

DE BEREKENING VAN INSTATIONAIRE STROMING IN OPEN WATERLOPENSTELSELS
MET EEN BOOMSTRUCTUUR

NOTA 66

D.J.N. van Baalen
herzien door J.V. Witter

Vakgroep Hydraulica en afvoerhydrologie
Landbouwniversiteit Wageningen, 1985

257376

INHOUDSOPGAVE

blz

1	Inleiding	1
2	Achtergronden	1
2.1	Wetten van de waterbeweging	1
2.2	Oplossingsmethoden	2
2.3	Vierpuntsschema	4
2.4	Double-sweep methode	7
2.5	Beginvoorwaarden	9
2.6	Externe randen	11
2.7	Interne randen	13
2.7.1	Samenvloeiingen	13
2.7.2	Kunstwerken	15
2.8	Algemene rekenprocedure	17
3	Golfvoortplantingsanalyse van het vierpuntsschema	18
4	Schematisatie	19
4.1	Geometrische schematisatie	19
4.2	Hydraulische parameters	19
4.3	Discontinuïteit in bodemhoogte	20
4.4	Droogvallende takken	21
4.5	Geringe waterdiepten	21
4.6	Kunstwerken	21
4.6.1	Stuw	21
4.6.2	Duiker	23
4.6.3	Pomp	25
	Literatuur	26
	Bijlagen	
I	Afleiding coëfficiënten E, F, L, M en N voor de double sweep methode	27
II	Behandeling interne randen	31
III	Droogvallende leidingen	38
IV	Rekenvolgorde takken	39

1 INLEIDING

Bij de vakgroep Hydraulica en afvoerhydrologie van de Landbouwniversiteit te Wageningen bestond behoefte aan een computerprogramma voor de berekening van instationaire waterstroming in stelsels open waterlopen, teneinde het effect van wijzigingen in het afvoerstelsel na te gaan. In eerste instantie is uitgegaan van stelsels met een zogenaamde boomstructuur.

De basis voor een dergelijk programma vormen de Saint-Venant vergelijkingen die numeriek met een impliciet differentieschema kunnen worden opgelost. Beginvoorwaarden zijn stationaire verhanglijnen en debieten consistent met de randvoorwaarden op het tijdstip waarop de berekeningen starten.

Als externe randvoorwaarden kunnen ingevoerd worden een gegeven waterstand, dan wel debiet in de tijd, een Q,h-kromme, zijdelingse toevoer in een tak alsmede een puntinvoer. Als interne randvoorwaarden zijn standaard ingebouwd een stuw, een duiker, een pomp en een willekeurige profielsverandering.

In deze nota wordt het bovengenoemde beschreven.

2 ACHTERGRONDEN

2.1 Wetten van de waterbeweging

Basis voor de berekening van instationaire waterstroming zijn de zogenaamde Saint-Venant vergelijkingen:

$$\text{Continuïteit: } B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q$$

$$\text{Beweging} \quad : \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha \frac{Q^2}{A_s} \right] + g A_s \frac{\partial h}{\partial x} + g A_s \frac{Q |Q|}{K^2} = 0$$

waarin :	B	totale breedte van het wateroppervlak	[m]
	h	waterstand t.o.v. horizontaal ref. niveau	[m]
	Q	debiet	[m ³ /s]
	q	zijdelingse toestroming	[m ² /s]

A_s	nat oppervlak stroomvoerend profiel	$[m^2]$
α	coefficient voor de snelheidsverdeling	$[-]$
K	'conveyance' = $k_m \cdot A_s \cdot R^{2/3}$	$[m^3/s]$
x	lengterichting	$[m]$
t	tijd	$[s]$
k_m	Manning-coefficient	$[m^{1/3}/s]$
R	hydraulische straal	$[m]$

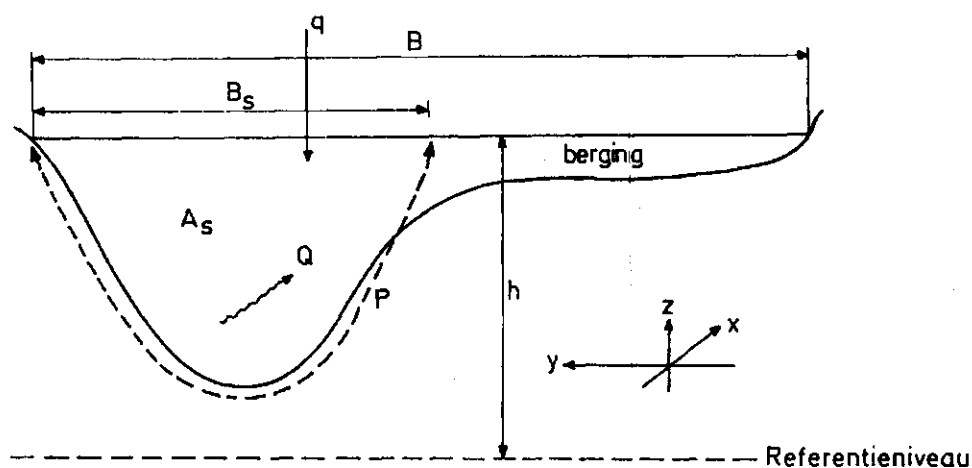


Fig. 1 Definitietekening van de profielvariabelen.

De coefficient α is een correctiefactor voor de ongelijke verdeling van de snelheid over het profiel in y - en z -richting (resp. de breedterichting en de verticaal) en is gedefinieerd als:

$$\alpha = \frac{A_s}{Q^2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_0}^{z_1} u^2 dy dz$$

Over het algemeen wordt aangenomen dat de coefficient bij integratie over de z -richting ongeveer één is, zodat de coefficient α dan bij benadering gelijk wordt aan:

$$\alpha \approx \frac{A_s}{Q^2} \int_{y_1}^{y_2} \bar{u}^2 z dy$$

2.2 Oplossingsmethoden

Voor de numerieke oplossing van de twee partiële differentiaalvergelijkingen zijn de volgende methoden beschikbaar.

1. expliciete differentiemethoden;
2. impliciete differentiemethoden;
3. eindige elementenmethode.

De eindige elementenmethode heeft voordelen in een twee-dimensionale benadering als gevolg van de flexibiliteit in keuze van de basiselementen. De stroming in open waterlopen is echter gebaseerd op een één-dimensionale benadering; derhalve is de eindige elementenmethode buiten beschouwing gelaten.

Bij de eindige differentiemethoden kan een keus gemaakt worden tussen expliciete en impliciete methoden. De eerste hebben als bezwaar dat het zogenaamde Courantgetal $\sigma = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$ (c is de snelheid waarmee een kleine opgelegde verstoring van de stroming zich voortplant) kleiner dan 1 moet zijn, teneinde instabiliteit te voorkomen. De impliciete methoden hebben als nadeel dat ze in het algemeen leiden tot een stelsel van vergelijkingen, dat door matrixinversie opgelost moet worden.

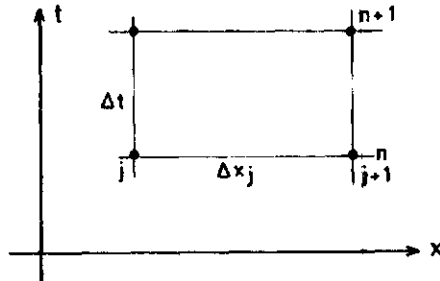
Bij berekeningen van relatief kleine stelsels, waarin zich golfverschijnselen met een korte golflengte voordoen, impliceert dit een schematisatie in de lengterichting met kleine intervallen Δx . Bij een expliciet schema zou dit onvermijdelijk leiden tot een eveneens kleine tijdstap Δt , hetgeen niet het geval is voor een impliciet schema. (Een kleine tijdstap Δt kan leiden tot lange rekentijden.)

Derhalve wordt hier een impliciet schema behandeld. Nu zal in het algemeen de tijdstap beperkt worden door de eis de randvoorwaarden juist weer te geven.

Daar er bij de hogere Courantgetallen ($\sigma > 2$) weinig verschil is in de nauwkeurigheid van amplitude- en faseweergave, is gekozen voor een vierpuntsschema (Preissmann-schema), waarbij in elk punt zowel waterstand als debiet wordt berekend. In de verschillende takken van het door te rekenen stelsel kan daarbij een verschillende afstandsstep Δx gehanteerd worden.

2.3 Vierpuntsschema

De differentiemoleculen van het vierpuntsschema is:



De differenties en functies worden als volgt gediscetiseerd.

$$\partial f / \partial x = \theta \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1}}{\Delta x_j} + (1 - \theta) \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\Delta x_j}$$

$$\partial f / \partial t = \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_{j+1}^n + f_j^{n+1} - f_j^n}{2\Delta t}$$

$$f(x, t) = \frac{\theta}{2} (f_{j+1}^{n+1} + f_j^{n+1}) + \frac{1-\theta}{2} (f_{j+1}^n + f_j^n)$$

Toegepast op de Saint-Venant vergelijkingen levert dit:

Continuïteit :

$$\left[\frac{\theta}{2} (B_{j+1}^{n+1} + B_j^{n+1}) + \frac{1-\theta}{2} (B_{j+1}^n + B_j^n) \right] \cdot \left[\frac{h_{j+1}^{n+1} - h_{j+1}^n + h_j^{n+1} - h_j^n}{2\Delta t} \right] +$$

$$\left[\theta \frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_j^{n+1}}{\Delta x_j} + (1-\theta) \frac{Q_{j+1}^n - Q_j^n}{\Delta x_j} \right] = \frac{q_{j+1}^{n+1} + q_j^{n+1}}{2}$$

Beweging:

$$\frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n + Q_j^{n+1} - Q_j^n}{2\Delta t} + \theta \frac{(\alpha Q^2/A_s)_{j+1}^{n+1} - (\alpha Q^2/A_s)_j^{n+1}}{\Delta x_j} +$$

$$(1-\theta) \frac{(\alpha Q^2/A_s)_{j+1}^n - (\alpha Q^2/A_s)_j^n}{\Delta x_j} +$$

$$g \left[\frac{\theta}{2} (A_{s,j+1}^{n+1} + A_{s,j}^{n+1}) + \frac{1-\theta}{2} (A_{s,j+1}^n + A_{s,j}^n) \right] \cdot$$

$$\left[\theta \frac{h_{j+1}^{n+1} - h_j^{n+1}}{\Delta x_j} + (1-\theta) \frac{h_{j+1}^n - h_j^n}{\Delta x_j} \right] +$$

$$g \frac{\theta}{2} \left[\left(\frac{Q^2 A_s}{K^2} \right)_{j+1}^{n+1} + \left(\frac{Q^2 A_s}{K^2} \right)_j^{n+1} \right] + g \left(\frac{1-\theta}{2} \right) \left[\left(\frac{Q^2 A_s}{K^2} \right)_{j+1}^n + \left(\frac{Q^2 A_s}{K^2} \right)_j^n \right] = 0$$

Indien voor $f^{n+1} = f^n + \Delta f$ wordt geschreven, en bij verwaarlozing van alle termen met Δ^2 , resteert het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\text{Continuïteit : } H_j \Delta h_{j+1} + B_j \Delta Q_{j+1} = C_j \Delta h_j + D_j \Delta Q_j + G_j$$

$$\text{Beweging : } H'_j \Delta h_{j+1} + B'_j \Delta Q_{j+1} = C'_j \Delta h_j + D'_j \Delta Q_j + G'_j$$

