

INTERIM RAPPORT
BEREKENING VAN THERMISCHE STRATIFICATIE
HET RECHTE BAK MODEL

NOTA 37

G.J.G. KOK

JULI 1976
LABORATORIUM VOOR HYDRAULICA EN AFVOERHYDROLOGIE (CODE 2214)
WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM (R870)
LANDBOUWHOGESCHOOL
WAGENINGEN

INHOUD

Blz.

SYMBOLENLIJST

1.	<u>INLEIDING</u>	1
2.	<u>PROBLEEMSTELLING</u>	1
3.	<u>PROCESBESCHRIJVING VOOR EEN RECHTE BAK</u>	2
3.1.	DE PRODUCTIE VAN KINETISCHE ENERGIE IN DE OPPER- VLAKTELAAG	2
3.2.	DE BUOYANCY FLUX IN DE OPPERVLAKTELAAG	3
3.3.	DE MENGINGSDIEPTE	4
3.4.	ONTWIKKELINGEN VAN HET GRENSVLAK	4
3.4.1.	<u>Isotherme ontwikkeling</u>	4
3.4.2.	<u>Opwaartse ontwikkeling</u>	5
3.4.3.	<u>Neerwaartse ontwikkeling</u>	6
3.5.	OVERGANGEN IN ONTWIKKELING	7
3.6.	AFHANKELIJKHEID VAN DE WEERSGEGEVENS	8
3.6.1.	<u>De schuifspanning en de schuifspanningssnelheid</u>	8
3.6.2.	<u>De netto warmteflux tussen lucht en water</u>	8
3.6.3.	<u>Beschikbare weergegevens</u>	10
3.7.	DE TEMPERATUURAFHANKELIJKHEID VAN DE DICHTHEID	10
3.8.	OPTIMALE MENGINGS- EN ENTRAINMENTCONSTANTEN	11
3.9.	DE WISKUNDIGE PROBLEEMSTELLING	13
3.10.	NOODZAKELIJKE GEGEVENS	15
3.10.1.	<u>Beginvoorwaarde voor het temperatuurprofiel</u>	15
3.10.2.	<u>Weergegevens voor de periode van berekening</u>	15
3.10.3.	<u>Fysische constanten</u>	16
4.	<u>RESULTATEN</u>	17
4.1.	ONGEMODIFICEERDE SCHUIFSPANNINGSFORMULE	17
4.2.	GEMODIFICEERDE SCHUIFSPANNINGSFORMULE	19
5.	<u>CONCLUSIE</u>	20
	<u>REFERENTIES</u>	23

SYMBOLENLIJST

$a = \text{constant}$: windfunctiecoëfficiënt in verdampingsterm	$\text{mm mbar}^{-1} \text{d}^{-1}$
$A_0 = \text{constant}$: wateroppervlak van het meer	m^2
$b = \text{constant}$: windfunctiecoëfficiënt in verdampingsterm	$\text{mm mbar}^{-1} \text{m}^{-1}$
$C = \text{constant}$: mengingscoëfficiënt	$\text{d}^2 \text{ } ^\circ\text{C}^2 \text{m}^{-1}$
$C_D = \text{constant}$: dragcoëfficiënt	1
$C_{DM} = \text{constant}$: gemodificeerde dragcoëfficiënt	1
$C_E = \text{constant}$: effectieve entrainmentcoëfficiënt	1
$C_M = \text{constant}$: effectieve mengingscoëfficiënt	$\text{d}^2 \text{ } ^\circ\text{C}^2 \text{m}^{-1}$
$c_p = \text{constant}$: warmtecoëfficiënt van water	$\text{Joule kg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dt}(t)$: snelheid waarmee de spronglaag zich verplaatst	m d^{-1}
$\frac{dT_i}{dt} = \frac{dT_i}{dt}(t)$: snelheid waarmee de temperatuur van de circulatiezone verandert	$^\circ\text{C d}^{-1}$
$e_a = e_a(t)$: dampdruk op 2 m hoogte	mbar
$e_s(T_N)$: verzadigde dampdruk bij T_N °K	mbar
$E_k = E_k(t)$: productie van kinetische energie in de circulatiezone per tijdseenheid	Joule d^{-1}
$E_p = E_p(t)$: buoyancy flux in de circulatiezone	Joule d^{-1}
$f_M = \text{constant}$: optimaliseringsfactor voor C_M	1
$g = \text{constant}$: versnelling t.g.v. de zwaartekracht	m d^{-2}
$G = G(t)$: globale straling	$\text{Joule m}^{-2} \text{d}^{-1}$
$h = \text{constant}$: maximale diepte van het meer	m
$kb = \text{constant}$: coëfficiënt in formule van Brunt	$\text{mbar}^{-\frac{1}{2}}$
$k = k(t)$: warmteuitwisselingssnelheid	m d^{-1}
$K = K(t)$: warmteuitwisselingscoëfficiënt	$\text{Joule m}^{-2} \text{d}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
$lb = \text{constant}$: coëfficiënt in formule van Brunt	1
$L = L(t)$: diepte van de circulatiezone	m
$L_i = L_i(t)$: mengingsdiepte; $i = 1, 2$ of 3 resp. voor een isotherme, opwaartse of neerwaartse ontwikkeling	m
$L_h = \text{constant}$: verdampingswarmte	$\text{Joule m}^{-2} \text{mm}^{-1}$
$m = \text{constant}$: coëfficiënt voor de bewolgingsgraad	1
$\overset{\sim}{\text{max.}}$: maximum van de absolute verschillen over de diepte en de tijd, tussen gemeten en berekende temperatuur	$^\circ\text{C}$

$n = \text{constant}$: coëfficiënt voor de bewolkingsgraad	1
$p = p(t)$: dagelijkse fractie zonneshijn	1
$q_b = q_b(t)$: productie van oprijvende kracht per oppervlakte per tijdseenheid	$\text{kg m}^{-1} \text{d}^{-3}$
$q_{ni} = q_{ni}(t)$: netto warmteflux tussen lucht en water, $i = 1, 2$ of 3 resp. voor de isotherme, opwaartse of neerwaartse ontwikkeling	$\text{Joule m}^{-2} \text{d}^{-1}$
$q_{nr}^* = q_{nr}^*(t)$: netto straling als de watertemperatuur gelijk zou zijn aan de natte-bol-temperatuur	$\text{Joule m}^{-2} \text{d}^{-1}$
$r = \text{constant}$: reflectiecoëfficiënt	1
t	: tijdcoördinaat	d
t_i	: begin tijdstip van de berekening	d
t_f	: eind tijdstip van de berekening	d
t_j	: tijdstip van temperatuurmeting	d
$T = T(z, t)$: watertemperatuur	$^{\circ}\text{C}$
$T_o = T_o(t)$: temperatuur van de circulatiezone	$^{\circ}\text{C}$
$T_i = T_i(t)$: idem, voor $i = 1, 2$ of 3 resp. voor een isotherme, opwaartse of neerwaartse ontwikkeling	$^{\circ}\text{C}$
$T_{in} = \text{constant}$: initiële temperatuur of $t = t_i$	$^{\circ}\text{C}$
$T_a = T_a(t)$: luchttemperatuur op 2 m hoogte	$^{\circ}\text{C}$
$T_A = T_A(t)$: idem	$^{\circ}\text{K}$
$T_e = T_e(t)$: evenwichtstemperatuur	$^{\circ}\text{C}$
$T_E = T_E(t)$: idem	$^{\circ}\text{K}$
$T_n = T_n(t)$: natte-bol-temperatuur	$^{\circ}\text{C}$
$T_N = T_N(t)$: idem	$^{\circ}\text{K}$
$T_z = T_z(t)$: temperatuur direct onder de spronglaag	$^{\circ}\text{C}$
$w^* = w^*(t)$: schuifspanningssnelheid in water	m d^{-1}
$w_2 = w_2(t)$: windsnelheid op 2 m hoogte	m d^{-1}
$w_{10} = w_{10}(t)$: windsnelheid op 10 m hoogte	m d^{-1}
z	: dieptecoördinaat	m
z_i	: diepte waarop de temperatuur is gemeten	m
$z_o = \text{constant}$: ruwheidshoogte	m

