

NOTA 353, d. d. 15 juni 1967

(gewijzigd)

ALTERRA
Wageningen Universiteit & Research cent
Omgevingswetenschappen
Centrum Water & Klimaat
Team Integraal Water

Wateronttrekking door diepe putten

dr. L. F. Ernst

Nota's van het Instituut zijn in principe interne communicatiemiddelen, dus geen officiële publikaties.

Hun inhoud varieert sterk en kan zowel betrekking hebben op een eenvoudige weergave van cijferreeksen, als op een concluderende discussie van onderzoeksresultaten. In de meeste gevallen zullen de conclusies echter van voorlopige aard zijn omdat het onderzoek nog niet is afgesloten.

Bepaalde nota's komen niet voor verspreiding buiten het Instituut in aanmerking.

1. Inleiding

Bij een berekening van de grondwaterstandsverlaging bij wateronttrekking door diepe putten mag men de algemene hydrologische eigenschappen van het betrokken gebied niet buiten beschouwing laten. Voeding en drainage zijn vrijwel altijd van belang. Het ontbreken van voeding zou uiteindelijk leiden tot een totale uitputting van het gebied hetgeen voor Nederland wel als uitgesloten mag worden beschouwd. Een dergelijke eenvoudige randvoorwaarde leidt echter tot handzame formules, vooral als het gebied oneindig groot en homogeen doorlatend wordt verondersteld. In vele gevallen is dit aanleiding geweest om een dergelijke veronderstelling voor een beperkte tijdsduur aanvaardbaar te achten en dus de bedoelde formules wel te gebruiken maar slechts voor kleine waarden van t .

Een tegenovergesteld geval vindt men waar voeding en drainage zo intensief zijn dat van een constante grondwaterspiegel mag worden gesproken. Veronderstelt men daarbij, dat de samendrukbaarheid van de grond te verwaarlozen is - wat bij een wat langer durende grondwateronttrekking in Nederland altijd het geval is - dan is de toestand stationair of quasi stationair. Veronderstelt men bovendien, dat de grond bestaat uit een slecht doorlatende laag boven een goed doorlatende laag, dan zijn de formules van DE GLEE geldig.

Voor een meer algemene beschouwing van de niet-stationaire toestanden bij wateronttrekking door diepe putten, kan men de volgende indeling gebruiken:

1. Gebieden met weinig drains. Ligging van de putten op grote afstand van deze drains, wat inhoudt dat we hier (voor een beperkte tijd) de boven aangeduide toestand zonder voeding kunnen aannemen (MUSKAT, 1934; THEIS, 1935).
2. Gebieden met veel drains
 - a. Alle drains gelijkwaardig.
 - b. Drains te onderscheiden in primaire, secundaire, tertiaire, enz.

2. Gebieden met weinig drains

Indien er een constante wateronttrekking is, kunnen we de gevraagde oplossing zien als een superpositie van twee deeloplossingen. De eerste deel-

oplossing dient te voldoen aan de oorspronkelijke toestand zonder oppompen van water (in eerste benadering dus een jaarlijks periodieke grondwaterstandsfluctuatie). De tweede deeloplossing moet vervolgens alleen de invloed van het pompen geven, voor grote t dus een sterke uitputting met grote grondwaterstandsdalingen rondom de put of wel een volledige voeding vanuit de al of niet op grote afstand gelegen drains. In het laatste geval, wordt voor grote waarden van t een evenwichtstoestand benaderd, zodat een tweede deeloplossing onafhankelijk van t aanvaardbaar kan zijn. De toelaatbare verwaarlozingen zijn in grootte mede afhankelijk van de nauwkeurigheid waarmee de toekomstige fluctuaties door seizoen- en weersveranderingen kunnen worden voorspeld.

Voor de grondwaterstandsdaling h in een afgesloten cirkelvormig gebied, waarbinnen door een centrale put van kleine diameter een constante hoeveelheid water wordt onttrokken te beginnen met een horizontale toestand op $t = 0$, werd door MUSKAT de volgende oplossing gegeven (zie ook MUSKAT, 1937, p. 630 e.v.):

$$h = \frac{Q}{2\pi kD} \left[\frac{3}{4} + \log \frac{r}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 - \frac{2kDt}{\mu R^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\alpha_n \frac{r}{R} \right) e^{-\alpha_n^2 \frac{kDt}{\mu R^2}}}{\alpha_n^2 J_0^2(\alpha_n)} \right]$$

met Q = debiet van de pompput

kD = geleidend vermogen van het homogene pakket voor horizontale grondwaterstromingen

μ = bergingscoëfficiënt

R = straal van het gebied, waarbinnen de wateronttrekking plaatsvindt

J_p = Bessel-functie van de orde p

α_n volgt uit $J_1(\alpha_n) = 0$ α_1 = eerste pos. wortel α_2 = tweede pos. wortel enz.

Voor grote waarden van t nadert de oneindige reeks tot nul. De vierde term tussen de rechte haken duidt op een eenparig dalende beweging voor deze waarden van t (zie fig. 1). Bovenstaande formule zonder de laatste termen is geldig in het stationaire geval met in het gehele gebied een gelijke voeding.

Voor kleine waarden van t vindt men uit bovenstaande formule dat aan de rand van het gebied nog vrijwel geen daling van h is ontstaan. Dan is de

waarde van R nog van geen invloed en mag men ook de bekende formule gebruiken behorende bij het eenvoudigere geval met $R = \infty$ (THEIS, 1935):

$$h = - \frac{Q}{4\pi kD} \int_{\frac{\mu r^2}{4kDt}}^{\infty} \frac{e^{-w}}{w} dw = (0,5772 + \ln u - u + \frac{u^2}{2 \cdot 2!} - \frac{u^3}{3 \cdot 3!} + \dots) \times \frac{Q}{4\pi kD}$$

$$\text{met } u = \frac{\mu r^2}{4kDt}$$

Vervolgens kan hier nog worden gewezen op het bezwaar, dat in eerstgenoemde formule de grootheid Q niet onafhankelijk kan worden gezien van R. Voert men in ter substitutie: $Q = \pi R^2 P$, zodat onder P dient te worden verstaan de gemiddelde wateronttrekking per tijdseenheid en per oppervlakte-eenheid, dan volgt hieruit:

$$\frac{\mu h}{Pt} = \frac{\mu R^2}{2kDt} \left[\frac{3}{4} + \log \frac{r}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 - \frac{2kDt}{\mu R^2} + 2 \int \dots \right]$$

Hiermee is een betrekking verkregen, welke voor elke $r < R$ de verhouding geeft van de wateronttrekking (μh) op deze cirkel tot de gemiddelde wateronttrekking (Pt) geldig voor het gehele gebied binnen de straal R tot datzelfde tijdstip als functie van de parameters r/R en $kDt/\mu R^2$ (fig. 2).

