NOTA 660 11 februari 1972

Instituut voor Cultuurtechniek en Waterhuishouding
Wageningen

DE GRONDWATERSTROMING NAAR DIEPE PUTTEN BIJ TWEE WATERVOERENDE LAGEN EN EEN CONCENTRISCH BINNENGEBIED MET DROGE SLOTEN

dr L.F. Ernst

I N H O U D

ALGEMENE BESCHOUWING

Bij onttrekking van grondwater door diepe putten ontstaan zekere verlagingen in het freatische oppervlak en in de stijghoogte van het diepe grondwater. Zowel uit experimenteel als uit theoretisch onderzoek is gebleken, dat de verlagingen in eerste benadering als trechtervormig mogen worden aangeduid. De bekende formule van De Glee geeft een duidelijke illustratie van een dergelijke trechtervorm bij constante wateronttrekking (DE GLEE, 1930).

Een zeer eenvoudige afleiding van formules van deze soort is mogelijk door te veronderstellen dat in de watervoerende laag de stroming horizontaal is, terwijl in de relatief slecht doorlatende, afdekkende laag een verticale stroming bestaat (VAN NES, 1935). Met een dergelijke benaderingsmethode zijn ook gevallen te behandelen, waarbij meerdere lagen voorkomen, die afwisselend goed en slecht doorlatend zijn (HUISMAN en KEMPERMAN, 1951; HYDROLOGISCH COLLOQUIUM, 1964).

In genoemde publicaties wordt echter weinig aandacht gegeven aan de verandering en in de freatische zone. In eerste benadering kan men wel aantonen, dat een formule als van De Glee geldig blijft, mits men de grootheid, die de weerstand bij verticale stromingen in de afdekkende laag voorstelt, vervangt door de som van de verticale weerstand en de drainage-weerstand. Deze afleiding is alleen geldig, als men daarbij veronderstelt, dat door de oppomping van water uit de diepe put er geen verandering in het peil van het open water in sloten, beken, enz. ontstaat. Rondom de put moet er een gebied zijn waar het freatisch oppervlak lager wordt dan het peil van de open leidingen en daar moet dus een zekere wegzijging van water uit deze open leidingen ontstaan.

Men zal echter tot wat ingewikkeldere stelsels van formules komen, als men veronderstelt dat er door de sloten weinig of geen water naar de omgeving van de put wordt getransporteerd, zodat de wegzijging van open water uit de leidingen niet in belangrijke mate bijdraagt tot de voeding van de put. In dat geval kan men uit de moeilijkheden komen, als men het voedingsgebied van de put door een concentrische cirkel met straal r_1 in twee delen verdeelt en daarbij veronderstelt, dat in het binnengebied de sloten droog staan (oneindig grote drainage-weerstand) en in het buitengebied de drainage-weerstand overal de oorspronkelijke, constante waarde W behoudt (ERNST, 1967).

In een recente publicatie is dit probleem opnieuw behandeld en daarbij ook ruim aandacht gegeven aan het feit, dat de drainage-weerstanden in het algemeen duidelijk afhankelijk zijn van het freatisch niveau en van het slootpeil, zodat een zekere seizoensafhankelijkheid van de vorm van de grondwaterspiegel-trechter niet à priori mag worden uitgesloten. Uit de beschikbare gegevens kon echter worden afgeleid dat de seizoensfluctuaties in de trechtervorm bij een constante wateronttrekking vermoedelijk in de meeste gevallen voor de Nederlandse praktijk van weinig belang zullen zijn (ERNST, 1971).

Naast de genoemde beschouwingen van de hydrologische grondslagen werd in deze publicatie slechts een uitwerking gegeven van de formules voor een betrekkelijk eenvoudig geval (fig. 1). Bij meerdere watervoerende lagen kan het probleem in principe op dezelfde manier worden behandeld. Te verwachten is wel, dat naarmate er meer lagen moeten worden onderscheiden, het stelsel vergelijkingen, dat daarbij kan worden afgeleid, aanzienlijk ingewikkelder zal worden. Daar een profiel met twee watervoerende lagen in Nederland al vele malen is aangetroffen, leek het van praktisch belang een dergelijk geval nader toe te lichten.

