
Valse voorspelling van verdroging in een numeriek model

Oorzaak: De onderschatting van de weerstand van de 1^e scheidende laag onder een waterloop

Wim J. de Lange

Inleiding

Het verkeerd voorspellen van de freatische grondwaterstand met een numeriek model is mijns inziens de enig juiste context van de term “numerieke verdroging”, zoals die is geïntroduceerd door Jaco van der Gaast en collega’s (Van der Gaast e.a., 2006). En daar gaat het hier over: het verkeerd berekenen van de effecten van een verandering in de stijghoogte (bijvoorbeeld door een onttrekking) op de freatische grondwaterstand met een numeriek grondwatermodel.

Het begrip ‘numerieke verdroging’ is in andere vorm onderwerp geweest van een langdurige discussie in de Nederlandse hydrologische tijdschriften (Van der Gaast e.a. 2008a en b, Maas, 2008 en Maas e.a., 2008). In 2009 presenteerden Kees van Immerzeel en Jan Siem Rus (Van Immerzeel en Rus, 2009) een verklaring op numerieke grondslag voor het verschijnsel dat de verandering in de diepe stijghoogte groter kan zijn dan die in het bovenliggende freatische pakket. Ook zij verbinden de term numerieke verdroging met de relatie tussen een numeriek model en het mogelijk fout berekenen (voorspellen) van de freatische waterstand als belangrijkste parameter voor “verdroging”. Dat artikel bracht mij op het idee om de oorzaak te gaan zoeken in de theoretische achtergrond van het numerieke modelleren van het topsysteem.

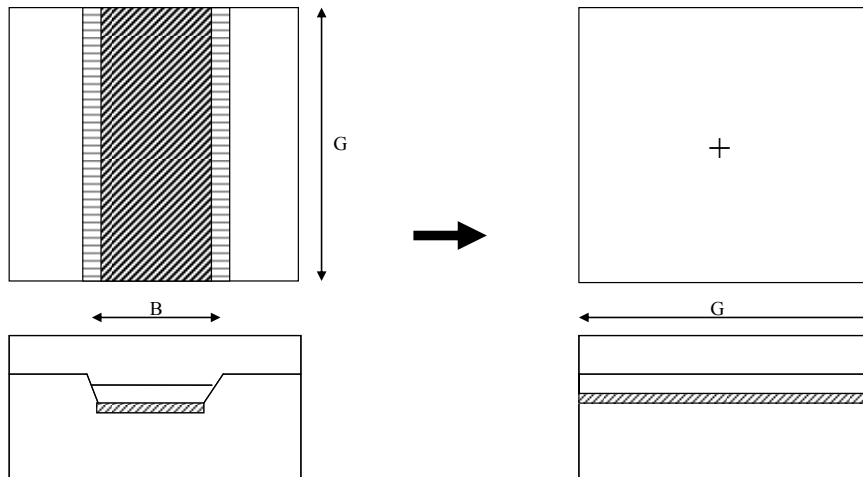
Rond 10 jaar geleden zijn onder andere in Stromingen artikelen verschenen over hoe de interactie tussen oppervlaktewater en grondwater in een numeriek model zou moeten worden geparametriseerd. Intensieve discussies en theoretische ontwikkelingen hebben in die tijd ongeveer 10 jaren lang een groep hydrologen bezig gehouden in de zogeheten “landelijke consensusgroep hydrologie”. De belangrijkste uitkomst was dat we moeten werken met de freatische lekweerstand (term van Jan van Bakel), een parameter die afhangt van de celgrootte en van de verdeling van de stroming binnen het topsysteem binnen die cel (Groenendijk e.a., 2002). De freatische lekweerstand wordt gehanteerd in het NHI (www.nhi.nu), waar door de relatief grote cellen van 250 meter in het grondwatermodel fouten in de opschaling sterk worden uitvergroot.

Wim de Lange is werkzaam bij Deltares, Utrecht.

Omdat we al weer 10 jaar later zijn begin ik met een samenvattende inleiding van achtergronden van de vergelijkingen, waarmee de freatische lekweerstand kan worden bepaald.

Achtergrond

In een numeriek grondwatermodel zoals MODFLOW (of MicroFEM) wordt een waterloop omgerekend tot een eenvoudige weerstand-en-peil-relatie op de bovenkant van het model.



Figuur 1: Basisprincipe opschaling in MODFLOW- en FEM-modellen.

