		69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	81	82	74			
77				75	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	75						
	79			72	72	72	72	72	72	72	72	72	72	72	72						
	80			73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73						
78				76	71	71	71	71	71	71	71	71	71	71	76						
		84	83													83	84				
					1	2	3	4	5	n = 6											

nummers van de vergelijkingen welke in bovenstaand profiel op de overeenkomstige plaats kunnen worden toegepast

Fig. 14. Voorbeeld van een indeling in blokken van open leiding tot open leiding bij een drie-lagen-probleem. De betrokken grootheden en formules (resp. in bovenste en onderste profiel) zijn naar soort en aantal volledig aangegeven

Het aantal vergelijkingen, dat hiermee kan worden verkregen is vrij groot, zoals blijkt uit het voorbeeld in fig. 14 waar het middengebied in 6 Δx -blokken is ingedeeld ($n = 6$). Door uittellen van deze figuur vindt men onmiddellijk dat het aantal vergelijkingen is gelijk te stellen aan $5n + 20$. Bij $n = 6$ krijgt men dus 50 vergelijkingen, alle van de 1e graad.

Doordat er onder deze vergelijkingen zoveel gelijksoortige voorkomen en in elke vergelijking slechts een klein aantal onbekenden is de oplossing ervan niet zo moeilijk.

Men kan beginnen met op te merken dat de 8 onbekenden v_h slechts voorkomen in de 8 vergelijkingen (69) en (74), welke dus voorlopig buiten beschouwing kunnen blijven.

Vervolgens kunnen de 7 onbekenden q_1 direct worden berekend uit (70) en (75). Evenzo is met behulp van (77), (81) en (82) een directe berekening mogelijk van $h_{0,0}$ of $q_{0,0}$, $h_{0,14}$ of $q_{0,14}$, h_b , h_1 , h_{13} en h_{-b} .

Hiermee is het aantal vergelijkingen en het aantal onbekenden teruggebracht tot 29. Overgebleven zijn namelijk de vergelijkingen (71) (72), (73), (76), (78), (79), (80), (83) en (84) waarin als onbekenden nog voorkomen alle v_c , alle q_2 en alle ϕ .

Vervolgens kunnen alle v_c en alle q_2 worden geëlimineerd door (72), en (73), (79) en (80) te combineren en door (71) en (76) in de andere vergelijkingen te substitueren. Evenzo zijn ϕ_b , ϕ_1 , ϕ_{13} en ϕ_{-b} eenvoudig te elimineren met behulp van (83) en (84).

Langs deze weg zijn dan tenslotte 10 vergelijkingen overgebleven waarin de 10 onbekende potentialen voorkomen, namelijk:

$$\phi_o, \phi_r, \phi_2, \phi_4, \phi_6, \phi_8, \phi_{10}, \phi_{12}, \phi_{-r}, \phi_{14} \quad (\text{aantal} = n + 4)$$

Heeft men hiermee alle grootheden in de verzadigde zone berekend, dan kan men verder gaan met de toestand in de onverzadigde zone en de verandering naar de volgende dag te berekenen. Daarvoor zijn dezelfde formules te gebruiken als in hoofdstuk 6. Voor elke x_j heeft men daarbij gegeven waarden nodig voor $\psi_{u,j}$, h_j en $v_{h,j}$. Laatstgenoemde grootheid is verkregen als eindresultaat van de bewerking van bovengenoemde 50 lineaire vergelijkingen.

(b) Bij het vier-lagen-probleem (fig. 13b) nemen de vergelijkingen slechts weinig in aantal toe. De vergelijkingen van het drie-lagen-probleem kunnen opnieuw worden gebruikt, zij het dat daarbij meestal andere indices moeten worden ingevoerd. Bovendien zijn twee nieuwe vergelijkingen nodig voor de verticale stroming in de bovenste slecht doorlatende laag. Om een en ander goed duidelijk te maken, worden de betrokken vergelijkingen hier volledig uitgeschreven met de juiste indices:

$$v_{c1,j,i} = \frac{\phi_{1,j,i} - h_{j,i}}{c_1} \quad (85)$$

$$= \frac{q_{1,j-1,i} - q_{1,j+1,i}}{\Delta x} + v_{c3,j,i} \quad (86)$$

$$q_{1,j-1,i} = k_2 D_2 \frac{\phi_{1,j-2,i} - \phi_{1,j,i}}{\Delta x} \quad (87)$$

$$q_{2,j-1,i} = k_4 D_4 \frac{\phi_{2,j-2,i} - \phi_{2,j,i}}{\Delta x} \quad (88)$$