Een duidelijk beeld van de relatieve verdeling van de wateronttrekking kan worden gegeven door figuur 1 in iets andere vorm te brengen, namelijk met $(r/R)^2$ lineair uitgezet langs de as (zie fig. 3). Bij indeling van het betrokken gebied in een binnen- en een buitengebied gescheiden door een cirkel met straal R_{bi} (dus oppervlakken resp. πR_{bi}^2 en $\pi R^2 - \pi R_{bi}^2$) is hieruit zeer eenvoudig af te leiden tot welke waarden van t de winning grotendeels in het binnengebied gebeurt (zie fig. 4).

3. Gebieden met een groot aantal gelijkwaardige drains

De voorafgaande behandeling kan ook worden toegepast op een gebied met

veel drains namelijk door te veronderstellen, dat in het voorjaar (≈ 1 april, begin van het seizoen waarin gemiddeld de verdamping groter is dan de neerslag) de toestand met $Q \neq 0$ vrijwel niet afwijkt van de oorspronkelijke toestand met $Q = 0$, dat op deze tijd de afvoer naar de drains in hoofdzaak tot stilstand komt en er dus een vrijwel horizontale grondwaterspiegel is welke verder voornamelijk zal dalen door de wateronttrekking uit de diepe put. Met betrekking tot de grondwaterstandverlaging zijn deze veronderstellingen voor een deel te gunstig voor een deel te ongunstig. Op elke tijd en dus ook omstreeks 1 april is er een zekere verlaging van h te verwachten. Gedurende de zomer houdt de drainage door de primaire leidingen (beken) niet op en zelfs mag men de mogelijkheid niet uitsluiten dat voor een deel van de tijd de secundaire drains (grote sloten) nog afvoer geven.

Een betere benadering van dit probleem zou kunnen worden gevonden in de oplossing van de volgende differentiaalvergelijking:

$$kD \left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \right) = \mu \frac{\partial h}{\partial t} + A(h) - N(t)$$

met h = grondwaterstand ten opzichte van een vast niveau, bijvoorbeeld maaiveld, slootpeil, N.A.P.

$A(h)$ = wateronttrekking door drains

$N(t)$ = overtollige neerslag

Zelfs in het geval dat $A(h)$ een lineaire functie van h is, is er geen eenvoudige oplossing bekend. Gesteld immers dat gegeven is $AW = h - h_0$ met een constant slootpeil h_0 , dan zal men er toch mee rekening moeten houden, dat voor zeer lage h er geen drainage is. Voor $h > h_0$ en $h < h_0$ zouden dus twee oplossingen moeten worden gezocht van bovenstaande differentiaalvergelijking respectievelijk met de gegeven lineaire functie voor A en met weglating van A . De term $N(t)$ mag in geen van beide gevallen worden weggelaten, daar mede hiervan afhangt hoe de seizoenwisselingen zijn van de straal r , waarop genoemde twee oplossingen een gemeenschappelijke randvoorwaarde hebben.

Neemt men echter een stationaire toestand aan, met een binnen en een buitengebied gescheiden door een vaste binnenrand R_{bi} , waarop $h = h_0$, dan is wel een eenvoudige oplossing te vinden. Na weglating van de term $\mu \partial h / \partial t$ en vervanging van $N(t)$ door een constante, volgt voor $R_{bi} < r < R$ een oplossing met Besselfuncties I_0 , I_1 , K_0 en K_1 :

$$h = h_o + \bar{N}W \left\{ 1 + \frac{K_1\left(\frac{R}{\sqrt{kDW}}\right) I_o\left(\frac{r}{\sqrt{kDW}}\right) + I_1\left(\frac{R}{\sqrt{kDW}}\right) K_o\left(\frac{r}{\sqrt{kDW}}\right)}{K_1\left(\frac{R}{\sqrt{kDW}}\right) I_o\left(\frac{R_{bi}}{\sqrt{kDW}}\right) + I_1\left(\frac{R}{\sqrt{kDW}}\right) K_o\left(\frac{R_{bi}}{\sqrt{kDW}}\right)} \right\}$$

Evenals tevoren wordt de zogenaamde totale weerstand W gedefinieerd door:

$$h - h_o = AW$$

Voor de opbrengst Q van de put vindt men:

$$\frac{Q}{\bar{N}kDW} = \pi \left(\frac{R_{bi}}{\sqrt{kDW}}\right)^2 + \frac{2\pi R_{bi}}{\sqrt{kDW}} \times \frac{K_1\left(\frac{R}{\sqrt{kDW}}\right) I_1\left(\frac{R_{bi}}{\sqrt{kDW}}\right) + I_1\left(\frac{R}{\sqrt{kDW}}\right) K_1\left(\frac{R_{bi}}{\sqrt{kDW}}\right)}{K_1\left(\frac{R}{\sqrt{kDW}}\right) I_o\left(\frac{R_{bi}}{\sqrt{kDW}}\right) + I_1\left(\frac{R}{\sqrt{kDW}}\right) K_o\left(\frac{R_{bi}}{\sqrt{kDW}}\right)}$$

Oplossing van R_{bi} bij gegeven waarden voor Q en andere parameters is in het algemeen het eenvoudigste te doen door het maken van een grafische voorstelling.

Indien men aanneemt dat voor $h < h_o$ de peilen van het water in de open leidingen constant zullen blijven (h_o) en er van grote afstand een aanvoer van water zal zijn, dat in de omgeving van de pompput door de bodem van de open leidingen zal infiltreren, dan zijn de gegeven formules verder te vereenvoudigen (zie fig. 5).

$$h = h_o + \bar{N}W \left\{ \frac{K_1\left(\frac{R}{\sqrt{kDW}}\right)}{I_1\left(\frac{R}{\sqrt{kDW}}\right)} I_o\left(\frac{r}{\sqrt{kDW}}\right) + K_o\left(\frac{r}{\sqrt{kDW}}\right) \right\}$$

ofwel

$$\frac{h - h_o - \bar{N}W}{PW} = \frac{R^2}{2kDW} \left\{ \frac{K_1\left(\frac{R}{\sqrt{kDW}}\right)}{I_1\left(\frac{R}{\sqrt{kDW}}\right)} I_o\left(\frac{r}{\sqrt{kDW}}\right) + K_o\left(\frac{r}{\sqrt{kDW}}\right) \right\}$$

zomer zeer grote variaties in W. Enkele metingen in de Achterhoek kunnen hiervan een voorbeeld geven. De resultaten en conclusies vindt men in figuur 6 en de volgende tabel.