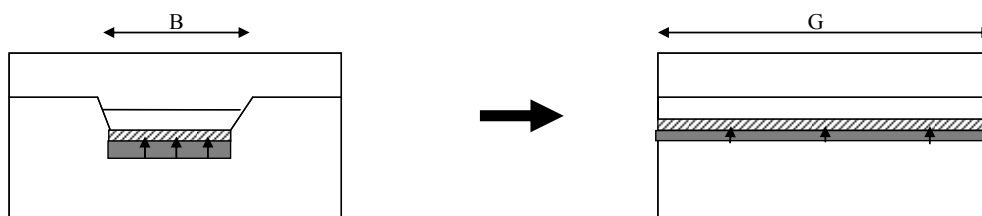
Bij MODFLOW wordt op de bovenrand de voorwaarde gehanteerd waarmee de flux van of naar de waterloop in een cel wordt berekend op het rekenpunt uit het verschil tussen het waterpeil en de grondwaterstand in de cel, vermenigvuldigd met de conductance. De conductance is gelijk aan het oppervlak van de waterloop binnen de cel A_{ow} gedeeld door de bodemweerstand van de waterloop. In het gebruik van de conductance zit impliciet de verschaling van de bodemweerstand c_{ow} naar de celweerstand c_{cel} over het celoppervlak c_{cel} volgens:

$$\text{Conductance} = A_{ow}/c_{ow} = A_{cel}/c_{cel} \quad (1)$$

Bij openwater ongeveer evenwijdig aan de cel richting geldt dan met B = slootbreedte, G = gridcelgrootte (zie figuur 1):

$$B \times G / c_{ow} = G \times G / c_{cel} \text{ en dus } c_{cel} = c_{ow} \times G / B \quad (2)$$

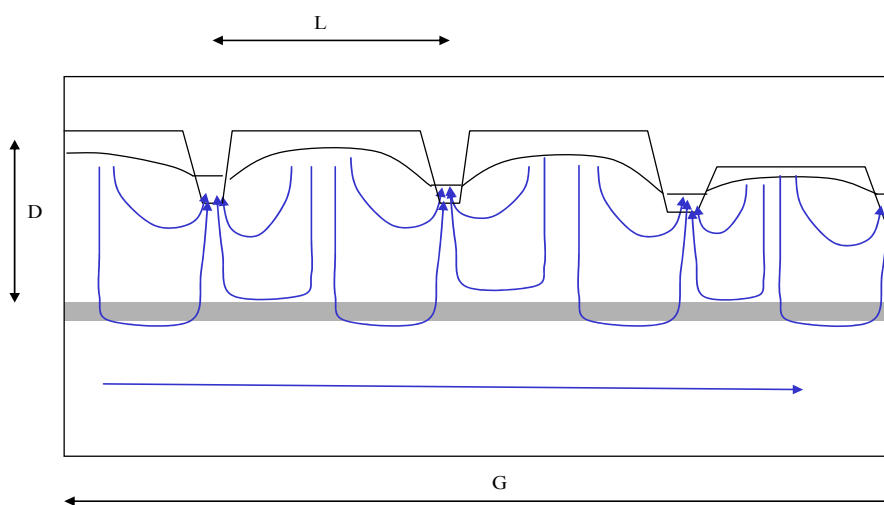
In het topsysteem per cel (of element) geldt één waarde voor stijghoogte, freatische grondwaterstand, beide fluxen en voor alle invoerparameters (peil, weerstanden, doorlaatvermogen, etc.). Dat we rekenen in de cel met één stromingssterkte voor de verticale stroming naar de waterloop en één stromingssterkte voor de verticale stroming door de scheidende laag (figuur 2) betekent dat de opschaling 1-dimensionaal is.



Figuur 2: Basisopschaling in MODFLOW en FEM is gebaseerd op constante verticale flux.

In het geval van figuur 2 is sprake van een waterloop met constante stroming door de waterbodem en is de benadering van MODFLOW juist.

Heel vaak (in ieder geval bij NHI met grote gridcellen van $250 \times 250 \text{m}^2$) is er significante variatie in de verticale flux over de waterbodem en scheidende laag. Dat komt veel voor in de “overgangsgebieden” tussen hoog en laag Nederland (figuur 3).



Figuur 3: Binnen een grote cel met ontwatering komt vaak significante variatie in verticale flux voor.

