

EINDIGE DIFFERENTIEMETHODEN VOOR DE OPLOSSING VAN DE

CONVECTIE-DIFFUSIE VERGELIJKING

NOTA 60

Ir. J.R. Moll

Vakgroep Hydraulica en Afvoerhydrologie
Landbouwuniversiteit, Wageningen
september 1982

173135

INHOUDSOPGAVE

=====

	<u>pag.</u>
1. Inleiding	1
2. Eindige differentiemethoden	4
3. Eigenschappen van differentieschema's	8
4. Presentatie van een aantal schema's	14
5. Praktische overwegingen	25
6. Samenvatting/Abstract	29
7. Literatuuropgave	30

1. Inleiding

Deze nota behandelt de eendimensionale convectie-diffusie vergelijking:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial U}{\partial x} - D \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

Hierin is:

- U = de grootheid waar we in geïnteresseerd zijn [.]
- c = de transportsnelheid [L/T]
- D = de diffusiecoëfficiënt [L²/T]
- x = de plaats [L]
- t = de tijd [T]

De vergelijking is zowel voor waterkwaliteits-, als waterkwantiteitsproblemen van groot belang. De belangrijkste toepassing ervan is als model voor de beschrijving van het transport en de menging van conservatief materiaal in een rivier of in het grondwater ([1], [3], [4], [5], [7], [8], [13]).

Ook als model voor flood-routing vindt de vergelijking toepassing ([6], [9], [12]).

Vergelijking (1) kan worden opgevat als samenvoeging van twee andere vergelijkingen:

de (hyperbolische) golfvergelijking $\frac{\partial U}{\partial t} + c \frac{\partial U}{\partial x} = 0$

(2)

en

de (parabolische) diffusievergelijking
$$\frac{\partial U}{\partial t} - D \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

Vergelijking (1) is een parabolische differentiaalvergelijking met een (in de praktijk vaak overheersend) hyperbolisch karakter. Vergelijking (1) is uit te schrijven voor meer dimensies. Zo is het tweedimensionale geval:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + c \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} - D_x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - D_y \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

Hiervan wordt gebruik gemaakt in situaties waarin men geïnteresseerd is in laterale dispersie, o.a. bij de berekeningen in estuaria [1].

Het is ook mogelijk verg. (1) uit te breiden met een verlies-term, in het geval men met transport van niet-conservatief materiaal te maken heeft:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + c \frac{\partial U}{\partial x} - D \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \lambda U = 0 \quad (5)$$

In sommige gevallen kunnen analytische oplossingen van verg. (1) gegeven worden. Voorbeelden hiervan zijn:

- a) Beschouwd men een eendimensionaal kanaal waarin op $t = 0$ bovenstrooms ($x = 0$) een stof geloosd wordt waarvan het concentratieverloop door verg. (1) beschreven wordt, dan is de impulsresponsiefunctie:

$$U(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \exp \left[- (x - ct)^2 / 4Dt \right] \quad (6)$$

- b) Wordt aan verg. (1) een periodieke beginvoorwaarde opgelegd, bijvoorbeeld een Fourierkomponent

$$U(x,0) = U_0 \cdot \exp(ikx) = U_0 \cdot (\cos kx + i \sin kx) \quad (7)$$

dan is de oplossing:

$$U(x,t) = U_0 \exp(ikx) \cdot \exp(-D^2 kt) \cdot \exp(-ickt) \quad (8)$$

In [9] worden nog een aantal analytische oplossingen gegeven. In de meeste gevallen kan men alleen tot een numerieke oplossing komen. Hierbij wordt gebruik gemaakt van een eindige elementenmethode of een eindige differentiemethode.

Het gebruik van eindige elementenmethodes kan bij meerdimensionale problemen voordelen bieden boven het gebruik van eindige differentiemethodes. Bij eindige elementenmethodes kan men de soms ingewikkelde geometrie van een probleem op eenvoudige wijze betrekken in de numerieke berekeningen.

Eindige elementenmethodes komen in deze nota verder niet aan de orde.

Opgemerkt kan slechts worden dat bij gebruik van het Galerkin-principe, lineaire basisfuncties en elementen van gelijke afmetingen, de eendimensionale eindige elementen oplossing samenvalt met de oplossing van het differentieschema van Stone & Brian, dat behandeld wordt in Hoofdstuk 4 van deze nota.

Onderwerp van deze nota vormt een beschrijving en vergelijking van een aantal eindige differentiemethoden.

In Hoofdstuk 2 wordt de eindige differentietechniek geïntroduceerd en een indeling voor de verschillende schema's gegeven.

Hoofdstuk 3 behandelt de numerieke eigenschappen van differentieschema's.

In Hoofdstuk 4 worden voor een vijftal schema's deze eigenschappen onderzocht.

Hoofdstuk 5 gaat in op een aantal praktische aspecten bij de keuze van een differentieschema. Hiertoe behoren de keuze van plaats-, en tijdstap en de behandeling van de randvoorwaarden.

2. Eindige Differentiemethoden

We gaan vergelijking (1) numeriek oplossen.

Hiertoe wordt een puntenrooster gevormd, door de x-as in intervallen Δx , en de t-as in intervallen Δt te verdelen, zie fig. 1.

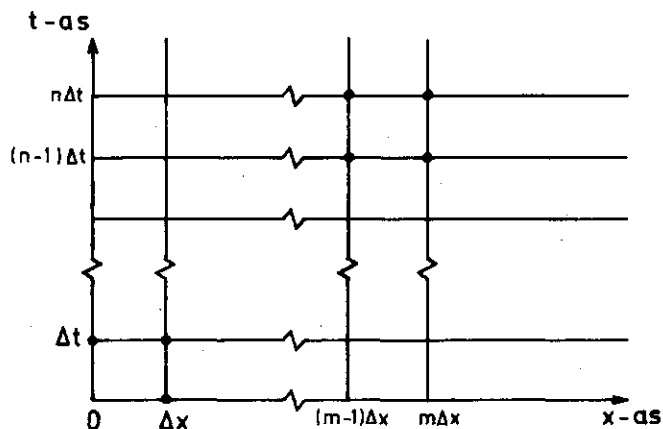


Fig. 1 Rekenrooster

De differentiaalquotienten in vergelijking (1) vervangen we vervolgens door differentiequotienten. Dit kan bijvoorbeeld als volgt:

$$U(x, t + \Delta t) = U(x, t) + \Delta t \cdot \frac{\partial U}{\partial t} + o(\Delta t)^2 \quad (9)$$