$$v_{c3,j,i} = \frac{\phi_{2,j,i} - \phi_{1,j,i}}{c_3} \quad (89)$$

$$v_{c3,j,i} = \frac{q_{2,j-1,i} - q_{2,j+1,i}}{\Delta x} \quad (90)$$

$$v_{c1,r,i} = \frac{\phi_{1,r,i} - h_{r,i}}{c_1} \quad (91)$$

$$= (q_{1,L,i} - \frac{1}{2} q_{o,o,i} - q_{1,l,i}) \frac{2}{B_1} + v_{c3,r,i} \quad (92)$$

$$q_{1,l,i} = k_2 D_2 \frac{\phi_{1,b,i} - \phi_{1,2,i}}{\Delta x} \quad (93)$$

$$q_{2,l,i} = k_4 D_4 \frac{\phi_{2,b,i} - \phi_{2,2,i}}{\Delta x} \quad (94)$$

$$\frac{h_{o,o,i} - \phi_{1,l,i}}{B_1} = -\frac{q_{o,o,i}}{8k_1 D_1} \left(1 + \frac{8k_1 D_1 \Omega}{B_1}\right) + \frac{q_{1,l,i} + q_{1,L,i}}{4k_2 D_2} \quad (95)$$

$$\phi_{2,o,i} - \phi_{2,l,i} - \frac{B_1}{2\Delta x} (\phi_{2,l,i} - \phi_{2,2,i}) = \frac{B_1 q_{2,L,i}}{4k_4 D_4} \quad (96)$$

$$v_{c3,r,i} = \frac{\phi_{2,r,i} - \phi_{1,r,i}}{c_3} \quad (97)$$

$$= (q_{2,L,i} - q_{2,l,i}) \frac{2}{B_1} \quad (98)$$

$$\phi_{1,l,i} = \frac{\phi_{1,b,i} + \phi_{1,2,i}}{2} \quad (99)$$

$$\phi_{1,r,i} = \frac{h_{o,o,i} + 2\phi_{1,l,i}}{3} \quad (100)$$

$$\phi_{2,l,i} = \frac{\phi_{2,b,i} + \phi_{2,2,i}}{2} \quad (101)$$

$$\phi_{2,r,i} = \frac{2\phi_{2,o,i} + \phi_{2,l,i}}{3} \quad (102)$$

Bij het vier-lagen-probleem dat als voorbeeld in fig. 15 is afgebeeld zijn eenzelfde aantal Δx -stroken opgenomen als in fig. 14, te weten $n = 6$. Het aantal onbekenden en het aantal vergelijkingen bedraagt $6n + 22 = 58$. Daarbij is geen onderscheid gemaakt tussen v_{c1} en v_h , respectievelijk voor de verticale stroming door de bovenste slecht doorlatende laag en door het freatisch oppervlak.

