INHOUD

LIJST VAN FIGUREN

BELANGRIJKSTE NOTATIES

			Dimensie
c	:	weerstand van een semi-permeabele laag tegen verticale stroming	T
D	:	$\frac{kH}{\mu}$	L^2T^{-1}
H	:	dikte watervoerend pakket	L
k	:	doorlatendheidscoëfficiënt	LT^{-1}
q	:	debiet per strekkende meter	L^2T^{-1}
s	:	zakking in potentiaalhoogte	L
t	:	tijdcoördinaat	T
x	:	plaatscoördinaat	L
δ	:	indringings- of penetratiediepte	L
λ	:	karakteristieke lengte $\sqrt{kHc}$	L
μ	:	bergingscoëfficiënt	dimensieloos

1. INLEIDING

In figuur 1 is een niet-stationair grondwaterstromingsprobleem geschetst, waarvoor bij verschillende randvoorwaarden analytische oplossingen bekend zijn (Edelman, 1947). Een half-oneindige watervoerende laag met freatisch grondwater wordt begrensd door een kanaal over de volledige dikte van de laag. Het geheel rust op een ondoorlatende basis.

Onder de aanname dat het doorlaatvermogen kH en de bergingscoëfficiënt μ van de watervoerende laag constant zijn, wordt het stromingsprobleem bepaald door de vergelijking

$$\frac{\partial s}{\partial t} - D \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{..... (1)}$$

met $D = \frac{kH}{\mu}$

(1) stelt een pure diffusievergelijking voor.
Theoretisch volgt hieruit dat een verstoring in het freatisch peil op $x = 0$ onmiddellijk zijn invloed uitbreidt naar $x = \infty$. Vanuit praktisch oogpunt echter kan het nuttig zijn een zg. penetratiediepte te definiëren als de afstand waarover een verstoring in het freatisch peil op $x = 0$ zich daadwerkelijk manifesteert. Deze penetratie- of indringingsdiepte, hier δ genoemd, is uiteraard tijdsafhankelijk (zie figuur 2).

2. GRONDSLAGEN

Door (1) dimensieloos te maken met behulp van karakteristieke schalen voor het systeem, kan informatie verkregen worden over de aard van de gedefinieerde indringingsdiepte als functie van de tijd.

Het gaat hier om een probleem met een niet-opgelegde tijd- en lengteschaal (een verstoring werkt in theorie oneindig lang en oneindig ver door). Daarom ligt het voor de hand om een variabele tijd- en lengteschaal in te voeren. Voor de lengteschaal kan dan gekozen worden $L = \delta$ en voor de tijdschaal T zodanig dat $L = \delta(T)$. Voor de zakking s wordt een karakteristieke schaal σ gekozen, die, afhankelijk van de randvoorwaarden, ook variabel kan zijn.

Dus lengteschaal $L = \delta(T)$

tijdschaal T

zakkingschaal $\sigma(T)$

Met behulp van de gedefinieerde schalen kunnen dimensieloze variabelen geïntroduceerd worden:

$$\bar{x} = \frac{x}{\delta}$$

$$\bar{t} = \frac{t}{T}$$

$$\bar{s} = \frac{s}{\sigma}$$

Met de dimensieloze variabelen wordt (1) geschreven als

$$\frac{\sigma}{T}\frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{t}} - D\frac{\sigma}{\delta^2}\frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial \bar{x}^2} = 0 \qquad \text{......} \quad (2)$$

De termen $\frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{t}}$ en $\frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial \bar{x}^2}$ in (2) zijn allebei van grootte-orde 1.