De coëfficiënten hierin zijn gedefinieerd als:

$$H_j = \frac{B_{j+1}^n + B_j^n}{4\Delta t} ; \quad B_j = \theta / \Delta x_j$$

$$C_j = - \frac{B_{j+1}^n + B_j^n}{4\Delta t} ; \quad D_j = \theta / \Delta x_j ; \quad G_j = - \frac{Q_{j+1}^n - Q_j^n}{\Delta x_j} + \frac{q_{j+1}^{n+1} + q_j^{n+1}}{2}$$

$$H'_j = \frac{\theta}{\Delta x_j} \frac{Q_{j+1}^n}{A_{s,j+1}^n} \cdot \left(\frac{dx}{dh} \right)_{j+1}^n - \theta \frac{Q_{j+1}^n}{\Delta x_j} \frac{B_{s,j+1}^n}{A_{s,j+1}^2} + \frac{g\theta \cdot B_{s,j+1}^n}{2\Delta x_j} \cdot$$

$$\left(h_{j+1}^n - h_j^n + \frac{A_{s,j+1}^n + A_{s,j}^n}{B_{s,j+1}^n} \right) + \frac{g\theta \cdot B_{s,j+1}^n}{2} \frac{Q_{j+1}^n}{K_{j+1}^2} \frac{|Q_{j+1}^n|}{K_{j+1}^2}$$

$$g\theta \frac{Q_{j+1}^n |Q_{j+1}^n|}{K_{j+1}^3} \frac{A_{s,j+1}^n}{\left(\frac{dK}{dh} \right)_{j+1}^n}$$

$$B'_j = \frac{1}{2\Delta t} + \frac{2\alpha_{j+1}^n \cdot \theta \cdot Q_{j+1}^n}{A_{s,j+1}^n \Delta x_j} + g\theta \cdot \frac{A_{s,j+1}^n \cdot |Q_{j+1}^n|}{K_{j+1}^n}$$

$$C'_j = \frac{\theta}{\Delta x_j} \cdot \frac{Q_j^n}{A_{s,j}^n} \left(\frac{dx}{dh}\right)_j - \theta \cdot \frac{\alpha_j^n \cdot B_{s,j}^n \cdot Q_j^{n2}}{\Delta x_j \cdot A_{s,j}^n} - \frac{g\theta \cdot B_{s,j}^n}{2\Delta x_j} (h_{j+1}^n - h_j^n) - \frac{A_{s,j+1}^n + A_{s,j}^n}{B_{s,j}^n}$$

$$\frac{g\theta \cdot B_j^n \cdot Q_j^n \cdot |Q_j^n|}{2 K_j^n} + g\theta \cdot \frac{Q_j^n \cdot |Q_j^n| \cdot A_{s,j}^n}{K_j^n} \left(\frac{dK}{dh}\right)_j^n$$

$$D'_j = -\frac{1}{2}\Delta t + \frac{2\alpha_j^n \cdot \theta \cdot Q_j^n}{A_{s,j}^n \cdot \Delta x_j} - g\theta \cdot \frac{A_{s,j}^n \cdot |Q_j^n|}{K_j^n}$$

$$G'_j = -\frac{\alpha_{j+1}^n \cdot Q_{j+1}^n}{\Delta x_j \cdot A_{s,j+1}^n} + \frac{\alpha_j^n \cdot Q_j^n}{\Delta x_j \cdot A_{s,j}^n} - \frac{g}{2\Delta x_j} (A_{s,j+1}^n + A_{s,j}^n)(h_{j+1}^n - h_j^n) -$$

$$\frac{g}{2} \cdot \frac{Q_{j+1}^n \cdot |Q_{j+1}^n| \cdot A_{s,j+1}^n}{K_{j+1}^n} - \frac{g}{2} \cdot \frac{Q_j^n \cdot |Q_j^n| \cdot A_{s,j}^n}{K_j^n}$$

De coëfficiënten zijn volledig uitgedrukt in waarden op tijdstip $n\Delta t$ die bekend worden verondersteld, alsmede in toevoeren op tijdstip $(n+1)\Delta t$ die extern bepaald zijn en dus ook bekend mogen worden verondersteld.

Voor een stelsel met N rekenpunten kan men $2N-2$ van dergelijke vergelijkingen schrijven voor $2N$ onbekenden. Combinatie met 2 randvoorwaarden maakt het stelsel oplosbaar voor elke tijdstap Δt .

2.4 Double-sweep methode

De oplossing van het in Hoofdstuk 2.3 geformuleerde stelsel lineaire vergelijkingen kan gevonden worden met elke willekeurige methode voor matrixinversie. Daar dit echter zeer veel rekentijd kan vergen bij grote stelsels met veel vertakkingen, is het gewenst een efficiënte methode te vinden, gebruik makend van de bandeigenschappen van deze matrix.

De methode die goed gebruikt kan worden, is de zogenaamde "double-sweep" methode. Het in Hoofdstuk 2.3 geformuleerde stelsel lineaire vergelijkingen is

$$H_j \Delta h_{j+1} + B_j \Delta Q_{j+1} = C_j \Delta h_j + D_j \Delta Q_j + G_j \quad (1)$$

$$H'_j \Delta h_{j+1} + B'_j \Delta Q_{j+1} = C'_j \Delta h_j + D'_j \Delta Q_j + G'_j \quad (2)$$

Veronderstel dat er een relatie bestaat van de vorm:

$$\Delta Q_j = E_j \cdot \Delta h_j + F_j \quad (3)$$

Nu kan bewezen worden dat er een soortgelijke relatie bestaat voor het punt (j+1). Substitutie van Vergelijking (3) in de Vergelijkingen (1) en (2) levert:

$$H_j \Delta h_{j+1} + B_j \Delta Q_{j+1} = (C_j + D_j E_j) \Delta h_j + G_j + D_j F_j \quad (4)$$

$$H'_j \Delta h_{j+1} + B'_j \Delta Q_{j+1} = (C'_j + D'_j E_j) \Delta h_j + G'_j + D'_j F_j \quad (5)$$

Eliminatie van Δh_j uit (4) en (5) levert:

$$\Delta Q_{j+1} = \frac{H_j (C'_j + D'_j E_j) - H'_j (C_j + D_j E_j)}{B'_j (C_j + D_j E_j) - B_j (C'_j + D'_j E_j)} \cdot \Delta h_{j+1} + \frac{(C'_j + D'_j E_j)(G_j + D_j F_j) - (C_j + D_j E_j)(G'_j + D'_j F'_j)}{B'_j (C_j + D_j E_j) - B_j (C'_j + D'_j E_j)}$$

Oftewel : $\Delta Q_{j+1} = E_{j+1} \cdot \Delta h_{j+1} + F_{j+1}$

, geheel overeenkomstig Vergelijking (3).

Indien aan de bovenstroomse kant van een tak de coëfficiënten E_1 en F_1 uit de randvoorwaarde afgeleid kunnen worden, kunnen voor de hele tak de coëfficiënten E en F berekend worden. Met behulp van (3) kan dan ΔQ_j uit Δh_j berekend worden.

Rest nog het berekenen van Δh_j .

Vergelijking (5) levert:

$$\Delta h_j = \frac{H'_j}{C'_j + D'_j E_j} \cdot \Delta h_{j+1} + \frac{B'_j}{C'_j + D'_j E_j} \cdot \Delta Q_{j+1} - \frac{G'_j + D'_j F'_j}{C'_j + D'_j E_j}$$

, oftewel

$$\Delta h_j = L_j \Delta h_{j+1} + M_j \Delta Q_{j+1} + N_j$$

Indien op de benedenstroomse rand Δh_N uit de randvoorwaarde bekend is (en daarmee ΔQ_N , daar E_N , F_N bekend zijn) kan Δh_{N-1} berekend worden.

Nu is ook ΔQ_{N-1} bekend en men kan deze procedure herhalen tot de bovenstroomse rand.

De procedure is in het hieronder volgend stroomschema weergegeven.

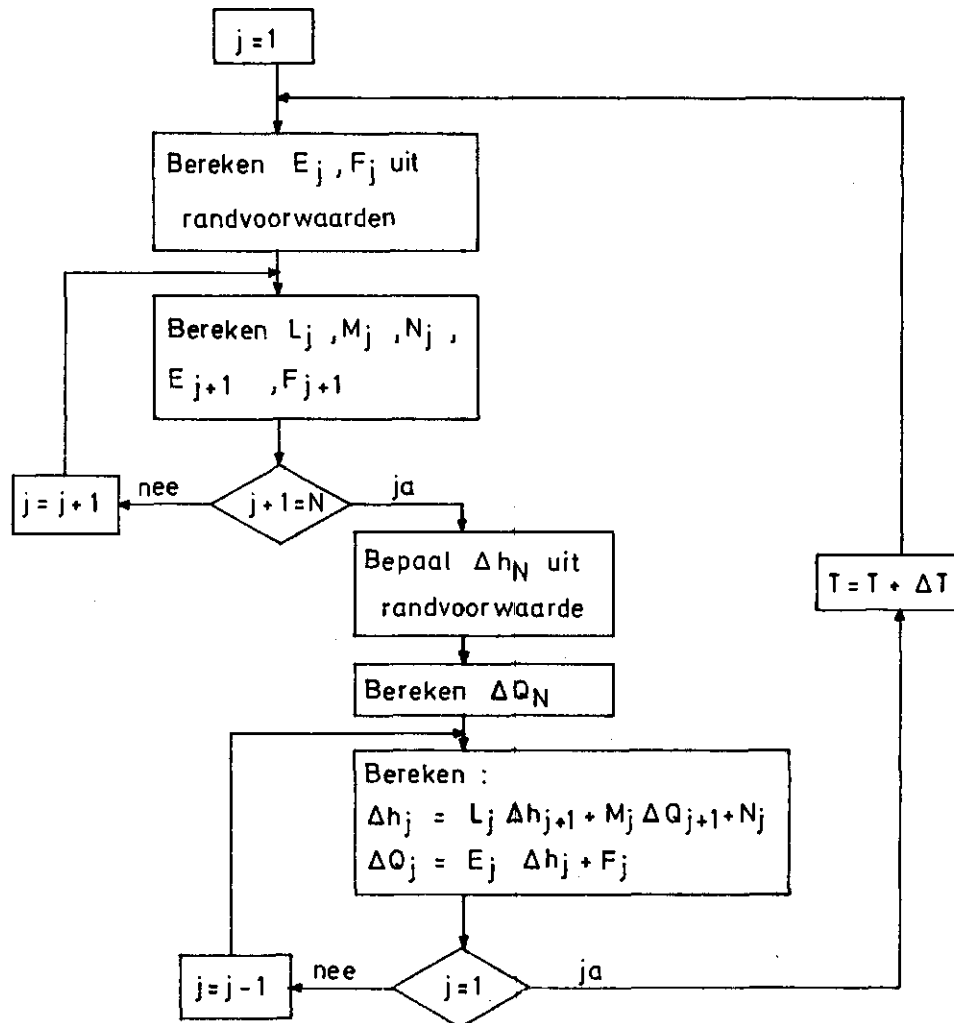


Fig. 2. Stroomschema double-sweep methode.

2.5 Beginvoorwaarden

Naast randvoorwaarden zijn voor de oplossing van de differentievergelijkingen ook beginvoorwaarden noodzakelijk. In een programma moeten, alvorens de instationaire berekeningen aanvangen, stationaire verhanglijnen met daarbijbehorende debieten berekend worden in overeenstemming met de randvoorwaarden opgelegd op tijdstip 0.

De Saint-Venant vergelijkingen reduceren bij stationaire berekeningen tot:

$$\text{Beweging : } \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{Q^2}{A_s} \right) + g A_s \frac{\partial h}{\partial x} + g A_s \cdot \frac{Q |Q|}{K^2} = 0$$

$$\text{Continuïteit : } \frac{\partial Q}{\partial x} = q$$

De continuïteitsvergelijking in deze vorm kan eenvoudig gebruikt worden om in ieder punt het debiet te berekenen door sommatie van de toevoer in bovenstrooms gelegen punten.