- 6 -

Wordt hieraan bovendien nog de veronderstelling toegevoegd dat $R = \infty$, dan volgt tenslotte een formule die grote overeenkomst vertoont met een bekende formule welke bij pompproeven dikwijls wordt gebruikt (DE GLEE, 1930):

$$h = h_0 + \frac{Q}{2\pi kD} K_0\left(\frac{r}{\sqrt{kDw}}\right)$$

4. Drainage door ongelijkwaardige leidingen

In zeer droge zomers kan het zo zekere afvoer voorkomen. Voor een groot deel van Nederland is het als een normaal verschijnsel

te beschouwen, dat bij dalende grondwaterstand een toenemend aantal drainageleidingen droog komt te staan. De kleinste leidingen (drainbuizen, greppels) zijn het grootst in aantal (beter gezegd in lengte per oppervlakte-eenheid), het hoogste gelegen en daardoor het eerst droogvallend. De grootste leidingen (rivieren, beken) liggen in het algemeen het laagste, waardoor zelfs in zeer droge zomers meestal nog een zekere afvoer doorgaat.

Hoewel bij de behandeling van drainage problemen in het algemeen een zekere indeling, bijvoorbeeld in primaire, secundaire, tertiaire leidingen enz. wel nuttig zou kunnen zijn, is aan inventarisatie en classificatie tot nu toe nog slechts weinig aandacht gegeven. Hoe dit ook zijn mag, het is in ieder geval wel duidelijk dat onder bedoelde omstandigheden van een constante weerstand W geen sprake kan zijn.

Op de middelhoge zandgronden van Nederland vindt men van winter tot zomer zeer grote variaties in W. Enkele metingen in de Achterhoek kunnen hiervan een voorbeeld geven. De resultaten en conclusies vindt men in figuur 6 en de volgende tabel.

Toestand	Grondwaterstand onder maaiveld h	Slootpeil onder maaiveld h ₀	Opbolling Δh	Drainafstand L	Radiale weerstand w	$W = \frac{L^2}{8kD} + Lw$	Afvoer A
1	~ 15 cm	~ 55 cm	40 cm	150 m	1 dg/m	150 dagen	2,7 mm/dag
2	~ 40 cm	~ 65 cm	25 cm	250 m	0,8 dg/m	200 dagen	1,25 mm/dag
3	~ 110 cm	~ 130 cm	20 cm	1250 m	0,4 dg/m	570 dagen	0,35 mm/dag
4	~ 160 cm	~ 220 cm	60 cm	7000 m	0,2 dg/m	3400 dagen	0,18 mm/dag

$kD = 3000 \text{ m}^2/\text{dag}$. Waarden voor w in grootte-orde overgenomen uit onderzoek Lollebeekgebied en Boven-Dommelgebied

Voor algemene oriëntatie kan hieraan worden toegevoegd, dat bij drainage door buizen gelegd op 1 meter onder maaiveld met een drainafstand overeenkomstig de gebruikelijke drainage-criteria (BOUWMANS, 1953) een waarde van W tussen 70 en 100 dagen bij de voorgestelde grondwaterstand kan worden verwacht. Voor de hoge zandgronden in zuidelijk Nederland, waar buiten de grote beken weinig open leidingen zijn, zijn veel hogere waarden te verwachten ($W \sim 2000$ dagen), zoals kon worden afgeleid uit grondwaterstandsmetingen en de in grootte-orde bekende gemiddelde jaarlijkse afvoer (ERNST, 1958; zie ook Boven-Dommel-rapport).

De uitkomsten in bovenstaande tabel geven ondersteuning aan wat reeds op grond van vrijwel uitsluitend theoretische beschouwingen kon worden aangetoond. Of men er de voorkeur aan geeft het grafische verband tussen A en h als een gebroken rechte lijn voor te stellen (ERNST, 1956; BLOEMEN, 1966) of als een vloeiende kromme (fig. 7) kan zowel afhangen van de hydrologische terreingesteldheid als van de wenselijkheid zekere rekentechnieken toe te passen. Hoewel plotselinge overgangen, zoals in het eerste geval gesuggereerd, weinig waarschijnlijk lijken, is er nog te weinig omtrent de terreingesteldheid bekend om hier reeds verregaande uitspraken te doen.

In het algemeen zal men dus de ondergrondse afvoer willen voorstellen als een functie afhankelijk zowel van h als van h_0 . Verder heeft men de mogelijkheid de bergingsverandering in gevallen met onafhankelijke h en h_0 voor te stellen door een uitdrukking waarin zowel h als h_0 voorkomen, i.c. $\mu\{\alpha \frac{dh}{dt} + (1 - \alpha) \frac{dh_0}{dt}\}$ waarin α een coëfficiënt is gelegen tussen $2/3$ en 1 afhankelijk van de meest voorkomende vorm van opbolling van grondwater-spiegel. De tevoren gegeven differentiaalvergelijking kan daarom in de volgende vorm worden geschreven:

$$kD\left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r}\right) = \mu\left\{\alpha \frac{\partial h}{\partial t} + (1 - \alpha) \frac{\partial h_0}{\partial t}\right\} + \frac{h - h_0}{W(h_0)} - N(t)$$

Het is duidelijk dat deze differentiaalvergelijking geen eenduidige periodieke oplossing heeft, indien aan het slootpeil geen specifieke voorwaarden worden gesteld. Hierbij kunnen twee vrij sterk verschillende gevallen worden onderscheiden, namelijk geval (a) met een gegeven functie $h_0(t)$ en geval (b) met een gegeven functie $h_0(h)$.

Geval (a) kan vooral toepassing vinden bij de lage zandgronden waar een relatief dicht net van sloten met weinig verhang een goede uitwisseling van

het open water mogelijk maakt. Dit geldt echter slechts voor zover het aantal wateronttrekkingspunten en de intensiteit van de wateronttrekking niet een belangrijke daling van grondwaterstanden en afvoeren over een zeer groot gebied zullen veroorzaken. Een gegeven functie $h_0(t)$ houdt immers in dat het buitengebied voldoende water kan leveren om de slootpeilen in het binnengebied onveranderd te laten. In die gevallen dat in een laag zandgebied door een relatief dicht net van putten een belangrijk deel van de overtollige neerslag wordt weggepompt, is het beter eenzelfde behandeling als voor geval (b) toe te passen.

Voor de middel hoge zandgronden zal ook bij een zwakke tot matige wateronttrekking een beïnvloeding van de slootpeilen te verwachten zijn. Daar de uitwisseling van water door open leidingen in het algemeen moeilijk te behandelen is, wordt dit geval verder buiten beschouwing gelaten. Voor de sterke onttrekkingen geldt hetzelfde als te voren.