(Taylor)

zodat

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U(x, t + \Delta t) - U(x, t)}{\Delta t} + o(\Delta t) \quad (10)$$

Een uitdrukking voor $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ kan als volgt gevonden worden:

$$U(x + \Delta x, t) = U(x, t) + \Delta x \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot (\Delta x)^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + o((\Delta x)^3) \quad (11)$$

$$U(x - \Delta x, t) = U(x, t) - \Delta x \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot (\Delta x)^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + o((\Delta x)^3) \quad (12)$$

zodat

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x-\Delta x, t) - 2U(x, t) + U(x + \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} + o((\Delta x)^2) \quad (13)$$

Een mogelijke schematisatie voor verg. (1) is zo:

$$\begin{aligned} & \frac{U(x, t + \Delta t) - U(x, t)}{\Delta t} + c \cdot \frac{[U(x, t) - U(x - \Delta x, t)]}{\Delta x} - \\ & D \cdot \frac{[U(x - \Delta x, t) - 2U(x, t) + U(x + \Delta x, t)]}{(\Delta x)^2} + o(\Delta t) + o(\Delta x) = 0 \quad (14) \end{aligned}$$

Ter onderscheiding van de analytische oplossing $U(x, t)$ wordt de numerieke oplossing genoteerd als U_m^n .

Bovenstaande schematisatie, verg. (14) is te herschrijven tot

$$U_m^{n+1} = (\sigma + \lambda)U_{m-1}^n + (1 - \sigma - 2\lambda)U_m^n + \lambda U_{m+1}^n \quad (15)$$

met: $\sigma = c \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$ het Courantgetal

$\lambda = D \cdot \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$, de diffusieparameter

In deze vorm staat dit schema bekend als het 'upstream-schema'.

Het hierbij behorende differentiemolecuul is:

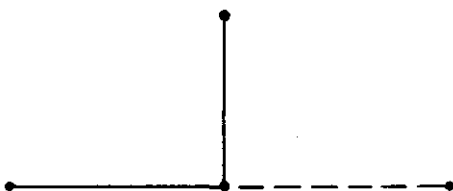


Fig. 2 Differentiemolecuul
upstream-schema

Het schema (15) noemt men expliciet, omdat de funktiewaarden

U_m^{n+1} op tijdstip $t = (n + 1)\Delta t$ afzonderlijk zijn te berekenen uit de (bekende) waarden op tijdstip $t = n\Delta t$.

Zijn de funktiewaarden op tijdstip $t = (n + 1)\Delta t$ niet afzonderlijk, maar alleen simultaan te berekenen uit die op tijdstip $t = n\Delta t$, dan noemt men een schema impliciet.

Een voorbeeld is het schema:

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t} + \theta \left\{ c \frac{[U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}]}{2\Delta x} - D \frac{[U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}]}{(\Delta x)^2} \right\} + (1 - \theta) \left\{ c \frac{[U_{m+1}^n - U_{m-1}^n]}{2\Delta x} - D \frac{[U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n]}{(\Delta x)^2} \right\} = 0 \quad (16)$$

Dit schema is expliciet voor $\theta = 0$ en impliciet $\theta \neq 0$.

Voor $\theta = \frac{1}{2}$ staat dit schema bekend als het Crank-Nicholson'schema.

Het differentiemolecuul is:

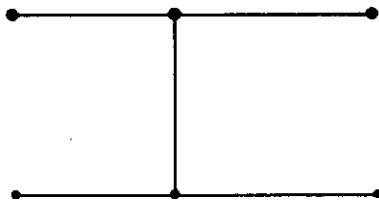


Fig. 3 Differentiemolecuul
Crank Nicholson

Zowel in schema (15) als (16) staan relaties tussen funktiewaarden op slechts twee tijdstippen, nl. $t = n\Delta t$ en $t = (n+1)\Delta t$.

Schema's gedefinieerd op meer dan twee tijdstippen, zoals bijv. het schema van Dufort en Frenkel (zie Fig. 4) en het 'leap-frog'

schema (zie Fig. 5), worden in deze nota niet behandeld, zie hiervoor [10] of [12].

Voor convectie-diffusie berekeningen is het leap-frog schema overigens niet geschikt. Dit schema is nl. onvoorwaardelijk instabiel, een eigenschap die in Hoofdstuk 3 gedefinieerd wordt.

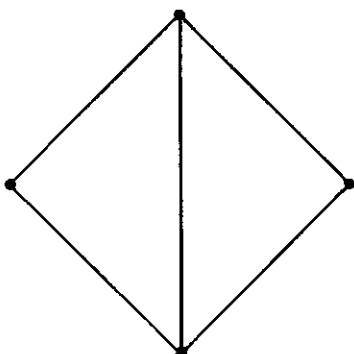


Fig. 4 Differentiemolecuul v/h schema van Dufort & Frenkel

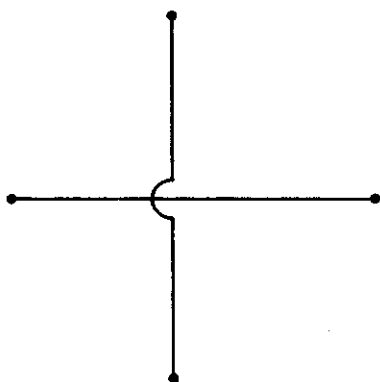


Fig. 5 Differentiemolecuul voor het leap-frog schema

Schema's (15) en (16) geven slechts relaties tussen de functiewaarden U . Het is ook mogelijk de waarden van de afgeleide functie $\frac{\partial U}{\partial x}$ in het schema te betrekken.

Een voorbeeld hiervan, het schema van Holly & Preissmann, zal in Hoofdstuk 4 worden behandeld.

3. Eigenschappen van differentieschema's

Bij het kiezen van een numeriek schema en een hierbij behorende plaats en tijdstip moet bekeken worden of

- het schema stabiel is
- het schema consistent is met de differentiaalvergelijking
- de numerieke oplossing bij netverfijning convergeert naar de analytische oplossing.

Hiernaast is een numerieke analyse van de optredende fouten van belang.

Intuitief gezien is een schema stabiel als het geen input-komponenten versterkt.

De input (beginvoorwaarde) $U(x, 0)$ is te schrijven als som van Fouriercomponenten:

$$U(x, 0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \exp(ikx). \quad (17)$$

De versterking van een willekeurige component hiervan is te onderzoeken door deze te substitueren in het schema.