Op gelijke wijze als bij de instationaire bewegingsvergelijking kan de stationaire bewegingsvergelijking gediscretiseerd worden, hetgeen leidt tot:

$$\begin{aligned} & \Delta h_j \cdot \left[\theta \cdot \frac{Q_{j+1}^2 + Q_j^2}{2\Delta x_j} \left\{ \left(\frac{\alpha B_s^n}{A_s^2} \right)_j - \frac{1}{A_{s,j}} \cdot \left(\frac{d\alpha}{dh} \right)_j \right\} + \frac{g\theta}{2\Delta x_j} (h_{j+1} - h_j) B_{s,j} - \right. \\ & \left. g\theta \cdot \frac{A_{s,j+1} + A_{s,j}}{2\Delta x_j} + \frac{|Q_{j+1}| |Q_{j+1}| + |Q_j| |Q_j|}{2} \cdot \frac{\theta}{2} \left\{ \left(\frac{B_s}{K^2} \right)_j - \left(\frac{2A_s}{K^3} \frac{dK}{dh} \right)_j \right\} = \right. \\ & \Delta h_{j+1} \left[- \theta \cdot \frac{Q_{j+1}^2 + Q_j^2}{2\Delta x_j} \left\{ \frac{1}{A_{s,j+1}} \left(\frac{d\alpha}{dh} \right)_{j+1} - \left(\frac{\alpha B_s}{A_s^2} \right)_{j+1} \right\} - \frac{g\theta}{2\Delta x_j} (h_{j+1} - h_j) B_{s,j+1} - \right. \\ & \left. g\theta \cdot \frac{A_{s,j+1} + A_{s,j}}{2\Delta x_j} - \frac{|Q_{j+1}| |Q_{j+1}| + |Q_j| |Q_j|}{2} \cdot \frac{\theta}{2} \left\{ \left(\frac{B_s}{K^2} \right)_{j+1} - \left(\frac{2A_s}{K^3} \frac{dK}{dh} \right)_{j+1} \right\} \right] + \\ & \left[- \frac{Q_{j+1}^2 + Q_j^2}{2\Delta x_j} \left\{ \left(\frac{\alpha}{A_s} \right)_{j+1} - \left(\frac{\alpha}{A_s} \right)_j \right\} - g \cdot \frac{(A_{s,j+1} + A_{s,j})(h_{j+1} - h_j)}{2\Delta x_j} - \right. \\ & \left. \frac{|Q_{j+1}| |Q_{j+1}| + |Q_j| |Q_j|}{4} \left\{ \left(\frac{A_s}{K^2} \right)_{j+1} + \left(\frac{A_s}{K^2} \right)_j \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Oftewel: } H'_j \Delta h_{j+1} = C'_j \Delta h_j + G'_j \rightarrow \Delta h_j = L_j \Delta h_{j+1} + N_j$$

$$\text{, waarin } L_j = \frac{H'_j}{C'_j}, \quad N_j = - \frac{G'_j}{C'_j}$$

Uitgaande van een willekeurige waarde van de waterstanden, en zoals reeds gezegd bekende debieten, kunnen met bovenstaande formule op identieke wijze als bij de instationaire berekening de correcties Δh_j op de waterstand berekend worden.

Na aldus nieuwe waarden van de waterstand bepaald te hebben, worden wederom de debieten bepaald (bij Q,h-krommen zijn deze immers afhankelijk van de waterstand) en wordt de procedure herhaald totdat de waterstanden en debieten niet meer veranderen.

Bij samenvloeiingen is eenvoudig uit de benedenstroomse waterstand de bovenstroomse waterstand te bepalen m.b.v. de eis van gelijk energieniveau.

Bij stuwen en duikers is met de formule $Q = Q(h_{\text{bov}}, h_{\text{ben}})$ en bekende benedenstroomse waterstand h_{ben} en bekend debiet op eenvoudige wijze de bovenstroomse waterstand h_{bov} te berekenen.

Pompen in een systeem geven bij de berekening van de stationaire begintoestand enige problemen daar zij in principe aanleiding zijn tot instationaire verschijnselen. Immers bij een pompcapaciteit groter dan het aangevoerde debiet, zal de pomp periodiek uitslaan en na verloop van tijd weer aanslaan, zodat geen stationaire toestand kan ontstaan. Teneinde toch beginvoorwaarden te genereren, moet bij de stationaire berekening aangenomen worden dat de pomp het aangeboden debiet precies verpompt bij een bovenstroomse waterstand gelijk aan het uitslagpeil.

In dit geval moet men dus geen waarde hechten aan de verhanglijnen bovenstrooms van een pomp. Zij dienen slechts om de instationaire berekening te kunnen starten.

2.6 Externe randen

De volgende externe randen zijn mogelijk:

1. $h = h(t)$ gegeven
2. $Q = Q(t)$ "
3. $Q = Q(h)$ "

Bij bovenstroomse randen moeten de coëfficiënten E_j en F_j in Vergelijking (3) bepaald worden.

1. $h = h(t)$ gegeven.

Op $n\Delta t$ en $(n+1)\Delta t$ is h_j bekend, dus is Δh_j bekend.

$$\Delta h_j = \frac{\Delta Q_j}{E_j} - \frac{F_j}{E_j}$$

$$\begin{aligned} \text{Stel dus : } E_j &= \alpha & (\alpha \gg \Delta Q_j) \\ F_j &= -\alpha \cdot \Delta h_j \end{aligned}$$

2. $Q = Q(t)$ bekend.

Op $n\Delta t$ en $(n+1)\Delta t$ is Q_j bekend, dus is ΔQ_j bekend

$$\begin{aligned} \text{Stel dus : } E_j &= 1 \\ F_j &= \Delta Q_j \end{aligned}$$

3. $Q = Q(h)$ bekend

$$\text{Randvoorwaarde : } Q_j(t + \Delta t) = Q(h^n) + \frac{dQ}{dh} \cdot \Delta h_j$$

$$Q_j(t + \Delta t) = Q_j^n + \Delta Q_j$$

Per definitie:

$$\Delta Q_j = Q(h^n) - Q_j^n + \frac{dQ}{dh} \cdot \Delta h_j$$

Dus:

$$E_j = \frac{dQ}{dh}$$

$$F_j = Q(h^n) - Q_j^n \approx 0$$

Bij benedenstroomse randen moet Δh_N bepaald worden. Schattingen van E_N en F_N zijn bekend (zie Hoofdstuk 2.4).

$$1. \Delta h_N = h^{n+1} - h^n$$

, direct te bepalen uit de randvoorwaarde.

2. ΔQ_N te bepalen uit randvoorwaarde, vervolgens

$$\Delta h_N = \frac{\Delta Q_N - F_N}{E_N}$$

$$3. Q_N + \Delta Q_N = Q(h^n) + \frac{dQ}{dh} \cdot \Delta h_N$$

$$\text{Tevens: } Q_N + \Delta Q_N = Q_N + E_N \Delta h_N + F_N$$

Dus:

$$\Delta h_N = \frac{Q(h^N) - Q_N - F_N}{E_N - dQ/dh}$$

2.7 Interne randen*)

2.7.1 Samenvloeiingen

Stel dat in het model samenvloeiingen van maximaal vier samenkomende takken opgenomen kunnen worden.

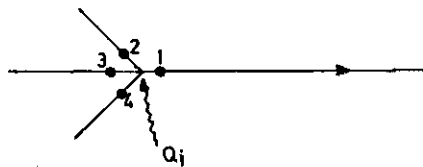


Fig. 3. Definitieschets samenvloeiing.

Het probleem is de coëfficiënten $E_1, F_1; L_2, M_2, N_2; L_3, M_3, N_3; L_4, M_4, N_4$ te bepalen. $E_2, F_2; E_3, F_3; E_4, F_4$ van de bovenstroomse takken worden verondersteld reeds bekend te zijn.

Bij een samenvloeiing kunnen de volgende voorwaarden geformuleerd worden.

$$1. Q_1 = Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_i \quad (6)$$

$$2. h_1 + \frac{1 - \xi_1}{2g} \cdot \frac{Q_1^2}{A_1^2} = h_2 + \frac{1 - \xi_2}{2g} \cdot \frac{Q_2^2}{A_2^2} = h_3 + \frac{1 - \xi_3}{2g} \cdot \frac{Q_3^2}{A_3^2} =$$

$$= h_4 + \frac{1 - \xi_4}{2g} \cdot \frac{Q_4^2}{A_4^2} \quad (7)$$

De energieniveaus, gecorrigeerd met eventueel snelheidshoogteverlies ten gevolge van bijvoorbeeld verwijdingen, dienen dus samen te vallen

* Zie eveneens Bijlage 2

bij de samenvloeiing.

Invullen van $f^{n+1} = f^n + \Delta f$ in Vergelijkingen (6) en (7), en verwaarlozing van alle termen in Δ^2 leidt tot:

$$A_2 \cdot \Delta h_2 + B_2 \cdot \Delta Q_2 + C_1 \cdot \Delta h_1 + D_1 \cdot \Delta Q_1 = H_{1,2} \quad (8)$$

$$A_3 \cdot \Delta h_3 + B_3 \cdot \Delta Q_3 + C_1 \cdot \Delta h_1 + D_1 \cdot \Delta Q_1 = H_{1,3} \quad (9)$$

$$A_4 \cdot \Delta h_4 + B_4 \cdot \Delta Q_4 + C_1 \cdot \Delta h_1 + D_1 \cdot \Delta Q_1 = H_{1,4} \quad (10)$$

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 - \Delta Q_3 - \Delta Q_4 = Q_2^n + Q_3^n + Q_4^n - Q_1^n + Q_i^{n+1} \quad (11)$$

Hierin:

$$A_j = 1 - \frac{1}{g} \cdot \frac{Q_j}{A_{s,j}^3} \cdot B_{sj} ; \quad B_j = \frac{1}{g} \cdot \frac{Q_j}{A_{s,j}^2} ;$$

$$H_{1,j} = h_1 - h_j + \frac{1}{2g} \left(\frac{Q_1}{A_{s,1}} \right)^2 - \frac{1}{2g} \left(\frac{Q_j}{A_{s,j}} \right)^2$$

$$C_1 = -1 + \frac{1}{g} \cdot \frac{Q_1^2}{A_{s,1}^3} \cdot B_{s,1} ; \quad D_1 = -\frac{1}{g} \cdot \frac{Q_1}{A_{s,1}^2}$$

In deze afleiding is ξ_i gelijk aan nul verondersteld, en

$$\Delta \left(\frac{Q}{A} \right)^2 = \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{Q}{A} \right)^2 dQ + \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{Q}{A} \right)^2 dA$$

Vult men in de Vergelijkingen (8) tot (11) vervolgens in

$\Delta Q_2 = E_2 \Delta h_2 + F_2$; $\Delta Q_3 = E_3 \Delta h_3 + F_3$; $\Delta Q_4 = E_4 \Delta h_4 + F_4$, dan volgt:

$$\Delta Q_1 \left(1 + \frac{E_2 \cdot D_1}{A_2 + B_2 \cdot E_2} + \frac{E_3 \cdot D_1}{A_3 + B_3 \cdot E_3} + \frac{E_4 \cdot D_1}{A_4 + B_4 \cdot E_4} \right) =$$

$$- C_1 \left(\frac{E_2}{A_2 + B_2 \cdot E_2} + \frac{E_3}{A_3 + B_3 \cdot E_3} + \frac{E_4}{A_4 + B_4 \cdot E_4} \right) \cdot \Delta h_1 + Q_2^n + Q_3^n + Q_4^n + Q_i^{n+1} - Q_1^n +$$

$$(F_2 + F_3 + F_4) + \frac{E_2}{A_2 + B_2 \cdot E_2} (H_{1,2} - B_2 F_2) + \frac{E_3}{A_3 + B_3 \cdot E_3} (H_{1,3} - B_3 F_3) +$$

$$\frac{E_4}{A_4 + B_4 \cdot E_4} (H_{1,4} - B_4 F_4)$$

Bij nadere beschouwing is deze vergelijking van de vorm $\Delta Q_1 = E_1 \cdot \Delta h_1 + F_1$, en dus zijn de coëfficiënten E_1 en F_1 eenvoudig te bepalen. De coëfficiënten L_j , M_j , N_j ; ($j = 2, 3, 4$) worden als volgt gevonden:
Voor bovenstroomse randen werd hierboven afgeleid dat geldt:

$$A_j \cdot \Delta h_j + B_j \cdot \Delta Q_j + C_1 \cdot \Delta h_1 + D_1 \cdot \Delta Q_1 = H_{1,j} \quad (12)$$

Algemeen geldt:

$$\Delta Q_j = E_j \cdot \Delta h_j + F_j \quad (13)$$

Substitutie van Vergelijking (13) in Vergelijking (12) leidt tot:

$$\Delta h_j (A_j + B_j \cdot E_j) + C_1 \cdot \Delta h_1 + D_1 \cdot \Delta Q_1 = H_{1,j} - B_j \cdot F_j$$

Dus:

$$L_j = \frac{-C_1}{A_j + B_j \cdot E_j} ; \quad M_j = \frac{-D_1}{A_j + B_j \cdot E_j} ; \quad N_j = \frac{H_{1,j} - B_j \cdot F_j}{A_j + B_j \cdot E_j}$$

2.7.2 Kunstwerken

In het model kunnen als kunstwerken opgenomen worden een stuw, een duiker en een pomp. De gebruikte afvoerformules worden in hoofdstuk 5 nader aangeduid.

Daar bij afvoerformules voor kunstwerken meestal gewerkt wordt met boven- en benedenstroomse waterstanden, moet bij de kunstwerken niet, zoals in Hoofdstuk 2.7.1, gewerkt worden met energieniveaus. Er wordt derhalve verondersteld dat het effect van de verwaarlozing van de snelheidshoogte reeds in de coëfficiënten van de afvoerformule verwerkt zijn.

Ook in dit geval gaat het er weer om de coëfficiënten E_1 , F_1 ; L_2 , M_2 , N_2 ; L_3 , M_3 , N_3 ; L_4 , M_4 , N_4 te bepalen.