Hoewel we weten dat er variatie is (figuur 3), nemen we toch aan dat ter plaatse van de cel alle plaatsgebonden variatie in de werkelijkheid voldoende kan worden gerepresenteerd door één enkele combinatie van getallen op het rekenpunt. We middelen dus de ondergrondparameters en verscalen de ruimtelijke variatie in stroming, grondwaterstand en stijghoogte naar het niveau van een modelcel.

In eerdere artikelen in *Stromingen* door De Lange (1997b) en Groenendijk (2002) is aangetoond dat de eendimensionale verscaling in (1) en (2) leidt tot foute waarden, vooral bij het gebruik van cellen die relatief groot zijn ten opzichte van de variatie van de verticale stroming in het topsysteem en bij grote fluxvariatie door de bodem van waterlopen. Daarom wordt tweedimensionale verscaling toegepast die ook in het 3-D topsysteem – variabele afstanden tussen willekeurig gelegen waterlopen – is gecheckt (zie tekst bij figuur 5). Dit systeem wordt enigszins vereenvoudigd in NHI toegepast.

De afleiding van de tweedimensionale verscaling werkt met de voedingsweerstand. Dat is de weerstand tussen de waterlopen en het eerste regionale watervoerend pakket, waarin de variatie in de stijghoogte wordt verondersteld klein te zijn ten opzichte van die van het freatisch vlak. In de afleiding worden de variabele verticale fluxen over

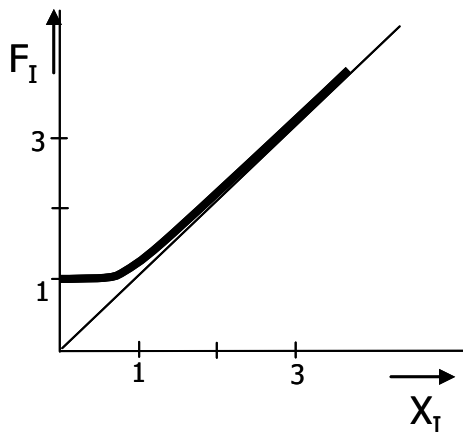
de waterbodem en de scheidende laag gesommeerd door analytische integratie. De gemiddelde freatische grondwaterstand wordt ook analytisch bepaald. Uit totale flux naar het eerste regionale watervoerend pakket (Q) en het verschil tussen de stijghoogte ϕ daarin en het openwater peil p volgt dan voedingsweerstand ($c^* = (p-\phi)/Q$).

De meest eenvoudige vorm van de formule voor de voedingsweerstand c^*_L , zoals die in Stromingen (De Lange, 1997a) is gepresenteerd, geldt voor het deel tussen de sloten (index L van Land) en luidt:

$$c^*_L = (c_0 + c_1')F_L + (c_0L/B)F_B \quad (3)$$

Daarin geeft de functie $F_I = X_I \operatorname{ctnh}(X_I)$ met $X_I = l/2\lambda_I$ en $l=B, L$ de correctiemaat in termen van de weerstanden in de cel voor de variatie in de flux over de waterbodem (index B) of onder het land tussen de sloten (index L), zie figuur 4.

De overige parameters zijn geohydrologische constanten volgens: $c_1' = c_1 + D/k_v$; $\lambda_L = \sqrt{kDc_1'}$ en $\lambda_B = \lambda_L \sqrt{c_0/(c_0 + c_1')}$. Daarin is c_0 de waterbodemweerstand, c_1 is de weerstand van de onderliggende scheidende laag, B is de slootbreedte, D is de dikte van het freatische pakket, k_v is de verticale en k de horizontale doorlatendheid van het freatische pakket en L is de slootafstand. Hierbij is dus standaard aan de modelweerstand van de scheidende laag (c_1') de verticale weerstand (eventueel anisotropie) in het freatische pakket toegevoegd ($c_1' = c_1 + D/k_v$).



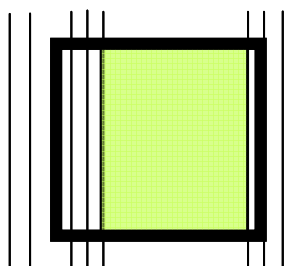
Figuur 4: De functie F_I is ook te schrijven als $y = 1 + x - x/(1+x)$.