Voor de hoge zandgronden mag wel worden aangenomen, dat bij een daling van de grondwaterstand door wateronttrekking aan diepe putten het slootpeil overeenkomstig het ongestoorde geval zal veranderen daar de sloten eerder zullen leeglopen. Wordt daarom aangenomen, dat de relatie tussen h en h_0 niet verandert, dan is de laatste term van bovenstaande differentiaalvergelijking te beschouwen als uitsluitend een functie van h . Dit houdt in, dat de algemene vorm van de differentiaalvergelijking zoals gegeven in hoofdstuk 3 opnieuw kan worden gebruikt.

Bij geval (b) nog meer dan bij (a) ziet men duidelijk dat de voorgestelde oplossing, die in principe slechts een benadering is, onder bepaalde omstandigheden mogelijk van onvoldoende nauwkeurigheid zou kunnen zijn. De betrekking $A(h)$ is afgeleid zonder een onttrekking van water door diepe putten in aanmerking te nemen. Bij afwijkende grondwaterspiegelvormen is de geldigheid dus niet verzekerd. Dit geldt in het bijzonder voor de directe omgeving van een waterwinning geplaatst in wat hogere gronden, daar dit tot gevolg kan hebben dat de sloten aldaar voortdurend droog staan. Uit de nieuwe trechtervormige grondwaterspiegel volgt onmiddellijk, dat daar dus geldt $A = 0$, terwijl men bijvoorbeeld voor het geval afgebeeld in figuur 6 uit de bijbehorende figuur 7 kan afleiden dat hiervoor minstens een grondwaterstandsdaaling tot 2,5 m onder maaiveld (dus lager dan het platte vlak door de rivierbodems) nodig zou zijn. Voor gevallen met uitsluitend primaire waterlopen behoeft het geen toelichting, dat daarbij gebruik van een betrekking $A(h)$ vrijwel geen zin heeft.

Aan genoemd bezwaar is te ontkomen door het binnengebied een afzonderlijke behandeling te geven (verg. hoofdst. 3), uitgaande van de veronderstelling, dat er een cirkelvormig gebied zonder waterhoudende sloten kan worden aangegeven, waarbinnen de overtollige neerslag volledig ondergronds afstroomt naar de put. Een eenvoudigere bewerking, waarbij dit effect wordt verwaarloosd, blijkt echter onder bepaalde voorwaarden toch wel houdbaar, zoals wordt aangetoond met de kleine verschillen in het voorbeeld, dat in volgend hoofdstuk wordt gegeven.

5. Hoge zandgronden

Voor zover de onderhavige differentiaalvergelijkingen een niet-lineaire relatie $A(h)$ bevatten, zijn geen eenvoudige oplossingen te verwachten. Dit geldt zelfs in het geval dat de wateronttrekking uit putten buiten beschouwing wordt gelaten ($Q = 0$), hoewel de onderhavige differentiaalvergelijking dan tot een zeer eenvoudige vorm kan worden herleid:

$$\mu \left\{ \alpha \frac{dh}{dt} + (1 - \alpha) \frac{dh_0}{dt} \right\} = N(t) - \frac{h - h_0}{W(h_0)}$$

Gezien de verschillende benaderingen in het vorig hoofdstuk genoemd en wegens het aangenomen verband tussen h en h_0 , heeft het nauwelijks zin een weinig van 1 afwijkende coëfficiënt bij $\mu \frac{dh}{dt}$ te handhaven. Men kan beter direct tot een nog sterkere vereenvoudiging overgaan:

$$\mu \frac{dh}{dt} = N(t) - A(h)$$

Door deze vergelijking als een differentievergelijking te schrijven komt men snel en zonder moeite tot een uitkomst. Voor het geval, dat $N = \bar{N} + N_a \cos 2\pi t/T$ met $\bar{N} = 0,6$ mm/dag, $N_a = 1,2$ mm/dag, $T = 360$ dagen, $\mu = 0,1$ en $A(h)$ als in figuur 7 (zie kromme I-I), is met behulp van laatstgenoemde methode de periodieke oplossing gevonden, welke staat afgebeeld in figuur 8. Hieruit kan men onmiddellijk afleiden de combinatie van jaargemiddelden $\bar{A}$ en $\bar{h}$, welke voor $Q = 0$ bij elkaar behoren (zie driehoekje in fig. 7). Uit het gegeven volgt onmiddellijk $\bar{A} = \bar{N} = 0,6$ mm/dag. In figuur 8 kan men aflezen: $\bar{h} = -99$ cm.

Voor positieve waarden van Q zal men in elk punt andere, lagere waarden voor $\bar{h}$ krijgen. Veronderstelt men echter dat daarbij dat de fluctuatie om dit gemiddelde niet verandert, dan kan de betrokken differentiaalvergelijking worden teruggebracht tot de volgende vorm, daar de aangenomen fluctuatie het tijdsafhankelijke deel volledig bevat en achteraf kan worden toegevoegd aan een eerste deeloplossing te verkrijgen uit de volgende differentiaalvergelijking met als randvoorwaarden een gegeven stroomsterkte voor zeer kleine r en een gegeven stijghoogte voor zeer grote r .

$$KD\left(\frac{d^2\bar{h}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{h}}{dr}\right) = \bar{A}(\bar{h}) - \bar{N}$$

Hoe $\bar{A}$ van $\bar{h}$ afhangt bij bovengenoemde veronderstelling, kan eenvoudig uit de figuren 7 en 8 worden afgeleid. Wordt aan de kromme in figuur 8 door evenwijdige verschuiving een ander gemiddeld niveau gegeven, dan kan in de bovenste kromme van figuur 7 punt voor punt de bijbehorende waarde van A worden opgezocht en daaruit volgt dan voor dat geval onmiddellijk de waarde van $\bar{A}$. Na enkele herhalingen verkrijgt men zo een redelijke benadering van de betrekking $\bar{A}(\bar{h})$, welke mogelijk alleen niet aanvaardbaar is in de omgeving van de pompput. Voor laatstgenoemd geval kan de berekening worden herhaald met gebruik van de kromme I-II uit figuur 7.

De veronderstelling, dat de fluctuatie van h niet of niet noemenswaardig verandert kan worden ondersteund door de berekening van het periodieke verloop van h voor verschillende randvoorwaarden te herhalen. De vier voorbeelden in figuur 8 gegeven tonen slechts zeer geringe afwijkingen van de ingevoerde sinusoidale vorm en geen grote verschillen in de amplitude h_a .

Afhankelijk van de gemiddelde grondwaterstandsdiepte kunnen zekere verschillen in de bergingscoëfficiënt μ worden verwacht, waarmee hier geen rekening is gehouden. Bij lage grondwaterstanden behoort een wat grotere bergingscoëfficiënt en bovendien over de zomermaanden een wat kleiner waterverbruik door de planten, dus een wat kleinere waarde voor N_a . Hieruit volgt, dat indien de opgegeven waarden voor μ en N_a goed zijn voor de dik getrokken kromme in figuur 8, de onderste twee krommen naar verhouding te grote fluctuaties tonen. Zolang men niet over meer gegevens beschikt met betrekking tot de bergingscoëfficiënt en het waterverbruik, zal men de kleine onzekerheid op dit punt moeten laten bestaan.