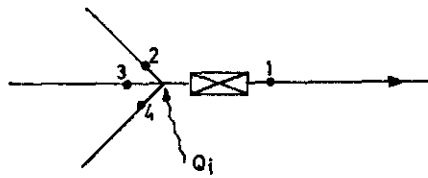


Fig. 4. Definitieschets kunstwerken.

De volgende voorwaarden kunnen opgesteld worden bij een kunstwerk:

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q(h_{\text{bov}}, h_1) \\ Q_1 &= Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_i \\ h_2 &= h_3 = h_4 = h_{\text{bov}} \\ h_1 &= h_{\text{ben}} \end{aligned}$$

Derhalve:

$$\begin{aligned} Q_1 + \Delta Q_1 &\equiv Q(h_{\text{bov}}^n, h_1^n) + \frac{\partial Q}{\partial h_1} \cdot \Delta h_1 + \frac{\partial Q}{\partial h_{\text{bov}}} \cdot \Delta h_{\text{bov}} \\ &= Q_2^n + E_2 \Delta h_{\text{bov}} + F_2 + Q_3^n + E_3 \Delta h_{\text{bov}} + F_3 + Q_4^n + E_4 \Delta h_{\text{bov}} + \\ &\quad F_4 + Q_i^{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{dus:} \quad (E_2 + E_3 + E_4 - \frac{\partial Q}{\partial h_{\text{bov}}}) \Delta h_{\text{bov}} =$$

$$\frac{\partial Q}{\partial h_1} \cdot \Delta h_1 + Q^n - (Q_2^n + Q_3^n + Q_4^n + Q_i^{n+1}) - (F_2 + F_3 + F_4)$$

$$\text{, waarin } Q^n = Q(h_{\text{bov}}^n, h_1^n)$$

$$\text{En derhalve: } L_{\text{bov}} = \frac{\partial Q / \partial h_1}{E_2 + E_3 + E_4 - \partial Q / \partial h_{\text{bov}}} ; \quad M_{\text{bov}} = 0 ;$$

$$N_{\text{bov}} = \frac{Q^n - (Q_2^n + Q_3^n + Q_4^n + Q_i^{n+1}) - (F_2 + F_3 + F_4)}{E_2 + E_3 + E_4 - \partial Q / \partial h_{\text{bov}}}$$

$$L_{2,3,4} = L_{\text{bov}} ; \quad N_{2,3,4} = N_{\text{bov}}$$

De waarden van E_1 en F_1 vindt men als volgt:

$$Q_1^n + E_1 \cdot \Delta h_1 + F_1 = (Q_2^n + Q_3^n + Q_4^n + Q_i^{n+1}) + (E_2 + E_3 + E_4) \cdot (L_{\text{bov}} \cdot \Delta h_1 + N_{\text{bov}}) + (F_2 + F_3 + F_4)$$

Derhalve : $E_1 = (E_2 + E_3 + E_4) \cdot L_{\text{bov}}$

$$F_1 = (Q_2^n + Q_3^n + Q_4^n + Q_i^{n+1}) - Q_1^n + (F_2 + F_3 + F_4) + (E_2 + E_3 + E_4) \cdot N_{\text{bov}}$$

2.8 Algemene rekenprocedure *)

Uitgaande van de extern opgelegde bovenstroomse randen, berekent men in de downward-sweep de coëfficiënten E_j , F_j , L_j , M_j , N_j . Komt men een samenvloeiing, dan wel kunstwerk tegen, dan berekent men de betrokken coëfficiënten zoals in de Hoofdstukken 2.7.1 en 2.7.2 is aangegeven. De berekening kan in de benedenstrooms van de samenvloeiing of kunstwerk gelegen tak op de normale wijze voortgezet worden met behulp van de in de Hoofdstukken 2.7.1 of 2.7.2 gevonden waarden van E en F. Deze procedure wordt voortgezet tot het drainagepunt bereikt is (waarvan er in een boomstructuur slechts één mag zijn).

In dit drainagepunt wordt nu Δh_N bepaald uit de opgelegde externe randvoorwaarde, waarna in een upward sweep Δh_j en ΔQ_j berekend kunnen worden met behulp van de in de downward sweep bepaalde coëfficiënten E, F, L, M en N.

* Zie eveneens Bijlage 4

3 GOLFVOORTPLANTINGSANALYSE VAN HET VIERPUNTSSHEMA

Voor een theoretische analyse van de golfvoortplanting bij het vierpuntsschema wordt hier verwezen naar de literatuur, Vreugdenhil (1979) en Mahmood & Yevjevich (1975).

In Figuur 5 is weergegeven het aantal punten n_x per golflengte, nodig om een fout van minder dan 1% in de fase en demping te verkrijgen (ontleend aan Vreugdenhil, 1979).

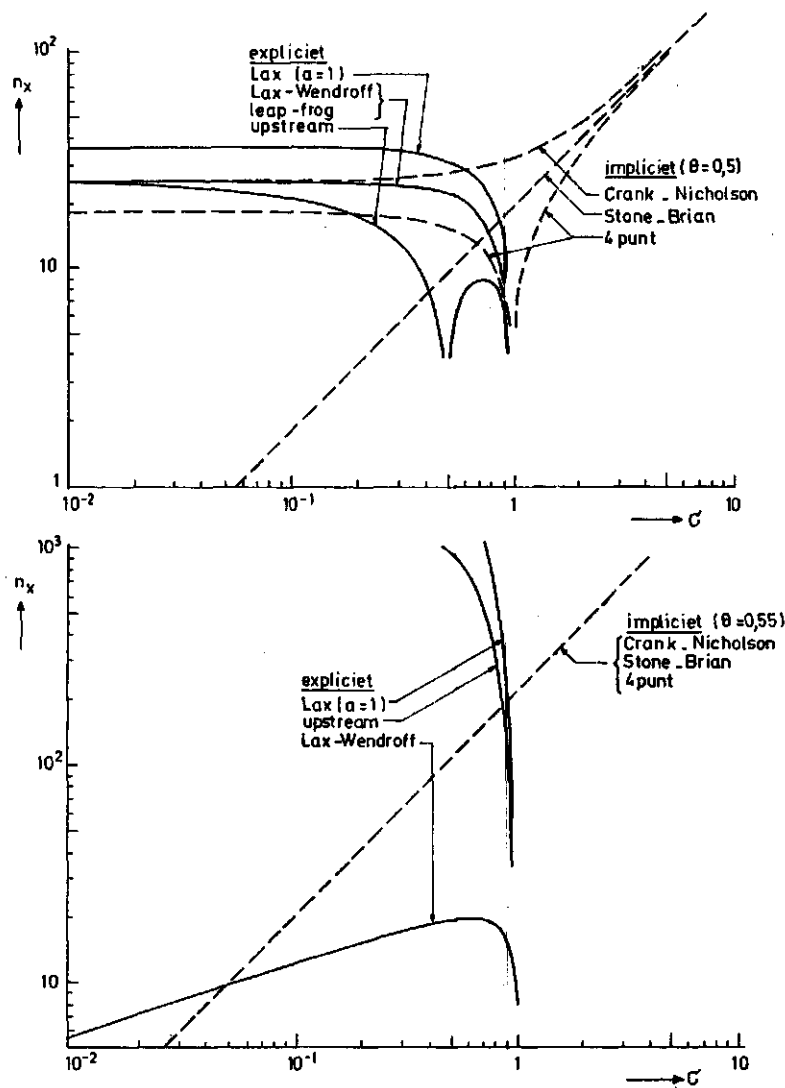


Fig. 5. Benodigd aantal punten per golflengte n_x voor nauwkeurigheid $\varepsilon = 0.01$. Boven fasefouten, onder amplitudfouten. Voor het leapfrog schema is de amplitudfout nul. De fasefouten voor de impliciete schema's hangen slechts zwak van θ af.

4 SCHEMATISATIE

4.1 Geometrische schematisatie

In het model kan gewerkt worden met een variabele lengtestap Δx . In elk rekenpunt moet een dwarsprofiel bekend zijn, waarvan de basisvorm in fig. 6 is weergegeven.

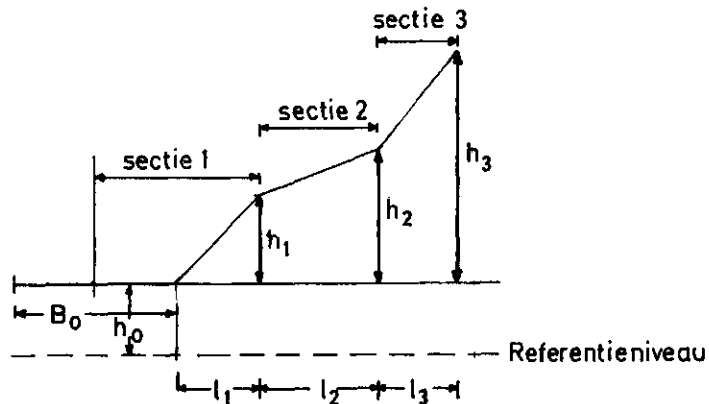


Fig. 6. Definitieschets profiel.

Uiteraard kunnen op te geven parameters nul zijn, zodat uit deze basisvorm een enkelvoudig, geknikt en dubbel geknikt profiel kan ontstaan, afhankelijk van de ingevoerde parameterwaarde. Het profiel is symmetrisch.

4.2 Hydraulische parameters

De "conveyance" K , zoals die in de bewegingsvergelijking is vermeld, wordt in dit programma gedefinieerd als:

$$K = k_m \cdot A_s \cdot R^{2/3} \quad \text{waarin}$$

k_m	Manning-coefficient	$[m^{1/3}/s]$
A_s	stroomvoerend nat oppervlak	$[m^2]$
R	hydraulische straal	$[m]$

Voor sectie 1, 2 en 3 zouden aparte Manning-coefficienten opgegeven kunnen worden. Indien een Manning-coefficient 0 is, telt betreffende sectie als berging.

Bij een dergelijk samengesteld profiel moet enige zorg besteed worden aan de berekening van de conveyance K voor het gehele profiel uit de conveyance van de samenstellende delen. Gerekend moet worden met een gemiddelde hydraulische straal

$$R_g = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{P_i}$$

, waarin:

A_i oppervlakte sectie i

P_i natte omtrek

De formule voor de conveyance wordt nu in het geval van 3 secties

$$K = \sum_{i=1}^3 k_{m,i} \cdot A_i \cdot R_i^{2/3} = \sum_{i=1}^3 k_{m,i} \cdot A_i^{5/3} \cdot P_i^{-2/3}$$

Hiermee wordt voorkomen dat de hydraulische straal sterk kan variëren indien bijvoorbeeld bij een geringe waterstandsstijging een berging volloopt.

De coefficient α (zie Hoofdstuk 2.1) is gedefinieerd als

$$\alpha = \frac{A_s}{Q^2} \int_{y_1}^{y_2} u^2 \cdot z \, dy$$

Indien verondersteld wordt, dat slechts tussen verschillende secties snelheidsverschillen optreden, en dat de snelheid in een sectie in de y -richting uniform is, resulteert:

$$\alpha = \frac{A_s \sum_{i=1}^3 k_{m,i}^2 A_i R_i^{4/3}}{\left\{ \sum_{i=1}^3 k_{m,i} A_i R_i^{2/3} \right\}^2}$$

4.3 Discontinuïteit in bodemhoogte

Indien een plotselinge daling (c.q. stijging) van de bodem voorkomt in het systeem, verdient het aanbeveling ter plaatse een samenvloeiing te situeren. Bij een dergelijke samenvloeiing kan het voorkomen dat de grenssnelheid in de bovenstroomse tak bereikt wordt.

Indien dit optreedt, moet de waterstand vastgehouden worden op de kritieke diepte, totdat door stijging van de benedenwaterstand er wederom subkritische stroming optreedt.

4.4 Droogvallende takken

Indien een tak of gedeelte van een tak droogvalt, kan verondersteld worden dat er te allen tijde 0.01 m water in het profiel blijft staan. Een en ander is noodzakelijk om de berekeningen normaal voort te kunnen zetten.

4.5 Geringe waterdiepten *)

Bij geringe waterdiepten kunnen instabiliteiten optreden doordat bij toename van het verval het debiet afneemt in plaats van toeneemt. Een en ander is te wijten aan het feit dat de afname van de conveyance het effect van de toename in het verval overtreft. Doet dit zich voor, dan verdient het aanbeveling de weerstandsterm geheel in het bovenstroomse rekenpunt te laten bepalen.