Dit levert op:

$$U_m^{n+1} = \rho \cdot U_m^n \quad (18)$$

Hierin is ρ de amplifikatiefactor

De stabiliteitsvoorwaarde is:

$$|\rho| \leq 1$$

De formele definitie van stabiliteit luidt [10]:

Een differentieschema is stabiel als de oneindige reeks van berekende oplossingen $U(j\Delta x, n\Delta t)$ uniform begrensd is op het tijdsinterval $(0, T)$, $(0 \leq n\Delta t \leq T)$

De gedachte achter deze definitie is dat de reeks van berekende oplossingen die men vindt bij systematische netverfijning, niet divergeert.

Is het schema instabiel, dan zal bij netverfijning het aantal tijdstappen n toenemen bij een gelijkblijvend tijdsinterval $(0, T)$. Een Fourierkomponent kan door versterking met een amplificatiefactor ρ^n ($n \rightarrow \infty, |\rho| > 1$) zeer sterk groeien waardoor de oplossing niet meer begrensd is.

Een differentievergelijking heet consistent met een differentiaalvergelijking als het er een 'redelijke' discretisatie van is. Exacter [10]: als bij substitutie van de oplossing van de differentiaalvergelijking in de differentievergelijking een fout overblijft die bij netverfijning naar nul gaat.

Een differentieschema heet convergent als de afbreekfout in de oplossing bij netverfijning naar nul gaat [10]:

$$\lim_{\substack{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} |U(m\Delta x, n\Delta t) - U_m^n| \rightarrow 0 \quad (20)$$

De behandelde begrippen kunnen nader toegelicht worden aan de hand van het 'upstream'-schema, verg. (15).

Voor stabiliteitsonderzoek wordt in verg. (15) gesubstitueerd:

$$U_m^n = \rho^n \exp(mi\xi) \quad (21)$$

Hierin is: $\xi = k \cdot \Delta x$, met k het golfgetal
en $k = \frac{2\pi}{L}$, met L de golflengte

Dit levert op:

$$\rho = (\sigma + \lambda) \exp(-i\xi) + (1 - \sigma - 2\lambda) + \lambda \exp(i\xi) \quad (22)$$

Nu geldt voor kleine ξ :

$$\exp(i\xi) = 1 + i\xi - \frac{1}{2}\xi^2 + o(\xi^3) \quad (23)$$

Een aanname dat ξ klein is, is geoorloofd bij Δx klein, en doet derhalve geen afbreuk aan de algemeenheid van de afleiding.

Substitutie van (23) in (22) levert:

$$\rho \approx 1 - \xi^2(\lambda + \frac{1}{2}\sigma) - i\sigma\xi + o(\xi^3) \quad (24)$$

Hieruit volgt:

$$|\rho| \approx 1 - \frac{1}{2}\xi^2(2\lambda + \sigma - \sigma^2) + o(\xi^3) \quad (25)$$

en $|\rho| < 1$ (voorwaarde (19)) als

$$D + \frac{1}{2}c(\Delta x - c\Delta t) \geq 0 \quad (26)$$

De consistentie van het 'upstream'-schema, verg. (15) is te onderzoeken door Taylorreeksen vanuit $U(m\Delta x, n\Delta t)$ erin te substitueren. Dit levert:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + c\frac{\partial U}{\partial x} - [D + \frac{1}{2}c(\Delta x - c\Delta t)] \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + o((\Delta x)^2) = 0 \quad (27)$$

Bij netverfijning ($\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$) is schema (15) consistent met de differentiaalvergelijking (1). In de praktijk hebben Δt en Δx altijd een (kleine) waarde en is schema (15) in feite consistent met de differentiaalvergelijking (27).

Gelet op de lokale afbreekfout is het schema (15) van 1e orde in Δx en Δt . Omdat hiermee een 2e orde differentiaalvergelijking opgelost wordt ontstaat in de praktijk boven geschetst consistentieprobleem.

Voor lineaire problemen is voor convergentieonderzoek nuttig gebruik te maken van de aequivalentiestelling van Lax:

Voor een consistent schema is stabiliteit voldoende voor convergentie.

Schema (15) is dus convergent.

Voor het geven van een analyse van de numerieke fouten wordt meestal de nu volgende weg gekozen.

Is na n_t tijdstappen 1 golflengte doorgerekend, dan heeft het numerieke schema de input $A \cdot \exp(ikx)$, ($k = \text{golfgetal}$) getransformeerd tot

$$|\rho|^{n_t} \cdot A \cdot \exp \{i[kx - n_t \cdot \arg(\rho)]\}$$

De amplitudefactor is het quotient van numeriek berekende amplitude en analytisch gevonden amplitude, is $d = |\rho|^{n_t}$

De propagatiefactor is het quotient van numeriek berekende faseverschuiving en analytische faseverschuiving, is

$$c_r = - \frac{1}{2\pi} \cdot n_t \cdot \arg(\rho)$$

De amplitudefout is $|1-d| = \left| 1 - |\rho|^{n_t} \right|$

De fasefout is $|1-c_r| = \left| 1 - \left| \frac{1}{2\pi} n_t \arg(\rho) \right| \right|$

Bij een optredende amplitudefout spreekt men wel van numerieke dissipatie bij een optredende fasefout van numerieke dispersie.

Het hanteren van de begrippen amplitudefout en fasefout verdient de voorkeur, aangezien de term numerieke dispersie in de praktijk ook gebruikt wordt om andere numerieke effecten aan te geven.

Zo onderscheidt men bij schema (15) naast de diffusie (of dispersie-) coefficient D de numerieke diffusie (of dispersie)

$$D_{\text{num}} = \frac{1}{2} \cdot c(\Delta x - c\Delta t) \quad [L^2/T] \quad (28)$$

Bij het uitvoeren van een numerieke analyse in het geval van de convectie-diffusie vergelijking (1) vergelijkt men de numerieke-, en de analytische oplossing meestal niet na het doorlopen van 1 golflengte, dus op tijdstip $T = n_t \cdot \Delta t$ zoals hierboven, maar op het moment dat de amplitude van de analytische oplossing gedempt is met een factor e^{-1} .