Wil (2) enige fysische betekenis hebben, dan moeten de termen $\frac{\sigma}{T}$ en $D\frac{\sigma}{\delta^2}$ van dezelfde grootte-orde zijn.

$$\frac{\sigma}{T} \sim D\frac{\sigma}{\delta^2}$$

ofwel

$$\delta \sim \sqrt{Dt}$$

Het resultaat houdt dus in dat

$$\delta(t) = \alpha\sqrt{Dt} \qquad \text{...... (3)}$$

waarin α een nader te bepalen evenredigheidsconstante voorstelt.
Voor de indringingssnelheid u(t) wordt gevonden

$$u(t) = \frac{d}{dt}(\alpha\sqrt{Dt})$$

$$= \tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{\frac{D}{t}} \qquad \text{...... (4)}$$

Gebruikmakend van de indringingsdiepte δ kan (1) geïntegreerd worden op het interval $0 < x < \delta$.

$$\int_0^\delta \frac{\partial s}{\partial t}\,dx - D\int_0^\delta \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\,dx = 0 \qquad \text{...... (5)}$$

$$\int_0^\delta \frac{\partial s}{\partial t}\,dx - D\left.\frac{\partial s}{\partial x}\right|_0^\delta = 0$$

$$\underset{(a)}{\int_0^\delta \frac{\partial s}{\partial t}\,dx} - \underset{(b)}{D\left.\frac{\partial s}{\partial x}\right|_{x=\delta}} + \underset{(c)}{D\left.\frac{\partial s}{\partial x}\right|_{x=0}} = 0 \qquad \text{...... (6)}$$

Een verstoring op x=0 doet zijn invloed niet verder gelden dan tot $x = \delta$, bijgevolg is $q_{x=\delta} = 0$ en geldt de randvoorwaarde

$$\left.\frac{\partial s}{\partial x}\right|_{x=\delta} = 0$$

Stel $q_{x=0} = q_o$, dan $D\left.\frac{\partial s}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{q_o D}{kH}$

(6) reduceert dan tot

$$\int_0^\delta \frac{\partial s}{\partial t}\,dx - \frac{q_o D}{kH} = 0 \qquad \text{...... (7)}$$

(7) kan nader uitgewerkt worden m.b.v. het theorema van Leibniz, dat stelt

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\delta(t)} s(x,t)\, dx = \int_0^{\delta(t)} \frac{\partial s}{\partial t}\, dx + s_{\delta(t)} \frac{d\,\delta(t)}{dt} \qquad \text{......} \quad (8)$$

In dit geval geldt als randvoorwaarde dat $s_{\delta(t)} = 0$ en (7) gaat m.b.v. (8) over in

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\delta} s\, dx = \frac{q_o D}{kH} \qquad \text{......} \quad (9)$$

Met $D = \frac{kH}{\mu}$ wordt (9)

$$\boxed{\mu \cdot \frac{d}{dt} \int_0^{\delta} s\, dx = q_o} \qquad \text{......} \quad (10)$$

(10) is direct fysisch interpreteerbaar: de bergingsveranderingssnelheid op het interval $0 < x < \delta$ is gelijk aan de uitstroming q op x=0, een uitermate logisch resultaat.

Bij de gevolgde afleiding is nog op geen enkele manier ingegaan op de randvoorwaarde op x = 0. Tot zover is de afleiding dus algemeen toepasbaar op de situatie als geschetst in figuur 1.

Het is nu zaak om een zodanige functie voor s te kiezen, dat aan alle randvoorwaarden voldaan wordt. Een randvoorwaarde op x = 0 moet opgelegd worden. Tesamen met 2 randvoorwaarden op $x = \delta$ beschikken we dan over 3 randvoorwaarden. Er kan dus een functie voor s gekozen worden met 3 parameters, die nader bepaald moeten worden. Het ligt voor de hand in dit geval een parabolische functie te kiezen, maar een of andere exponentiële functie zou even goed kunnen blijken te voldoen.

Twee gevallen van Edelman zijn nader uitgewerkt.

3. ENIGE TOEPASSINGEN

3.1. Edelman 1, parabolische benadering

De randvoorwaarde op x = 0 is een onmiddellijke zakking Δ op t = 0 (figuur 2).

De parabolische functie die aan de drie randvoorwaarden voldoet luidt

$$s = \Delta(1 - \frac{x}{\delta})^2 \qquad \text{...... (11)}$$

(10) moet herleid worden tot een differentiaalvergelijking in Δ. Hiertoe moet q_o in δ worden uitgedrukt.