4.6 Kunstwerken

4.6.1 Stuw

Voor de behandeling van stuwen is het noodzakelijk de afvoerformule te kennen in een vorm die het mogelijk maakt ook de te afgeleide naar boven (en benedenstroomse) waterstand te kunnen bepalen. Er zijn hiervoor verschillende mogelijkheden. Maar allereerst dient kort het begrip "verdrinking" in de hydraulica behandeld te worden. De verdrinkingslimiet is die waarde van het quotient h_{ben}/h_{bov} , waarbij de overgang plaatsvindt van ongestuwde naar gestuwde afvoer. De verdrinkingslimiet is afhankelijk van het type kunstwerk. Ook in verdrongen toestand zijn kunstwerken nog bruikbaar, mits zij ook daarvoor zijn geijkt. De ijking kan een bepaald verband $Q = Q(h_{bov}, h_{ben})$ opleveren en een tabel die Q geeft, gegeven de verdrinkingsgraad en de overstorthoogte h_{bov} .

Hieronder volgen 3 verschillende mogelijkheden.

NB. In Hoofdstuk 4.6.1. zijn alle waterhoogten h uitgedrukt ten opzichte van de kruinhoogte van de stuw.

*) Zie eveneens Bijlage 3

Mogelijkheid 1. Afvoerformule $Q = C_d \cdot h_{\text{bov}}^{u_2}$ (ongestuwde afvoer)

$$Q = \mu \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot h_{\text{ben}}^{u_2} \sqrt{2g(h_{\text{bov}} - h_{\text{ben}})} \quad (\text{gestuwde afvoer})$$

De verdrinkingslimiet moet door de gebruiker opgegeven kunnen worden.

Mogelijkheid 2. Afvoerformule in tabel. Deze tabel heeft de volgende algemene vorm:

		Verdrinkingsgraden				
		y_1	y_2	y_3	...	y_{10}
	x_1	$Q_{1,1}$	$Q_{1,2}$	$Q_{1,3}$...	$Q_{1,10}$
	x_2	$Q_{2,1}$	$Q_{2,2}$	$Q_{2,3}$...	$Q_{2,10}$
Overstorthoogten	x_3	$Q_{3,1}$	$Q_{3,2}$	$Q_{3,3}$...	$Q_{3,10}$
	'	'	'	'	...	'
	'	'	'	'	...	'
	x_{25}	$Q_{25,1}$	$Q_{25,2}$	$Q_{25,3}$...	$Q_{25,10}$

De eerste verdrinkingsgraad y_1 kan worden opgevat als de verdrinkingslimiet. Indien alléén deze eerste verdrinkingsgraad wordt opgegeven, moet bij verdrinking overgegaan worden op

$$Q = \mu \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot h_{\text{ben}}^{u_2} \sqrt{2g(h_{\text{bov}} - h_{\text{ben}})}$$

Indien de eerste verdrinkingsgraad gelijk is aan nul, kan verondersteld worden dat het effect van verdrinking reeds verwerkt is in de $Q_{1,1}$ tot en met $Q_{25,1}$. Ook bij verdrinking wordt dan dus gebruik gemaakt van deze Q-waarden.

Als alle interpolaties alsmede de bepaling van de eerste afgeleiden geschieden met behulp van cubic dan wel bi-cubic splines dan, is het vereist, dat indien meer dan één verdrinkingsgraad wordt gespecificeerd, tenminste vier verdrinkingsgraden opgegeven worden.

Mogelijkheid 3.

Afvoerformule $\log Q = a + b \log h + c \log^2 h$ (ongestuwde afvoer)

$$Q = \mu \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot h_{\text{ben}}^2 \sqrt{2g(h_{\text{bov}} - h_{\text{ben}})} \quad (\text{gestuwde afvoer})$$

De verdrinkingslimiet moet door de gebruiker opgegeven worden.

De stroomrichting moet bepaald worden aan de hand van de momentane waarden van boven- en benedenstroomse waterstand.

Indien boven- en benedenstrooms peil beneden de kruinhoogte vallen, wordt de afvoer aan beide zijden van het kunstwerk nul. Bij stijging van één der peilen tot boven kruinhoogte, komt de afvoer over de stuw wederom op gang.

4.6.2 Duiker

De basisformule voor afvoer door een duiker is:

$$Q = \mu \cdot A \sqrt{2g(h_{\text{bov}} - h_{\text{ben}})} \quad (14)$$

Hierin:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\xi_i + \xi_u + \xi_w}} \quad (15)$$

$$\xi_u = \frac{1}{(A/A_{\text{ben}} - 1)^2} \quad (16)$$

$$\xi_w = \frac{2gL}{k_m^2 \cdot R^{1/3}} \quad (17)$$

$$k_m = 25 \cdot k^{-1/6}$$

Voorts:

h	= waterhoogte t.o.v. bodem onderkant (b.o.k.) duiker	[m]
A	= nat oppv. duiker	[m ²]
μ	= afvoercoefficient	[-]
ξ_i	= instroomverliescoefficient	[-]
ξ_u	= uitstroomverliescoefficient	[-]
ξ_w	= wrijvingsverliescoefficient	[-]
k	= equivalente zandruwheid	[m]

Er kan gerekend worden òf met een vaste μ , òf μ bepaald met behulp van vergelijkingen (15), (16) en (17). Indien men bij de invoer ξ_u een waarde toekent, wordt deze waarde gebruikt en Vergelijking (16) niet toegepast.

Standaard zijn 7 duikerprofielen, en wel cirkelvormig; rechthoekig; eirond; ellips-, heul-, muil-, of armcprofiel.

Bij de bepaling van de profielparameters moet tevens rekening gehouden worden met de hoeveelheid grond die in de buis aanwezig is, daar de waterhoogten berekend worden ten opzichte van b.o.k. duiker.

Indien in de buis een vrije waterspiegel aanwezig is en de benedenwaterstand is zo laag, dat er kritische stroming in de buis optreedt, kan de kritische diepte gebruikt worden bij de bepaling van de profielparameters.

Beschouwt men de basisformule nader, dan blijkt dat de eerste afgeleide naar zowel boven- als benedenwaterpeil oneindig groot worden als $(h_{\text{bov}} - h_{\text{ben}})$ naar nul gaat. Daar deze eerste afgeleide bepaald dient te worden in een programma, moet ingebouwd worden dat, indien het verschil tussen boven- en benedenstrooms peil kleiner wordt dan 0.01 m, geen gebruik meer wordt gemaakt van de afvoerformule, maar van een rechte lijn tussen het debiet bij 0 en dat bij 0.01 m peilverschil.

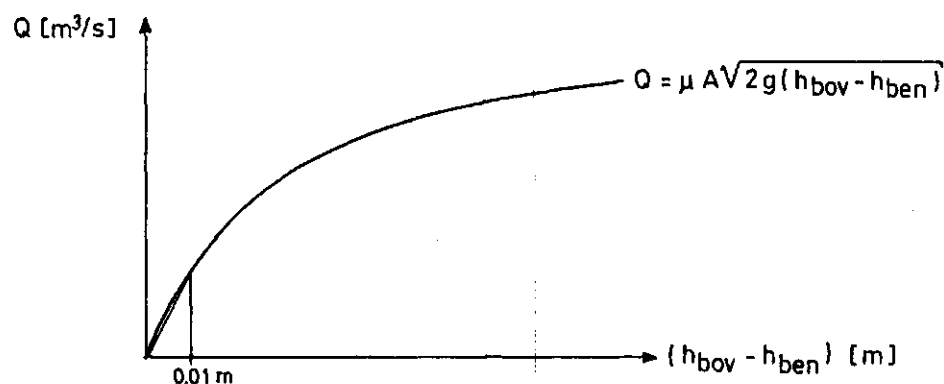


Fig. 7. Lineaire interpolatie bij gering verval (duiker).

Evenals bij de stuw moet de stroomrichting uit de momentane waarden van beneden- en bovenstroomse waterstand bepaald worden.

4.6.3 Pomp

De benodigde pompcurve (debiet versus opvoerhoogte) zou op 3 manieren gespecificeerd kunnen worden en wel:

1. debiet is constant
2. pompcurve getabelleerd
3. pompcurve in door gebruiker gespecificeerde functie.

Naast deze pompcurve moet het aanslagpeil en uitslagpeil van de pomp opgegeven worden. Stijgt de waterstand in het aanliggende kanaalpand tot boven het aanslagpeil, dan slaat de pomp aan. Daalt vervolgens het peil tot beneden het uitslagpeil, dan slaat de pomp af.

Mocht de waterstand stijgen tot boven de opstelhoogte van de pomp, dan dient een waarschuwing door het programma gegeven te worden en moeten de berekeningen stoppen.

LITERATUUR

- Cunge, J.A., Holly, F.M., en Verwey, A., 1980. Practical aspects of computational river hydraulics. Pitman, Londen.
- Mahmood, K., en Yevjevich, V. (ed.), 1975. Unsteady flow in open channels. Water Resources Publications, Colorado.
- Vreugdenhil, C.B, 1979. Waterloopkundige berekeningen. Technische Hogeschool, Delft.

BIJLAGEN

I. Afleiding coëfficiënten E, F, L, M en N voor de double sweep methode

Basisvergelijkingen: $B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q$ (continuïteit)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{Q^2}{A_s} \right) + g A_s \frac{\partial h}{\partial x} + g A_s \frac{Q|Q|}{K^2} = 0 \quad (\text{beweging})$$

De differentievergelijkingen zijn:

a. Continuïteit

$$\left[\frac{\theta}{2} (B_{j+1}^{n+1} + B_j^{n+1}) + \left(\frac{1-\theta}{2} \right) (B_{j+1}^n + B_j^n) \right] \left[\frac{h_{j+1}^{n+1} - h_{j+1}^n + h_j^{n+1} - h_j^n}{2\Delta t} \right] +$$

$$\theta \cdot \frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_j^{n+1}}{\Delta x_j} + (1-\theta) \frac{Q_{j+1}^n - Q_j^n}{\Delta x_j} = \frac{1}{2} (q_{j+1}^{n+1} + q_j^{n+1})$$

Introductie van $f^{n+1} = f^n + \Delta f$ (zie Hoofdstuk 2.3) leidt tot:

$$\left[\frac{\theta}{2} (\Delta B_{j+1} + \Delta B_j) + \frac{B_{j+1} + B_j}{2} \right] \left[\frac{\Delta h_{j+1} + \Delta h_j}{2\Delta t} \right] + \theta \cdot \frac{\Delta Q_{j+1} - \Delta Q_j}{\Delta x_j} +$$

$$\frac{Q_{j+1} - Q_j}{\Delta x_j} = \frac{q_{j+1}^{n+1} + q_j^{n+1}}{2}$$

Dus:

$$\frac{B_{j+1} + B_j}{4\Delta t} \cdot \Delta h_{j+1} + \frac{\theta}{\Delta x_j} \cdot \Delta Q_{j+1} = - \frac{B_{j+1} + B_j}{4\Delta t} \cdot \Delta h_j + \frac{\theta}{\Delta x_j} \cdot \Delta Q_j - \frac{Q_{j+1} - Q_j}{\Delta x_j} + \frac{q_{j+1}^{n+1} + q_j^{n+1}}{2}$$

De coëfficiënten H_j , B_j , C_j , D_j en G_j in de vergelijking

$$H_j \Delta h_{j+1} + B_j \Delta Q_{j+1} = C_j \Delta h_j + D_j \Delta Q_j + G_j$$

worden derhalve:

$$H_j = \frac{B_{j+1} + B_j}{4\Delta t} \quad ; \quad B_j = \theta / \Delta x_j$$

$$C_j = - \frac{B_{j+1} + B_j}{4\Delta t} \quad ; \quad D_j = \theta / \Delta x_j \quad ; \quad q_j = - \frac{Q_{j+1} - Q_j}{\Delta x_j} + \frac{q_{j+1}^{n+1} + q_j^{n+1}}{2}$$

b. Bewegung.