$\alpha_i = \alpha_i(t)$: thermische uitzettingscoëfficiënt van water; $i = 1, 2$ of 3 resp. voor een isotherme, opwaartse of neerwaartse ontwikkeling	$^{\circ}\text{C}^{-1}$
$\beta = \text{constant}$: coëfficiënt in $\rho(T)$ relatie	$^{\circ}\text{C}^{-2}$
$\gamma = \text{constant}$: psychrometer constante	mbar $^{\circ}\text{K}^{-1}$
$\delta = \delta(t)$: verandering van de dampdruk bij verandering van de luchttemperatuur	mbar $^{\circ}\text{K}^{-1}$
$\Delta\rho = \Delta\rho(t)$: dichtheidsverschil over de spronglaag	kg m^{-3}
$\bar{\mu}$: gemiddelde over de diepte en de tijd van de verschillen tussen gemeten en berekende temperatuur	$^{\circ}\text{C}$
$\rho_a = \text{constant}$: dichtheid van de lucht	kg m^{-3}
$\rho_o = \text{constant}$: dichtheid van water	kg m^{-3}
$\rho(T)$: dichtheid van water als functie van de temperatuur $^{\circ}\text{C}$	kg m^{-3}
$\sigma = \text{constant}$: constante van S. Boltzmann	Joule $\text{m}^{-2} \text{d}^{-1} ^{\circ}\text{K}^{-4}$
$\bar{\sigma}$: standaardafwijking voor de verschillen over diepte en tijd tussen gemeten en berekende temperatuur	$^{\circ}\text{C}$
$\tau = \tau(t)$: schuifspanning tussen lucht en water	kg $\text{m}^{-1} \text{d}^{-2}$
$\tau_m = \tau_m(t)$: gemodificeerde τ	kg $\text{m}^{-1} \text{d}^{-2}$

1. INLEIDING

In een voorgaand rapport, Kok [7], werden de resultaten vermeld die bereikt zijn bij het berekenen van thermische stratificatie, met gebruikmaking van de energiemethode, Verhagen [13].

Temperatuurgegevens van het Oostvoornse Meer, Rijkswaterstaat [9], werden gebruikt voor calibratie (data van 1974) en verificatie (data van 1972) van het toegepaste model.

Bij toepassing van het model op een gecompliceerdere situatie, een bergmeer met doorstroming (koude advectie) en peilvariatie, bleek dat het integreren van de vergelijkingen voor een neerwaartse ontwikkeling van de thermocline, numerieke problemen kan geven. Oorzaak zijn de discontinuïteiten in de z-richting in het $T(z, t)$ profiel. Deze komen op niet te voorspellen tijdstippen tot uitdrukking in de functie $T_z(t)$, die optreedt in het stelsel differentiaalvergelijkingen voor de neerwaartse ontwikkeling van de spronglaag.

In de natuur worden deze discontinuïteiten afgevlakt door een diffusieproces met een diffusieconstante van ca. $1 \text{ m}^2 \text{ d}^{-1}$, Verboom [12]. Dit proces ontbreekt in de tot nog toe gehanteerde modellen, waardoor ze alle in meer of mindere mate numerieke onvolkomenheden bevatten, die hinderlijk worden naarmate meer processen worden beschouwd.

Rechtstreekse introductie van het diffusie mechanisme in de bestaande modellen is een ingewikkelde en slecht te overziene actie.

Toepassing van de energie methode op een rechte bak, zonder diffusie, zonder doorstroming, zonder peilvariatie, geeft relatief de eenvoudigste vergelijkingen.

Dit leidt tot de volgende probleemstelling:

2. PROBLEEMSTELLING

Benader de vorm van een diepe put als een rechte bak, met een diepte gelijk aan de maximale diepte van de put.

Bereken voor deze bak met behulp van de energiemethode de directe stratificatiecyclus, gegeven de weersomstandigheden tijdens deze periode en geven een isotherm temperatuurprofiel als beginvoorwaarde.

Veronderstel geen diffusie, geen doorstroming, geen peilvariatie.

Toets het model aan de wekelijkse temperatuurmetingen van een diepe put en onderzoek de invloed van de wind.

3. PROCESBESCHRIJVING VOOR EEN RECHTE BAK

Een hypothese uit de turbulentie en buoyancy theorie zegt dat de op een meer uitgeoefende arbeid, (verricht door de wind) gebruikt wordt om de aan het meer toegevoerde warmte, (afkomstig van de instraling) te mengen over zekere diepte, de mengingsdiepte, Kitaigorodskii [5], Turner [11].

Op de tijdschaal van een etmaal, voor watermassa's van beperkte afmeting, geeft Verhagen [13] de volgende benadering:

$$E_k = E_p \quad (1)$$

$E_k = E_{k(t)}$: productie van kinetische energie in de circulatiezone per tijdseenheid Joule d⁻¹

$E_p = E_{p(t)}$: buoyancy flux in de circulatie zonelaag Joule d⁻¹

De buoyancy flux wordt veroorzaakt door de thermische expansie van het water, indien dat wordt opgewarmd. Dimensie-analyse laat zien dat E_p ook kan worden opgevat als een lengteschaal (de Monin-Obukhov schaal) maal de productie van oprijvende kracht per tijdseenheid:

$$E_p = \text{lengte} \times \frac{\text{kracht}}{\text{tijd}} = l \times \frac{mlt^{-2}}{t} = ml^2t^{-3} \quad (2)$$

E_p kan ook geïnterpreteerd worden als de afname van potentiële energie per tijdseenheid t.g.v. het ontstaan van een lichtere oppervlaktelaag.

3.1. DE PRODUCTIE VAN KINETISCHE ENERGIE IN DE OPPERVLAKTELAAG

Voor de productie van kinetische energie per tijdseenheid geldt:

$$E_k = A_o \tau w^{\star} \quad (3)$$

$\tau = \tau(t)$: schuifspanning tussen lucht en water kg m⁻¹ d⁻²

$w^{\star} = w^{\star}(t)$: schuifspanningssnelheid in water md⁻¹

$A_o = \text{constant}$: wateroppervlak m²

Vergelijking (3) veronderstelt dat w^* constant is met de diepte en dat alle dissipatie optreedt bij de spronglaag tussen circulatie- en stagnatiezone.

3.2. DE BUOYANCY FLUX IN DE OPPERVLAKTELAAG

Veronderstel dat alle warmte-overdracht tussen lucht en water plaatsvindt aan het wateroppervlak en dat geen warmtetransport door of onder de spronglaag optreedt. De oppervlaktelaag is volgens deze benadering altijd volledig gemengd (fig. 1).

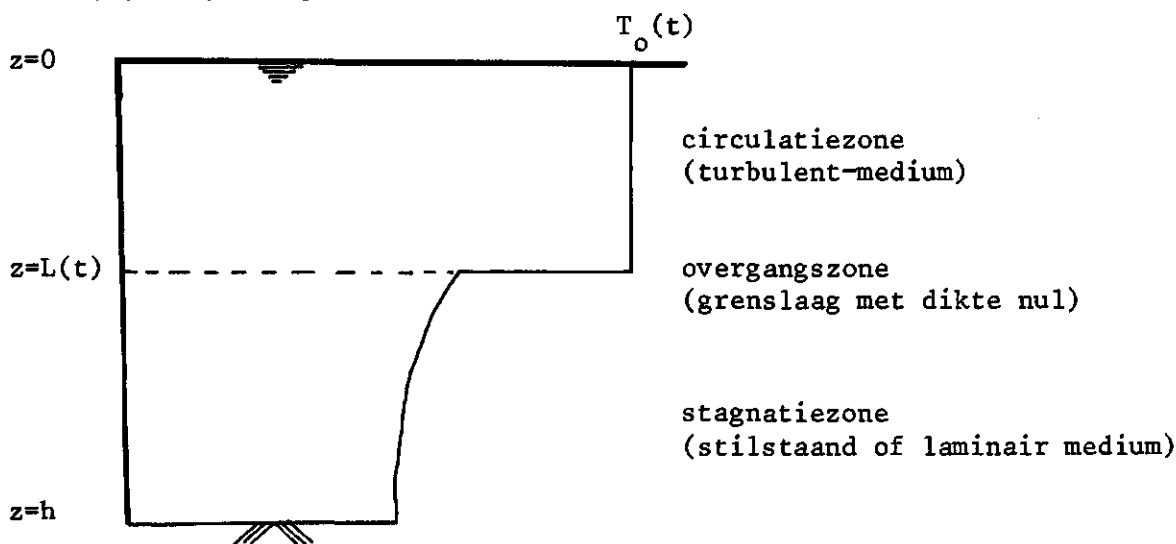


Fig. 1 : definitie schets

Afhankelijk van de ontwikkeling in de mengingsdiepte kunnen twee gevallen worden onderscheiden voor E_p :