De bovenste kromme van figuur 8 toont de kleinste waarde voor de amplitude a_h . Voor dit geval kan echter worden opgemerkt dat hierbij een beïnvloeding van het slootpeil (opstuwing) wordt verondersteld welke een zekere tegenspraak geeft met de reeds eerder voor de hoge zandgronden gemaakte veronderstelling, dat het buitengebied geen invloed heeft op het slootpeil. De conclusie dat de grondwaterstandsfluctuatie kleiner zal zijn, naarmate het slootpeil in de zomer hoger is, behoeft geen nadere toelichting.

Hoewel deze opmerkingen doen vermoeden, dat het gebruik van een constante h_a bij vrije afvoer voor de hoge zandgronden slechts kleine fouten zal geven, is hiermee nog geen volledig bewijs gegeven voor de toelaatbaarheid van de voorgestelde rekenmethode, daar gebruik is gemaakt van enkele bijzondere gegevens, namelijk het verband tussen A en h voor stationaire toestanden volgens figuur 7 en $M = \bar{M} + N_a \sin 2\pi t/T$.

Wordt van deze onvolkomenheden verder afgezien, dan blijft als belangrijkste probleem dus over de oplossing van laatstgenoemde differentiaalvergelijking. Ook in dit geval kan men bij willekeurige $\bar{A}(\bar{h})$ de differentiemethode weer toepassen. De resultaten zullen dan in grafische voorstellingen moeten worden vastgelegd. Indien men bij een kwadratische formule in het rechterlid bovendien veronderstelt dat $R = \infty$, dan kan met 1 grafiek worden volstaan (zie fig. 9 waarbij $A(h) = (h - h_{oo})^2/aT$).

Indien men echter $\bar{A}(\bar{h})$ bij benadering door een lineaire functie vervangt (zie bijv. kromme tussen Δ en $\times$ in fig. 7), dan kan men vervolgens weer de laatste drie formules uit hoofdstuk 3 toepassen. Bij de uiteenzettingen in hoofdstuk 3 werd verondersteld dat er een vrij grote dichtheid van het net van open leidingen bestaat en daarbij behoren betrekkelijk kleine waarden van W . Voor de hoge zandgronden moeten echter veel grotere waarden van W worden verwacht. Zo vindt men bijvoorbeeld uit het laagste deel van de kromme voor $\bar{A}(\bar{h})$ in figuur 7 als uitkomst: $W = \Delta \bar{h} / \Delta \bar{A} \approx 1500$ tot 3000 dagen. In figuur 10 wordt met een voorbeeld aangetoond, dat mits de verschillen in $A(h)$ maar niet te groot zijn, ook de grondwaterstandsveranderingen volgens de voorgestelde berekeningen betrekkelijk weinig uiteenlopen. Een kleine onzekerheid in $A(h)$ zal dus niet in belangrijke mate doorwerken in de uitkomsten. Voor de gevallen 1 en 3 van figuur 10 is voor het gehele gebied, respectievelijk voor het grootste deel daarvan ($r > 125$ m) gebruik gemaakt van de laatste formule van hoofdstuk 3 waarin de bekende Bessel-functie $K_0(r/\sqrt{kDW})$ voorkomt. Verwacht mag worden, dat deze formule voor de hoge zand-

gronden een nuttig hulpmiddel kan zijn voor een eenvoudige redelijk betrouwbare berekening van de grondwaterstands dalingen.

6. Lage zandgronden

Zoals in hoofdstuk 4 reeds uiteengezet kan men bij de lage zandgronden (geval a) veronderstellen dat voor het slootpeil en daardoor ook voor de weerstand W zekere functies van t worden gegeven. Evenals in hoofdstuk 5 kan hier een oplossing worden gevonden door de gezochte periodieke functie $h(r, t)$ te splitsen in twee delen en wel in dit geval zodanig dat het ene deel $h'(t)$ geheel overeenkomt met de ongestoorde toestand ($Q = 0$) en dus het andere deel $h''(r, t)$ de verandering moet geven ten opzichte van de oorspronkelijke toestand. Dit leidt tot twee nieuwe differentiaalvergelijkingen, waarvan alleen de laatste van belang is.

$$\mu \left\{ \alpha \frac{dh'}{dt} + (1 - \alpha) \frac{dh_o}{dt} \right\} = N(t) - \frac{h'(t) - h_o(t)}{W(t)}$$

$$kD \left(\frac{\partial^2 h''}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h''}{\partial r} \right) = \mu \alpha \frac{\partial h''}{\partial t} + \frac{h''(r, t)}{W(t)}$$

In tegenstelling met het vorige geval komt men hier uit op een wat moeilijkere partiële differentiaalvergelijking. Daar uit de oplossing voor zeer kleine r de gegeven stroomsterkte Q moet volgen en voor zeer grote r geen verandering, zijn de nodige randvoorwaarden onmiddellijk te geven:

$$r \rightarrow 0 \quad 2\pi r k D \frac{\partial h''}{\partial r} = Q$$

$$r \rightarrow \infty \quad h'' = 0$$

Voor zeer grote r kan er geen toestroming van enig belang naar de put zijn, hetgeen inhoudt dat aldaar bovendien nog een extra betrekking kan worden gegeven.

$$r \rightarrow \infty \quad r \frac{\partial h''}{\partial r} = 0$$

De functie $h_o(t)$ behoeft bij de laatste differentiaalvergelijking niet expliciet te worden gegeven. In de functie $W(t)$ is de invloed van $h_o(t)$ impliciet aanwezig. Voor de numerieke behandeling van de laatste differentiaalvergelijking is invoering van de volgende benadering wel geschikt ($t = 0$, dat wil zeggen maximum grondwaterstand, maximum slootpeil en minimum waarde van W vallen aan het begin van het jaar, zie fig. 8):

$$\frac{1}{W(t)} = a + b \cos \frac{2\pi t}{T}$$

Het aantal parameters, dat moet worden bepaald, wil men tot een expliciete uitkomst komen, blijft hierdoor nog zeer beperkt. Voor Q behoeft niet onmiddellijk een waarde te worden opgegeven, daar Q en h'' evenredig zijn.