$$\frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n + Q_j^{n+1} - Q_j^n}{2\Delta t} + \theta \cdot \frac{(\alpha_{s,j+1}^2)^{n+1} - (\alpha_{s,j}^2)^{n+1}}{\Delta x_j} + (1-\theta) \cdot \frac{(\alpha_{s,j+1}^2)^n - (\alpha_{s,j}^2)^n}{\Delta x_j} +$$

$$\left[\frac{\theta}{2} (g_{s,j+1}^{n+1} + g_{s,j}^{n+1}) + \frac{(1-\theta)}{2} (g_{s,j+1}^n + g_{s,j}^n) \right] \cdot \left[\theta \frac{h_{j+1}^{n+1} - h_j^{n+1}}{\Delta x_j} + (1-\theta) \frac{h_{j+1}^n - h_j^n}{\Delta x_j} \right]$$

$$+ \left[g_2^{\theta} \left\{ \left(\frac{Q|Q|A_s}{K^2} \right)_{j+1}^{n+1} + \left(\frac{Q|Q|A_s}{K^2} \right)_j^{n+1} \right\} + g_2^{1-\theta} \left\{ \left(\frac{Q|Q|A_s}{K^2} \right)_{j+1}^n + \left(\frac{Q|Q|A_s}{K^2} \right)_j^n \right\} \right] = 0$$

$$(a) \rightarrow \frac{\Delta Q_{j+1} + \Delta Q_j}{2\Delta t}$$

$$(b) \rightarrow \theta \cdot \frac{\Delta(\alpha_{s,j+1}^2) - \Delta(\alpha_{s,j}^2)}{\Delta x_j} + \frac{(\alpha_{s,j+1}^2) - (\alpha_{s,j}^2)}{\Delta x_j} =$$

$$\theta \cdot \frac{\frac{Q_{j+1}^2}{A_{s,j+1}} \cdot \Delta\alpha_{j+1} + 2 \frac{\alpha_{j+1} \cdot Q_{j+1}}{A_{s,j+1}} \cdot \Delta Q_{j+1} - \alpha_{j+1} \frac{Q_{j+1}^2}{A_{s,j+1}^2} \cdot \Delta A_{s,j+1} - \frac{Q_j^2}{A_{s,j}} \cdot \Delta\alpha_j -$$

$$\frac{2 \frac{\alpha_j \cdot Q_j}{A_{s,j}} \cdot \Delta Q_j + \alpha_j \frac{Q_j^2}{A_{s,j}^2} \cdot \Delta A_{s,j}}{\Delta x_j} + \frac{\alpha_{j+1} \frac{Q_{j+1}^2}{A_{s,j+1}} - \alpha_j \frac{Q_j^2}{A_{s,j}}}{\Delta x_j} =$$

$$- \theta \cdot \frac{\alpha_{j+1} \cdot Q_{j+1}^2 \cdot B_{s,j+1}}{\Delta x_j \cdot A_{s,j+1}^2} \cdot \Delta h_{j+1} - \theta \cdot \frac{Q_j^2}{A_{s,j} \cdot \Delta x_j} \cdot \left(\frac{d\alpha}{dh} \right)_j \Delta h_j - 2\theta \cdot \frac{\alpha_j \cdot Q_j}{A_{s,j} \cdot \Delta x_j} \cdot \Delta Q_j +$$

$$\frac{\theta}{\Delta x_j} \cdot \frac{Q_{j+1}^2}{A_{s,j+1}} \cdot \left(\frac{d\alpha}{dh} \right)_{j+1} \Delta h_{j+1} + \frac{2\theta \alpha_{j+1} \cdot Q_{j+1}}{\Delta x_j \cdot A_{s,j+1}} \cdot \Delta Q_{j+1} + \theta \cdot \frac{\alpha_j \cdot Q_j^2 \cdot B_{s,j}}{\Delta x_j \cdot A_{s,j}^2} \cdot \Delta h_j + \frac{\alpha_{j+1} \cdot Q_{j+1}^2}{\Delta x_j \cdot A_{s,j+1}} -$$

$$\frac{\alpha_j \cdot Q_j^2}{\Delta x_j \cdot A_{s,j}}$$

$$(c) \rightarrow \frac{g\theta}{2\Delta x_j} (h_{j+1} - h_j + \frac{A_{s,j+1} + A_{s,j}}{B_{s,j+1}}) \cdot B_{s,j+1} \cdot \Delta h_{j+1} + \frac{g\theta}{2\Delta x_j} (h_{j+1} - h_j + \frac{A_{s,j+1} + A_{s,j}}{B_{s,j}}) \cdot B_{s,j} \cdot \Delta h_j + \frac{g}{2\Delta x_j} (A_{s,j+1} + A_{s,j}) (h_{j+1} - h_j)$$

$$(d) \rightarrow \frac{g\theta}{2} \cdot \frac{Q_{j+1} \cdot |Q_{j+1}|}{K_{j+1}^2} \cdot B_{s,j+1} \cdot \Delta h_{j+1} + g\theta \cdot \frac{A_{s,j+1} \cdot |Q_{j+1}|}{K_{j+1}^2} \cdot \Delta Q_{j+1} - g\theta \cdot \frac{Q_{j+1} \cdot |Q_{j+1}| \cdot A_{s,j+1}}{K_{j+1}^3} \cdot \left(\frac{dK}{dh}\right)_{j+1} \cdot \Delta h_{j+1} + \frac{g\theta}{2} \cdot \frac{Q_j \cdot |Q_j|}{K_j^2} \cdot B_{s,j} \cdot \Delta h_j + g\theta \cdot \frac{A_{s,j} \cdot |Q_j|}{K_j^2} \cdot \Delta Q_j - g\theta \cdot \frac{Q_j \cdot |Q_j| \cdot A_{s,j}}{K_j^3} \cdot \left(\frac{dK}{dh}\right)_j \cdot \Delta h_j + \frac{g}{2} \cdot \frac{Q_{j+1} \cdot |Q_{j+1}| \cdot A_{s,j+1}}{K_{j+1}^2} + \frac{g}{2} \cdot \frac{Q_j \cdot |Q_j| \cdot A_{s,j}}{K_j^2}$$

De coëfficiënten in $H'_j \cdot \Delta h_{j+1} + B'_j \cdot \Delta Q_{j+1} = C'_j \cdot \Delta h_j + D'_j \cdot \Delta Q_j + G'_j$ worden dus:

$$H'_j = \frac{\theta}{\Delta x_j} \cdot \frac{Q_{j+1}^2}{A_{s,j+1}} \cdot \left(\frac{d\alpha}{dh}\right)_{j+1} - \frac{\theta \cdot \alpha_{j+1} \cdot Q_{j+1}^2}{\Delta x_j \cdot A_{s,j+1}^2} \cdot B_{s,j+1} + \frac{g\theta}{2\Delta x_j} (h_{j+1} - h_j + \frac{A_{s,j+1} + A_{s,j}}{B_{s,j+1}}) \cdot B_{s,j+1} + \frac{g\theta}{2} \cdot \frac{Q_{j+1} \cdot |Q_{j+1}|}{K_{j+1}^2} \cdot B_{s,j+1} - g\theta \cdot \frac{Q_{j+1} \cdot |Q_{j+1}| \cdot A_{s,j+1}}{K_{j+1}^3} \cdot \left(\frac{dK}{dh}\right)_{j+1}$$

$$C'_j = \frac{\theta}{\Delta x_j} \cdot \frac{Q_j^2}{A_{s,j}} \cdot \left(\frac{d\alpha}{dh}\right)_j - \theta \cdot \frac{\alpha_j \cdot Q_j^2}{\Delta x_j \cdot A_{s,j}^2} \cdot B_{s,j} - \frac{g\theta}{2\Delta x_j} (h_{j+1} - h_j + \frac{A_{s,j+1} + A_{s,j}}{B_{s,j}}) \cdot B_{s,j} - \frac{g\theta}{2} \cdot \frac{Q_j \cdot |Q_j|}{K_j^2} \cdot B_{s,j} + g\theta \cdot \frac{Q_j \cdot |Q_j| \cdot A_{s,j}}{K_j^3} \cdot \left(\frac{dK}{dh}\right)_j$$

$$B'_j = \frac{1}{2\Delta t} + 2 \frac{\theta \alpha_{j+1} \cdot Q_{j+1}}{A_{s,j+1} \cdot \Delta x_j} + g\theta \cdot \frac{A_{s,j+1} \cdot |Q_{j+1}|}{K_{j+1}^2}$$

$$D'_j = -\frac{1}{2\Delta t} + 2\theta \cdot \frac{\alpha_j \cdot Q_j}{A_{s,j} \cdot \Delta x_j} - g\theta \cdot \frac{A_{s,j} \cdot |Q_j|}{K_{j+1}^2}$$

$$G'_j = \frac{\alpha_{j+1} \cdot Q_{j+1}^2}{\Delta x_j \cdot A_{s,j+1}} + \frac{\alpha_j Q_j^2}{\Delta x_j \cdot A_{s,j}} - \frac{g}{2\Delta x_j} (A_{s,j+1} + A_{s,j}) (h_{j+1} - h_j) -$$

$$\frac{g}{2} \cdot \frac{Q_{j+1} | Q_{j+1} | A_{s,j+1}}{K_{j+1}^2} - \frac{g}{2} \cdot \frac{Q_j | Q_j | A_{s,j}}{K_j^2}$$

De coëfficiënten in het stelsel: $H_j \cdot \Delta h_{j+1} + B_j \cdot \Delta Q_{j+1} = C_j \cdot \Delta h_j + D_j \cdot \Delta Q_j + G_j$

$$H'_j \cdot \Delta h_{j+1} + B'_j \cdot \Delta Q_{j+1} = C'_j \cdot \Delta h_j + D'_j \cdot \Delta Q_j + G'_j$$

zijn nu bekend. Uit deze coëfficiënten worden nu de double-sweep coëfficiënten E, F, L, M en N berekend als volgt:

Stel; voor rekenpunt j geldt: $\Delta Q_j = E_j \cdot \Delta h_j + F_j$ dan:

$$H_j \cdot \Delta h_{j+1} + B_j \cdot \Delta Q_{j+1} = (C_j + D_j E_j) \Delta h_j + G_j + D_j F_j \quad (I-1)$$

$$H'_j \cdot \Delta h_{j+1} + B'_j \cdot \Delta Q_{j+1} = (C'_j + D'_j E'_j) \Delta h_j + G'_j + D'_j F'_j \quad (I-2)$$

$$\text{Uit I-2: } \Delta h_j = \frac{H'_j}{C'_j + D'_j E'_j} \cdot \Delta h_{j+1} + \frac{B'_j}{C'_j + D'_j E'_j} \cdot \Delta Q_{j+1} - \frac{G'_j + D'_j F'_j}{C'_j + D'_j E'_j}$$

, oftewel

$$\Delta h_j = L_j \Delta h_{j+1} + M_j \Delta Q_{j+1} + N_j$$

Eliminatie van Δh_j uit I-1 en I-2 levert:

$$\frac{H_j \cdot (C'_j + D'_j E'_j)}{C_j + D_j E_j} \Delta h_{j+1} + \frac{B_j \cdot (C'_j + D'_j E'_j)}{C_j + D_j E_j} \Delta Q_{j+1} = (C'_j + D'_j E'_j) \Delta h_j + G'_j + D'_j F'_j$$

$$\frac{(C'_j + D'_j E'_j)}{C_j + D_j E_j} (G_j + D_j F_j) \quad (I-3)$$

$$H'_j \cdot \Delta h_{j+1} + B'_j \cdot \Delta Q_{j+1} = (C'_j + D'_j E'_j) \Delta h_j + G'_j + D'_j F'_j \quad (I-4)$$

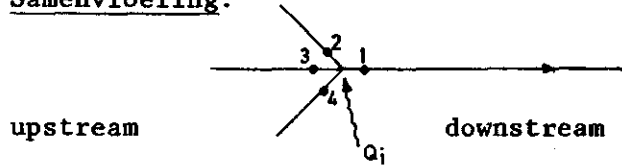
$$(I-3) - (I-4) \rightarrow \Delta Q_{j+1} = \frac{H_j (C'_j + D'_j E'_j) - H'_j (C_j + D_j E_j)}{B'_j (C'_j + D'_j E'_j) - B_j (C_j + D_j E_j)} \cdot \Delta h_{j+1} +$$

$$\frac{(C'_j + D'_j E'_j) (G_j + D_j F_j) - (G'_j + D'_j F'_j) (C_j + D_j E_j)}{B'_j (C'_j + D'_j E'_j) - B_j (C_j + D_j E_j)}$$

Oftewel: $\Delta Q_{j+1} = E_{j+1} \cdot \Delta h_{j+1} + F_{j+1}$

II. Behandeling interne randen.

a. Samenvloeiing.



$$h_1 + \frac{1-\xi_1}{2g} \left(\frac{Q_1}{A_1}\right)^2 = h_2 + \frac{1-\xi_2}{2g} \left(\frac{Q_2}{A_2}\right)^2 = h_3 + \frac{1-\xi_3}{2g} \left(\frac{Q_3}{A_3}\right)^2 = h_4 + \frac{1-\xi_4}{2g} \left(\frac{Q_4}{A_4}\right)^2$$

