

NOTA 575

30 oktober 1970

Instituut voor Cultuurtechniek en Waterhuishouding

Wageningen

**ALTERRA**  
Wageningen Universiteit & Research centre  
Omgevingswetenschappen  
Centrum Water & Klimaat  
*Team Integraal Waterbeheer*

DRAINAGE VAN EEN DIK, HOMOGEEEN DOORLATEND

GRONDPAKKET DOOR MIDDEL VAN DIEPE PUTTEN

dr. L.F. Ernst

---

Nota's van het Instituut zijn in principe interne communicatiemiddelen, dus geen officiële publikaties.

Hun inhoud varieert sterk en kan zowel betrekking hebben op een eenvoudige weergave van cijferreeksen, als op een concluderende discussie van onderzoeksresultaten. In de meeste gevallen zullen de conclusies echter van voorlopige aard zijn omdat het onderzoek nog niet is afgesloten.

Bepaalde nota's komen niet voor verspreiding buiten het Instituut in aanmerking.

---

## I N H O U D

|                                                            | Blz. |
|------------------------------------------------------------|------|
| 1. INLEIDING                                               | 1    |
| 2. STATIONAIRE AFFPOMPINGSTRECHTERS DOOR CONSTANT POMPEN   | 2    |
| 3. TRECHTER ONTWIKKELING TENGEVOLGE VAN KORTE POMPPERIODES | 4    |
| 4. DE TRECHTERVORM BIJ EEN VARIABEL POMPDEBIET             | 5    |
| LITERATUUR                                                 | 7    |

## 1. INLEIDING

In Nederland is het gemiddelde neerslagoverschot zo groot dat een verwaarlozing van de drainage door greppels, sloten, beken enz. bij praktische toepassingen in het algemeen niet aanvaardbaar is. Er zijn echter andere klimatologische en geo-hydrologische omstandigheden denkbaar, waarbij het veel zin heeft a priori te veronderstellen dat de drainage uitsluitend plaats heeft door diepe putten. Ten behoeve van een berekening van de grondwaterstand in zijn afhankelijkheid van plaats en tijd, kan de waterbalans in een differentiaalvergelijking worden uitgedrukt. Wordt de grondwaterafvoer naar oppervlakkige drains verwaarloosd en bovendien verondersteld, dat er een radiale symmetrie is (dus  $h$  alleen afhankelijk van  $r$  en  $t$ ), dan volgt:

$$kD\left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r}\right) = \mu \frac{\partial h}{\partial t} - P(t) + E(t) + \frac{\partial W_{rd}}{\partial t} \quad (1)$$

- $kD$  = geleidend vermogen van het homogeen doorlatende grove pakket voor horizontale grondwaterstromingen;
- $h$  = stijghoogte van grondwater  $\approx$  freatisch niveau;
- $r$  = afstand tot diepe (verticale) put of tot centrum van een concentratie van diepe putten;
- $t$  = tijd;
- $\mu$  = bergingscoëfficiënt;
- $P$  = neerslag;
- $E$  = verdamping;
- $W_{rd}$  = berging van water vanaf maaiveld tot onderkant van de wortelzone ( $rd$  = root depth).

De laatste drie termen van (1) geven tezamen de stroomsterkte door de onderkant van de wortelzone. Het neerslagoverschot  $N(t)$  kan per definitie hieraan worden gelijk gesteld:

$$N(t) = P(t) - E(t) - \frac{\partial W}{\partial t} \quad (2)$$

Formule (1) kan dus ook in de volgende kortere vorm worden geschreven:

$$kD \left( \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \right) = \mu \frac{\partial h}{\partial t} - N(t) \quad (3)$$