Schrijf s als volgt

$$s = \frac{\Delta}{\delta^2} x^2 - \frac{2\Delta}{\delta} x + \Delta \qquad \text{...... (12)}$$

$$\left.\frac{\partial s}{\partial x}\right|_{x=0} = - \frac{2\Delta}{\delta} = - \frac{q_o}{kH}$$

dus

$$q_o = \frac{2kH\Delta}{\delta} \qquad \text{...... (13)}$$

Substitutie van (12) en (13) in (10) geeft

$$\frac{d}{dt} \int_o^\delta (\frac{\Delta}{\delta^2} x^2 - \frac{2\Delta}{\delta} x + \Delta)dx = \frac{2D\Delta}{\delta} \qquad \text{...... (14)}$$

waarin $D = \frac{kH}{\mu}$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left| \frac{\Delta}{\delta^2} \cdot \frac{1}{3} x^3 - \frac{\Delta}{\delta^2} x^2 + \Delta x \right|_o^\delta \right\} = 2 \frac{D\Delta}{\delta}$$

$$\frac{d}{dt} (\frac{1}{3} \Delta\delta) = \frac{2D\Delta}{\delta} \qquad \text{...... (15)}$$

Omdat Δ is constant gaat (15) over in

$$\frac{1}{3} \frac{d\delta}{dt} = 2 \frac{D}{\delta}$$

$$\delta \frac{d\delta}{dt} = 6D \qquad \text{...... (16)}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\delta^2}{dt} = 6D$$

$$\delta = \sqrt{12\,Dt} + \text{constante}$$

$$\delta\big|_{t=0} = 0 \rightarrow \text{integratieconstante} = 0, \text{ dus}$$

$$\delta = \sqrt{12\,Dt} \qquad \ldots\ldots (17)$$

De evenredigheidsconstante α uit (3) blijkt bij deze benadering dus gelijk te zijn aan $\sqrt{12}$.

Substitutie van (17) in (11) geeft

$$\boxed{s = \Delta\left(1 - \frac{x}{\sqrt{12\,Dt}}\right)^2} \qquad \ldots\ldots (18)$$

Substitutie van (17) in (13) geeft

$$q_o = \frac{2kH\Delta}{\sqrt{12\,Dt}}$$

$$q_o = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{kH\Delta}{\sqrt{Dt}} \qquad \ldots\ldots (19)$$

De exacte oplossing van q_o luidt

$$q_o = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{kH\Delta}{\sqrt{Dt}} \qquad \ldots\ldots (20)$$

Uit (19) en (20) blijkt reeds hoe goed de gevolgde benadering is. De afwijking tussen de benaderende waarde van q_o en de exacte bedraagt slechts 2,3%. Een nog beter inzicht in de kwaliteit van de gevolgde benadering wordt verkregen door de relatieve zakking $\frac{s(x,t)}{\Delta}$ uit te zetten tegen $\frac{x}{\sqrt{Dt}}$ (figuur 3).

De maximale absolute afwijking bedraagt 3,3% van Δ en treedt op bij $\frac{x}{\sqrt{Dt}} = 1{,}4$.

Het snijpunt van de benaderende oplossing met de horizontale as (fig. 3) geeft de waarde van de evenredigheidsconstante α, nl. $\sqrt{12}$.

Af te lezen valt bovendien dat voor $x = \delta$ de afwijking ca. 1,5% van Δ bedraagt.
Het blijkt dus dat met de gevolgde benadering δ gedefinieerd is als de afstand waarop de zakking s 1,5% van Δ bedraagt.