Dit tijdstip t_r , de z.g. relaxatietijd, is te vinden uit verg.

$$(8): \quad t_r = (k^2 D)^{-1} \quad [T] \quad (29)$$

De faseverschuiving van de analytische oplossing is dan c.k. t_r

De amplitudefactor wordt nu: $d = e. |\rho|^{t_r/\Delta t} \quad (30)$

De propagatiefactor: $c_r = \frac{t_r}{\Delta t} \cdot \frac{1}{c.k.t_r} \cdot \arg(\rho) \quad (31)$

Invullen van (25) en (29) in (30) en (31) geeft als uitwerking voor het 'upstream' schema (15).

$$d \approx e. |1 - (k\Delta x)^2 (2\lambda + \sigma - \sigma^2)|^{\frac{1}{k^2 D \Delta t}} \quad (32)$$

Door gebruik te maken van

$$(1-ax)^{\frac{1}{x}} \approx \exp(-a) \quad (33)$$

volgt dan

$$d \approx 1 + \frac{\sigma^2 - \sigma}{2\lambda} \quad (34)$$

Door gebruik te maken van

$$\arctan x \approx x - \frac{x^3}{3} \quad (35)$$

volgt

$$c_r \approx -\frac{1}{\sigma \xi} \arctan \left[-\frac{\sigma \xi (1 - \frac{1}{6} \xi^2)}{1 - \xi^2 (\frac{1}{2} \sigma + \lambda)} \right] \\ \approx 1 + \frac{1}{6} \xi^2 (6\lambda + 3\sigma - 2\sigma^2 - 1) \quad (36)$$

De amplitudefout is $\frac{\sigma - \sigma^2}{2\lambda} \quad (37)$

De fasefout is $\frac{1}{6} \xi^2 (6\lambda + 3\sigma - 2\sigma^2 - 1) \quad (38)$

Een gewenste nauwkeurigheid is te kwantificeren door te verlangen dat amplitudefout kleiner dan ε_1 is en de fasefout kleiner dan ε_2 . Deze nauwkeurigheid is te bereiken door het aantal punten per golflengte: n_x , groot genoeg te kiezen:

$$n_x = \frac{L}{\Delta x} = \frac{2\pi}{\xi} \quad (39)$$

Zo geldt voor de fasefout:

$$\frac{1}{6} \xi^2 (6\lambda + 3\sigma - 2\sigma^2 - 1) < \varepsilon_2 \quad (40)$$

als

$$n_x > \left\{ \frac{2\pi^2}{3\xi_2} |6\lambda + 3\sigma - 2\sigma^2 - 1| \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (41)$$

4. Presentatie van een aantal schema's

Naast het 'upstream'-schema, verg. (15) en het 'Crank-Nicholson'-schema, verg. (16), worden de schema's van Lax, Stone & Brian en Holly & Preissmann behandeld.

1. Het 'upstream'-schema

$$U_m^{n+1} = (\sigma + \lambda) U_m^n + (1 - \sigma - 2\lambda) U_m^n + \lambda U_{m+1}^n \quad (42)$$

Dit is een expliciet 1e orde schema op twee tijdniveau's in alleen de funktiewaarden. Het differentiemolecuul is:

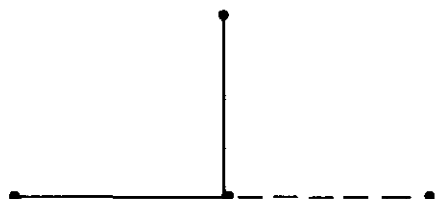


Fig. 6 Differentiemolecuul
upstream-schema

In Hoofdstuk 3 is al gevonden dat het schema stabiel is als

$$D = \frac{1}{2}c (\Delta x - c \Delta t) > 0, \quad (43)$$

dat het consistent, en daarmee convergent is.

De amplificatiefactor is

$$\rho = 1 - 2\lambda(1 - \cos \xi) - \sigma(1 - \cos \xi) - \sigma \sin \xi i \quad (44)$$

Voor beschouwingen over de nauwkeurigheid van het schema zie Hoofdstuk 3.

2. Het 'Lax'-schema

$$U_m^{n+1} = (\sigma/2+\lambda)U_{m-1}^n + (1-2\lambda)U_m^n + (-\sigma/2+\lambda)U_{m+1}^n \quad (45)$$

Dit is eveneens een expliciet 1e orde schema op twee tijd-niveau's in alleen de funktiewaarden. Het differentie-molecuul is:

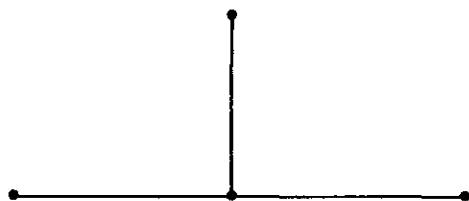


Fig 7 Differentiemolecuul
'Lax'-schema

Stabiliteit is te onderzoeken door de amplificatiefactor uit te rekenen.

$$\rho = 1 - 2\lambda(1 - \cos\xi) - \sigma \sin\xi i \quad (46)$$

Hieruit is af te leiden

$$|\rho| \approx [1 - \xi^2(2\lambda - \sigma^2)]^{1/2} \quad (47)$$

$$d \approx 1 + \frac{\sigma^2}{2\lambda}$$

$$c_T \approx 1 + \frac{1}{6}\xi^2(6\lambda - 2\sigma^2 - 1) \quad (49)$$

Het schema is stabiel als $: 1 \geq 2\lambda \geq \sigma^2$ (50)

De rechter ongelijkheid is uit verg. (47) af te leiden, de linker ongelijkheid volgt uit verg. (46) en de overweging dat

$$\text{Re}(\rho) \leq 1 \quad (51)$$

De stabiliteitsvoorwaarde (50) is te herschrijven als

$$D - \frac{1}{2}c^2\Delta t \geq 0 \quad (52)$$

Taylorontwikkeling van de oplossing in het schema wijst uit dat het schema consistent is, met een afbreekpunt $o(\Delta t)$ en $o((\Delta x)^2)$.

Het schema is dus tevens convergent.