## 2. STATIONAIRE AFPOMPINGSTRECHTERS DOOR CONSTANT POMPEN

Indien de wateronttrekking door de diepe putten met constante intensiteit plaats vindt, dan mag met goede benadering worden verondersteld, dat de grondwaterspiegel binnen R een constante trechtersvorm heeft (ERNST, 1967, 1970) of deze vorm in een zekere aanlooptijd zal benaderen en dat de tijdsafhankelijke variaties van de grondwaterspiegel vooral bepaald worden door de bergingscoëfficiënt  $\mu$  en de afwijkingen van het neerslagoverschot ten opzichte van een langjarig gemiddelde  $\bar{N}$ . De gezochte oplossing kan nu worden vervangen door de volgende som:

$$h(r, t) = h'(t) + h''(r) \quad (4)$$

$$\mu \frac{\partial h'}{\partial t} = N(t) - \bar{N} \quad (5)$$

$$kD \left( \frac{\partial^2 h''}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h''}{\partial r} \right) = - \bar{N} \quad (6)$$

Uit (5) volgt onmiddellijk:

$$h'(t) - h'(0) = \frac{1}{\mu} \int_0^t \{N(t) - \bar{N}\} dt \quad (7)$$

De oplossing van (6) hangt af van het constante debiet  $Q_0$ , dat aan de put ( $r \rightarrow 0$ ) wordt onttrokken. Door de verwaarlozing van de afvoer door oppervlakkige drains, is het nodig te veronderstellen, dat de betrokken put door een zeker cirkelvormig gebied met straal R wordt gevoed, waarbij R zo groot is, dat geldt:

$$\pi R^2 \bar{N} = Q_0 \quad (8)$$

De buitenrand  $R$  wordt ondoorlatend verondersteld. Daar buiten liggen weer andere cirkelvormige gebieden die met zwakke overlappings\*) het gehele beschikbare gebied dienen te overdekken, waar op deze manier de drainage plaats vindt.

Als oplossing van (6) volgt nu voor een volkomen put:

$$h''(r) - h''(R) = \frac{Q_0}{4\pi kD} \left\{ \frac{R^2 - r^2}{R^2} + \ln\left(\frac{r}{R}\right)^2 \right\} \quad (9)$$

Door (7) en (9) is de oplossing nog niet geheel vastgelegd, daar  $h'(0) + h''(R)$  een nader te bepalen constante voorstelt. Een vast peil in de put kan niet als voorwaarde worden gesteld bij gebruik van deze formules, daar (7) een gelijkmatige fluctuatie over het gehele gebied voorstelt. Voor een gegeven periode mag men wel een zeker gemiddeld peil in de put aannemen en vervolgens met behulp van (7) en (9) de bijbehorende waarde  $h'(0) + h''(R)$  berekenen.

Indien vanaf  $t = 0$  met een constante intensiteit wordt gepompt, maar formule (9) zou niet onmiddellijk geldig zijn wegens een willekeurige horizontale begintoestand, dan zal voor grote waarden van  $t$  deze formule wel met goede benadering geldig worden en daarbij voor  $h''(R)$  een zodanige waarde behoren, dat het gemiddelde niveau van de trechter volgens (9) gelijk wordt aan nul. Dan wordt immers voldaan aan de voorwaarde dat de bergingsverandering volgens (7) en geen bergingsverandering volgens (9) gelijk kan worden gesteld aan het verschil van het ingevoerde neerslagoverschot en het uitgevoerde pompdebiet.

$$\pi R^2 h''(R) + \frac{Q_0}{4\pi kD} \int_0^R 2\pi r \left\{ \frac{R^2 - r^2}{R^2} + \ln\left(\frac{r}{R}\right)^2 \right\} dr = 0 \quad (10)$$

waaruit volgt: 
$$h''(R) = \frac{Q_0}{8\pi kD} \quad (11)$$

\*) Bijvoorbeeld door plaatsing volgens een rooster van gelijkzijdige driehoeken met een (kortste) afstand tussen de middelpunten