3.2. Edelman 2, parabolische benadering

De randvoorwaarde op $x = 0$ is dat $q = q_o$ = constante.
Stel

$$s = Ax^2 + Bx + C \qquad \ldots\ldots (21)$$

De randvoorwaarde op $x = 0$ geeft

$$\left.\frac{\partial s}{\partial x}\right|_{x=0} = (2Ax + B)\Big|_{x=0} = B = -\frac{q_o}{kH} \qquad \text{--- (a)}$$

De randvoorwaarde $\left.\frac{\partial s}{\partial x}\right|_{x=\delta} = 0$ geeft

$$2A\delta + B = 0 \rightarrow A = -\frac{B}{2\delta} \qquad \text{--- (b)}$$

De randvoorwaarde $s|_{x=\delta} = 0$ geeft

$$A\delta^2 + B\delta + C = 0 \qquad \text{--- (c)}$$

Combinatie van (a), (b) en (c) geeft

$$A = \frac{q_o}{2kH\delta} \qquad \text{--- (d)}$$

$$C = \frac{1}{2}\frac{q_o\delta}{kH} \qquad \text{--- (e)}$$

Substitutie van (a), (d) en (e) in (21) geeft

$$s = \frac{q_o}{2kH\delta}x^2 - \frac{q_o}{kH}x + \frac{1}{2}\frac{q_o\delta}{kH} \qquad \ldots\ldots (22)$$

Substitutie van (22) in de integraalvergelijking (10) geeft

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{6}\frac{q_o}{kH\delta}x^3 - \frac{1}{2}\frac{q_o}{kH}x^2 + \frac{1}{2}\frac{q_o\delta}{kH}x\right\}\Bigg|_{x=0}^{x=\delta} = \frac{q_o}{\mu} \qquad \ldots\ldots (23)$$

$$\frac{1}{6kH}\frac{d}{dt}\delta^2 = \frac{1}{\mu} \qquad \ldots\ldots (24)$$

$$\frac{d}{dt}(\delta^2) = 6D \qquad \text{met } D = \frac{kH}{\mu} \qquad \ldots\ldots (25)$$

$$\delta = \sqrt{6Dt} \qquad \ldots\ldots (26)$$

Substitutie van (26) in (22) geeft

$$\hat{s} = \frac{q_o \delta}{2kH}(1 - \frac{x}{\delta})^2 \qquad \ldots\ldots (27)$$

$$= \frac{q_o}{2kH} \cdot \sqrt{6Dt}.(1 - \frac{x}{\sqrt{6Dt}})^2 \qquad \ldots\ldots (28)$$

Met (28) volgt voor x = 0

$$\hat{s}\Big|_{x=0} = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{q_o}{kH} \cdot \sqrt{Dt} \qquad \ldots\ldots (29)$$

De exacte oplossing voor x = 0 luidt

$$s\Big|_{x=0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{q_o}{kH} \cdot \sqrt{Dt} \qquad \ldots\ldots (30)$$

De benaderende oplossing (29) blijkt 8,5% groter te zijn dan de exacte (30).

Een goede vergelijking is mogelijk door uit te zetten $\frac{\hat{s}}{s_o\text{(exact)}}$ en $\frac{s_{exact}}{s_o\text{(exact)}}$ tegen $\frac{x}{\sqrt{Dt}}$ (figuur 4).

De parabolische benadering blijkt wat meer af te wijken dan bij Edelman 1. Voor Edelman 2 is dan ook eens gekeken naar een exponentiële benaderingsfunctie voor s.

3.3. Edelman 2, exponentiële benadering

Stel $s = A\, e^{(1 - \frac{x}{\delta})} + B(x - \delta) + C$ ...... (31)

N.B.: De benaderingsfunctie moet wel zo gekozen worden dat hij dimensioneel homogeen is.