$$1) \quad E_p = A_o L \frac{g\alpha}{c_p} q_n \quad \text{voor } \frac{dL}{dt} \leq 0 \quad (4.a)$$

$$2) \quad E_p = A_o L \left\{ \frac{g\alpha}{c_p} q_n + g\Delta\rho \frac{dL}{dt} \right\} \quad \text{voor } \frac{dL}{dt} > 0 \quad (4.b)$$

- | | | |
|------------------------------|---|--|
| $L = L(t)$ | : mengingsdiepte | m |
| $\alpha = \alpha(t)$ | : thermische uitzettingscoëfficiënt van water | $^{\circ}\text{C}^{-1}$ |
| $q_n = q_n(t)$ | : netto warmteflux tussen lucht en water | Joule $\text{m}^{-2}\text{d}^{-1}$ |
| $\Delta\rho = \Delta\rho(t)$ | : dichtheidsverschil over het grensvlak | kg m^{-3} |
| $g = \text{constant}$ | : versnelling t.g.v. de zwaartekracht | m d^{-2} |
| $c_p = \text{constant}$ | : warmtecapaciteit van water | Joule $\text{kg}^{-1} ^{\circ}\text{C}^{-1}$ |

Een netto warmteflux q_n veroorzaakt een productie van oprijvende kracht per oppervlakte per tijdseenheid, Landau en Lifshitz [8], die gelijk is aan:

$$q_b = \frac{g\alpha}{c_p} q_n \quad (5)$$

$q_b = q_b(t)$: productie van oprijvende kracht per oppervlakte per tijdseenheid. kg m⁻¹ d⁻³

De buoyancy flux E_p is dus gelijk aan het volume van de volledig gemengde laag $A_0 L$ maal q_b (4.a en 4.b).

In geval (4.b) wordt E_p mede bepaald door de temperatuur van het water direct onder de spronglaag.

3.3. DE MENGINGSDIEPTE

Substitutie van (3) en (4.a) en (4.b) in (1) geeft de volgende uitdrukkingen voor de mengingsdiepte:

$$L = \frac{\tau_w^{\frac{1}{2}}}{\frac{g\alpha}{c_p} q_n} \quad \text{voor } \frac{dL}{dt} \leq 0 \quad (6.a)$$

$$L = \frac{\tau_w^{\frac{1}{2}}}{\frac{g\alpha}{c_p} q_n + g\Delta\rho \frac{dL}{dt}} \quad \text{voor } \frac{dL}{dt} > 0 \quad (6.b)$$

3.4. ONTWIKKELINGEN VAN HET GRENSVLAK

Afhankelijk van de ontwikkeling van de mengingsdiepte, die de positie van de spronglaag aangeeft kunnen drie ontwikkelingen worden onderscheiden:

3.4.1. Isotherme ontwikkeling

De toevoer van kinetische energie is voortdurend groot genoeg om de toegevoerde warmte te mengen over de gehele diepte, fig. 2.

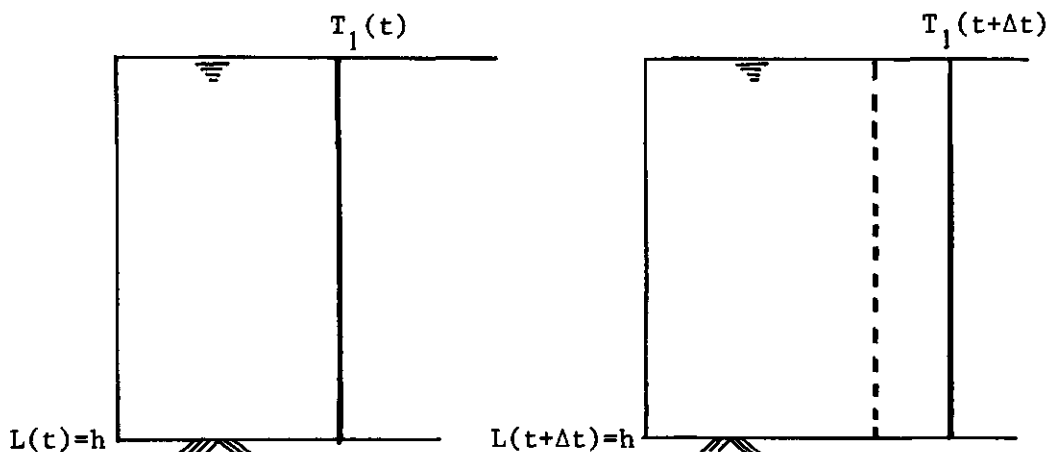


Fig. 2 : isotherme ontwikkeling

Voor deze ontwikkeling (index 1 aan T , L , α en q_n) geldt:

$$T_o = T_1 \quad (7.a)$$

$$L = h \quad (7.b)$$

$$\text{Onder de voorwaarde: } L_1 \geq h \text{ of } L_1 \leq 0 \quad (7.c)$$

waarbij L_1 en T_1 berekend worden volgens:

$$L_1 = \frac{\tau w^*}{\frac{g \alpha_1 q_{n1}}{c_p}} \quad (7.d)$$

$$\rho_o c_p h \frac{dT_1}{dt} = q_{n1} \quad (7.e)$$

h = constant : diepte van de bak

m

ρ_o = constant : dichtheid van water bij 4 °C

kg m⁻³

3.4.2. Opwaartse ontwikkeling

Wanneer de toevoer van kinetische energie onvoldoende wordt om de toegevoerde warmte volledig over de verticaal te mengen, beweegt de spronglaag naar boven. Ook kan zich een stationaire toestand instellen met de spronglaag op een constante hoogte boven de bodem, (fig. 3).

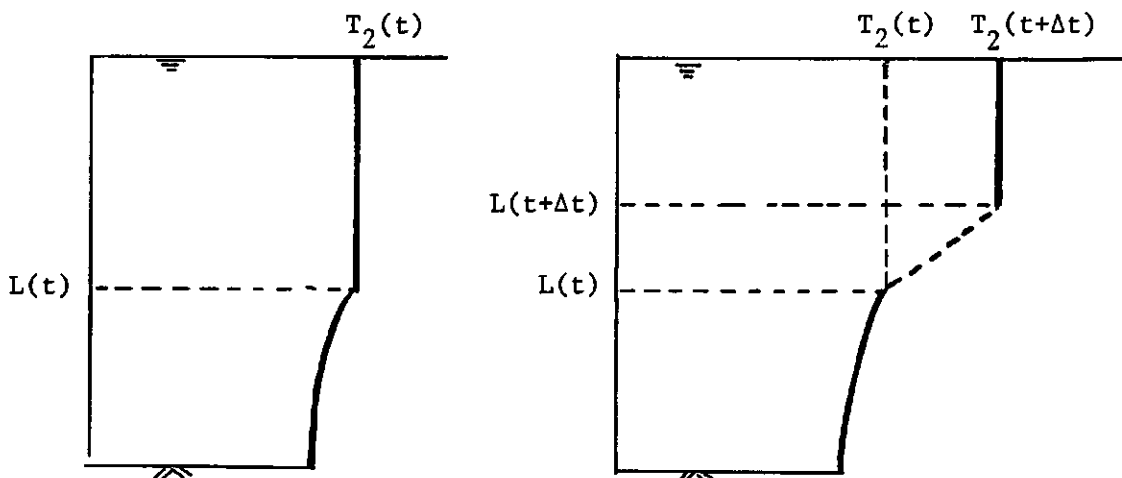


Fig. 3 : opwaartse ontwikkeling

Voor deze ontwikkeling (index 2 aan L, T, α en q_n) geldt:

$$T_o = T_2 \tag{8.a}$$

$$L = L_2 \tag{8.b}$$

Onder de voorwaarde: $0 < L_2 < h$ en $\frac{dL_2}{dt} \leq 0$ (8.c)

waarbij L₂ en T₂ berekend worden volgens:

$$L_2 = \frac{TW}{\frac{g\alpha_2 q_{n2}}{c_p}} \tag{8.d}$$

$$\rho_o c_p \frac{dL_2 T_2}{dt} - \rho_o c_p T_2 \frac{dL_2}{dt} = q_{n2} \tag{8.e}$$