$$a = R \sqrt{2\pi/\sqrt{3}} \approx 1,9 R$$

### 3. TRECHTER ONTWIKKELING TENGEVOLGE VAN KORTE POMPPERIODES

Wordt slechts gedurende zeer korte periodes van dreigende wateroverlast gepompt, dan mag worden aangenomen dat er een horizontale grondwaterspiegel is als begintoestand en dat in een pakket van homogene doorlatendheid de afpompingsrechter zich ontwikkelt overeenkomstig de formule van Theis (TODD, 1959). Zijn meerdere putten op relatief korte afstand van elkaar (kleine R) tegelijkertijd in werking gesteld, dan is het beter de volgende formule (MUSKAT, 1934, 1937) te gebruiken:

$$h = \frac{Q_o}{2\pi kD} \left[ \frac{3}{4} + \log \frac{r}{R} - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{R} \right)^2 - \frac{2kDt}{\mu R^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_o \left( \alpha_n \frac{r}{R} \right) e^{-\alpha_n^2 \frac{kDt}{\mu R^2}}}{\alpha_n^2 J_o^2(\alpha_n)} \right] \quad (12)$$

$Q_o$  = constante wateronttrekking vanaf het tijdstip  $t = 0$ ;

$J_o$  = Bessel-functie van de orde nul;

$\alpha_n$  = volgt uit  $J_1(\alpha_n) = 0$ ;

$\alpha_1$  = eerste positieve wortel;

$\alpha_2$  = tweede positieve wortel enz.

Formule (12) is in fig. 1 grafisch afgebeeld en daaruit blijkt, dat voor  $\tau = kDt/\mu R^2 < 0,1$  de formule van Theis met zeer goede benadering geldig is, terwijl voor  $\tau > 0,3$  er een eenparig dalende trechter is van constante vorm. Bovendien laat deze figuur zien, dat de logarithmische vorm van de trechter ( $ah = \log br$ ) alleen voor een betrekkelijk klein binnengebied opgaat.

Het verloop van de grondwaterstand volgens formule (12) is voor enkele bijzondere waarden van  $r/R$  nogmaals afgebeeld in fig. 2. In deze figuur is zeer goed af te lezen met welk een goede benadering voor de buitenrand bij  $\tau > 0,3$  de volgende lineaire formule geldt:

$$h(R) = \frac{Q_o}{2\pi kD} \left( \frac{1}{4} - 2\tau \right) \quad (13)$$

Wil men weten aan welke voorwaarden een stelsel diepe putten moet voldoen om na een pompduur  $\Delta t$  minstens een grondwaterstandsaling  $\Delta h$  te verkrijgen (dus aan de rand van het gebied voor  $r = R$ ), dan heeft

het zin formule (13) op de volgende manier te herschrijven en daarmee de voorwaarde te geven waaraan het debiet  $Q_o$  van elke put moet voldoen:

$$Q_o > \frac{\pi k D \Delta h}{\frac{k D}{\mu R} \Delta t - \frac{1}{8}} \quad (14)$$

Evenals formule (13) is (14) niet bruikbaar bij kleine waarden van  $\tau$ . In de praktijk zal men daar ook geen toepassing verlangen wegens de ongunstige verhouding van de verkregen grondwaterstandsaling langs de buitenrand en de hoeveelheid opgepompt water. Voor  $\tau = 0,3$  is deze verhouding nog niet meer dan 59 % van de meest gunstige waarde, welke benaderd wordt voor  $\tau \rightarrow \infty$  (zie verhouding  $\cot \beta / \cot \alpha$  in fig. 2). Zeer grote waarden van  $\tau$  zullen in de praktijk ook niet worden gebruikt wegens de daarbij behorende kleine waarden van  $R$ .

#### 4. DE TRECHTERVORM BIJ EEN VARIABEL POMPDEBIET

Het verloop van de grondwaterstand te berekenen bij gecompliceerde variatie in het pompdebiet kan alleen gebeuren met minder eenvoudige formules dan te voren werden gebruikt. Voorgaande formules blijven echter zeer goed bruikbaar, indien men zich beperkt tot onttrekkingsprogramma's bestaande uit intervallen van willekeurige maar niet te korte duur (bij voorkeur  $\tau > 0,3$ ) met voor het debiet in elk van deze perioden een constante waarde. Een dergelijke bedrijfsvoering kan bijvoorbeeld bestaan uit een meer of minder sterke wateronttrekking gedurende het regenseizoen of bij wateroverlast en geen of een zeer matige wateronttrekking in de rest van het jaar.