Uit de randvoorwaarden volgt

$$s\Big|_{x=\delta} = A + C = 0 \qquad \text{--- (a)}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x}\Big|_{x=\delta} = -\frac{A}{\delta} + B = 0 \qquad \text{--- (b)}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\frac{q_o}{kH} \rightarrow -\frac{A}{\delta}e + B = -\frac{q_o}{kH} \qquad \text{--- (c)}$$

Combinatie van (a), (b) en (c) geeft

$$A = \frac{q_o}{kH} \cdot \frac{\delta}{e - 1} \qquad \text{...... (32)}$$

$$B = \frac{q_o}{kH} \cdot \frac{1}{e - 1} \qquad \text{...... (33)}$$

$$C = -\frac{q_o}{kH} \cdot \frac{\delta}{e - 1} \qquad \text{...... (34)}$$

Substitutie van (32), (33) en (34) in (31) geeft

$$s = \frac{q_o}{kH} \cdot \frac{1}{e - 1} (\delta\, e^{1 - \frac{x}{\delta}} + x - 2\delta) \qquad \text{...... (35)}$$

Substitutie van (35) in (10) geeft

$$\frac{d}{dt}\left\{\left| -\delta^2 e^{1 - \frac{x}{\delta}} + \frac{1}{2}x^2 - 2\delta x \right|_o^{\delta}\right\} = D(e - 1) \qquad \text{...... (36)}$$

$$\frac{d}{dt}\{-2\frac{1}{2}\delta^2 + \delta^2 e\} = D(e - 1) \qquad \text{...... (37)}$$

$$\frac{d}{dt}(\delta^2) = \left\{\frac{e - 1}{e - 2\frac{1}{2}}\right\} . D$$

$$\delta = \sqrt{\left\{\frac{e - 1}{e - 2\frac{1}{2}}\right\} . Dt} \qquad \ldots\ldots (38)$$

Stel $\left\{\frac{e - 1}{e - 2\frac{1}{2}}\right\} = \gamma$, dan geeft substitutie van (38) in (35)

$$\boxed{\hat{s} = \left(\frac{q_o}{kH} . \frac{1}{e - 1}\right)\left(\sqrt{\gamma Dt} . e^{1 - \frac{x}{\sqrt{\gamma Dt}}} + x - 2\sqrt{\gamma Dt}\right)} \qquad \ldots\ldots (39)$$

$$\hat{s}_{x=0} = \frac{e - 2}{e - 1} . \sqrt{\frac{e - 1}{e - 2\frac{1}{2}}} . \frac{q_o}{kH} . \sqrt{Dt} \qquad \ldots\ldots (40)$$

De verhouding $\frac{\hat{s}_o}{s_o}$ is nu 1.0394, dus beter dan bij de parabolische benadering.

Het quotiënt $\frac{\hat{s}}{s_o}$ is voor het hele gebied van $t > 0$, $x > 0$ uitgezet tegen $\frac{x}{\sqrt{Dt}}$ in figuur 4.

Het blijkt dat de exponentiële benadering beter voldoet dan de parabolische.

4. OVERIGE STROMINGSTYPEN

De beschreven techniek van de penetratietheorie kan ook op andere tijdsafhankelijke stromingstypen worden losgelaten. Men kan b.v. denken aan de stroming in een half-oneindig watervoerend pakket met freatisch grondwater dat gescheiden is van een pakket met spannings-grondwater (van constante druk) door een semi-permeabele laag (figuur 5).
De vergelijking voor deze stroming luidt

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{\mu c} s - D \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{met } D = \frac{kH}{\mu} \qquad \ldots\ldots (41)$$

De integraalvergelijking wordt dan

$$\underset{(a)}{\mu \cdot \frac{d}{dt} \int_o^\delta s dx} + \underset{(b)}{\frac{1}{c} \int_o^\delta s dx} = \underset{(c)}{q_o} \qquad \ldots\ldots (42)$$

Fysische interpretatie van (42):
(a) = bergingsverandering op het interval $0 < x < \delta$
(b) = totale instroming vanuit het spanningsgrondwater door de semi-permeabele laag op het interval $0 < x < \delta$
(c) = uitstroming op $x = 0$.