De meer uitgebreide uitleg en afleiding van formule 3 is te vinden in de reeks van drie artikelen in Stromingen (De Lange, 1997a,b en c), waarvan het eerdergenoemde artikel de middelste is. Formule 3 vormt de kern van de complete formule voor zowel het landgedeelte (index L) als het waterloopgedeelte (index B), die wordt beschreven in de paragraaf "hoe veranderen de vergelijkingen".

Tussen het openwater (sloot) en het freatische pakket geldt de freatische lekweerstand c_F als celweerstand, dus op de bovenrand van de cel, volgens:

$$c_F = c^*_L - c_1' \quad (4)$$

Voor de effecten van de gekromde stroming rond de waterloop (zie figuur 3) wordt algemeen de radiale weerstand volgens Ernst (1961) gehanteerd.



Figuur 5: Parallel systeem met variabele afstand tussen de waterlopen.

In het geval van parallelle waterlopen met variabele afstand (figuur 5) kan eenvoudig worden afgeleid dat dit gelijkwaardig kan worden gezien aan parallel geschakelde weerstanden tussen elke twee waterlopen en het grondwater in het regionale watervoerend pakket. Dan kan worden afgeleid (De Lange, 1996) dat voor de celweerstand de gemiddelde slootafstand kan worden berekend met de drainagedichtheid (= cel oppervlak / slootlengte). In De Lange (1996) wordt dit ook aangetoond voor willekeurig gelegen waterlopen binnen een cel. Voor het geval dat de cel kleiner is dan de afstand tussen de waterlopen blijkt in veel gevallen de celgrootte G (figuur 2) te kunnen worden gebruikt voor de waarde van de slootafstand (De Lange, 1997b).

Wat gaat er nu fout: de oorzaak van numerieke onjuiste voorspelling van verdroging

In NHI gebruiken we de freatische lekweerstand c_f volgens formule (4). In feite nemen we in (4) de weerstand van de scheidende laag als constant over de cel, net zoals dat in MODFLOW en alle andere modellen gebruikelijk is. Juist in die (niet) opschaling van de weerstand van de scheidende laag zit nu een fundamentele oorzaak van numerieke verdroging.

We kijken naar het gebied rond de waterlopen, waar de effecten van diepe winningen in de freatische grondwaterstanden verkeerd schijnen te gaan in de voorspellingen (figuur 6).

In figuur 5 is de stroming in het topsysteem rond een waterloop schematisch weergegeven. Daarin zijn twee karakteristieke patronen te onderscheiden, die we moeten meenemen in de berekening in de cel:

- 1 De grootte van de kwel varieert over de bodem van de waterloop. Langs de randen is het verschil tussen de freatische grondwaterstand en het peil het grootst. In het midden is de freatische grondwaterstand het verst aangepast richting het oppervlaktewaterpeil en is de kwel het kleinst.
- 2 Door de onderliggende scheidende laag is de verticale stroming het grootst ter plaatse van de waterloop en neemt de stroming af met de afstand tot de rand van het oppervlakte water. De stijghoogte in het onderliggende watervoerend pakket is relatief constant ten opzichte van het verloop in het freatische vlak.

We zien in figuur 5 dat de variatie in de verticale stroming plaatsvindt over zowel de bovenlaag als de onderlaag van het topsysteem. De correctie voor deze stromingsvariatie zit in de twee F_1 termen in formule 3. Die termen zijn verbonden met zowel c_0 als c_1' . De termen met c_0 hebben betrekking op de stromingscorrectie voor de bovenrand en de term met c_1' corrigeert voor de onderrand. We moeten daarom schrijven:

$$c_F = c^* - c_1^* \quad (5)$$

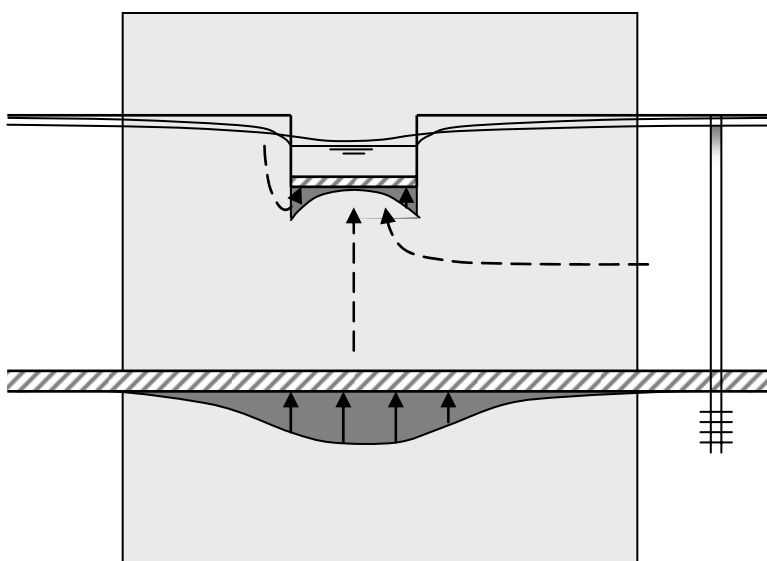
dus met c_1^* in plaats van c_1' , waarin:

$$c_1^* = (c_1') F_L \quad (6)$$

Deze laatste formule beschrijft de juiste weerstand van de onderlaag in het topsysteem, voor het gebied naast het oppervlaktewater.

We hebben tot nu toe die laatste term met c_1' altijd in de freatische lekweerstand laten zitten. We trokken immers alleen c_1' van de voedingweerstand c^* af in (4). In de gevallen dat $F_L > 1$ laten we te veel weerstand op de bovenlaag liggen en brengen te weinig weerstand op de onderlaag aan. Ergo, door de niet met de F_L -term gecorrigeerde weerstand van de scheidende laag, c_1' , worden de effecten vanuit de onderrand op het topsysteem (bijvoorbeeld van een onttrekking) te weinig gedempt. Omgekeerd worden de effecten vanuit de bovenkant (het oppervlaktewater) te veel gedempt.

In MODFLOW-modellen wordt standaard bij gebruik van het RIV-package dus 1-D opgeschaald en worden de correcties voor de variatie van de werkelijke grondwaterstroming binnen het gebied van de cel in het geheel niet meegenomen. Dit geldt ook voor bijna alle andere numerieke modeltechnieken.



Figuur 6: Schematische weergave van de stroming in het topsysteem. De grijze vlakken geven de verdeling aan van de stroming door de scheidende lagen onder het oppervlaktewater.

Wanneer speelt dit?

Zoals Kees Maas (2008), Kees van Immerzeel en Jan Siem Rus (2009) in hun analyse ook concluderen speelt dit niet in gebieden zonder oppervlaktewater, dus niet in infiltratiegebieden zoals hoge zandgronden. Het speelt ook niet als de stromingvariatie over de onderliggende scheidende laag klein is, dus bijvoorbeeld in West- en Noord-Nederland in gebieden met dikke scheidende lagen. In het navolgende wordt duidelijk waar het wel belangrijk is. Juist in de overgangsgebieden tussen hoog en laag Nederland speelt dit wel, dus in de zandgebied met open water.

Voor het belang van de stromingvariatie moeten we kijken naar het gedrag van de F_L -functie (figuur 4), de parameter die de stromingsvariatie vertaalt in termen van de celweerstand. Daaruit kunnen we afleiden waar het wel speelt en hoe groot afwijkingen zijn. We kijken daarvoor naar de term (c_1') F_L , de term die moet worden verplaatst van de bovenrand naar de onderrand van het topsysteem en komt in de plaats van c_1' . Zoals in het eerste artikel uit de eerder genoemde reeks van drie in Stromingen (De Lange, 1997a) is beschreven geldt bij kleine en grote waarden voor $X_L = L/2\lambda_L$ (zie uitleg bij formule 3) een vereenvoudiging volgens:

$$F_L = 1, \text{ dus } (c_1') F_L = c_1', \text{ als } X_L < 1 \quad (7a)$$

$$F_L = X_L, \text{ dus } (c_1') F_L = (c_1') X_L, \text{ als } X_L > 3 \quad (7b)$$

In het eerste geval gaat het in NHI en standaard MODFLOW dus goed. Zodra $X_L > 1$, blijft er een restterm in de formule voor de freatische lekweerstand staan, die niet bij de bovenrand hoort, maar bij de onderrand. De fout begint als $X_L > 1$ en dus als $L/2 > \lambda_L$, dus als de halve slootafstand groter wordt dan de spreidingslengte van het topsysteem tussen de openwaterlopen. In het geval de breedte van de cel Δx kleiner is dan de slootafstand geldt bij benadering (zie De Lange, 1997c) dat $\Delta x/2 > \lambda_L$ en dus de conditie dat de halve celgrootte groter wordt dan de spreidingslengte. In beide gevallen leidt het niet corrigeren voor de stromingsvariatie tot onderschatting van de weerstand van de onderlaag.