Als voorbeeld kan worden genomen een wateronttrekking  $Q_n$  over de natte periode  $T_n$  en een wateronttrekking  $Q_d$  over de rest van het jaar  $T_d$ , waarna alles zich periodiek herhaalt. Daar er geen afvoer is door oppervlakkige drains, moet hiervoor gelden:

$$\pi R^2 N T_j = Q_n T_n + Q_d T_d \quad (15)$$

$$\text{met } T_n + T_d = T_j = 365 \text{ dagen} \quad (16)$$

De grootte van de grondwaterstandsaling is te vinden door de oplossing uit twee delen samen te stellen, te weten een stationair deel met  $Q' = \pi R^2 \bar{N}$  en een niet-stationair deel met afwisselend  $Q''_n = Q_n - \pi R^2 \bar{N} > 0$  (discharge well) en  $Q''_d = Q_d - \pi R^2 \bar{N} < 0$  (recharge well). Voor de eerste deeloplossing kan onmiddellijk formule (9) worden gebruikt. Voor de tweede deeloplossing dient men een aantal oplossingen overeenkomstig formule (12) te sommeren.

Voor een berekening van de grondwaterstandsverlaging op de rand van een van de cirkelvormige voedingsgebieden, die ook hier weer aan elk van de pompputten worden toegekend, kan eveneens formule (12) worden gebruikt, maar ook de grafische voorstelling getoond in fig. 2 of de wat minder nauwkeurige formule (13).

Van fig. 2 is gebruik gemaakt om voor twee nader te omschrijven gevallen het grondwaterstandsverloop weer te geven, zoals dat tengevolge van  $Q''$  aan de buitenrand van het gebied ( $r = R$ ) zal ontstaan.

Voor beide gevallen geldt:  $T_n = \frac{1}{3}$  jaar

$$T_d = \frac{2}{3} \text{ jaar}$$

Voor meerdere duidelijkheid is in fig. 3 nog aangegeven, hoe het werkelijke verloop van  $Q_o$  in verschillende termen kan worden ontleed. In de onderste helft van deze figuur is duidelijk te zien dat de tweede deeloplossing kan worden gevormd door optelling van een aantal malen de rechterzijde van formule (12) telkens met  $Q_o$ -waarden en tijdsverschuivingen, welke onmiddellijk uit deze figuur kunnen worden afgelezen.

Fig. 4 geeft de invloed van  $Q''$  op de grondwaterstand aan de buitenrand van een relatief klein gebied, waarbij  $\tau_j = kDT_j/\mu R^2 = 3$ . Aan het einde van het vorige hoofdstuk werd reeds opgemerkt dat bij  $(\tau - \tau_o)$ -waarden kleiner dan 0,3 nog geen redelijke grondwaterstandsverlaging aan de buitenrand van het gebied is ontstaan. Om een voldoende drainage-effect te bereiken door middel van diepe putten, zal men in het algemeen dus geen kleinere  $R$ -waarden kunnen nemen dan hiermee overeen komt.

Fig. 5 geeft het resultaat bij genoemde grenswaarde:  $\tau = kDT_j/\mu R^2 = 0,3$ . Aan de buitenrand wordt in dit geval het grootste effect bereikt (zie laagste punten van de golflijn) in het midden van de periode dat er het minste wordt gepompt. Bij jaarlijkse fluctuaties wordt een dergelijke sterke stijging echter zelfs bij relatief kleine  $kD$ -waarden slechts bereikt bij vrij grote putafstanden. Bijvoorbeeld

als  $kD = 300 \text{ m}^2/\text{dag}$ ,  $T_j = 365$  dagen,  $\mu = 0,1$  en  $\tau_j = 0,3$  dan volgt  $R = 1900 \text{ m}$ , wat dus neerkomt op putafstanden van 3500 m of meer.