Daar echter bij de betrokken differentiaalvergelijking toch geen eenvoudige oplossing kan worden gevonden, werd volstaan met een enkel voorbeeld numeriek uit te rekenen. Daarbij werden de volgende waarden voor de parameters aangenomen. Voor een groot gedeelte van de Achterhoek, op welk gebied ook figuur 6 betrekking heeft, zijn deze waarden wel aanvaardbaar.

$$kD = 2500 \text{ m}^2/\text{dag}$$

$$\alpha\mu = 0,1$$

$$T = 360 \text{ dagen}$$

Voor een bepaling van a en b stonden vrijwel geen gegevens ter beschikking. Na vergelijking met de gegevens vermeld in de tabel op pagina 6, hoewel deze gegevens op een wat hoger zandgebied betrekking hebben, leek het niet onredelijk de uitdrukking voor W(t) als volgt te schrijven:

$$\frac{1}{W(t)} = \frac{1}{W(\max)} (4 + 3 \cos \frac{2\pi t}{T})$$

waarbij W(max) = 1250 dagen. De minimum waarde van W(t) komt dus op 180 dagen.

De uitkomsten ^{van een wateronttrekking van $5 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{jaar}$} zijn weergegeven in figuur 11. Daaruit blijkt een relatief kleine grondwaterstandsaling veroorzaakt vooral door de relatief lage waarden voor W, maar daarbij relatief grote seizoenfluctuaties veroorzaakt door het opgelegde slootpeil. Terwijl de gegeven periodieke functie voor 1/W enkelvoudig harmonisch is, wijken de uitkomsten voor $h_x(t)$ nogal sterk af van een sinusvorm (zie fig. 11 voor x = 50 m, 225 m en 1000 m)

7. Vermindering van grondwaterstandsaling door opstuwing van sloten

Indien een opstuwing van sloten ter vermindering van de grondwaterstandsaling zal worden toegepast dan vermoedelijk alleen in de zomer. Het is ech-

ter de vraag of een belangrijke opstuwing wel praktisch aanvaardbaar is. Hierbij zal men immers willen rekening houden met de moeilijkheden van het terreinrelief met het huidige waterlopendetracé, met de beschikbare hoeveelheid water, met de kansen op wateroverlast in geval van opstuwing aan het begin van een natte zomer en in het algemeen met de kosten van betrekkelijk verregaande ingrepen tegenover mogelijke opbrengstverhogingen. Hierop wordt niet nader ingegaan. Gezien de mogelijke bezwaren is bij de volgende berekeningen een beperkte ingreep verondersteld, namelijk een zwakke kunstmatige invoer van water in het betrokken gebied en plaatsing van een klein aantal stuwtjes zodanig dat het slootpeil gemiddeld genomen gelijk blijft aan de voorjaarstoestand.

Het effect van beide ingrepen - het gebruik van de putten en de beheersing van het peil van de sloten - kan het beste worden onderzocht door een en ander afzonderlijk te berekenen. Het lijkt een redelijke en goed hanteerbare veronderstelling de bovenste kromme uit figuur 7 opnieuw te gebruiken boven een zekere nader te bepalen grondwaterstand. Beneden die grondwaterstand kan een constant slootpeil worden aangenomen. De streeplijn in figuur 7 geeft hiervan een voorbeeld: bij grondwaterstanden dieper dan - 100 cm het slootpeil constant op - 120 cm. Door opnieuw de differentie-methode toe te passen werd hierbij de gestreepte kromme afgebeeld in figuur 8 gevonden. Deze figuur toont vanaf het midden van de zomer een vrij belangrijk verschil met de oorspronkelijke toestand: in augustus een 20 cm hogere grondwaterstand in september zelfs 30 cm hoger.

Hoewel volgens dit voorbeeld toch maar een betrekkelijk klein aantal sloten met water gevuld zal blijven (zie tabel en fig. 6) is de invloed ervan dus niet te verwaarlozen. Ook de gemiddelde waarde van W zal aanzienlijk veranderen. De zeer lage waarden welke in de tabel voorkomen, gelden voor toestanden met meer of minder wateroverlast, wat voor een toekomstige toestand niet als kenmerkend is te beschouwen. De tabel toont dat bij een dergelijke matige opstuwing een tussengelegen waarde als het meest aannemelijk is te beschouwen: $W \approx 500$ dagen. Deze waarde is ook in overeenstemming met de gecorrigeerde kromme voor $\bar{A}(\bar{h})$ in figuur 7.

In de figuren 12 en 13 zijn respectievelijk weergegeven de relatieve wateronttrekking en de grondwaterstands daling veroorzaakt door een wateronttrekking van $10^6 \text{ m}^3/\text{jaar}$ bij twee verschillende waarden van W . De lage waarde van $W=500$ dagen is in grootte-orde geldig te beschouwen voor gevallen met opstuwings. De hoge waarde van $W=3000$ dagen komt in grootte-orde overeen met wat in het vorige hoofdstuk werd opgegeven voor de hoge zandgronden. Door optelling van de resultaten getoond in de bovenste krommen van de fig. 8 en 13 vindt men dat onder de gegeven omstandigheden inhoudende een matige opstuwings en een matige wateronttrekking er slechts geringe grondwaterstandsveranderingen te verwachten zijn: over de eerste helft van het jaar een kleine verlaging, over de tweede helft van het jaar een kleine verhoging.

8. Conclusie

De gemiddelde grondwaterstands daling en de verandering in de seizoensfluctuaties bij oppompen van water uit diepe putten zijn afhankelijk van de algemene ontwateringstoestand. Voor de lage zandgronden zal men veel kleinere dalingen en een beter herstel in de winter moeten verwachten. Een volledig herstel (het z.g. volregenen van een gebied door de winterregens) is uit de gegeven beschouwingen niet als een gemiddeld te verwachten verschijnsel gebleken, behalve waar het gaat om vlakke poldergebieden, welke in deze nota niet uitdrukkelijk in beschouwing zijn genomen.

De termen hoge en lage zandgronden zijn hier in hydrologische zin gebruikt en men mag er dus niet de gebruikelijke algemeen landbouwkundige betekenis aanhechten. Met hoge zandgronden zijn die gebieden bedoeld, waar het slootpeil vooral van de grondwaterstand afhangt en dus ook in sterke mate kan worden beïnvloed door het oppompen van diep grondwater. Onder lage zandgronden worden die gebieden verstaan, waar de seizoensfluctuaties van het slootpeil wegens de uitwisseling met het buitengebied bij geringe wateronttrekkingen weinig invloed zullen ondervinden. Bij een sterke afpompings van grote gebieden zal genoemde uitwisseling echter ophouden. In dergelijke gevallen is ook op de lage zandgronden een belangrijke beïnvloeding zowel van slootpeil als grondwaterstand te verwachten en kan evenals bij de hoge zandgronden de laatste formule van hoofdstuk 3 worden gebruikt.