Kleine spreidingslengtes (meters) ten opzichte van slootafstand komen voor in zandgronden met slootafstanden van tien tot honderd meter of meer en in een fijnzandige of licht gelaagde bovenlaag boven het eerste regionale watervoerende pakket.

Het probleem doet zich dus juist voor in de overgangsgebieden, dus met een kleine spreidingslengte in het topsysteem ten opzichte van de slootafstand (en celgrootte).

Hoe veranderen de complete vergelijkingen?

Om de juiste representatieve weerstanden te vinden moet ik helemaal terug naar de basis van de afleiding van de formules (De Lange, 1999). De totale voedingsweerstand beschrijft alle weerstand in het systeem tussen het onderliggende watervoerende pakket en het oppervlaktewater. Deze voedingsweerstand wordt gevonden door het parallel optellen van de twee weerstanden in het gebied van het oppervlakte water c_B^* en in

het gebied ernaast, onder het land, c^*_L :

$$c^*_{tot} = (B c^*_L + L c^*_B) / (B + L) \quad (8)$$

De voedingsweerstand c^*_B voor het traject onder de sloot (index B) in De Lange (1999) bevat een fout, die al is rechtgezet in het Stromingenartikel van Groenendijk e.a. (2005) en is gecorrigeerd in NHI. Deze voedingsweerstand moet geschreven worden als:

$$c^*_B = (c_0 + c_1') R \quad (9)$$

met $R = 1 / [1 - c_0 L / (B c^*_L)]$. De waarde van R ligt meestal dichtbij 1 (vergelijk het aandeel van $c_0 L / B$ in formule 3 voor c^*_L).

Nu gaan we de weerstanden op de bovenrand en die op de onderrand van het topsysteem apart combineren op dezelfde wijze als bij de voedingsweerstand volgens vergelijking 8. Dat betekent dat de termen met c_0 in (3) en (9) en die met c_1' in deze vergelijkingen worden gecombineerd als parallelle weerstanden. Voor de bovenrand levert dit:

$$c^*_0 = c_0 (B+L) R (F_L + F_B L/B) / (L F_B + B F_L + R L) \quad (10)$$

en voor de onderrand wordt de vergelijking:

$$c^*_1 = c_1' (B+L) R F_L / (B F_L + R L) \quad (11)$$

Als $L=0$ (waardoor $F_L=1$ en $R=1$) vervallen de termen met de haakjes, blijven alleen c_0 en c_1' staan en volgt de weerstand van een cel volledig bedekt met oppervlaktewater (plaspas of meer).