Evenals het 'upstream'-schema, verg. (42) geeft het gebruik van dit 1^e orde schema numerieke problemen bij het oplossen van de 2^e orde differentiaalvergelijking (1) door het optreden van een 'numerieke diffusie'-term:

$$D_{\text{num}} = -\frac{1}{2} c^2 \Delta t \quad (53)$$

Nauwkeurigheidsoverwegingen leiden m.b.t (48) en (49) tot de voorwaarden

$$\frac{\sigma^2}{2\lambda} \leq \epsilon_1 \quad (54)$$

waaruit volgt $D_{\text{num}} \leq \epsilon_1 D$ (55)

en
$$n_x \geq \left\{ \frac{2\pi^2}{3\epsilon_2} |6\lambda - 1 - 2\sigma^2| \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (56)$$

3. Het 'Crank-Nicholson -schema

$$\begin{aligned} & U_{m-1}^{n+1} (-\theta \sigma/2 - \theta \cdot \lambda) + U_m^{n+1} (1 + 2\lambda\theta) + U_{m+1}^{n+1} (\theta\sigma/2 - \theta\lambda) = \\ & = U_{m-1}^n [(1-\theta) \cdot \sigma/2 + (1-\theta)\lambda] + U_m^n [1 - 2\lambda(1-\theta)] + U_{m+1}^n [-(1-\theta) \cdot \\ & \sigma/2 + (1-\theta)\lambda] \end{aligned} \quad (57)$$

Het differentiemolecuul is:

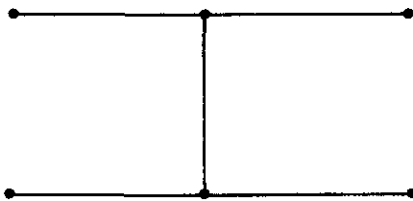


Fig. 8 Differentiemolecuul
'Crank-Nicholson'-
schema

Dit is een impliciet 2^e orde ($\theta = \frac{1}{2}$) of 1^e orde ($\theta \neq \frac{1}{2}$) schema op twee tijdniveau's in alleen de funktiewaarden.

Voor stabiliteitsonderzoek wordt de amplificatiefactor geanalyseerd:

$$\rho = \frac{1-2\lambda(1-\theta)(1-\cos\xi) - (1-\theta)\sigma\sin\xi}{1+2\lambda\theta(1-\cos\xi) + \theta\sigma\sin\xi} \quad (58)$$

Deze uitdrukking is moeilijk hanteerbaar en wordt in eerste instantie niet rechtstreeks uitgewerkt. Een stabiliteitsuitspraak is ook langs de volgende weg te verkrijgen.

Een sterk op schema (57) gelijkend schema is:

$$\begin{aligned} U_{m-1}^{n+1}(-\theta\lambda) + U_m^{n+1}(1+2\lambda\theta) + U_{m+1}^{n+1}(-\theta\lambda) = \\ U_{m-1}^n[(1-\theta)\lambda + \sigma/2] + U_m^n[1-2\lambda(1-\theta)] + U_{m+1}^n[(1-\theta)\lambda - \sigma/2] \end{aligned} \quad (59)$$

Het differentiemolecuul is:

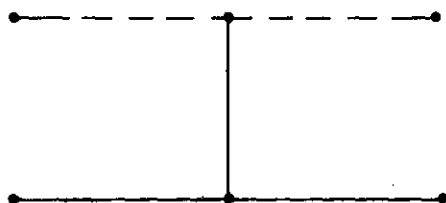


Fig. 9 Differentiemolecuul
pseudo-'Crank-Nicholson'
schema.

De amplificatiefactor hiervan is:

$$\rho = \frac{1 - 4\lambda(1-\theta)\sin^2(\frac{1}{2}\xi) - i\sigma\sin\xi}{1 + 4\lambda\theta\sin^2(\frac{1}{2}\xi)} \quad (60)$$

waaruit de volgende stabiliteitsvoorwaarden volgen:

$$\begin{aligned} \lambda &\leq \frac{1}{2-4\theta} && \text{als } 0 \leq \theta < \frac{1}{2} \\ \lambda &\text{ niet beperkt} && \text{als } \frac{1}{2} < \theta < 1 \end{aligned} \quad (61)$$

Het 'Crank-Nicholson'-schema (57) is in feite een uitbreiding van schema (59) met een impliciete term. Dit zal de stabiliteit niet ongunstig beïnvloeden.

De voorwaarden (61) zijn dus voldoende voor stabiliteit van schema (57).

De afbreekfout bij Taylorontwikkeling van de analytische oplossing in schema (57) is

$$A = -\frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - (1-\theta)c\Delta t \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + o((\Delta t)^2) + o((\Delta x)^2) \quad (62)$$

Door gebruik te maken van

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-c \frac{\partial U}{\partial x} + D \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \approx -c \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (63)$$

en

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \approx c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

is verg. (62) te herschrijven tot

$$A = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \left[-\frac{1}{2}\Delta t c^2 + (1-\theta)c^2 \Delta t \right] + o((\Delta t)^2) + o((\Delta x)^2) \quad (65)$$

Hieruit blijkt dat het schema voor $\theta = \frac{1}{2}$ van 2^e orde is, en voor $\theta \neq \frac{1}{2}$ van 1^e orde. Tevens is het schema consistent, dus ook convergent.

Voor uitspraken over de optredende amplitude-, en fasefout is een nadere analyse van de amplificatiefactor (58) vereist. Deze analyse volgt voor het geval $\theta = \frac{1}{2}$.

$$= \frac{1 - \lambda(1 - \cos \xi) - \frac{1}{2}\sigma \sin \xi i}{1 + \lambda(1 - \cos \xi) + \frac{1}{2}\sigma \sin \xi i} = \frac{1 - \frac{1}{4}\sigma^2 \xi^2 - \sigma \xi i + \frac{1}{6}\sigma \xi^3 i}{1 + \lambda \xi^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 \xi^2} \quad (66)$$

zodat

$$|\rho| = 1 - \lambda \xi^2 \quad (67)$$

$$\arg(\rho) = -\sigma \xi \left[1 - \frac{1}{12}\sigma^2 \xi^2 - \frac{1}{6}\xi^2 \right] \quad (68)$$

De amplitudefactor is:

$$d = e.[\rho]^{n_t} = 1 - \frac{1}{2}\lambda \xi^2 \quad (69)$$

De propagatiefactor is:

$$c_r = 1 - \frac{1}{12}\sigma^2 \xi^2 - \frac{1}{6}\xi^2 \quad (70)$$

De amplitudefout is

$$|1 - d| = \frac{1}{2}\lambda \xi^2 = \frac{1}{2}\lambda \left(\frac{2\pi}{n_x} \right)^2 \quad (71)$$

$$\text{De fasefout is } |1 - c_r| = \left(\frac{1}{12}\sigma^2 + \frac{1}{6} \right) \xi^2 = \left(\frac{1}{12}\sigma^2 + \frac{1}{6} \right) \left(\frac{2\pi}{n_x} \right)^2 \quad (72)$$