Evenals bij het reeds gepubliceerde eenvoudigere geval komt de gevolgde weg hierop neer,dat men bij de betrokken differentiaalvergelijkingen algemene oplossingen zoekt, waarin een aantal nader te bepalen coëfficiënten voorkomen en dat daarbij bovendien de straal r_1 van de cirkel tussen binnen- en buitengebied moet worden gevonden. Op de volgende pagina's is de uitwerking zo ver doorgevoerd, dat een stelsel van 3 vergelijkingen - (23), (24) en (25) - werd overgehouden. Wordt een willekeurige waarde van r_1 geprobeerd, dan is het duidelijk, dat de resterende onbekenden van de 1e graad - zie a, s en Q_{wi} of a, s en α - na substitutie van de bekende waarden voor de andere parameters nu zonder veel moeite numeriek kunnen worden opgelost. Enkele herhalingen zijn nodig om tot de juiste waarde van r_1 te komen.

Tenslotte kan er nog op worden gewezen, dat door het voorkomen van een variabele grens tussen binnen- en buitengebied het systeem niet lineair is. Dit wil zeggen, dat als men bij twee gegeven stelsels van randvoorwaarden de bijbehorende bijzondere oplossingen heeft gevonden, men geen nieuwe oplossing kan vinden door een lineaire combinatie te maken, welke geldig zou zijn bij eenzelfde lineaire combinatie van de randvoorwaarden.

BINNENGEBIED

De volgende differentiaalvergelijkingen gelden voor de 1e en 2e watervoerende laag (zie fig. 2a):

$$\frac{d^2\phi_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\phi_1}{dr} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{k_1H_1c_2} - \frac{N}{k_1H_1} \tag{1}$$

$$\frac{d^2\phi_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\phi_2}{dr} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{k_2H_2c_2} \tag{2}$$

Algemene oplossing met nader te bepalen coëfficiënten f, g, s en n:

$$\phi_1(r) = -\frac{Nr^2}{4(k_1H_1 + k_2H_2)} + \frac{k_2H_2}{k_1H_1 + k_2H_2}Nc_2 + $$

$$+ f \ln r + g\,K_o\left(\frac{r}{\lambda_o}\right) + s\,I_o\left(\frac{r}{\lambda_o}\right) + n \tag{3}$$

$$\phi_2(r) = -\frac{Nr^2}{4(k_1H_1 + k_2H_2)} + f \ln r -$$

$$- g\frac{k_1H_1}{k_2H_2}K_o\left(\frac{r}{\lambda_o}\right) - s\frac{k_1H_1}{k_2H_2}I_o\left(\frac{r}{\lambda_o}\right) + n \tag{4}$$

met $$\lambda_o = \sqrt{\frac{1}{k_1H_1c_2} + \frac{1}{k_2H_2c_2}}$$

Voor $r \to o$ volgen de debieten Q_{w1} en Q_{w2} door differentiëren:

$$Q_{w1} = 2\pi k_1 H_1 (f + g) \qquad (5)$$

$$Q_{w2} = 2\pi k_2 H_2 \left(f - \frac{k_1 H_1}{k_2 H_2} g\right) \qquad (6)$$

Twee randvoorwaarden voor $r = r_1$ volgen onmiddellijk door deze waarde te substitueren in (3) en (4):

$$\phi_1(r_1) = - \frac{N r_1^2}{4(k_1 H_1 + k_2 H_2)} + \frac{k_2 H_2}{k_1 H_1 + k_2 H_2} N c_2 + f \ln r_1 + $$
$$+ g\, K_o\left(\frac{r_1}{\lambda_o}\right) + s\, I_o\left(\frac{r_1}{\lambda_o}\right) + n \qquad (7)$$

$$\phi_2(r_1) = - \frac{N r_1^2}{4(k_1 H_1 + k_2 H_2)} + f \ln r_1 -$$
$$- \frac{k_1 H_1}{k_2 H_2}\left\{g\, K_o\left(\frac{r_1}{\lambda_o}\right) + s\, I_o\left(\frac{r_1}{\lambda_o}\right)\right\} + n \qquad (8)$$

Voor de debieten $Q_1(r_1)$ en $Q_2(r_1)$ volgt na differentiëren van (3) en (4):

$$Q_1(r_1) = 2\pi r_1 k_1 H_1 \left[\frac{N r_1}{2(k_1 H_1 + k_2 H_2)} - \frac{f}{r_1} + \frac{g}{\lambda_o} K_1\left(\frac{r_1}{\lambda_o}\right) - \frac{s}{\lambda_o} I_1\left(\frac{r_1}{\lambda_o}\right)\right] \qquad (9)$$

$$Q_2(r_1) = 2\pi r_1 k_2 H_2 \left[\frac{N r_1}{2(k_1 H_1 + k_2 H_2)} - \frac{f}{r_1} - \right.$$
$$\left. - \frac{k_1 H_1 g}{k_2 H_2 \lambda_o} K_1\left(\frac{r_1}{\lambda_o}\right) + \frac{k_1 H_1 s}{k_2 H_2 \lambda_o} I_1\left(\frac{r_1}{\lambda_o}\right)\right] \qquad (10)$$