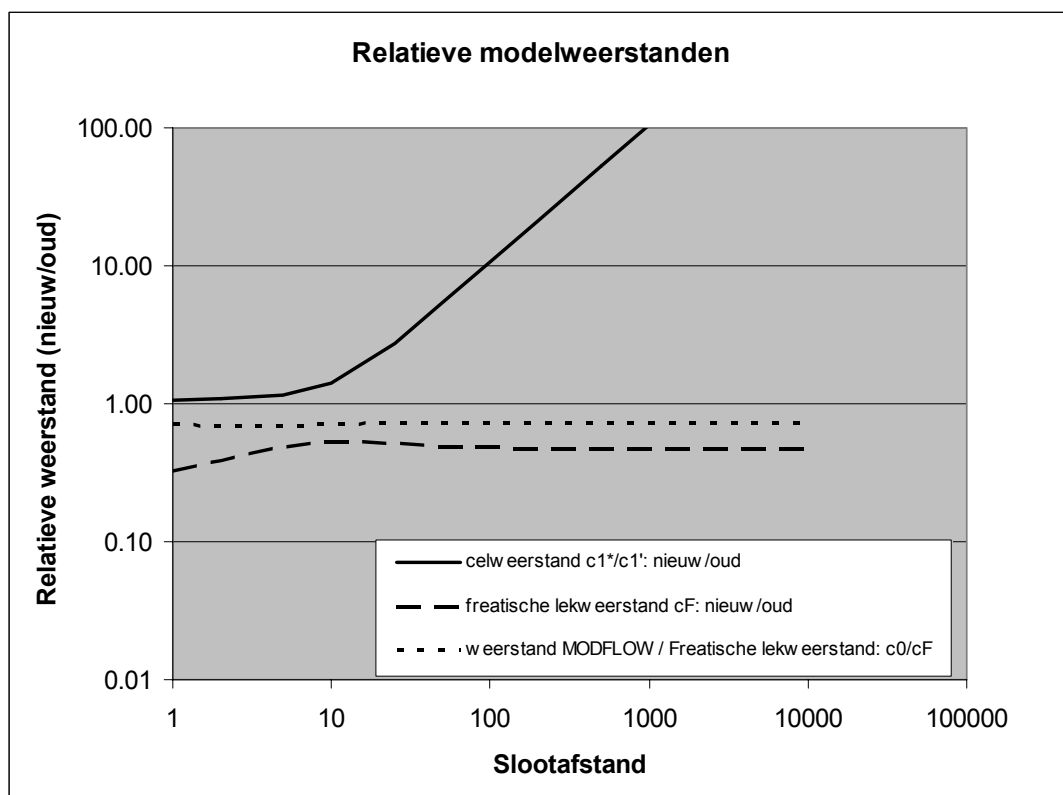
Nu kunnen we met getallenvoorbeelden gaan kijken wat de verschillen zijn tussen de freatische lekweerstand en de formule in de RIV-package in standaard MODFLOW. Voor dit artikel ligt het belangrijkste, principiële, verschil in de vergelijking voor de celweerstand c^*_1 . Tot nu toe wordt de celweerstand één op één overgenomen van de weerstand van de scheidende laag, dus onafhankelijk van slootafstand en andere parameters. In vergelijking 11 is wel terugkoppeling met de andere parameters van het topsysteem. Dat is goed, omdat we ook over de onderrand grondwaterstroming zien, die bepaald wordt door de spreidingslengte, en die zeker niet altijd zo groot is dat de stromingsverdeling constant met de afstand tot het midden van de sloot is.

Een grote spreidingslengte in het onderliggende systeem, behorend bij het regionale watervoerende pakket, geeft overigens dezelfde uitkomst: hoe groter deze spreidingslengte, hoe vlakker de verdeling van de stijghoogte onder de scheidende laag, hoe groter de variatie in de flux over de laag. In het onderliggende pakket is het effect van de sloot slechts een rimpeltje.

Hoe groot is het effect?

Vooral bij een scheidende laag met kleine weerstand en topsysteem met klein doorlaatvermogen wordt de stroming vanuit het oppervlaktewater naar het onderliggende watervoerend pakket maar over een beperkte afstand verspreid. Als die afstand kleiner is dan de slootafstand (of celgrootte) wordt de representatieve modelweerstand onderschat.

Met een rekenvoorbeeld blijkt bij: $c_0=2d$, $c_1=10d$, $B=1m$, $L=100m$, $D/k_v=6d$, $kD=2m^2/d$ volgt dat $c_1^*=170d$. Dat is meer dan tien maal zoveel als tot nu toe voor de modelweerstand voor de onderlaag wordt gehanteerd: $c_1'=10+6=16d$. Bij 25 en 50 meter slootafstand zijn de factoren 2,8 resp. 5,4 (zie figuur 7).



Figuur 7: Relatieve weerstandsverschillen bij $c_0=2d$, $c_1=10d$, $B=1m$, $D/k_v=6d$ en $kD=2m^2/d$.

In figuur 7 (streeplijn) zien we dat de freatische lekweerstand, de weerstand op de bovenrand van het topsysteem enigszins kleiner (70% in dit geval) is geworden. Dit geldt ook als we de nieuwe waarde vergelijken met de klassieke MODFLOW (RIV-package) benadering (stippellijn in figuur 7), zonder de radiale weerstand in deze vergelijking te betrekken.

Wat is de fysische oorzaak?

Bij een cel en slootafstand tot ongeveer ter grootte van de spreidingslengte, dus ongeveer het gebied van de zwarte peilen in figuur 6, is er geen probleem. De gemiddelde

flux over de scheidende laag en waterbodem klopt dan met de gemiddelde opgeschaalde flux in de cel. De cel omvat als het ware de zone waarin de kerntoestroming naar de waterloop plaatsvindt. Wordt de cel groter dan omvat deze ook een gebied waarin nauwelijks meer stroming richting de waterloop plaatsvindt. Dat is het gebied waar de flux sterk afneemt en verder buiten de grijze zone in figuur 6. Als met de ongeschaalde verticale weerstand van de scheidende laag wordt gerekend, terwijl door de rekenwijze de waterloop op de celknoop is geplaatst, dan wordt de flux in de zone van kerntoestroming ook uitgevoerd over de rest van de cel. Maar in dat rest gebied is de flux naar de waterloop (veel) kleiner. Daarom moet gemiddeld over de cel de weerstand groter worden voor de juiste gemiddelde flux over de cel bij de in het model berekende grondwaterstand en stijghoogte.