Tenslotte moet nog worden opgemerkt, dat aan de uitkomsten voor de aanlooptijd (duur  $\approx \mu R^2/5kD$ ), hoewel hiermee enige indruk wordt verkregen omtrent de instelsnelheid of de uitdamping van evenwichtsverstoringen, niet al te veel betekenis moet worden gehecht. De moeilijkheid, die in vele praktijk gevallen aanwezig is, namelijk dat er over de oorspronkelijke drainagetoestand weinig of niets is bekend, is in de voorgaande behandeling ontweken door enkele veronderstellingen in te voeren, die een zo eenvoudig mogelijke berekening toelaten. Er is aangenomen dat de oorspronkelijke toestand ver terug ligt en dat voor  $\tau_0$  reeds voldoende lang met een constante intensiteit  $\bar{Q}_0$  is gepompt (zie 2e grafiek van fig. 3) om de invloed daarvan te doen verdwijnen. Dit houdt dus in dat op de tijd  $t_0$  de grondwaterspiegel een trechtervorm vertoont overeenkomstig formule (9) - dus een stationaire toestand - en dat betrekkelijke korte tijd daarna over het gehele gebied de gevraagde periodieke beweging reeds zeer dicht wordt benaderd.

#### LITERATUUR

ERNST, L.F. Wateronttrekking door diepe putten, I.C.W.-Nota 353, 15 juni 1967.

\_\_\_\_\_ Analysis of groundwater flow to deep wells in areas with a non-linear drainage function (in druk: Journal of Hydrology, 1970).

MUSKAT, M. The flow of compressible fluids through porous media and some problems in heat conduction. Physics, 5, 1934, 71-94.

\_\_\_\_\_ The flow of homogeneous fluids through porous media. Mc Graw-Hill Book Co, New York, 1937.

TODD, D.K. Groundwater hydrology, Wiley, New York, 1950.