3.4.3. Neerwaartse ontwikkeling

Bevindt de spronglaag zich boven de bodem en neemt de toevoer van kinetische energie toe t.o.v. de warmtetoever of koelt de oppervlaktelaag af, dan wordt de spronglaag naar beneden gedrongen, (fig. 4).

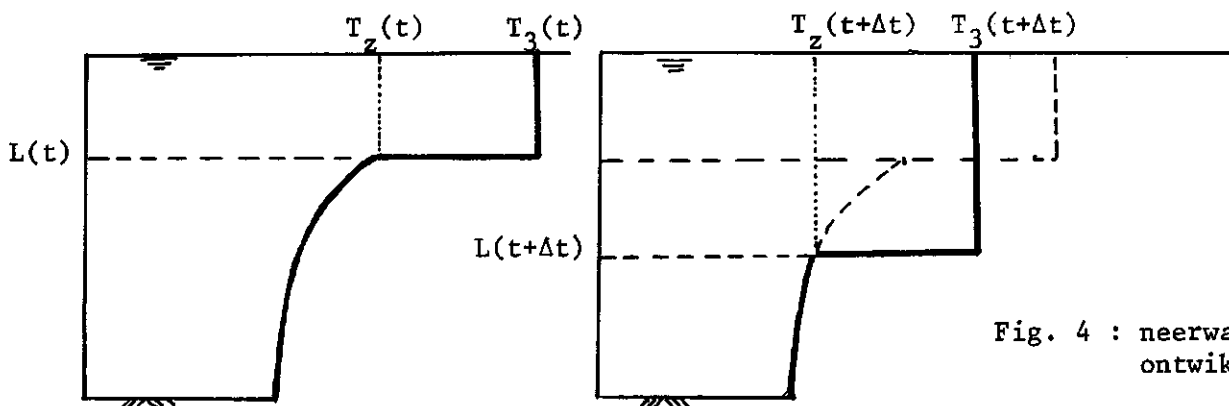


Fig. 4 : neerwaartse ontwikkeling

Dit indringingsproces van een turbulente laag in een stagnante heet entrainment. Er vindt menging plaats over de zone waarover entrainment plaatsvindt. Dit verklaart de extra term in de warmtevergelijking (9.e). Voor deze ontwikkeling (index 3 aan L, T, α en q_n) geldt:

$$T_o = T_3 \tag{9.a}$$

$$L = L_3 \tag{9.b}$$

Onder de voorwaarde: $0 < L_3 < h$ en $\frac{dL_3}{dt} > 0$ (9.c)

waarbij L_3 en T_3 berekend worden volgens:

$$L_3 = \frac{r w^*}{\frac{g \alpha_3 q_{n3}}{c_p} + g \Delta \rho \frac{dL_3}{dt}} \tag{9.d}$$

$$\rho_o c_p \frac{dL_3 T_3}{dt} - \rho_o c_p T_z \frac{dL_3}{dt} = q_{n3} \tag{9.e}$$

$T_z = T_z(t)$: temperatuur direct onder de spronglaag °C.

3.5. OVERGANGEN IN ONTWIKKELING

De initiële toestand is isotherm. Afhankelijk van de ontwikkelingen van de spronglaag, die steeds getoetst moeten worden aan de condities, kunnen de volgende overgangen in ontwikkeling optreden:

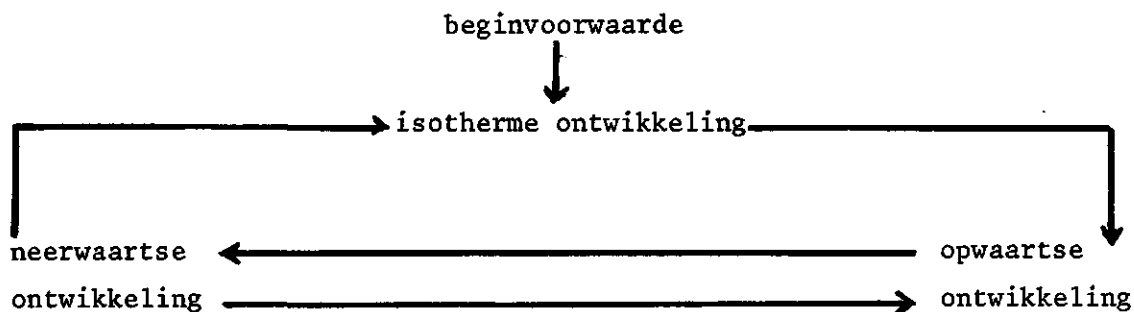


Fig. 5.

Overgang naar een ander stelsel treedt op wanneer de mengingsdiepte, berekend volgens het ene stelsel, niet meer voldoet aan de voorwaarden van dat stelsel.

De laatst geaccepteerde mengingsdiepte en temperatuur berekend met dat stelsel, worden dan doorgegeven aan het volgende stelsel.

3.6. AFHANKELIJKHEID VAN DE WEERSGEGEVENS

Via diverse empirische formules kunnen de schuifspanning en schuifspannings-snelheid en de netto warmteflux worden uitgedrukt in de gemeten weerstomstandigheden:

3.6.1. De schuifspanning en de schuifspanningssnelheid

De schuifspanning tussen lucht en water en de schuifspanningssnelheid kan op verschillende manieren worden uitgedrukt in de windsnelheid boven water.

Een eenvoudige relatie, Wu [14], is de volgende:

$$\tau = C_D \rho_a w_{10}^2 \tag{10}$$

- $w_{10} = w_{10}(t)$: windsnelheid op 10 m hoogte m d⁻¹
- C_D = constant : dragcoëfficiënt 1
- ρ_a = constant : dichtheid van de lucht kg m⁻³

Het verband tussen schuifspanning en schuifspanningssnelheid is per definitie gelijk aan:

$$\tau = \rho_o w^*{}^2 \tag{11}$$

zodat via (11) en (10) w^* kan worden uitgedrukt als:

$$w^* = \left(\frac{C_D \rho_a}{\rho_o} \right)^{1/2} w_{10} \tag{12}$$

3.6.2. De netto warmteflux tussen lucht en water

De netto warmteflux tussen lucht en water wordt beschreven volgens de afkoe-lingswet van Newton. Het gezamenlijk effect van straling, verdamping en ge-leiding wordt dan uitgedrukt in een lineaire formule, Edinger et al [1]:

$$q_{ni} = K(T_e - T_i) \tag{13}$$

- $q_{ni} = q_{ni}(t)$: netto warmteflux tussen lucht en water Joule m⁻²d⁻¹
- $K = K(t)$: warmte vereffeningscoëfficiënt Joule m⁻²d⁻¹ °C⁻¹
- $T_e = T_e(t)$: evenwichtstemperatuur °C
- $T_i = T_i(t)$: watertemperatuur van de circulatiezone °C

Index i neemt de waarde 1, 2 of 3 aan, respectievelijk voor een isotherme, opwaartse of neerwaartse ontwikkeling.