BUITENGEBIED

Verticale stroming in bovenlaag (fig. 2b):

$$\frac{\phi_1 - h}{c_1} = \frac{h}{W} \qquad (11)$$

Differentiaalvergelijkingen voor twee watervoerende lagen:

$$\frac{d^2\phi_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\phi_1}{dr} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{k_1 H_1 c_2} + \frac{\phi_1 - h}{c_1} \qquad (12)$$

k_1H_1

$$\frac{d^2\phi_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\phi_2}{dr} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{k_2 H_2 c_2} \qquad (13)$$

h is uit (12) te elimineren met behulp van (11):

$$\frac{d^2\phi_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\phi_1}{dr} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{k_1 H_1 c_2} + \frac{\phi_1}{(c_1 + W)k_1H_1} \qquad (14)$$

De twee differentiaalvergelijkingen (13) en (14) komen formeel overeen met wat in de publicatie van het Hydrologisch Colloquium is uitgewerkt. Zie bijvoorbeeld pag. 44 midden:

$$\phi_1(r) = a\,K_o\left(\frac{r}{\lambda_1}\right) + b\,K_o\left(\frac{r}{\lambda_2}\right) \qquad (15)$$

$$\phi_2(r) = \frac{a}{1 - \alpha_2^{-1}\lambda_1^{-2}}\,K_o\left(\frac{r}{\lambda_1}\right) + \frac{b}{1 - \alpha_2^{-1}\lambda_2^{-2}}\,K_o\left(\frac{r}{\lambda_2}\right) \qquad (16)$$

Voor de parameters λ_1 en λ_2:

$$2\lambda_1^{-2} = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1)^2 - 4\alpha_1\alpha_2}$$

$$2\lambda_2^{-2} = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 - \sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1)^2 - 4\alpha_1\alpha_2}$$

Voor α_1, α_2 en β_1:

$$\alpha_1 = \frac{1}{k_1 H_1 (c_1 + W)} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{k_2 H_2 c_2} \qquad \beta_1 = \frac{1}{k_1 H_1 c_2}$$

Twee randvoorwaarden voor $r = r_1$ vindt men onmiddellijk door deze waarde van r te substitueren in (15) en (16):

$$\phi_1(r_1) = a\, K_o(\frac{r_1}{\lambda_1}) + b\, K_o(\frac{r_1}{\lambda_2}) \tag{17}$$

$$\phi_2(r_1) = \frac{a}{1 - \alpha_2^{-1}\lambda_1^{-2}} K_o(\frac{r_1}{\lambda_1}) + \frac{b}{1 - \alpha_2^{-1}\lambda_2^{-2}} K_o(\frac{r_1}{\lambda_2}) \tag{18}$$

Door differentiëren vindt men de debieten op de binnenrand r_1:

$$Q_1(r_1) = 2\pi r_1 k_1 H_1 \{\frac{a}{\lambda_1} K_1(\frac{r_1}{\lambda_1}) + \frac{b}{\lambda_2} K_1(\frac{r_1}{\lambda_2})\} \tag{19}$$

$$Q_2(r_1) = 2\pi r_1 k_2 H_2 \{\frac{a}{\lambda_1(1 - \alpha_2^{-1}\lambda_1^{-2})} K_1(\frac{r_1}{\lambda_1}) + \frac{b}{\lambda_2(1 - \alpha_2^{-1}\lambda_2^{-2})} K_1(\frac{r_1}{\lambda_2})\} \tag{20}$$

Is r_1 de gemeenschappelijk rand van binnen- en buitengebied, dan geldt daar:

$$h(r_1) = NW \tag{21}$$

$$\phi_1(r_1) = N(W + c_1) \tag{22}$$

OPLOSSING VAN ONBEKENDE COEFFICIENTEN BIJ GEGEVEN RANDVOORWAARDEN

Voor $r_1 \to o$ zijn de randvoorwaarden voor de opbrengst van de beide putfilters reeds verwerkt in de vergelijkingen (5) en (6). Verder is reeds impliciet aangenomen in de vergelijkingen (15) en (16), dat het buitengebied oneindig groot is. Dus voor $r \to \infty$ moet gelden: $h = \phi_1 = \phi_2 = 0$, wat inderdaad met deze vergelijkingen wordt verkregen.