Voor s kan wederom een benaderingsfunctie gekozen worden, parabolisch of anderszins, die aan de randvoorwaarden moet voldoen.
Uit (42) wordt δ weer gevonden. Dit is hier niet verder uitgewerkt.
Zowel bij een parabolische- als een exponentiële benadering wordt gevonden

$$\delta = \beta \cdot \lambda \cdot \sqrt{\left\{1 - e^{-2 \frac{t}{\mu c}}\right\}} \qquad \text{waarin } \lambda = \sqrt{kHc} \qquad \ldots\ldots (43)$$

Uit (43) wordt afgeleid dat voor $t \to \infty$ de toestand stationair wordt.
Dit is ook uit de differentiaalvergelijking af te leiden m.b.v. dimensie-analyse.
Gebruikmakend van dezelfde karakteristieke schalen als in hoofdstuk 2, wordt (41)

$$\underset{(a)}{\frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{t}}} + \underset{(b)}{\frac{T}{\mu c} \bar{s}} - \underset{(c)}{\frac{DT}{\delta^2} \frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{x}}} = 0 \qquad \ldots\ldots (44)$$

Voor $t \ll \mu c$ is (b) verwaarloosbaar t.o.v. (a), dus reduceert (44) tot (1). Voor $t \gg \mu c$ is (a) verwaarloosbaar t.o.v. (b). De termen (b) en (c) moeten dan van dezelfde grootte-orde zijn, dus

$$\frac{T}{\mu c} \sim \frac{DT}{\delta^2}$$

$\delta \sim \sqrt{kHc}$ = constant

Voor $t \to \infty$ wordt de toestand dus stationair en reduceert (41) tot

$$\frac{1}{\mu c}\, s - D\, \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{...... (45)}$$

ofwel

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{\lambda^2}\, s = 0 \qquad \text{met } \lambda^2 = kHc \qquad \text{...... (46)}$$

De algemene oplossing voor (46) luidt

$$s = A\, e^{-\frac{x}{\lambda}} + B\, e^{\frac{x}{\lambda}} \qquad \text{...... (47)}$$

De constanten A en B worden bepaald uit de randvoorwaarden

$$\left.\begin{array}{l} s|_{x\to\infty} = 0 \quad \to \quad B = 0 \\ \text{Indien } s|_{x=0} = \Delta \text{ op } t = 0\text{, dan } A = \Delta \end{array}\right\} \to$$

Oplossing voor stationaire toestand wordt

$$s = \Delta\, e^{-\frac{x}{\lambda}} \qquad \text{...... (48)}$$

Tot slot van dit hoofdstuk kan er nog op gewezen worden, dat de beschreven techniek zich ook uitstekend leent voor radiale stromingssituaties, zoals de stroming naar putten. Veel inzicht in het gedrag van de oplossing kan ook daarbij reeds verkregen worden door een dimensie-analyse.

5. SAMENVATTING, CONCLUSIES

De vergelijkingen voor niet-stationaire grondwaterstroming hebben slechts bij bepaalde randvoorwaarden exacte oplossingen. In die exacte oplossingen komen dan nog lastige functies voor, waarvan de waarden alleen in tabelvorm te vinden zijn.
Met behulp van de penetratietheorie, stammende uit de leer der fysische transportverschijnselen, zijn benaderende oplossingen mogelijk. Deze oplossingen zijn veel eenvoudiger dan de exacte- en wijken bovendien maximaal slechts enkele procenten af. Gezien de fout die in de bepaling van de geohydrologische constanten kan zitten, kunnen de beschreven oplossingen een aantrekkelijk alternatief vormen, door het geringe rekenwerk dat die met zich meebrengen.
Een kracht van de beschreven methode is bovendien dat ze niet aan specifieke randvoorwaarden gebonden is. Ook voor randvoorwaarden waar geen exacte oplossing voor bekend is, kan deze methode dus succesvol toegepast worden.

GERAADPLEEGDE LITERATUUR

1. Huisman, L. : Groundwater Recovery, MacMillan Press Ltd.

2. Welty, J.R.; Wilson, R.E.; Wicks, C.E. : Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer, Wiley & Sons, Inc.

3. Verruijt, A. : Theory of groundwaterflow, MacMillan Press Ltd.