Voor Nederlandse omstandigheden kunnen voor K en T_e , volgens Keyman en Wessels [4], de volgende uitdrukkingen worden afgeleid:

$$K = 4 \sigma T_N^3 + L_h (a + bw_2)(\gamma + \delta) \quad (14)$$

$$q_{nr}^* = (1 - r)G - \sigma T_A^4 (1 - lb - kb\sqrt{e_a})(m + np) + \dots + \sigma T_A^4 - \sigma T_N^4 \quad (15)$$

$$T_e = T_n + \frac{q_{nr}^*}{K} \quad (16)$$

$T_N = T_N(t)$: absolute natte-bol-temperatuur	$^{\circ}K$
$w_2 = w_2(t)$: windsnelheid op 2 m hoogte	$m s^{-1}$
$\delta = \delta(t)$: toename van de verzadigde dampdruk bij stijging van de luchttemperatuur met een graad	$mbar \ ^{\circ}K^{-1}$
$q_{nr}^* = q_{nr}^*(t)$: netto straling als de watertemperatuur gelijk zou zijn aan de natte-bol-temperatuur	$Joule m^{-2} d^{-1}$
$G = G(t)$: globale straling	$Joule m^{-2} d^{-1}$
$T_A = T_A(t)$: luchttemperatuur op 2 m hoogte	$^{\circ}K$
$e_a = e_a(t)$: dampdruk op 2 m hoogte	$mbar$
$p = p(t)$: fractie zonneshijn	1
$\sigma = constant$: constante van S. Boltzmann	$Joule m^{-2} d^{-1} \ ^{\circ}K^{-4}$
$L_h = constant$: verdampingswarmte van water	$Joule m^{-2} mm^{-1}$
$a = constant$: windfunctie constante 1	$mm mbar^{-1} d^{-1}$
$b = constant$: windfunctie constante 2	$mm mbar^{-1} m^{-1}$
$\gamma = constant$: psychrometer constante	$mbar \ ^{\circ}K^{-1}$
$r = constant$: reflectieconstante voor globale straling	1
$lb = constant$: constante 1 in Brunt's formule	1
$kb = constant$: constante k in Brunt's formule	$mbar^{-\frac{1}{2}}$
$m = constant$: constante voor de bewolkingsgraad	1
$n = constant$: constante voor de bewolkingsgraad	1

3.6.3. Beschikbare weergegevens

In de "Maandelijks overzichten van de weersgesteldheid", uitgegeven door het K.N.M.I. [6], worden voor tenminste 5 stations, die verspreid liggen over ons land, de daggemiddelde globale straling \bar{G} , windsnelheid \bar{w}_{10} , luchttemperatuur \bar{T}_A , dampdruk \bar{e}_a en fractiezonneshijn \bar{p} , opgegeven. De daggemiddelde natte-bol-temperatuur \bar{T}_N kan uit deze gegevens worden berekend met behulp van de psychrometer vergelijking:

$$\bar{e}_a = e_s(\bar{T}_N) + \gamma(\bar{T}_N - \bar{T}_A) \quad (17)$$

$e_s(\bar{T}_N)$: verzadigde dampdruk bij temperatuur T_N mbar

Functie $e_s(T)$ wordt b.v. gedefinieerd in de Smithsonian Meteorological Tables, [10].

De windsnelheid op 2 m hoogte, \bar{w}_2 , wordt berekend uit de gemeten \bar{w}_{10} , onder aanname van een logaritmisch windprofiel:

$$\frac{\bar{w}_2}{\bar{w}_{10}} = \frac{\ln \frac{z_0}{z_0}}{\ln \frac{10}{z_0}} \quad (18)$$

z_0 = constant : ruwheidshoogte van het maaiveld ter plaatse waar de wind wordt gemeten m

Hierdoor zijn alle noodzakelijke weergegevens bekend en kunnen met (14) t/m (16) daggemiddelde \bar{K} en \bar{T}_e waarden worden berekend. Statistische voorspelling van T_e waarden uit standaard reeksen van meteorologische gegevens behoort ook tot de mogelijkheden, Hogan et al [2].

3.7. DE TEMPERATUURAFHANKELIJKHEID VAN DE DICHTHEID

De temperatuurafhankelijkheid van de dichtheid van water kan worden benaderd door:

$$\rho = \rho_0 \{1 - \beta(T - 4)^2\} \quad (19)$$

β = constant : temperatuurafhankelijkheidsconstante $^{\circ}\text{C}^{-2}$

Door de kwadratische afhankelijkheid veroorzaakt temperatuurvariatie bij hogere temperaturen een grotere dichtheidsvariatie dan bij lagere:

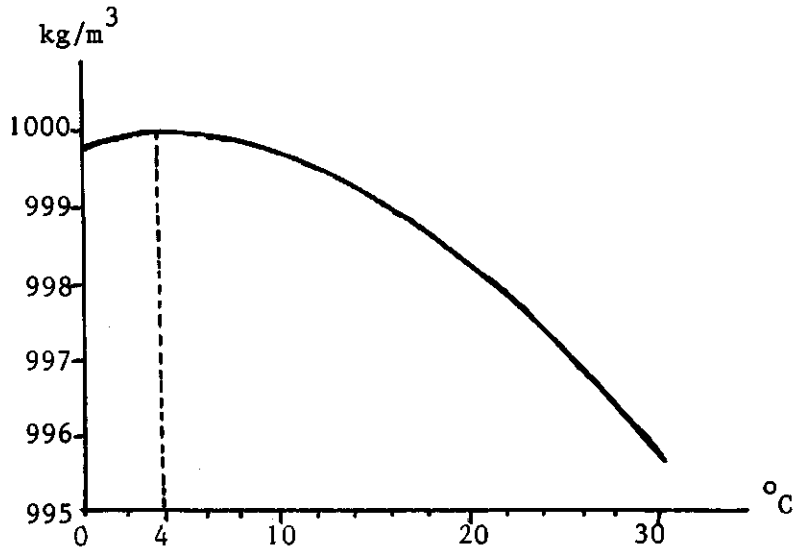


Fig. 6 : de dichtheid als functie van de temperatuur

Dit komt tot uitdrukking via de thermische expansiecoëfficiënt α :

$$\alpha = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} = \rho \frac{d}{dT} \frac{1}{\rho} = - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} \approx 2\beta(T - 4) \quad (20)$$

De temperatuurafhankelijkheid van de dichtheid komt ook tot uitdrukking via het dichtheidsverschil over de spronglaag $\Delta\rho$:

$$\Delta\rho = \rho(T_z) - \rho(T_3) \quad (21)$$

Substitutie van (19) in (21) geeft:

$$\Delta\rho = \rho_o \beta(T - T_z)(T + T_z - 8) \quad (22)$$

3.8. OPTIMALE MENGINGS- EN ENTRAINMENTCONSTANTEN

Substitutie van (10), (12), (13) en (20) in (6.a) geeft voor $i = 1, 2$:

$$L_i = \frac{\frac{(C_D \rho_a)^{3/2}}{(\rho_o)^{1/2}} w_{10}^3}{\frac{2g\beta}{c_p} K(T_e - T_i)(T_i - 4)} \quad \text{voor } \frac{dL_i}{dt} \leq 0 \quad (23)$$

Uit (6.b) volgt een expliciete uitdrukking voor de entrainmentsnelheid:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\tau w^* - \frac{g\alpha}{c_p} q_n L}{g\Delta\rho L} \quad \text{voor } \frac{dL_i}{dt} > 0 \quad (24.a)$$

Substitutie van (10), (12), (13), (20) en (22) in (24.b) geeft voor $i = 3$:

$$\frac{dL_3}{dt} = \frac{\frac{(C_D \rho_a)^{3/2}}{(\rho_o)^{1/2}} w_{10}^3 - \frac{2g\beta}{c_p} K(T_e - T_3)(T_3 - 4)L_3}{g\rho_o\beta(T_3 - T_z)(T_3 + T_z - 8)L_3} \quad \text{voor } \frac{dL_3}{dt} > 0 \quad (24.b)$$