Hiermee worden de nauwkeurigheidsvoorwaarden voor de amplitude:

$$n_x \geq \frac{\left\{ \frac{2\pi^2 \lambda}{\epsilon_1} \right\}^{\frac{1}{2}}}{\epsilon_1^{\frac{1}{2}}} \quad (73)$$

Voor de fase:

$$n_x \geq \left\{ \frac{4\pi^2}{\epsilon_2} \cdot \left(\frac{1}{12}\sigma^2 + \frac{1}{6} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (74)$$

4. Het Stone & Brian-schema

$$U_{m-1}^{n+1} \left(\frac{1}{6} - \theta\sigma/2 - \theta\lambda \right) + U_m^{n+1} \left(\frac{2}{3} + 2\theta\lambda \right) + U_{m+1}^{n+1} \left(\frac{1}{6} + \sigma/2 - \theta\lambda \right) =$$

$$U_{m-1}^n \left[\frac{1}{6} + (1-\theta) \left(\frac{\sigma}{2} + \lambda \right) \right] + U_m^n \left[\frac{2}{3} - 2(1-\theta)\lambda \right] + U_{m+1}^n \left[\frac{1}{6} + (1-\theta) \cdot (-\sigma/2 + \lambda) \right] \quad (75)$$

Dit is een impliciet schema van 2e orde ($\theta = \frac{1}{2}$) of 1e orde ($\theta \neq \frac{1}{2}$) op twee tijdniveau's in alleen de funktiewaarden. Het differentiemolecuul is:

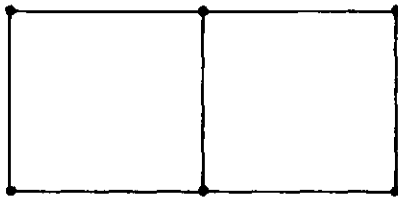


Fig. 10 Differentiemolecuul
'Stone & Brian'-schema

Dit schema is in feite een verfijning van het 'Crank-Nicholson' schema: er is een gewogen gemiddelde ingevoerd voor de discretisatie van de tijdsafgeleide $\frac{\partial U}{\partial t}$. In plaats van

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{t} \quad (76)$$

staat er

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{6} \cdot \frac{U_{m-1}^{n+1} - U_{m-1}^n}{\Delta t} + \frac{2}{3} \cdot \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t} + \frac{1}{6} \cdot \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m+1}^n}{\Delta t} \quad (77)$$

Deze verfijning blijkt gunstig te werken op de rekennauwkeurigheid. Het invullen van de Taylorontwikkeling van de analytische oplossing in schema (73), met $\theta = \frac{1}{2}$ geeft:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} + c \frac{\partial U}{\partial x} - D \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) + c \left(\frac{\Delta x}{6} \right)^2 \cdot \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = D \cdot \left(\frac{\Delta x}{12} \right)^2 \cdot \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + o((\Delta x)^4) \quad (78)$$

en bij substitutie van de Taylorontwikkeling in schema (75):

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} + c \frac{\partial U}{\partial x} - D \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\Delta x}{6} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial U}{\partial t} + c \frac{\partial U}{\partial x} - D \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right] = - \frac{1}{12} (\Delta x)^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + o((\Delta x)^4) \quad (79)$$

Hieruit blijkt dat 'Stone & Brian' nauwkeuriger is als

$$D \left(\frac{\Delta x}{12} \right)^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \ll c \left(\frac{\Delta x}{6} \right)^2 \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \quad (80)$$

Voor het 'Stone & Brian'-schema (75) gelden stabiliteit, consistentie en convergentie als bij schema (57).

Een verdere verbetering van het schema (75) is voorgesteld in [4]. De afgeleide $\frac{\partial U}{\partial t}$ krijgt i.p.v. de gewichtsfactoren $(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6})$ de factoren $(w/2, 1-w, w/2)$ met $w = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \sigma^2$

De amplificatiefactor van schema (75) is

$$\rho = \frac{\frac{2}{3} - 2\lambda(1 - \cos\xi)(1-\theta) + \frac{1}{3} \cdot \cos\xi - \sigma(1-\theta) \sin \xi i}{\frac{2}{3} + 2\lambda(1 - \cos\xi)\theta + \frac{1}{3} \cos\xi + \sigma\theta \sin \xi i} \quad (81)$$

Met $\theta = \frac{1}{2}$ en reeksontwikkeling voor de goniometrische functies levert dit

$$\rho \approx \frac{1 - \xi^2 (\frac{1}{4} \sigma^2 + \frac{1}{3}) - \sigma \xi i (1 - \frac{1}{4} \xi^2)}{1 + \xi^2 (\lambda - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \sigma^2)} \quad (82)$$

waaruit

$$|\rho| \approx 1 - \lambda \xi^2 \quad (83)$$

$$\arg(\rho) \approx -\sigma \xi (1 + \frac{1}{12} \xi^2 - \frac{1}{12} \sigma^2 \xi^2) \quad (84)$$

De amplitudefactor is

$$d \approx e^{n_t} |\rho| = 1 - \frac{1}{2} \lambda \xi^2 \quad (85)$$

De propagatiefactor is

$$c_r \approx 1 + \frac{1}{12} \xi^2 - \frac{1}{12} \sigma^2 \xi^2 \quad (86)$$

De amplitudefout is

$$|1 - d| \approx \frac{1}{2} \lambda \xi^2 \quad (87)$$

De fasefout is

$$|1 - c_r| \approx |1 - \sigma^2| \frac{1}{12} \xi^2 \quad (88)$$

Hiermee worden de nauwkeurigheidsvoorwaarden

voor de amplitude:
$$n_x \geq \left\{ \frac{2\pi^2 \lambda}{\epsilon_1} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (89)$$

en voor de fase

$$n_x \geq \left\{ \frac{\pi^2}{3\epsilon_2} |1 - \sigma^2| \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (90)$$

5. Het Holly & Preissmann-schema

Dit expliciete schema maakt gebruik van zowel de functie-
waarden U als de afgeleide $\frac{\partial U}{\partial x}$.

De gedachtengang die hieraan ten grondslag ligt is te
illustreeren aan de hand van Figuur 11.

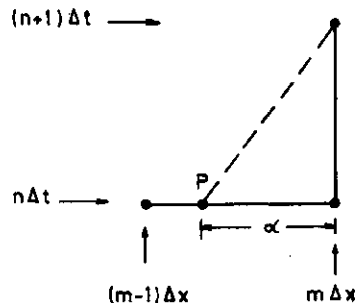


Fig. 11 Informatie-
voortplanting
langs karakteristieken.