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_i$$

Introductie van $f^{n+1} = f^n + \Delta f$ leidt tot:

$$h_2 + \Delta h_2 + \frac{1-\xi_2}{2g} \cdot \frac{Q_2^2}{A_2^2} - \frac{1-\xi_2}{g} \cdot \frac{Q_2}{A_2^3} \cdot B_2 \cdot \Delta h_2 + \frac{1-\xi_2}{g} \cdot \frac{Q_2}{A_2^2} \cdot \Delta Q_2 = h_1 + \Delta h_1 + \frac{1-\xi_1}{2g} \cdot \frac{Q_1^2}{A_1^2} -$$

$$\frac{1-\xi_1}{g} \cdot \frac{Q_1}{A_1^3} \cdot B_1 \cdot \Delta h_1 + \frac{1-\xi_1}{g} \cdot \frac{Q_1}{A_1^2} \cdot \Delta Q_1$$

$$= h_3 + \Delta h_3 + \frac{1-\xi_3}{2g} \cdot \frac{Q_3^2}{A_3^2} + \frac{1-\xi_3}{g} \cdot \frac{Q_3}{A_3^3} \cdot B_3 \cdot \Delta h_3 + \frac{1-\xi_3}{g} \cdot \frac{Q_3}{A_3^2} \cdot \Delta Q_3$$

$$= h_4 + \Delta h_4 + \frac{1-\xi_4}{2g} \cdot \frac{Q_4^2}{A_4^2} + \frac{1-\xi_4}{g} \cdot \frac{Q_4}{A_4^3} \cdot B_4 \cdot \Delta h_4 + \frac{1-\xi_4}{g} \cdot \frac{Q_4}{A_4^2} \cdot \Delta Q_4$$

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 - \Delta Q_3 - \Delta Q_4 = Q_2 + Q_3 + Q_4 - Q_1 + Q_i^{n+1}$$

Dus voor de stroming van punt 2 naar punt 1 geldt:

$$\left(1 - \frac{1-\xi_2}{g} \cdot \frac{A_2^2}{A_2^3} \cdot B_2\right) \Delta h_2 + \frac{1-\xi_2}{g} \cdot \frac{Q_2}{A_2^2} \cdot \Delta Q_2 + \left(-1 + \frac{1-\xi_1}{g} \cdot \frac{Q_1}{A_1^3} \cdot B_1\right) \Delta h_1 - \frac{1-\xi_1}{g} \cdot \frac{Q_1}{A_1^2} \cdot \Delta Q_1 =$$

$$\frac{1-\xi_2}{2g} \cdot \frac{Q_2^2}{A_2^2} - h_2 + h_1 + \frac{1-\xi_1}{2g} \cdot \left(\frac{Q_1}{A_1}\right)^2 \quad (\text{II-1})$$

, en analoog voor punt 3 en 4.

Vergelijking (II-1) heeft de gedaante

$$A_2 \Delta h_2 + B_2 \Delta Q_2 + C_1 \Delta h_1 + D_1 \Delta Q_1 = H_{1,2} \quad (\text{II-2})$$

Analoog:

$$A_3 \Delta h_3 + B_3 \Delta Q_3 + C_1 \Delta h_1 + D_1 \Delta Q_1 = H_{1,3} \quad (\text{II-3})$$

$$A_4 \Delta h_4 + B_4 \Delta Q_4 + C_1 \Delta h_1 + D_1 \Delta Q_1 = H_{1,4} \quad (\text{II-4})$$

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 - \Delta Q_3 - \Delta Q_4 = Q_2 + Q_3 + Q_4 - Q_1 + Q_i^{n+1} \quad (\text{II-5})$$

Invullen van $\Delta Q_2 = E_2 \Delta h_2 + F_2$ in (II-2) levert:

$$(A_2 + B_2 E_2) \Delta h_2 + C_1 \Delta h_1 + D_1 \Delta Q_1 = H_{1,2} - B_2 F_2$$

Idem voor (II-3) en (II-4).

Uit (II-5) volgt:

$$\Delta Q_1 - E_2 \Delta h_2 - F_2 - E_3 \Delta h_3 - F_3 - E_4 \Delta h_4 - F_4 = Q_2 + Q_3 + Q_4 - Q_1 + Q_i^{n+1}$$

Substitutie leidt tot:

$$\Delta Q_1 + \frac{E_2}{A_2 + B_2 E_2} (H_{1,2} - B_2 F_2 - C_1 \Delta h_1 - D_1 \Delta Q_1) - F_2 - \frac{E_2}{A_3 + B_3 E_3} (H_{1,3} - B_3 F_3 -$$

$$C_1 \Delta h_1 - D_1 \Delta Q_1) - F_3 - \frac{E_4}{A_4 + B_4 E_4} (H_{1,4} - B_4 F_4 - C_1 \Delta h_1 - D_1 \Delta Q_1) - F_4 =$$

$$Q_2 + Q_3 + Q_4 - Q_1 + Q_i^{n+1}$$

Rangschikking leidt tot:

$$\Delta Q_1 \left(1 + \frac{E_2 D_1}{A_2 + B_2 E_2} + \frac{E_3 D_1}{A_3 + B_3 E_3} + \frac{E_4 D_1}{A_4 + B_4 E_4} \right) = -C_1 \left(\frac{E_2}{A_2 + B_2 E_2} + \frac{E_3}{A_3 + B_3 E_3} + \frac{E_4}{A_4 + B_4 E_4} \right) \Delta h_1 +$$

$$(Q_2 + Q_3 + Q_4 - Q_1 + Q_i^{n+1}) + (F_2 + F_3 + F_4) + \frac{E_2}{A_2 + B_2 E_2} (H_{1,2} - B_2 F_2) +$$

$$\frac{E_3}{A_3 + B_3 E_3} (H_{1,3} - B_3 F_3) + \frac{E_4}{A_4 + B_4 E_4} (H_{1,4} - B_4 F_4)$$

Uit deze vergelijking zijn nu eenvoudig de coëfficiënten E_1 en F_1 uit

$$\Delta Q_1 = E_1 \Delta h_1 + F_1 \text{ te bepalen.}$$

De coëfficiënten L, M, en N voor de returnsweep bepaalt men als volgt:

$$\text{Voor punt 2: } A_2 \Delta h_2 + B_2 \Delta Q_2 + C_1 \Delta h_1 + D_1 \Delta Q_1 = H_{1,2}$$

$$\Delta Q_2 = E_2 \Delta h_2 + F_2$$

Dus:

$$\Delta h_2 (A_2 + B_2 E_2) + C_1 \Delta h_1 + D_1 \Delta Q_1 = H_{1,2} - B_2 F_2$$

Derhalve

$$L_2 = \frac{-C_1}{A_2 + B_2 E_2}, \quad M_2 = \frac{-D_1}{A_2 + B_2 E_2}, \quad N_2 = \frac{H_{1,2} - B_2 F_2}{A_2 + B_2 E_2}$$

Analoog voor punten 3 en 4.

Bij bijvoorbeeld ongelijke bodemhoogten bij een samenvloeiing, kan in de hoger gelegen tak bij de knoop kritische stroming optreden. Bij ieder tijdstip moet gecontroleerd worden of de waterstand groter is dan de kritieke diepte. Is dit het geval dan wordt de waterdiepte gelijk gemaakt aan de kritieke diepte en worden bij de volgende tijdstap L, M en N als volgt berekend:

$$Q^2 = \frac{g \cdot B_s^2}{\alpha} \cdot y_c^3 \Rightarrow (Q + \Delta Q)^2 = g \cdot \frac{(B_s + \frac{dB_s}{dh} \cdot \Delta h)^2}{\alpha + \frac{d\alpha}{dh} \cdot \Delta h} (h + \Delta h)^3 \Rightarrow$$

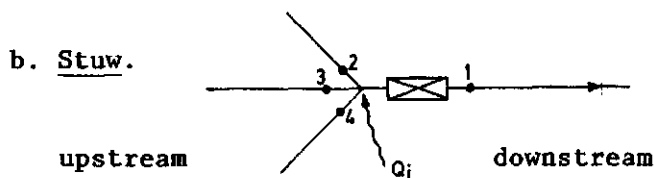
$$\Rightarrow Q^2 + 2Q(E\Delta h + F) = \frac{gB_s^2 h^3}{\alpha} + \frac{3gB_s^2 h^2}{\alpha} \Delta h + \frac{2gB_s h^3}{\alpha} \frac{dB_s}{dh} \Delta h - \frac{Bg_s^2 h^3}{\alpha^2} \frac{d\alpha}{dh} \Delta h$$

Dus:

$$\Delta h = N = \frac{gB_s^3 h^3 / \alpha - Q^2 - 2QF}{2QE - \frac{3gB_s^2 h^2}{\alpha} - \frac{2gB_s h^3}{\alpha} \frac{dB_s}{dh} + \frac{gB_s^2 h^3}{\alpha^2} \frac{d\alpha}{dh}}$$

Bij de berekening van E_1 en F_1 vervallen in dit geval de voorwaarden van gelijk energieniveau bij de samenvloeiing. Uiteraard verandert de continuïteitsvoorwaarde niet.

De stroming blijft kritisch totdat de waterstand in de andere takken zover stijgt dat het peil boven de kritische diepte komt.



De gebruiker zou de afvoerrelatie op kunnen geven in één van de volgende drie vormen:

Mogelijkheid 1:

$$Q = C_d \cdot h_{\text{bov}}^{u_1} \quad (\text{ongestuwde afvoer})$$

$$Q = \mu \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot h_{\text{ben}}^{u_2} \sqrt{2g(h_{\text{bov}} - h_{\text{ben}})} \quad (\text{gestuwde afvoer})$$

Mogelijkheid 2:

in tabel

Mogelijkheid 3:

$$\log Q = a + b \log h + c \log^2 h \quad (\text{ongestuwde afvoer})$$

$$Q = \mu f_1 f_2 h_{\text{ben}}^{u_2} \sqrt{2g(h_{\text{bov}} - h_{\text{ben}})} \quad (\text{gestuwde afvoer})$$

Voor de bepaling van E, F, L, M en N bij de stuw zijn nodig de functie-waarde en de afgeleiden h_{ben}^n en h_{bov}^n . Deze zijn in de onderscheiden gevallen:

Mogelijkheid 1:

$$Q(h_{\text{bov}}^n) = C_d \cdot (h_{\text{bov}}^n)^{u_1} \quad Q(h_{\text{ben}}^n, h_{\text{bov}}^n) = \mu \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot h_{\text{ben}}^{u_2} \sqrt{2g(h_{\text{bov}} - h_{\text{ben}})}$$

$$\frac{dQ}{dh_{\text{bov}}^n} = C_d \cdot u_1 (h_{\text{bov}}^n)^{u_1-1} \quad \frac{dQ}{dh_{\text{ben}}^n} = \mu \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot u_2 h_{\text{ben}}^{u_2-1} \sqrt{2g(h_{\text{bov}} - h_{\text{ben}})}$$

$$\frac{dQ}{dh_{\text{ben}}^n} = 0 \quad -\frac{1}{2} \mu \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot h_{\text{ben}}^{u_2} \cdot \frac{2g}{\sqrt{2g(h_{\text{bov}} - h_{\text{ben}})}}$$

$$\frac{dQ}{dh_{\text{bov}}^n} = \frac{1}{2} \mu \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot h_{\text{ben}}^{u_2} \frac{2g}{\sqrt{2g(h_{\text{bov}} - h_{\text{ben}})}}$$

Mogelijkheid 2:

Gegeven is een tabel van afvoeren bij verschillende verdrinkingsgraden en overstorthoogten (minimaal 4 verdrinkingsgraden). Indien slechts één verdrinkingsgraad opgegeven is, moet bij het overschrijden van de verdrinkingslimiet overgegaan worden op

$$Q = \mu \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot h_{\text{ben}}^{u_2} \sqrt{2g(h_{\text{bov}} - h_{\text{ben}})}$$

Bij deze mogelijkheid is de afvoerformule gegeven als $Q = Q(h_{\text{bov}}, h_{\text{ben}}/h_{\text{bov}})$
 Met behulp van bi-cubic spline interpolatie en differentiatie worden nu
 de waarden van $Q(h_{\text{bov}}^n, h_{\text{ben}}^n/h_{\text{bov}}^n)$, $\frac{dQ}{dh_{\text{bov}}}$ en $\frac{dQ}{d(h_{\text{ben}}/h_{\text{bov}})}$ bepaald.