Wegens de benaderende veronderstellingen welke bij de afleiding van alle behandelde formules werden gebruikt, verdient het aanbeveling de theorie te toetsen aan metingen in de praktijk. Het ligt voor de hand allereerst

gebruik te maken van reeds beschikbare grondwaterstandsmetingen in de omgeving van geschikte pompstations. Men zal daarbij wel acht moeten geven op de gelijkmatigheid van wateronttrekking en bodemgesteldheid en of de op trekking aan een freatisch dan wel een arterisch grondwaterreservoir gebeurt.

Daarmee zal dan mogelijk ook een beter antwoord kunnen worden gegeven op de vraag of deze rekenmodellen in de praktijk veel verschil uitmaken en onder welke omstandigheden e.q. in welke gebieden in deze een sterke voorkeur kan worden uitgesproken.

Literatuur

BLOEMEN, G.W. Afvoeronderzoek met behulp van grondwaterstandsgegevens.

I.C.W.-nota 333, 1 maart 1966.

BOUMANS, J.H. Het bepalen van de drainage-afstand met behulp van de boorgaten-methode.

Landbouwkundig Tijdschrift 65, 1953, 82 - 104.

ERNST, L.F. Calculation of the steady flow of groundwater in vertical cross sections.

Neth. J. Agr. Sci. 4, 1956, 126 - 131.

_____ Onderzoek van grondwaterstromingen in het Lollebeekgebied.

Instituut voor Cultuurtechniek en Waterhuishouding. Meded. 4, 1958.

GLEE, G.J. DE. Over grondwaterstromingen bij waterontrekking door middel van putten.

Proefschrift Delft, 1930.

MUSKAT, M. The flow of compressible fluids through porous media and some problems in heat conduction.

Physies, 5, 1934, 71 - 94.

_____ The flow of homogeneous fluids through porous media. Mc Graw - Hill Book Co. New York, 1937.

THEIS, C.V. The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using groundwater storage. Trans. Amer. Geoph. Un. 16, 1935, 519 - 524.