De getrokken stippellijn is de karakteristieke richting
waarlangs zich de informatie voortplant. De karakteristiek
waarop $U(m\Delta x, (n+1)\Delta t)$ ligt snijdt de as $t = n\Delta t$ op het
interval $[(m-1)\Delta x, m\Delta x]$ in het punt P.

Om de functiewaarde $U(m\Delta x, (n+1)\Delta t)$ zo nauwkeurig mogelijk te
berekenen is het van belang de positie van punt P, en daarmee
de functiewaarde $U(P)$, zo nauwkeurig mogelijk vast te stellen.
Door een differentieschema te gebruiken wordt in feite de
functiewaarde $U(P)$ m.b.v. de bekende functiewaarden
 $U((m-1)\Delta x, n\Delta t)$ en $U(m\Delta x, n\Delta t)$ geïnterpoleerd. Door lineaire
interpolatie verkrijgt men een 1^e orde schema.

Door meer punten in de interpolatie te betrekken, bijv
 $U((m+1)\Delta x, n\Delta t)$, is een hogere orde interpolatiepolynoom, en
daarmee een hogere orde schema te verkrijgen. Het interpola-
tiepolynoom is echter ook van hogere orde te maken door het
niet alleen door de functiewaarden, maar ook door de waarden
van de afgeleide functie te laten vastleggen.

Deze gedachtengang heeft geresulteerd in het ontwikkelen van differentieschema's waarin naast de funktiewaarden U_m^n ook de waarden van de afgeleide funktie d_m^n een rol spelen, zoals het schema van Holly & Preissmann.

Notatie: U_m^n = de numeriek berekende funktiewaarde, corresponderend met $U(m\Delta x, n\Delta t)$.

d_m^n = de numeriek berekende afgeleide, corresponderend met

$$\frac{\partial U}{\partial x}(m\Delta x, n\Delta t)$$

Het schema is:

$$U_m^{n+1} = [\sigma^2(3-2\sigma) + 6\lambda(1-2\sigma)]U_{m-1}^n + [1-\sigma^2(3-2\sigma) - 6\lambda(1-2\sigma)]U_m^n + [\sigma^2(1-\sigma) + 2(1-3\sigma)\lambda]\Delta x d_{m-1}^n + [-\sigma(1-\sigma)^2 + 2(2-3\sigma)\lambda]\Delta x d_m^n. \quad (91)$$

$$d_m^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} [6\sigma(\sigma-1) + 12\lambda]U_{m-1}^n + \frac{1}{\Delta x} [-6\sigma(\sigma-1) - 12\lambda]U_m^n + [\sigma(3\sigma-2) + 6\lambda]d_{m-1}^n + [(\sigma-1)(3\sigma-1) + 6\lambda]d_m^n \quad (92)$$

Zie voor een preciese afleiding een bovenstaande vorm [3].

Het differentiemolecuul is:



Fig. 12 Differentiemolecuul
Holly & Preissmann-
schema

Voor stabiliteitsonderzoek wordt een Fouriercomponent in het schema gesubstitueerd:

$$U_m^n = P \cdot \exp(mi\xi) \quad (93)$$

$$d_m^n = Q \cdot \exp(mi\xi) \quad (94)$$

Dit levert:

$$\begin{bmatrix} P \\ n+1 \\ Q \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} P \\ n \\ Q \end{bmatrix} \quad (95)$$

met A de amplificatiematrix.

De stabiliteitsvoorwaarde is dat de amplificatiematrix eigenwaarden met modulus kleiner gelijk 1 heeft.

Dit is het geval als, zie [2],

$$\frac{1}{3} + 2\lambda > \sigma(\sigma - 1) > 2\lambda \quad (96)$$

Taylorreeksontwikkeling van de analytische oplossing in het schema wijst uit dat het schema consistent, en daarmee convergent is. De afbreekfout is $o((\Delta t)^2) + o((\Delta x)^2)$.

5. Praktische overwegingen

In de eerste plaats lijkt het nuttig om op te merken dat het mogelijk is een convectie-diffusieprobleem te ontbinden in een convectie-, en een diffusieprobleem, zie verg. (2) en (3). Dit betekent dat per tijdstap achtereenvolgens eenmaal met een convectie-schema en eenmaal met een diffusie-schema kan worden gerekend.

In de praktijk bepalen de concrete probleemstelling en de beschikbaarheid van gegevens meestal de keuze van het schema. Zo ontbreken vaak gegevens over de afgeleide $\frac{\partial U}{\partial x}$, waardoor het 'Holly & Preissmann'-schema niet bruikbaar is. Bij het gebruik van de 1^e orde schema's 'Lax' en 'upstream' moet men terdege rekening houden met de door deze schema's veroorzaakte numerieke diffusie.

De randvoorwaarden vragen bijzondere aandacht. De functie op de bovenstroomse rand is meestal expliciet gegeven, terwijl die op de benedenstroomse rand voorspeld moet worden. Vaak gebruik men daar een 'zwakke' of 'doorlatende' randvoorwaarde, meestal [12]:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (96)$$

Dit betekent dat voor het uitrekenen van de benedenstroomse randpunten gebruik gemaakt wordt van de convectievergelijking:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + c \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (97)$$

Deze vereenvoudiging van verg. (1) heeft uiteraard consequenties voor de stabiliteit, consistentie en nauwkeurigheid van het numeriek schema.

Voor het maken van een vergelijking tussen schema's kan onderzocht worden welke maaswijdte van het rekenrooster, d.w.z. hoeveel punten per golflengte, moeten worden doorgerekend om

een bepaalde nauwkeurigheid te halen.

Verondersteld wordt dat in een gegeven situatie, met bekende σ , D en golflengte L een handige keuze gemaakt moet worden voor de plaats-, en tijdstap bij een bepaald schema.

Bij de nu volgende beschouwing wordt gebruik gemaakt van het getal van Péclet (dimensieloos), dat gedefinieerd is als [12]:

$$P = \frac{c \cdot L}{D} = \frac{\sigma}{\lambda} n_x \quad (98)$$

De vraag is nu: welke combinatie van σ en n_x moet gekozen worden bij een gegeven P opdat de fasefout kleiner is dan ϵ_2 en de amplitudefout kleiner dan ϵ_1 ?

De resultaten hiervan voor verschillende schema's zijn te vergelijken.