Voor het binnengebied zijn er 4 onbekende coëfficiënten: f, g, s, n. Wegens de oneindig grote afmetingen zijn er voor het buitengebied slechts 2 onbekende coëfficiënten: a, b. Bovendien is de straal r_1 van de gemeenschappelijke rand nog onbekend.

Op de voorgaande pagina's kunnen onmiddellijk de 7 onafhankelijke betrekkingen worden afgelezen, welke nodig zijn voor de oplossing van de onbekende parameters: 2 betrekkingen voor de uitstroming bij $r \to o$; 4 betrekkingen wegens de eenwaardigheid van potentiaal en stroomsterkte op de gemeenschappelijke grens r_1 van binnen- en buitengebied; 1 betrekking welke inhoudt dat bij r_1 het freatisch oppervlak daalt tot aan het slootpeil. Deze 7 betrekkingen met als onbekenden a, b, f, g, s, n en r_1 kunnen als volgt worden geschreven:

$$\frac{Q_{w1}}{2\pi k_1 H_1} = f + g \tag{5}$$

$$\frac{Q_{w2}}{2\pi k_2 H_2} = f - \frac{k_1 H_1}{k_2 K_2} g \tag{6}$$

$$- \frac{N r_1^2}{4(k_1 H_1 + k_2 H_2)} + \frac{k_2 H_2}{k_1 H_1 + k_2 H_2} N c_2 + f \ln r_1 +$$

$$+ g K_o(\frac{r_1}{\lambda_o}) + s I_o(\frac{r_1}{\lambda_o}) + n = a K_o(\frac{r_1}{\lambda_1}) + b K_o(\frac{r_1}{\lambda_2}) = N(W + c_1) \qquad (7)=(17)=(22)$$

$$- \frac{N r_1^2}{4(k_1 H_1 + k_2 H_2)} + f \ln r_1 - \frac{k_1 H_1 g}{k_2 H_2} K_o(\frac{r_1}{\lambda_o}) - \frac{k_1 H_1 s}{k_2 H_2} I_o(\frac{r_1}{\lambda_o}) + n =$$

$$= \frac{a}{1 - \alpha_2^{-1} \lambda_1^{-2}} K_o(\frac{r_1}{\lambda_1}) + \frac{b}{1 - \alpha_2^{-1} \lambda_2^{-2}} K_o(\frac{r_1}{\lambda_2}) \qquad (8)=(18)$$

$$\frac{N r_1}{2(k_1 H_1 + k_2 H_2)} - \frac{f}{r_1} + \frac{g}{\lambda_o} K_1(\frac{r_1}{\lambda_o}) - \frac{s}{\lambda_o} I_1(\frac{r_1}{\lambda_o}) =$$

$$= \frac{a}{\lambda_1} K_1(\frac{r_1}{\lambda_1}) + \frac{b}{\lambda_2} K_1(\frac{r_1}{\lambda_2}) \qquad (9)=(19)$$

$$\frac{N r_1}{2(k_1 H_1 + k_2 H_2)} - \frac{f}{r_1} - \frac{k_1 H_1 g}{k_2 H_2 \lambda_o} K_1(\frac{r_1}{\lambda_o}) + \frac{k_1 H_1 s}{k_2 H_2 \lambda_o} I_1(\frac{r_1}{\lambda_o}) =$$

$$= \frac{a}{\lambda_1(1 - \alpha_2^{-1} \lambda_1^{-2})} K_1(\frac{r_1}{\lambda_1}) + \frac{b}{\lambda_2(1 - \alpha_2^{-1} \lambda_2^{-2})} K_1(\frac{r_1}{\lambda_2}) \qquad (10)=(20)$$

De onbekenden b, f, g en n kunnen gemakkelijk worden geëlimineerd. Na substitutie van $k_1H_1 + k_2H_2 = T$ en $k_1H_1/k_2H_2 = \tau$ en rangschikking van de overblijvende onbekenden:

$$\frac{a}{\lambda_o} K_o(\frac{r_1}{\lambda_1}) \{\frac{r_1 K_1(\frac{r_1}{\lambda_2})}{\lambda_2 K_o(\frac{r_1}{\lambda_2})} - \frac{r_1 K_1(\frac{r_1}{\lambda_1})}{\lambda_1 K_o(\frac{r_1}{\lambda_1})}\} - \frac{s}{\lambda_o} \frac{r_1}{\lambda_o} I_1(\frac{r_1}{\lambda_o}) +$$