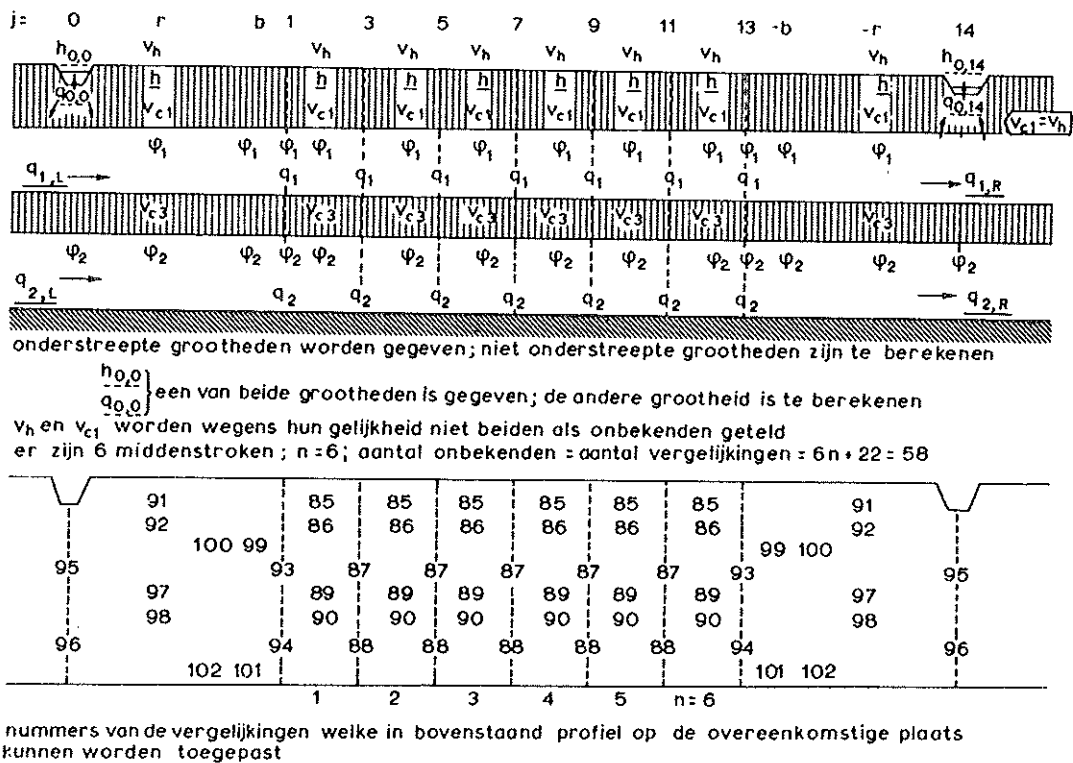


Fig. 15. Voorstelling gelijksoortig aan fig. 14 maar hier toegepast op een vier-lagen-probleem

Terwijl hier het verschil in aantal vergelijkingen nog niet belangrijk lijkt, wordt het echter na elimineren van v_{c1} , v_{c3} , q_1 , q_2 wel duidelijk, dat er nu meer vergelijkingen en meer onbekenden overblijven. Indien $n = 6$, dan houdt men immers over 10 onbekenden ϕ_2 en 8 onbekenden ϕ_1 in 18 vergelijkingen met telkens 3 of 4 onbekenden.

Er is een kunstgreep waarmee vergelijkingen van deze soort, ook al is het aantal 18 of meer, vrij gemakkelijk zijn op te lossen. Men zoekt een vergelijking uit, waarin niet meer dan drie onbekenden voorkomen. Door voor 2 van deze onbekenden willekeurige, maar niet al te onwaarschijnlijke waarden te nemen, kan men vervolgens de 3e onbekende oplossen. Deze uitkomst is te substitueren in een volgende vergelijking, waarin behalve de reeds gebruikte onbekenden nog slechts 1 onbekende voorkomt. Laatstgenoemde onbekende is nu gemakkelijk te berekenen, vervolgens in een vierde vergelijking te substitueren enz. Men verkrijgt daarmee een reeks van waarden, die echter niet goed is, omdat men daarmee wel aan $(2n + 4)$ vergelijkingen kan voltooien, maar niet aan alle vergelijkingen.

Een dergelijke berekening dient men 3 maal uit te voeren met elkens voor dezelfde twee onbekenden een stel 'probeer'-waarden. Een lineaire combinatie van deze 3 schattingen kan nu wel voldoen. Het is immers mogelijk te vermenigvuldigen met respectievelijk α, β en $1-\alpha-\beta$ en als eis te stellen dat de gesommeerde oplossing niet alleen aan $(2n + 4)$ vergelijkingen voldoet, maar ook aan de 2 restvergelijkingen. De coëfficiënten α en β zijn eenvoudig uit 2 vergelijkingen van de 1e graad op te lossen.

LITERATUUR

- BLOEMEN, G.W., 1966. The calculation of evapotranspiration from groundwater depth observations. Proceedings and Informations, no. 12, Committee for Hydrological Research, T.N.O., The Hague.
- ERNST, L.F., 1956. Calculation of the steady flow of groundwater in vertical cross sections. Neth. J. Agr. Sci. 4: 126-131.
- 1962. Grondwaterstromingen in de verzadigde zone en hun berekening bij aanwezigheid van horizontale evenwijdige open leidingen. Proefschrift Universiteit Utrecht.
- 1963. De berekening van grondwaterstromingen tussen evenwijdige open leidingen. Verslagen en mededelingen nr 8, Commissie voor Hydrologisch Onderzoek T.N.O., 's-Gravenhage.
- HOOGHOUT, S.B., 1940. Bijdragen tot de kennis van enige natuurkundige grootheden van de grond. Deel 7, Versl. Landb. Onderz. 46 (14) B: 515-707.
- MILNE, W.E., 1953. Numerical solution of differential equations. J. Wiley, London-New York.
- RIJTEMA, P.E., 1965. An analysis of actual evapotranspiration. Agric. Res. Rep. 659: 1-107 (thesis agric. univ. Wageningen).
- 1969. Soil moisture forecasting, nota 513, Inst. v. Cultuurtechniek en Waterhuishouding, Wageningen
- VISSER, W.C., 1963. Soil moisture content and evapotranspiration. Publ. no. 62 of the Int. Ass. Scient. Hydr./Int. Un. Geod. Geoph., 13th general assembly, Berkeley, California.
- 1968. Rules of transfer of water management experience, with special reference to the assessment of drainage design constants. Proceedings and Informations, no. 15, Committee for Hydrological Research, T.N.O., The Hague.