Deling van teller en noemer van de rechter leden van (23) en (24.b) door ρ , plus de formule:

$$k = \frac{K}{\rho_o c_p} \quad (25)$$

$k = k(t)$: warmteuitwisselingssnelheid

$m d^{-1}$

geeft voor (23) de uitdrukking:

$$L_i = \frac{\left(\frac{c_p \rho_a}{\rho_o}\right)^{3/2} w_{10}^3}{2g\beta k(T_e - T_i)(T_i - 4)} \quad \text{voor } \frac{dL_i}{dt} \leq 0 \quad (26.a)$$

en voor (24.b) ontstaat na deling van teller en noemer door $2g\beta$ de uitdrukking:

$$\frac{dL_3}{dt} = \frac{2 \left[\frac{\left(\frac{C_D \rho_a}{\rho_o}\right)^{3/2}}{2g\beta} w_{10}^3 - k(T_e - T_3)(T_3 - 4)L_3 \right]}{(T_3 - T_z)(T_3 + T_z - 8)L_3} \quad \text{voor } \frac{dL_3}{dt} > 0 \quad (26.b)$$

In de teller van (26.a) en (26.b) treedt dus een combinatie van constanten op waarvoor geldt:

$$C = \frac{\left(\frac{C_D \rho_a}{\rho_o}\right)^{3/2}}{2g\beta} \quad (27)$$

$C = \text{constant}$: mengingscoëfficiënt

$d^2 o_C^2 m^{-1}$

Parameter C bevat de dragcoëfficiënt C_D . De dragcoëfficiënt C_D karakteriseert de impuls overdracht tussen lucht en water. In de praktijk hangt C_D in sterke mate af van de vorm, grootte, diepte en ligging van het meer t.a.v. de optredende wind. Van grote invloed is voorts grootte en richting van de wind in verband met golfhoogte en strijklengte. In de benadering van E_k is voorts aangenomen dat de schuifspanningssnelheid w^* constant is over de verticaal en dat alle dissipatie optreedt ter plaatse van de spronglaag op diepte L.

Bij doorrekening van een willekeurig meer kan daardoor een andere waarde van C een optimaal resultaat geven, dan die welke zou volgen uit de basisconstanten in het rechterlid van (27).

In de vergelijkingen voor de mengingsdiepte wordt daarom een effectieve mengingscoëfficiënt C_M ingevoerd, die van geval tot geval kan variëren:

$$C_M = f_M \cdot C \quad (28)$$

C_M = constant : effectieve mengingscoëfficiënt

$$d^2 \cdot c_C^{-2} \cdot m^{-1}$$

f_M = constant : optimaliseringsfactor

1

In de noemer van (26.b) komt tot uitdrukking de term $g\Delta\rho \frac{dL}{dt}$ van (4.b).

Het gezamenlijk effect van een aantal processen is hier gelijk aan orde 1 gesteld, Verhagen 13 .

Diverse onderzoekingen rapporteren afwijkingen van 1 en daarom wordt in de noemer van (26.b) de coëfficiënt C_E ingevoerd.

C_E = constant : effectieve entrainmentcoëfficiënt

1

3.9. DE WISKUNDIGE PROBLEEMSTELLING

Gegeven de initiële toestand i op $t = t_i$:

$$T(t_i) = T_{in} \quad (29.a)$$

$$L(t_i) = h \quad (29.b)$$

en gegeven de signalen \bar{w}_{10} , \bar{K} en \bar{T}_e gedurende $t \in [t_i, t_f]$, bereken de functie $T(t)$ en $L(t)$, voor $t \in [t_i, t_f]$ en de functie $T(z, t)$ voor $t \in [t_i, t_f]$ en $z \in [0, h]$.

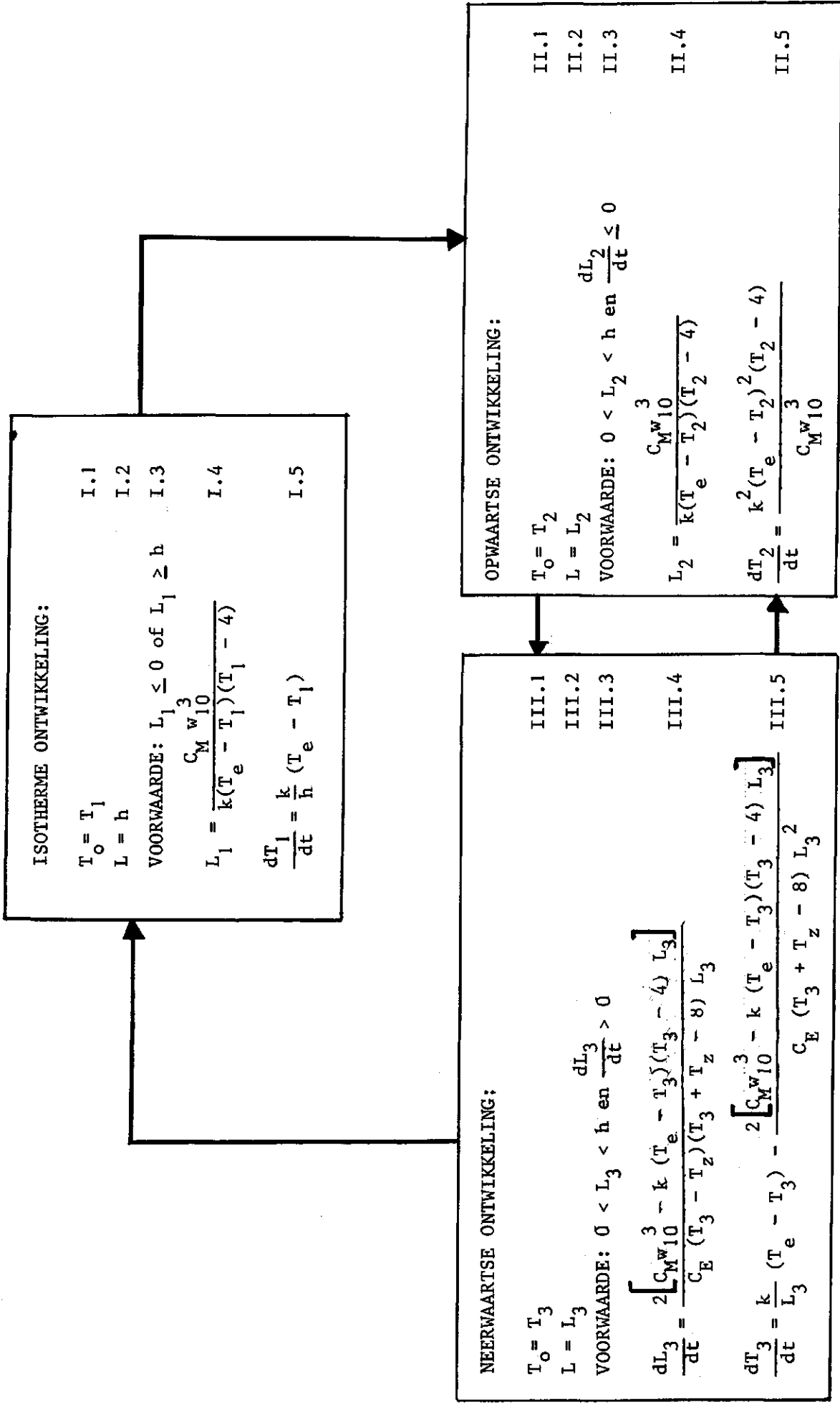


Fig. 7 : De stelsels vergelijkingen voor de diepte en temperatuur van de circulatiezone (benadering door rechte bak)

De oplossing kan worden verkregen door L en T op te lossen uit de stelsels I t/m III, fig. 7, voor $t \in [t_i, t_f]$, gegeven de beginvoorwaarde (29. a, b) op $t = t_i$ en de weersomstandigheden voor $t \in [t_i, t_f]$. Dit is een beginvoorwaardeprobleem. De functie $T(z, t)$ wordt verkregen uit de berekende functies $L(t)$ en $T(t)$, via administratieve procedures.

De stelsels I t/m III worden afgeleid door de relaties voor de weers- en temperatuurafhankelijkheid te substitueren in (7.a) t/m (9.e).