De coëfficiënten L, M en N worden nu als volgt berekend. ($h_1 = h_{\text{ben}}$, $h_2 = h_{\text{bov}}$):

$$Q_1 + \Delta Q_1 = Q^n + \frac{dQ}{dh_2} \cdot \Delta h_2 + \frac{dQ}{d(h_1/h_2)} \cdot \Delta(h_1/h_2) = Q^n + \frac{dQ}{dh_2} \cdot \Delta h_2 + \frac{dQ}{d(h_1/h_2)} \left(\frac{\Delta h_1}{h_2} - \frac{h_1}{h_2^2} \Delta h_2 \right)$$

$$Q_1 + \Delta Q_1 = Q_2 + E_2 \Delta h_2 + F_2 + E_3 \Delta h_3 + F_3 + E_4 \Delta h_4 + F_4$$

$$\Delta h_2 \left(\frac{dQ}{dh_2} \cdot \frac{h_1}{h_2^2} - (E_2 + E_3 + E_4) \right) = -Q^n - \frac{1}{h_2} \cdot \frac{dQ}{d(h_1/h_2)} \cdot \Delta h_1 + [Q_2 + Q_3 + Q_4] +$$

$$[F_2 + F_3 + F_4]$$

Dus:

$$L_2 = \frac{dQ}{h_2 d(h_1/h_2)} / \left[\frac{dQ}{dh_2} - \frac{h_1 dQ}{h_2^2 d(h_1/h_2)} - E_2 - E_3 - E_4 \right]$$

$$N_2 = [Q_2 + Q_3 + Q_4 - Q^n + F_2 + F_3 + F_4] / \left[\frac{dQ}{dh_2} - \frac{h_1 dQ}{h_2^2 d(h_1/h_2)} - E_2 - E_3 - E_4 \right]$$

En analoog voor L_3 , L_4 , N_3 en N_4 .

De coëfficiënten E_1 en F_1 volgen uit:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 + E_1 \Delta h_1 + F_1 &= Q_2 + E_2 \Delta h_2 + F_2 + Q_3 + E_3 \Delta h_3 + F_3 + Q_4 + E_4 \Delta h_4 + F_4 \\ \Delta h_2 &= \Delta h_3 = \Delta h_4 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} Q_1 + E_1 \Delta h_1 + F_1 &= (Q_2 + Q_3 + Q_4) + (E_2 + E_3 + E_4) \Delta h_2 + (F_2 + F_3 + F_4) \\ \Delta h_2 &= L_2 \Delta h_1 + N_2 \end{aligned} \right\}$$

$$E_1 = (E_2 + E_3 + E_4) \cdot L_2$$

$$F_1 = Q_2 + Q_3 + Q_4 - Q^n + (F_2 + F_3 + F_4) + (E_2 + E_3 + E_4) \cdot N_2$$

Mogelijkheid 3:

Afvoer gegeven als: $\log Q = a + b \log h + c \log^2 h$.

$$\frac{\ln Q}{\ln 10} = a + b \cdot \frac{\ln h}{\ln 10} + c \cdot \left(\frac{\ln h}{\ln 10}\right)^2$$

Dus:

$$Q^n = Q = \exp[\ln 10 + b \ln h + c \ln^2 h / \ln 10]$$

$$\frac{dQ}{dh} = \left(\frac{b}{h} + \frac{c}{\ln 10} \cdot \frac{2 \ln h}{h} \right)$$

Het programma bepaalt zelf aan de hand van de waterstanden de stromingsrichting.

In verband met het feit, dat de 1e afgeleide van $Q = \mu \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot h_1^u \sqrt{2g(h_2 - h_1)}$ oneindig wordt als $(h_2 - h_1)$ naar nul nadert, moet dan gebruik gemaakt worden van een lineaire interpolatie tussen de afvoer bij $(h_2 - h_1) = 0$ en bij $(h_2 - h_1) = 0.01$.

c. Duiker.

Afvoerformule: $Q = \mu \cdot A_1 \cdot \sqrt{2g(h_2 - h_1)}$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\xi_i + \xi_u + \xi_w}} \quad ; \quad \xi_w = \frac{2g \cdot L}{k_m^2 \cdot R^{1/3}} \quad ; \quad k_m = \frac{25}{k^{1/6}}$$

$$h_2 = h_{\text{bov}} \quad ; \quad h_1 = h_{\text{ben}}$$

$$Q(h_1^n, h_2^n) = \mu \cdot A_1^n \cdot \sqrt{2g(h_2 - h_1)}$$

$$\frac{dQ}{dh_1} = \frac{d\mu}{dh_1} \cdot A_1 \sqrt{2g(h_2 - h_1)} + \mu \cdot \frac{dA}{dh_1} \cdot \sqrt{2g(h_2 - h_1)} - \mu \cdot A_1 \cdot \frac{g}{\sqrt{2g(h_2 - h_1)}}$$

$$\frac{dQ}{dh_2} = \mu \cdot A_1 \cdot \frac{g}{\sqrt{2g(h_2 - h_1)}}$$

$$\text{Hier } \frac{d\mu}{dh_1} = 1/2(\xi_i + \xi_u + \xi_w)^{-3/2} \cdot \frac{2gL}{k_m^2} + \frac{4}{3} \cdot R^{-7/3} \cdot \left(\frac{1}{R} \cdot \frac{dA}{dh} - \frac{A}{R^2} \cdot \frac{dR}{dh} \right).$$

Indien de benedenwaterstand bij een vrije waterspiegel in de buis beneden de kritische hoogte van het water in de buis komt, moet de kritieke diepte aangehouden worden als benedenwaterstand.

Evenals bij de stuw geldt dat indien $h_2, h_1 < 0.01m$, overgegaan dient te worden op lineaire interpolatie.

d. Pomp.

De afvoerformule heeft de vorm $Q = Q(h)$, met $h =$ opvoerhoogte. De gebruiker moet dus specificeren $Q(h^n)$ en dQ/dh^n . Dit kan op 3 manieren:

1. $Q = Q_p$ (constant) $Q(h^n) = Q_p \cdot \frac{dQ}{dh} = 0$.

2. In tabel. Via cubic spline interpolatie wordt de functiewaarde en zijn eerste afgeleide bepaald.

3. Als functie in subroutine.

III. Droogvallende leidingen

Bij kleine waterstanden kan zich het volgende probleem voordoen. De weerstandstermen overheersen dan, zodat bij benadering gesteld kan worden: $Q = \text{sign}(h_{\text{bov}} - h_{\text{ben}}) \cdot K \cdot \sqrt{|h_{\text{bov}} - h_{\text{ben}}|}$. In het differentieschema moet de conveyance K dan bepaald worden als

$$\frac{K_{\text{bov}} + K_{\text{ben}}}{2} \quad (\text{afgezien van de factor } \theta)$$

$$\text{Derhalve: } Q = \text{sign}(h_{\text{bov}} - h_{\text{ben}}) \cdot \frac{K_{\text{bov}} + K_{\text{ben}}}{2} \cdot \sqrt{|h_{\text{bov}} - h_{\text{ben}}|}$$

Differentiatie naar h_{ben} levert:

$$\frac{dQ}{dh_{\text{ben}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dK_{\text{ben}}}{dh_{\text{ben}}} \cdot \sqrt{|h_{\text{bov}} - h_{\text{ben}}|} - \frac{K_{\text{bov}} + K_{\text{ben}}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{|h_{\text{bov}} - h_{\text{ben}}|}}$$

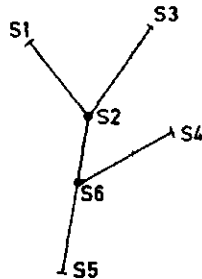
Deze differentiaalcoëfficiënt moet altijd negatief zijn (toenemend verhang moet leiden tot groter debiet). Aan deze voorwaarde kan niet altijd voldaan worden, speciaal niet bij lage waterstanden.

Doet zich een geval van lage waterstand voor (bijvoorbeeld $h < 0.005\text{m}$), dan kan de weerstandsterm in de bewegingsvergelijking geheel bepaald worden in het bovenstroomse punt.

IV. Rekenvolgorde takken

Het is wenselijk dat de informatie over de takken in willekeurige volgorde ingelezen kan worden. De bepaling van de juiste rekenvolgorde (interne nummering van knopen/takken en rekenpunten) dient door het programma zelf te geschieden.

Aan de hand van een voorbeeld zal e.e.a. verduidelijke worden. Stel men heeft het volgende systeem:



De naam van de bovenstroomse en benedenstroomse knoop worden bij het inlezen opgeslagen in een matrix met rijdimensie 7.

Stel men heeft de takken in de volgende volgorde ingelezen:

1. S6 - S5
2. S4 - S6
3. S3 - S2
4. S2 - S6
5. S1 - S2
6. S5 - S5

De tabel ziet er nu als volgt uit:

regel/kolom	1	2	3	4	5	6	7
1	S6	S5	-	-	-	-	-
2	S4	S6	-	-	-	-	-
3	S3	S2	-	-	-	-	-
4	S2	S6	-	-	-	-	-
5	S1	S2	-	-	-	-	-
6	S5	S5	-	-	-	-	-

Eerst wordt gecontroleerd of elke bovenstroomse knoop maar éénmaal in rij 1 voorkomt. Is dit niet zo dan moet het programma de waarschuwing geven dat er een netstructuur is. Vervolgens wordt in rij 3 het regelnummer gezet en in positie 4, 5 en 6 (als negatief getal) de regelnummers waar de bovenstroomse knoop als benedenstroomse knoop vermeld is. Derhalve:

regel/kolom	1	2	3	4	5	6	7
1	S6	S5	1	-2	-4	-	-
2	S4	S6	2	-	-	-	-
3	S3	S2	3	-	-	-	-
4	S2	S6	4	-3	-5	-	-
5	S1	S2	5	-	-	-	-
6	S5	S5	6	-1	-	-	-

Nu wordt gezocht naar een regel waarin in posities 4, 5 en 6 geen getal staat. Bijvoorbeeld regel 2. Deze krijgt rekenvolgorde 1, geplaatst in kolom 7. Daarna wordt gezocht naar een 2 in de andere regels in positie 4, 5 en 6. In dit geval regel 1. In regel 1 wordt nu gekeken of er nog andere negatieve getallen staan in positie 4, 5 en 6. In dit voorbeeld -4. Nu wordt in regel 4 gekeken of op positie 7 al een rekenvolgorde staat. Dit is nog niet het geval in nu wordt gekeken in regel 4 of er negatieve waarden in positie 4, 5 of 6 staat. In dit geval -5. Wederom wordt gekeken of regel 5 al een rekenvolgorde in positie 7 heeft. Dit is niet het geval, en in regel 5 wordt nu gezocht naar negatieve waarden in positie 4, 5 of 6. Deze worden niet gevonden en dus krijgt de tak op regel 5 rekenvolgorde 2. Nu wordt in andere rijen weer gezocht naar een -5 in positie 4, 5 of 6. Deze vindt het programma in regel 4. Het andere negatieve getal is -3 en regel 3 heeft nog geen rekenvolgorde, dus krijgt de tak op regel 3 rekenvolgorde 3. Wederom wordt gezocht naar een -3 in de andere rijen, en men komt weer terecht op regel 4. Deze heeft nog een negatief getal in positie 4, 5 of 6, nl. -5; echter, regel 5 heeft al een rekenvolgorde toebedeeld gekregen, en dus krijgt de tak op regel 4 rekenvolgorde 4. Een -4 wordt gevonden in regel 1; het andere negatieve getal heeft al een rekenvolgorde, dus krijgt de tak op regel 1 rekenvolgorde 5. De -1 in positie 4, 5 of 6 wordt gevonden in regel 6, er zijn geen andere negatieve getallen, dus deze krijgt rekenvolgorde 6. Er kan nergens een -6 gevonden worden dus knoop S5 is het drainagepunt en het proces kan gestopt worden. De tabel ziet er nu als volgt uit:

regel/kolom	1	2	3	4	5	6	7
1	S6	S5	+1	-2	-4	-	5
2	S4	S6	+2	-	-	-	1
3	S3	S2	+3	-	-	-	3
4	S2	S6	+4	-3	-5	-	4
5	S1	S2	+5	-	-	-	2
6	S5	S5	6	-1	-	-	6

In positie 7 ligt nu de interne nummering van de rekenvolgorde vast.