Door het groter moeten zijn van de verticale weerstand onder een waterloop zal een ingreep in het diepe watervoerend pakket minder sterk doorvertaald worden naar de freatische waterstand in een numeriek model.

Slotopmerkingen

Zoals ik in een stelling bij mijn proefschrift formuleerde: "Een onderzoeker moet herhaaldelijk zijn eigen werk over boord durven zetten.", geldt dat ook hier. Wat fout is, moet worden vervangen door nieuwe inzichten. We zullen onze bestaande werkwijze en resultaten nu moeten gaan herijken. Het bepalen van de weerstand van de eerste scheidende laag afhankelijk van de stromingsvariatie in het topsysteem geeft een nieuwe uitdaging in de parameterisering van een numeriek model .

Literatuurlijst

- Ernst, L.F. (1961)** Grondwaterstromingen in de verzadigde stroming en hun berekening bij de aanwezigheid van horizontale evenwijdige open leidingen; Verslag Landbouwkundig onderzoek, 67.15, Pudoc, Wageningen.
- Gaast, J.W.J. van der, H.R.J. Vroon en H.Th.L. Massop (2006)** Verdroging veelal systematisch overschat; in: *H₂O*, nr 21, pag 39-43.
- Gaast, J.W.J. van der, H.R.J. Vroon en H.Th.L. Massop (2008a)** Oorzaak en gevolg van numerieke verdroging; in: *H₂O*, nr 5, pag 51-56.
- Gaast, J.W.J. van der, H.R.J. Vroon en H.Th.L. Massop (2008b)** Omgekeerde hydrologie; in: *H₂O*, nr 20, pag 33-35.
- Groenendijk, P, W.J. de Lange en K. Kovar (2002)** Modelconcepten voor de interactie tussen verzadigd grondwater en oppervlaktewater; in: *Stromingen*, jrg 8, nr 2, pag 11-28.
- Immerzeel, K. van en J. Rus (2009)** Verdroging doorgrondwaterwinning boven ondiepe leemlagen; in: *H₂O*, nr 18, pag 53-55.
- Lange, W.J. de (1996)** Groundwater modeling of large domains with analytic elements; proefschrift TU Delft Civiele techniek, ISBN 90-369-4569-0.
- Lange, W.J. de (1997a)** Nieuwe inzichten in het gebruik van voedingsweerstand of drainageweerstand in de randvoorwaarde van een grondwatermodel, Deel 1: De

- basis voor het modelconcept; in: *Stromingen*, jrg 3, nr 2.
- Lange, W.J. de (1997b)** Nieuwe inzichten in het gebruik van voedingsweerstand of drainageweerstand in de randvoorwaarde van een grondwatermodel, Deel 2: Het gebruik van de randvoorwaarde; in: *Stromingen*, jrg 3, nr 3.
- Lange, W.J. de (1997c)** Nieuwe inzichten in het gebruik van voedingsweerstand of drainageweerstand in de randvoorwaarde van een grondwatermodel, Deel 3: Het parameteriseren van de randvoorwaarde; in: *Stromingen*, jrg 3, nr 4.
- Lange, W.J. de (1999)** A Cauchy boundary condition for the lumped interaction between an arbitrary number of surface waters and a regional aquifer; in: *Journal of Hydrology*, vol 226, pag 250–261.
- Lange, W.J. de (2001)** Wanneer geldt ‘slootafstand = elementbreedte’ in de berekening van de topsysteemweerstand voor grondwatermodellering?; in: *Stromingen*, jrg 7, nr 3, pag 13–16.
- Maas, C. (2008)** Omgekeerde hydrologie?; in: *H₂O*, nr 22, pag 36.
- Maas C., J. von Asmuth en H. Runhaar (2008)** Kanttekeningen bij “Oorzaak en gevolg van numerieke verdroging”; in: *H₂O*, nr 9, pag 22–24.