3.10 NOODZAKELIJKE GEGEVENS

Voor het oplossen van de stelsels vergelijkingen I, II en III zijn de volgende fysische en meteorologische gegevens noodzakelijk.

3.10.1. Beginvoorwaarde voor het temperatuurprofiel

Als beginvoorwaarde wordt een isotherm temperatuurprofiel opgegeven, gemeten tijdens de voorjaarscirculatie:

$$L(t_i) = h \quad (30.a)$$

$$T_o(t_i) = T_{in} \quad (30.b)$$

3.10.2. Weergegevens voor de periode van berekening

Voor het oplossen van de stelsels I t/m III moeten op $t \in [t_i, t_f]$ de functies $w_{10}(t)$, $k(t)$ en $T_e(t)$ bekend zijn. Deze worden afgeleid uit de daggemiddelde weergegevens (zie 3.6.3.):

\bar{G}	: globale straling	Joule $\text{cm}^{-2}\text{d}^{-1}$
\bar{T}_a	: luchttemperatuur op 2 m hoogte	$^{\circ}\text{C}$
\bar{e}_a	: dampdruk op 2 m hoogte	mbar
\bar{w}_{10}	: windsnelheid op 10 m hoogte	$\frac{1}{2} \text{ m s}^{-1}$
\bar{p}	: dagelijkse fractie zonneshijn	1

3.10.3. Fysische constanten

In voorgaande formules treden fysische coëfficiënten op, waarvoor de volgende constante waarden worden aangenomen:

$C_D = 2 \times 10^{-3}$	l
$\rho_a = 1.2$	kg m^{-3}
$\rho_o = 1000$	kg m^{-3}
$c_p = 4190$	$\text{Joule kg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
$\beta = 7.17 \times 10^{-6}$	$^\circ\text{C}^{-2}$
$g = 7.32 \times 10^{10}$	m d^{-2}
$\gamma = .67$	$\text{mbar } ^\circ\text{K}^{-1}$
$\sigma = 4.906 \times 10^{-3}$	$\text{Joule m}^{-2} \text{ d}^{-1} \text{ K}^{-4}$
$L_h = 2.45 \times 10^6$	$\text{Joule m}^{-2} \text{ mm}^{-1}$
$a = .131$	$\text{mm mbar}^{-1} \text{ d}^{-1}$
$b = .142$	$\text{mm mbar}^{-1} \text{ m}^{-1}$
$r = .07$	l
$1b = .53$	l
$kb = .067$	$\text{mbar}^{-\frac{1}{2}}$
$m = .2$	l
$n = .8$	l
$h = 41.00$	m
$z_o = .02$	m

Hierbij zijn de in de literatuur gerapporteerde coëfficiënten omgerekend met de volgende omrekeningsfactoren:

1 dag	= 86400 s
1 cal	= 4.19 Joule
1 mbar	= .749 mm Hg
X $^\circ\text{C}$	= X + 273.16 $^\circ\text{K}$

Als tijdeenheid wordt de dag gekozen. De tot uitdrukking gebrachte processen spelen zich af op deze tijdschaal. Let erop dat de meteo-gegevens in de juiste eenheden worden ingevoerd:

$$\begin{aligned}
 G &= 10^4 \times \bar{G} && \text{Joule m}^{-2} \text{ d}^{-1} \\
 T_A &= \bar{T}_a + 273.16 && \text{°K} \\
 T_N &= \bar{T}_n + 273.16 && \text{°K} \\
 T_E &= \bar{T}_e + 273.16 && \text{°K} \\
 w_{10} &= \frac{1}{2} \times 86400 \times \bar{w}_{10} && \text{m d}^{-1} \\
 w_2 &= \frac{1}{2} \times \frac{\ln(2/z_0)}{\ln(10/z_0)} \times \bar{w}_{10} && \text{m s}^{-1}
 \end{aligned}$$

4. RESULTATEN

Voor diverse combinaties van parameters is het rekenmodel voor de rechte bak getoetst aan wekelijkse temperatuurmetingen. Rijkswaterstaat [9] heeft in het Oostvoornse Meer (41 m) in 1974 wekelijks de verticale temperatuurverdeling gemeten.

Op de tijdstippen van temperatuurmeting worden de verschillen tussen gemeten en berekende temperatuur bepaald. Voor de verschillen over diepte worden de doelfuncties $\bar{\mu}$, $\bar{\sigma}$ en \bar{m}_{\max} berekend. De combinatie van parameters waarmee een jaar wordt doorgerekend, wordt beoordeeld naar de verschillen over diepte en tijd, d.w.z. naar de doelfuncties $\bar{\mu}$, $\bar{\sigma}$ en \bar{m}_{\max} . De volgende resultaten zijn te rapporteren:

4.1. ONGEMODIFICEERDE SCHUIFSPANNINGSFORMULE

Hierbij is volgens formule (10) een schuifspanningsformule met constante dragcoëfficiënt C_D toegepast. Volgens Wu [14] is C_D gelijk aan 2×10^{-3} . Deze waarde is berekend voor het oceaanooppervlak voor harde wind.

Op de eerste plaats zijn verschillende combinaties van optimaliseringsfactoren f_M en f_E toegepast. Indien f_M afwijkt van 1.0 zijn twee interpretaties mogelijk:

1. De opgegeven basisconstanten, dus ook C_D , in (27) zijn juist. Afwijking van f_M van 1.0, betekent dat de wind die gemeten is in een nabijgelegen klimatologisch station, met een factor $f_M^{1/3}$ moet worden gewijzigd.
2. De wind, die gemeten is in het nabijgelegen station is representatief voor het meer. Afwijking van f_M van 1.0 is toe te schrijven aan afwijking van de basisconstanten in (27) van de opgegeven waarden. Over ρ_0 , ρ_a , g .

Tabel 1 : De doelfuncties $\bar{\mu}$, $\bar{\sigma}$ en $\bar{\max}$. bij verschillende waarden van f_M en f_E ; interpretaties van f_M , ($b = .54$).

$f_E \backslash f_M$	1.000	0.750	0.625	0.500	0.375	
1.00	- 2.15 3.95 9.83			- 0.68 2.13 9.25		
1.25			- 0.86 2.29 9.35	- 1.14 2.66 10.15	- 0.73 2.25 10.47	
1.50		- 0.97 2.29 9.50	- 0.66 2.03 9.30	- 0.70 2.35 10.17	- 1.29 3.16 10.72	
1.75			- 0.42 1.68 9.25	- 0.23 1.66 7.87	+ 0.74 1.65 11.46	
2.00	- 1.67 3.24 10.65			- 0.15 1.62 9.78	- 0.17 2.21 11.46	
2.25			- 1.34 3.00 11.15	- 0.40 1.95 10.28		
3.50		- 0.84 2.31 10.27				
4.00				- 0.81 3.26 11.47	$\bar{\mu}$ $\bar{\sigma}$ $\bar{\max}$.	
$f_M^{1/3}$	1.000	0.909	0.855	0.794	0.721	interpretatie 1
$C_D \times 10^3$	2.00	1.65	1.46	1.26	1.04	interpretatie 2
b	0.54	0.49	0.46	0.43	0.39	

en β is weinig twijfel mogelijk; des te meer over C_D . Indien f_M afwijkt van 1.0 wordt dit opgevat alsof C_D met een factor $f_M^{2/3}$ van 2×10^{-3} afwijkt.

Indien de windterm in de verdampingswindfunctie nog met een factor $f_M^{2/3}$ wordt gewijzigd, moet dit worden opgevat als wijziging van coëfficiënt b met deze factor.

Tabel 1 geeft resultaten voor diverse combinaties voor f_M en f_E , waarbij beide interpretaties van f_M zijn vermeld. Een minimale $\tilde{\sigma} = 1.62$ °C wordt gevonden bij $f_M = 0.500$ en $f_E = 2.00$.

Voor een gegeven combinatie van f_M en f_E toont tabel 2 de invloed van variatie van windfunctiecoëfficiënt b .