Voor het schema van Lax gelden de nauwkeurigheidskriteria (54) en (56):

$$\text{amplitude: } \frac{\sigma^2}{2\lambda} < \epsilon_1 \quad (54)$$

$$\text{fase : } n_x > \left\{ \frac{2\pi^2}{3\epsilon_2} |6\lambda - 1 + 2\sigma^2| \right\}^{1/2} \quad (56)$$

en de stabiliteitskriteria (50):

$$1 > 2\lambda > \sigma^2 \quad (50)$$

Dit is uit te werken voor de amplitude tot

$$n_x^A \geq \frac{1}{2} P \sigma / \epsilon_1 \quad (0 < \sigma^2 \leq \epsilon_1) \quad (99)$$

en voor de fase tot

$$n_x^F > \left\{ \frac{2\pi^2}{3\epsilon_2} \left| 6\frac{\sigma n_x}{P} - 1 - 2\sigma^2 \right| \right\}^{1/2} \quad (0 < \sigma < 1) \quad (100)$$

De resultaten (99) en (100) zijn grafisch weer te geven zoals in [12].

Voor het hanteren van deze resultaten is het van belang op te merken dat een keuze

$$n_x = \max (n_x^A, n_x^F) \quad (101)$$

met σ beperkt volgens (99), in het algemeen wel een noodzakelijke, maar niet een voldoende voorwaarde is om aan (54) en (56) te voldoen. De nauwkeurigheidskriteria (54) en (56) moeten alsnog gecontroleerd.

Een voorbeeld waarin een keuze voor n_x volgens (101) mis loopt is:

$$\sigma = .2239 \quad \varepsilon_1 = .1$$

$$P = 6.6 \quad \varepsilon_2 = .05$$

$$\text{Uit (99) volgt:} \quad n_x^A > 7.38 \quad (\lambda = .25)$$

$$\text{Uit (100) volgt:} \quad n_x^F > 4.61 \quad (\lambda = .156)$$

Met een keuze volgens (101):

$$n_x = 8 \quad (\lambda = .271)$$

wordt niet aan (56) voldaan.

Voor het 'upstream'-schema zijn de nauwkeurigheidsvoorwaarden van de amplitude:

$$\left| \frac{\sigma^2 - \sigma}{2\lambda} \right| < \varepsilon_1 \quad (102)$$

voor de fase:

$$n_x > \left\{ \frac{2\pi^2}{3\varepsilon_2} |6\lambda + 3\sigma - 2\sigma^2 - 1| \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (41)$$

op het stabiliteitsgebied:

$$2\lambda + \sigma - \sigma^2 \geq 0 \quad (103)$$

$$0 \leq \sigma \leq 1 \quad (104)$$

$$0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2} \quad (105)$$

Dit is uit te werken tot

$$n_x^A \geq \frac{1}{2\varepsilon_1} (1 - \sigma)P \quad (106)$$

en
$$n_x^F \geq \left\{ \frac{2\pi^2}{3\xi_2} \left(6\sigma \frac{n_x^F}{p} + 3\sigma - 2\sigma^2 - 1 \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (107)$$

op het stabiliteitsgebied

$$1 - \varepsilon_1 \leq \sigma \leq 1 \quad (108)$$

$$0 \leq \sigma \leq \varepsilon_1 \quad (109)$$

Uitwerkingen voor de schema's 'Crank-Nicholson' en 'Stone & Brian' staan gegeven in Hoofdstuk 4, verg. (73) en (74), resp. (89) en (90).

6. Samenvatting

Bij zowel waterkwaliteit-, als waterkwantiteitsproblemen zoekt men vaak oplossingen voor de Convectie-Diffusie vergelijking. In deze nota wordt erop ingegaan hoe men met eindige differentiemethoden een numerieke oplossing voor deze vergelijking kan vinden, en met welke numerieke problemen men hierbij rekening moet houden. Een vijftal in de praktijk veel gebruikte of in de literatuur sterk aanbevolen numerieke schema's wordt onderzocht.

Abstract

The Convection-Diffusion equation is of interest in problems on waterquality as well as in problems on waterquantity. In this report it is shown how finite difference methods can provide numerical solutions to this equation, and what sort of numerical problems have to be coped with.

Five numerical schemes, often used in practice or recommended in the literature, are discussed.

7. Literatuuropgave

- [1] Cunge, J.A., F.M. Holly en A. Verwey, Practical Aspects of Computational River Hydraulics, Pitman Publishers (1980)
- [2] Guvanasen, V., Discussion on 'Accurate Calculation of Transport in Two Dimensions' by F.M. Holly and A. Preissmann, Journal of the Hydraul. Div., ASCE, October 1979, Vol. 105.
- [3] Holly, F.M. en A. Preissmann, Accurate Calculation on Transport in Two Dimensions, Journal of the Hydraul. Div., ASCE, November 1977, vol. 103.
- [4] Kalf, F., Comparison of solution procedures of the dispersion-convection equation using finite difference methods, Proceedings of the Groundwater Pollution Conference Perth 1979, Australian Water Resources Council Conference Series No 1, Canberra (1981).
- [5] Koopmans, R.W.R., Differentiemethoden voor het oplossen van grondwaterstromingen, LH-Wageningen, (1982).
- [6] Kraijenhoff van de Leur, D.A., Hoogwatergolven en afvoerspellingen, LH-Wageningen, (1981).
- [7] Molen, W.H. van der, Water Quality, Influence of Transport and Mixing Processes, LH-Wageningen, (1975).
- [8] Moll, J.R., Schatting en Identifikatie van een model met een seriestructuur voor de zoutconcentratie in de rivier de Waal, TH Twente, (1981).

- [9] Nes, Th. van de en M.H. Hendriks, Analysis of a linear distributed model of surface runoff, LH vakgroep Hydraulica & Afvoerhydrologie, Rapport No 1, Wageningen (1971).
- [10] Richtmeyer, R.D. en K.W. Morton, Difference Methods for Initial Value Problems. Interscience Publishers, John Wiley, New York (1967).
- [11] Siemons, J. Numerical methods for the solution of diffusion-advection problems, Waterloopkundig Laboratorium Delft, Rapport 88.1, (1970).
- [12] Vreugdenhil, C.B. Waterloopkundige Berekeningen I, TH-Delft, Afdeling Civiele Techniek (1979).
- [13] Witter, J.V., Enige opmerkingen met betrekking tot het oplossen van de zoutdiffusievergelijking met behulp van differentiemethodes, LH-vakgroep Hydraulica en Afvoerhydrologie, NOTA 56, (1982).