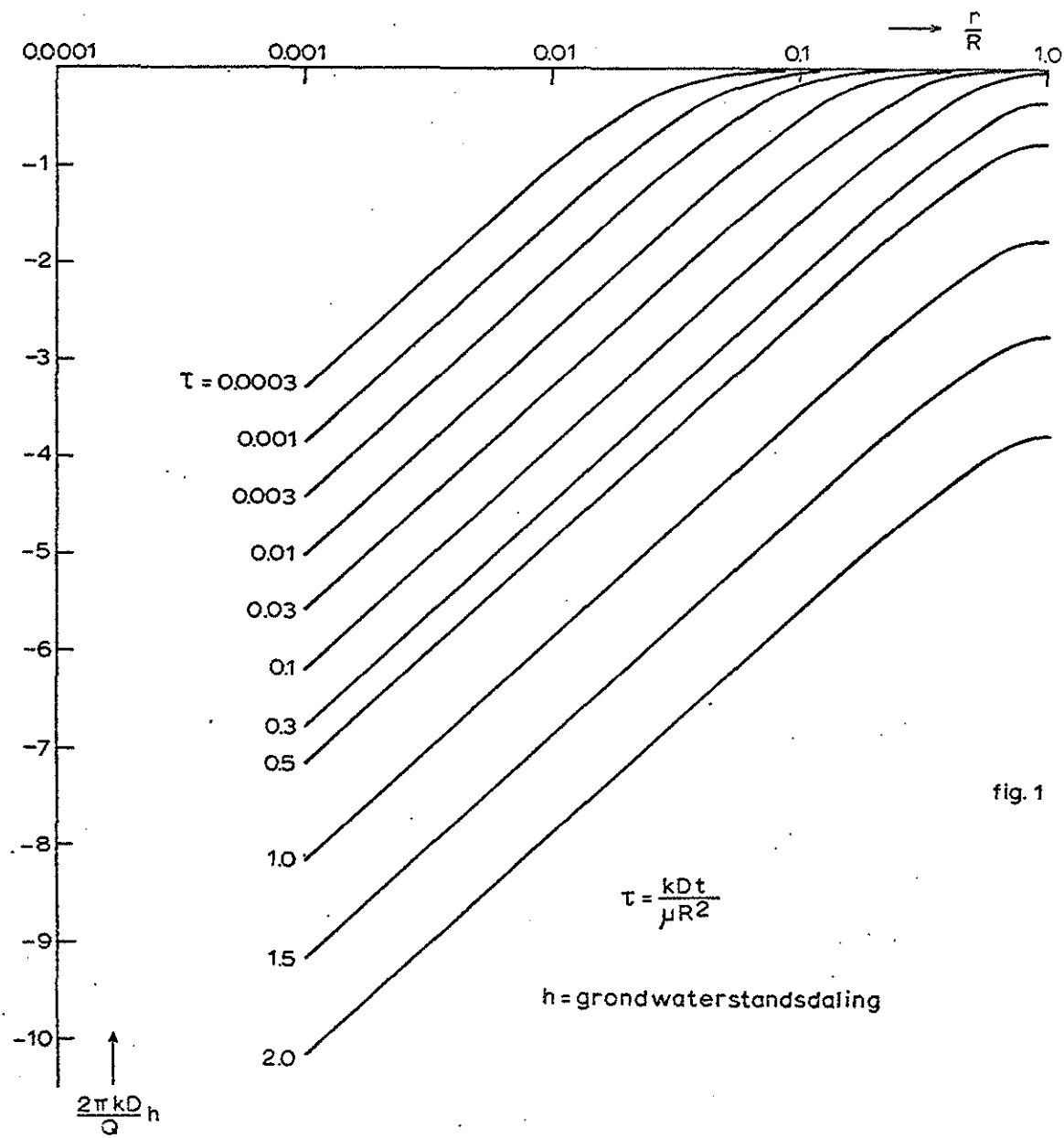


fig. 1

fig. 2

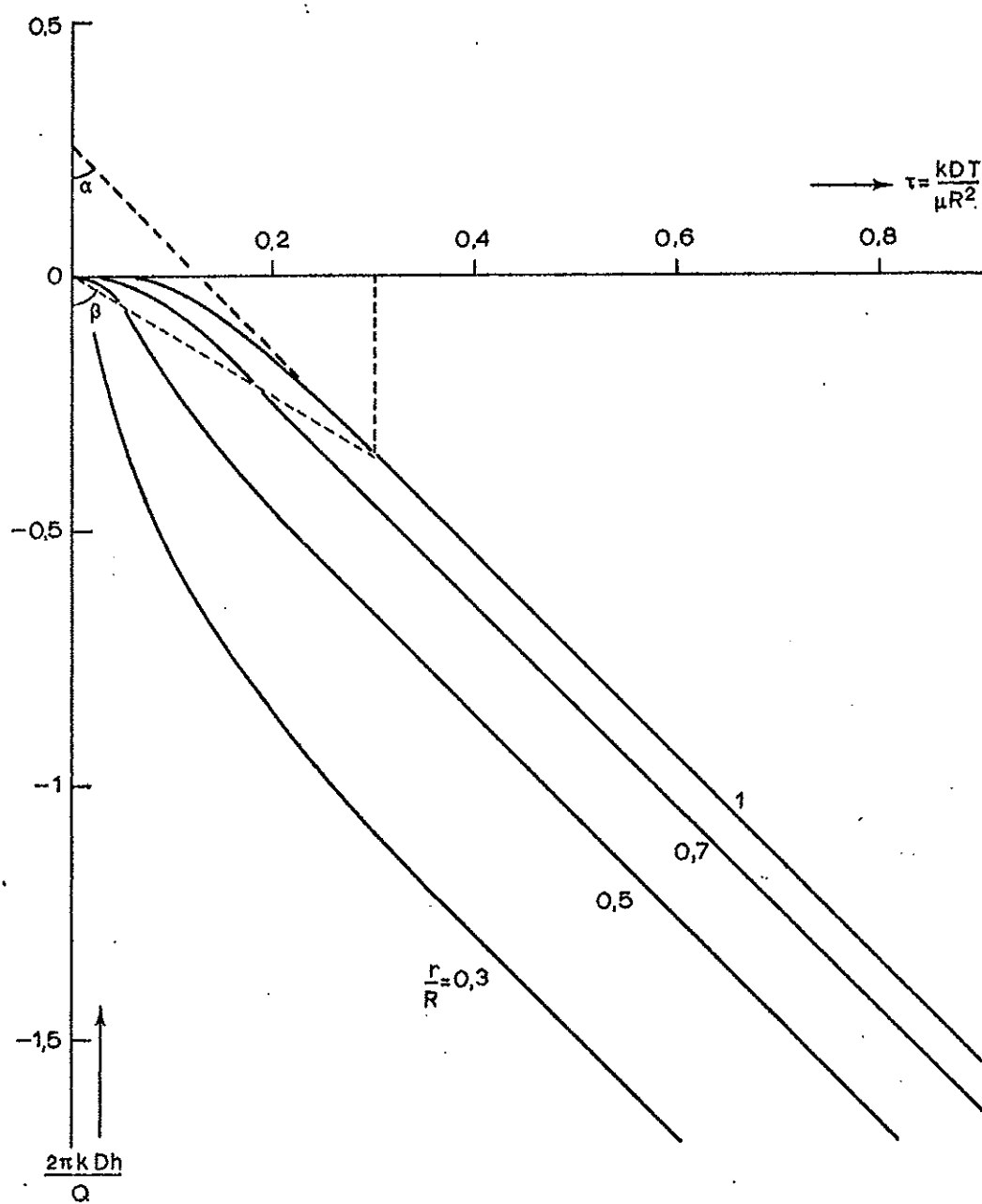
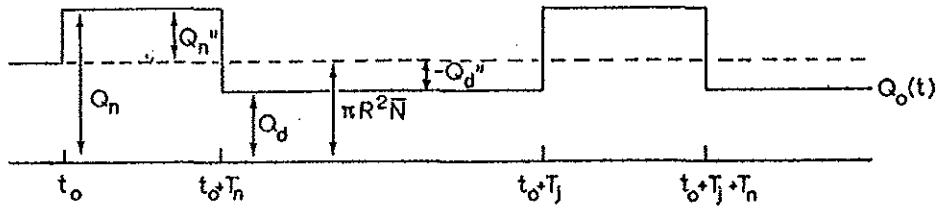
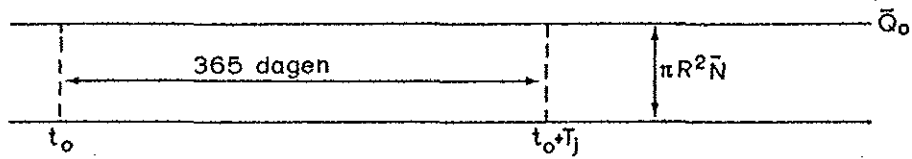


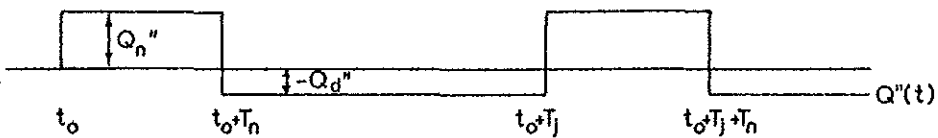
fig.3



1<sup>e</sup>deeloplossing



2<sup>e</sup>deeloplossing



de randvoorwaarde  $Q''(t)$  kan worden vervangen door de som van de volgende randvoorwaarden, waarmee onmiddellijke toepassing van formule (II) mogelijk wordt.