$$+ \frac{Q_{w1}}{2\pi T\lambda_o}\{\frac{r_1}{\tau\lambda_o} K_1(\frac{r_1}{\lambda_o}) - 1\} - \frac{Q_{w2}}{2\pi T\lambda_o}\{\frac{r_1}{\lambda_o} K_1(\frac{r_1}{\lambda_o}) + 1\} =$$

$$= \frac{N(W + c_1)}{\lambda_o} \frac{r_1 K_1(\frac{r_1}{\lambda_2})}{\lambda_2 K_o(\frac{r_1}{\lambda_2})} - \frac{Nr_1^2}{2T\lambda_o} \qquad (23)$$

$$\frac{a}{\lambda_o} K_o(\frac{r_1}{\lambda_1}) \{\frac{1}{\alpha_2^{-1}\lambda_2^{-2} - 1} \frac{r_1 K_1(\frac{r_1}{\lambda_2})}{\lambda_2 K_o(\frac{r_1}{\lambda_2})} - \frac{1}{\alpha_2^{-1}\lambda_1^{-2} - 1} \frac{r_1 K_1(\frac{r_1}{\lambda_1})}{\lambda_1 K_o(\frac{r_1}{\lambda_1})}\} -$$

$$- \tau \frac{s}{\lambda_o} \frac{r_1}{\lambda_o} I_1(\frac{r_1}{\lambda_o}) + \frac{Q_{w1}}{2\pi T\lambda_o}\{\frac{r_1}{\lambda_o} K_1(\frac{r_1}{\lambda_o}) + 1\} - \frac{Q_{w2}}{2\pi T\lambda_o}\{\tau \frac{r_1}{\lambda_o} K_1(\frac{r_1}{\lambda_o}) - 1\} =$$

$$= \frac{N(W + c_1)}{\lambda_o(\alpha_2^{-1}\lambda_2^{-2} - 1)} \frac{r_1 K_1(\frac{r_1}{\lambda_2})}{\lambda_2 K_o(\frac{r_1}{\lambda_2})} + \frac{Nr_1^2}{2T\lambda_o} \qquad (24)$$

$$\frac{a}{\lambda_o} K_o(\frac{r_1}{\lambda_1}) \left(\frac{1}{\alpha_2^{-1}\lambda_2^{-2} - 1} - \frac{1}{\alpha_2^{-1}\lambda_1^{-2} - 1}\right) - (1 + \tau) \frac{s}{\lambda_o} I_o(\frac{r_1}{\lambda_o}) -$$

$$- \frac{Q_{w1}}{2\pi T\lambda_o}(1 + \tau^{-1}) K_o(\frac{r_1}{\lambda_o}) + \frac{Q_{w2}}{2\pi T\lambda_o}(1 + \tau) K_o(\frac{r_1}{\lambda_o}) =$$

$$= - \frac{N(W + c_1)}{\lambda_o}\left(1 + \frac{1}{\alpha_2^{-1}\lambda_2^{-2} - 1}\right) + \frac{k_2H_2Nc_2}{T\lambda_o} \qquad (25)$$

Ook de eliminering van de 1e graads-onbekenden a en s zou in principe weinig moeilijkheden geven, maar daarmee ontstaan vrij omvangrijke, slecht hanteerbare formules. Hoe men hiermee ook verder gaat, een directe oplossing van r_1 zal de meeste moeilijkheden geven, doordat er 4 verschillende Bessel-functies voorkomen (I_o, I_1, K_o, K_1) en bovendien K_o en K_1 met 3 verschillende argumenten (r_1/λ_i) voorkomen.

Beter is het verschillende waarden van r_1 te proberen, dus als een gegeven in te voeren en daarbij ofwel het debiet Q_{w1}, ofwel het debiet Q_{w2} als een onbekende te beschouwen. Op deze manier heeft men een aantal vergelijkingen overgehouden, waarin alle onbekenden lineair zijn, Na enkele herhalingen kan men een grafische voorstelling maken van het verband tussen Q_{wi} en r_1. Daaruit is dan af te lezen bij welke waarde van r_1 de gevraagde waarde Q_{wi} behoort.