Tabel 2 : De doelfuncties \tilde{u} , $\tilde{\sigma}$ en \tilde{m}_{\max} . bij verschillende waarden van f_E en b . ($f_M = 0.500$, d.w.z. $C_D = 1.26 \times 10^{-3}$)

$f_E \backslash b$	0.46	0.48	0.49	0.50	0.52	
1.50	- 0.29 1.87 9.59	- 0.27 1.88 9.53	+ 0.18 1.38 7.37	+ 0.21 1.38 7.40	+ 0.22 1.40 7.40	
2.00			+ 0.21 1.21 7.84			\tilde{u} $\tilde{\sigma}$ \tilde{m}_{\max}

Wordt bij $b = 0.49$ en $f_m = 0.500$ coëfficiënt f_E verhoogd tot 2.00, dan wordt een minimale $\tilde{\sigma} = 1.21$ °C gevonden.

Het rechte bak model kan dus net zo goede resultaten geven als het kegelmodel, wat eerder is gerapporteerd.

4.2. GEMODIFICEERDE SCHUIFSPANNINGSFORMULE

Een modificatie van relatie (10) voor het verband tussen schuifspanning en wind is de volgende:

$$\tau_m = C_{Dm} \rho_a w_{10}^{5/2} \tag{10}_m$$

- $\tau_m = \tau_m(t)$: gemodificeerde schuifspanning $N m^{-2}$
- $C_{Dm} = 0.5 \times 10^{-3}$: dragcoëfficiënt $s^{1/2} m^{-1/2}$
- $w_{10} = w_{10}(t)$: windsnelheid op 10 m hoogte $m s^{-1}$

Deze relatie is ook bepaald door Wu [14] en wordt aanbevolen door Jirka, et al [2].

De schuifspanningssnelheid w_m^* kan via (11) worden uitgedrukt als:

$$w_m^* = \left(\frac{C_{Dm} \rho}{\rho_0} a \right)^{1/2} w_{10}^{5/4} \quad (12_m)$$

$w_m^* = w_m^*(t)$: gemodificeerde schuifspanningssnelheid $m d^{-1}$

Als tijdeenheid in de stelsels I t/m III wordt het etmaal gekozen.

Worden de gemodificeerde schuifspanning- en schuifspanningssnelheidsrelaties (10_m en 12_m) geïntroduceerd in de stelsels I t/m III, dan

wijzigt de term $C_M w_{10}^3$ met een factor $(\tau_m w_m^*) / (\tau w^*) = \left(\frac{1}{2}\right)^{15/4} w_{10}^{-3/4}$.

Voor $\bar{w}_{10} < 32 \frac{1}{2} m s^{-1}$ levert de wind een kleinere kinetische energie aan de circulatiezone t.o.v. de oude windformules en voor $\bar{w}_{10} > 32 \frac{1}{2} m s^{-1}$ een grotere. De dragcoëfficiënt is dus windafhankelijk geworden.

Tabel 3 geeft de resultaten met de gemodificeerde schuifspanningsrelatie

voor verschillende waarden van f_E . De mengingsfactor $f_M = 1.0$ gesteld.

Goede resultaten, $\bar{\sigma} = 1.19$ °C, worden bereikt voor $f_E = 3.50$.

Uit deze resultaten blijkt dat de hypothese $E_k = E_p$, formule (1), weinig gevoelig is voor modificaties in de marge.

Mits de windinvloed en de weerstand tegen entrainment juist worden getypeerd, geven verschillende empirische formules voor de weersinvloeden vergelijkbare resultaten.

5. CONCLUSIE

Toepassing van de energiemethode op een rechte bak, leidt tot minstens zo goede resultaten als de toepassing op een ingewikkelder vorm.

Essentieel is, dat de juiste windinvloed in rekening wordt gebracht, via de schuifspanning-wind-relatie.

De gemodificeerde formule van Wu voor de schuifspanning tussen lucht en water, met een kleinere constante en een hogere machts windfunctie, leidt tot betere resultaten dan de oorspronkelijke tweedegraads windfunctie.

Een optimaal resultaat voor het Oostvoornse meer met de data van 1974 wordt bereikt bij $f_M = 1.0$ en $C_E = 3.50$. Voor de standaardafwijking voor de verschillen tussen gemeten en berekende temperatuur over de diepte en tijd geldt dan $\bar{\sigma} = 1.19$ °C.

Tabel 3 : De doelfunctie $\tilde{\mu}$, $\tilde{\sigma}$ en \tilde{m}_{\max} . bij verschillende waarde van f_E .
 De gemodificeerde schuifspanningsformule (10_m) is toegepast
 ($b = .54$).

f_E	f_M
	1.00
1.00	- 1.30 3.03 9.68
2.00	- 1.19 2.92 9.94
3.00	0.93 1.61 11.42
3.50	0.68 1.19 10.50
3.75	0.40 1.25 8.01
4.00	0.58 1.28 10.50
4.50	0.64 1.38 10.58
5.00	- 0.49 2.17 9.65
6.00	- 0.17 2.03 9.84
7.00	0.54 2.48 11.37

Doordat het diffusieproces ontbreekt, kan ook in het rechte bak model bij entrainment een discontinue integrant optreden. Het komt echter minder vaak voor dan bij de ingewikkeldere procesbeschrijving, kegelvorm, doorstroming, etc.

De volgende stap zal zijn de introductie van een diffusieproces, die temperatuursprongen tussen de spronglaag en de bodem moet afvlakken, zodat discontinuïteiten in de $T_z(t)$ functie worden uitgesloten.

REFERENTIES

1. EDINGER, J.E., DUTTWEILER, D.W. and GEYER, J.C. "The Response of Water Temperatures to Meteorological Conditions", Water Resources Research, Vol 4, No 5, 1137-1143, 1968.
2. HOGAN, C.M., BRUCE, A.T. "Statistical prediction of equilibrium temperature from standard meteorological data bases", Office of Research and Development, EPA 660/2-73-003, Washington 1973.
3. JIRKA, C.H., RIJAN, P.J. and STOLZENBACH, K.D. "Basic Physical Processes in Heat Transport", European Course on Heat Disposal from Power Generation in the Water Environment, Ch 4, Vol I, Delft Hydraulics Laboratory and Massachusetts Institute of Technology, Delft, 1975.
4. KEYMAN, J.Q. and WESSELS, H.R.A. "A method for calculating natural water temperatures applied to the estimation of the artificial warming of the river Rhine", KNMI 73-705, 1973.
5. KITAIGORODSKII, S.A. "On the computation of the thickness of the wind-mixing layer in the ocean", Bulletin Acad. of Science USSR, Geophysical series 3, 284-7, 1960.
6. KNMI "Maandelijks overzicht der weersgesteldheid".
7. KOK, G.J.G. "Berekening van thermische stratificatie bij variabele weersomstandigheden, Oostvoornse Meer 1972, 1974". Verslag onderzoek, R870-LH2214, Waterloopkundig Laboratorium Delft, 1976.
8. LANDAU, L.D. and LIFSHITZ, E.M. "Mechanics of Continuous Media", State Publishing House of Theoretical and Technical Literature, Moscow, 1953.
9. RIJKSWATERSTAAT, DELTADIENST, Afd. Milieuonderzoek, "Waterkwaliteitsmetingen in het Oostvoornse Meer (verticaal)", 1974.
10. SMITHSONIAN METEOROLOGICAL TABLES, prep. by R.J. List, 6th, rev. ed. Washington, 1968.
11. TURNER, J.S. "Buoyancy Effects in Fluids", Cambridge University Press, Gr. Brit., 1973.

12. VERBOOM, G.K. "Verticale diffusiecoëfficiënten, berekend volgens de methode Lerman-Stilller, Brielse Gat", Waterloopkundig Laboratorium, R870, Delft, 1974.
13. VERHAGEN, J.H.G. "Een berekeningsmethode van thermische gelaagdheid bij variabele wind en instraling", Waterloopkundig Laboratorium, R870-1, Delft 1974.
14. WU, J. "Wind Stress and Surface Roughness at Air-Sea-Interface", Journal of Geophysical Research, Vol 74, No 2, 1969.