Bij een gemeenschappelijke stijgbuis moet men de som $Q_{w1} + Q_{w2} = Q_w$ als een gegeven invoeren. Bij elke combinatie van waarden Q_w en r_1 kan men uit de gegeven vergelijkingen (23), (24) en (25) na substitutie van $Q_{w1} = \alpha Q_w$ en $Q_{w2} = (1 - \alpha)\ Q_w$ de onbekenden a, s en α vinden en dus ook de waarden van Q_{w1} en Q_{w2}. Daarna zal men echter moeten nagaan of de bijbehorende potentiaalverlagingen op de eventueel onvolkomen putfilters wel bij elkaar passen. Men kan onmiddellijk inzien in welke richting r_1 moet worden verschoven om hierin verbetering te brengen. Ook in dit geval zijn dus enkele herhalingen nodig om tot een benadering van de exacte oplossing te komen.

LITERATUUR

ERNST, L.F. Wateronttrekking door diepe putten.
ICW-nota 353, 15 juni 1967.

——— Analysis of groundwater flow to deep wells in areas with a non-linear function for the subsurface drainage.
Journal of Hydrology, 14, 1971, 158-180.

GLEE, G.J. DE. Over grondwaterstromingen bij wateronttrekking door middel van putten. Proefschrift T.H. Delft, 1930.

HUISMAN, L. en J. KEMPERMAN. Bemaling van spanningsgrondwater.
De Ingenieur, 63, 1951, B29-B35.

HYDROLOGISCH COLLOQUIUM. Steady flow of groundwater to wells.
Versl. Meded. Comm. Hydrol. Onderz. TNO no. 10, 's-Gravenhage, 1964.

NES, B.A. VAN. Een globale berekening van het waterbezwaar van een cirkelvormige bouwput bij toepassing van een bronbemaling met volkomen putten in spanningsgrondwater.
De Ingenieur, 50, 1935, B177-B180.

fig 1

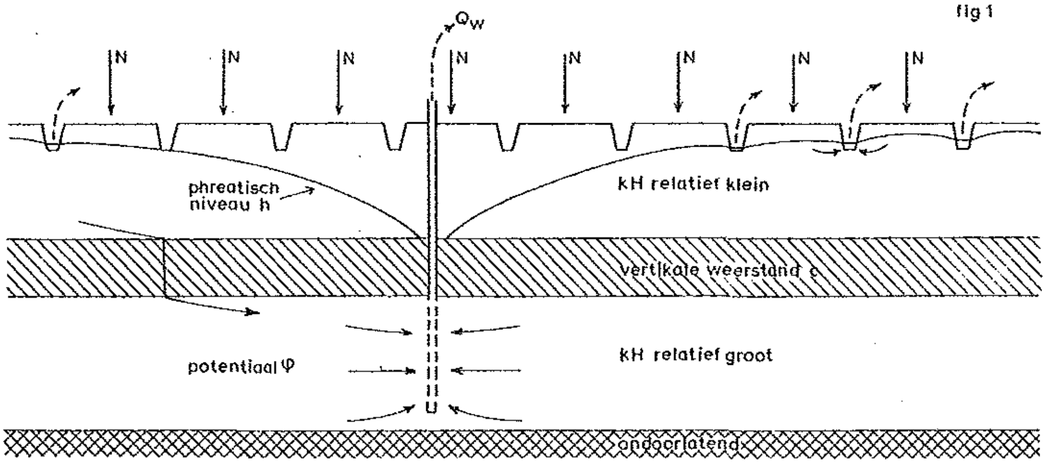
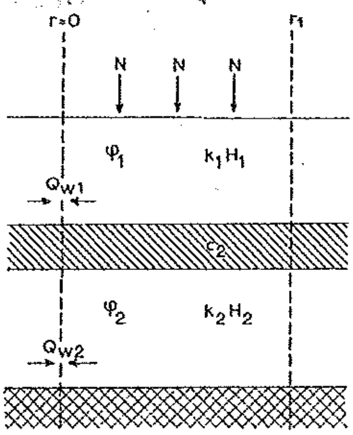
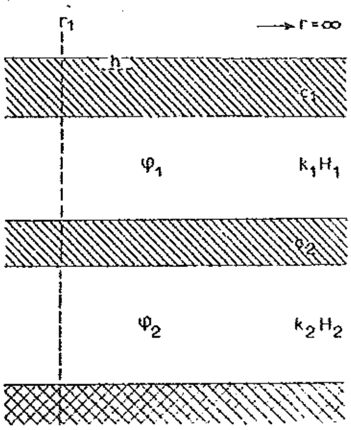


fig. 2a binnengebied



buitengebied fig. 2b



In het binnengebied geldt :

$$h = \varphi_1 + N c_1$$