Fig. 1

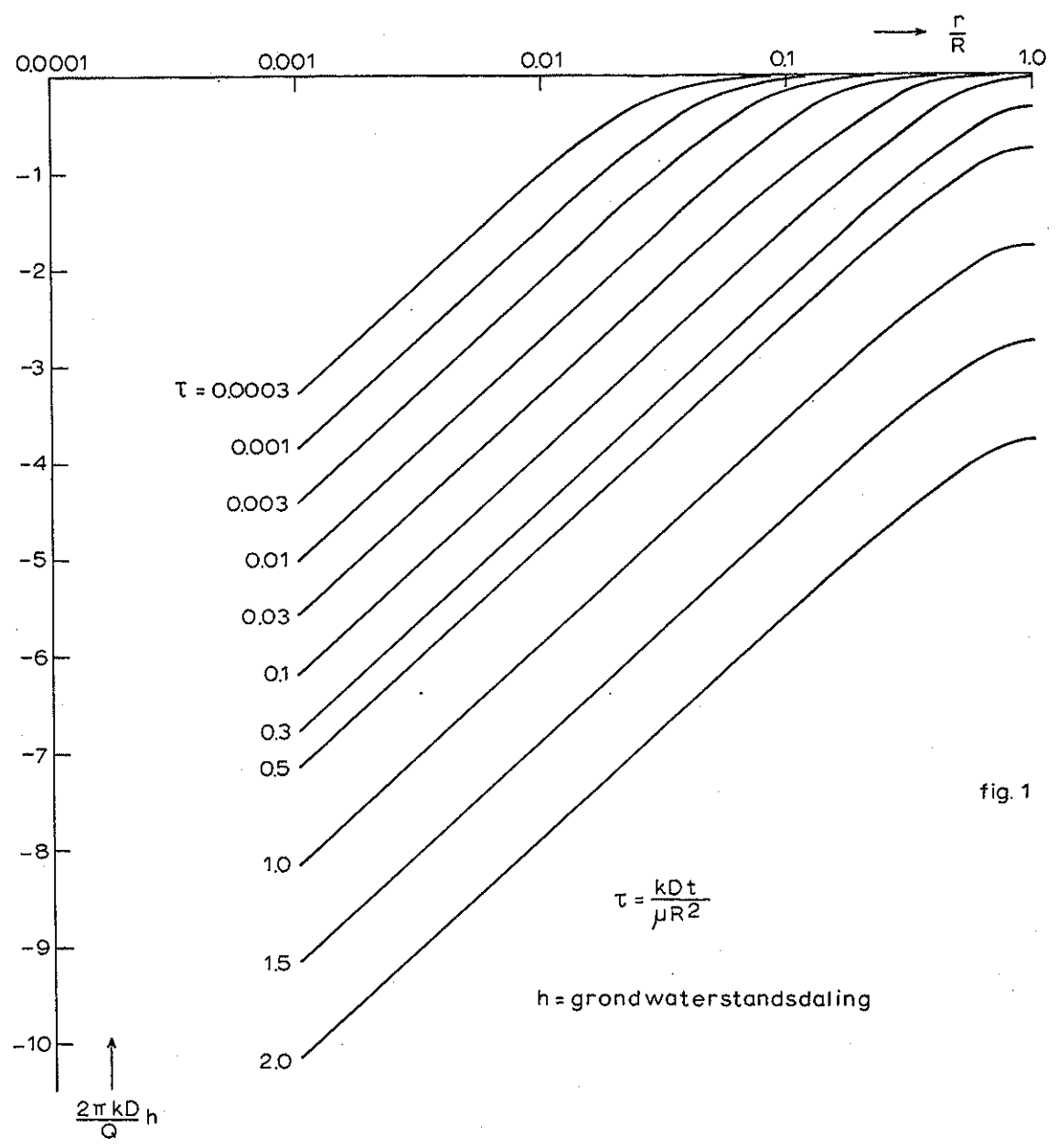


fig. 1

fig. 2

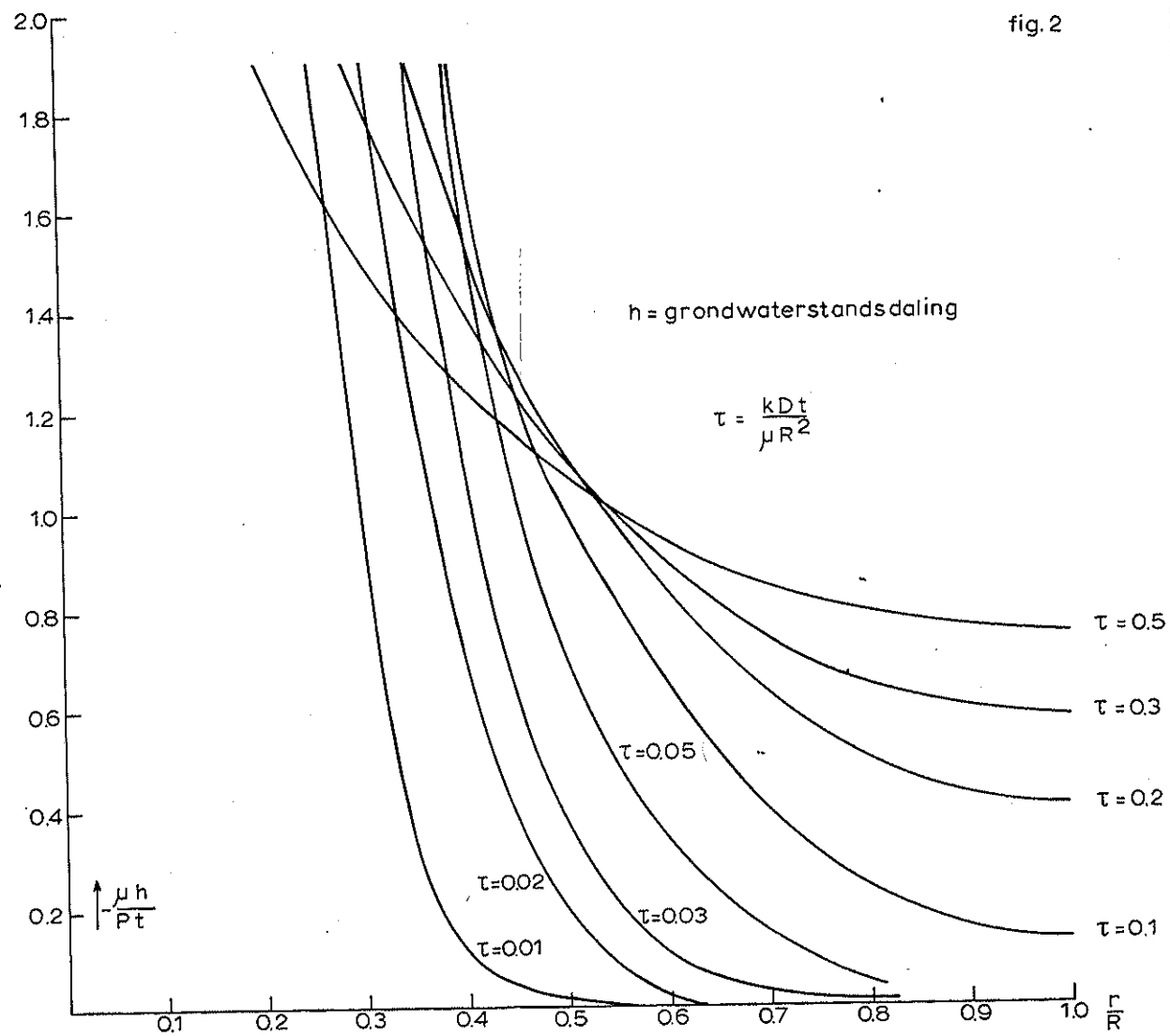


fig. 3

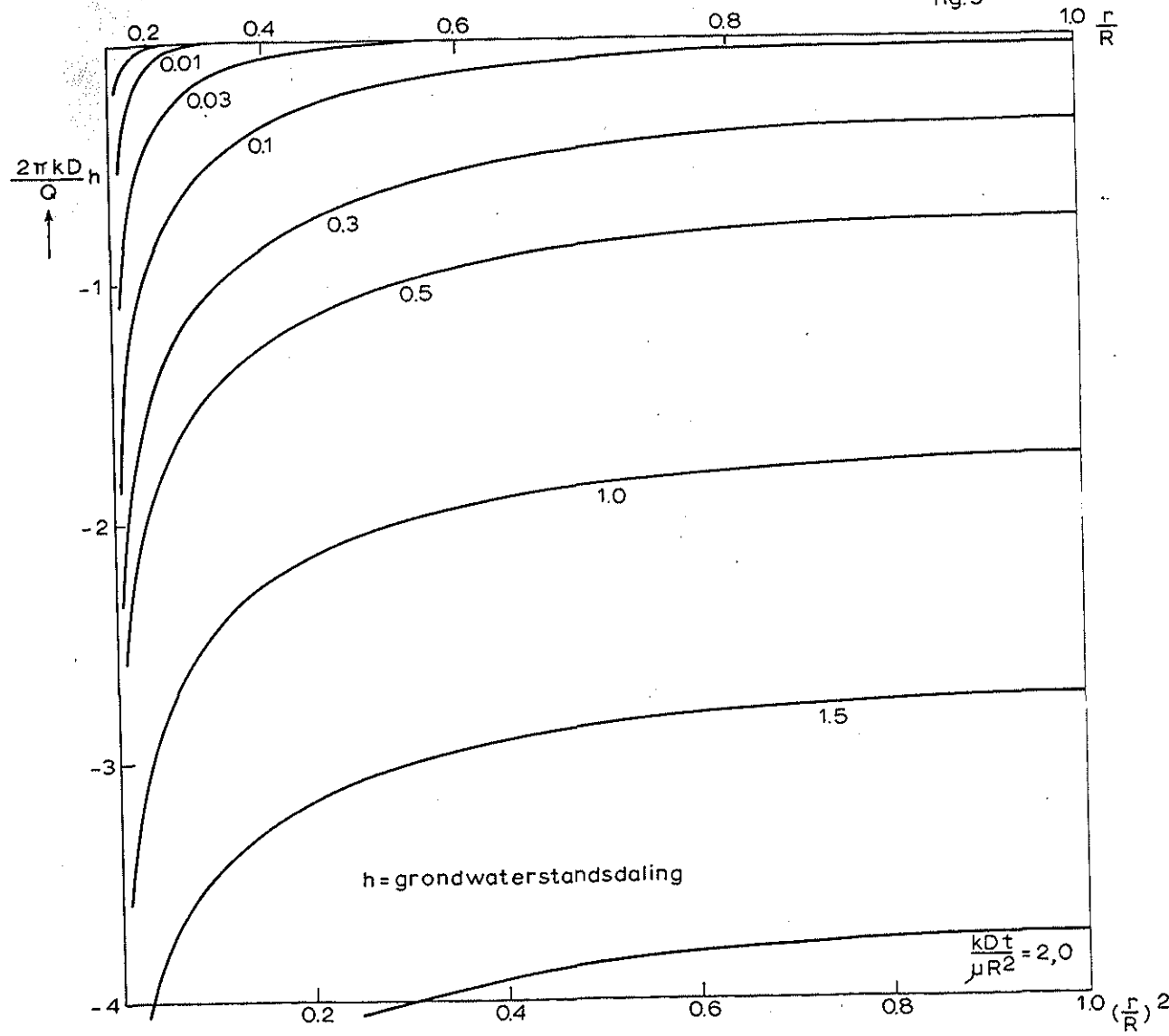


fig. 3

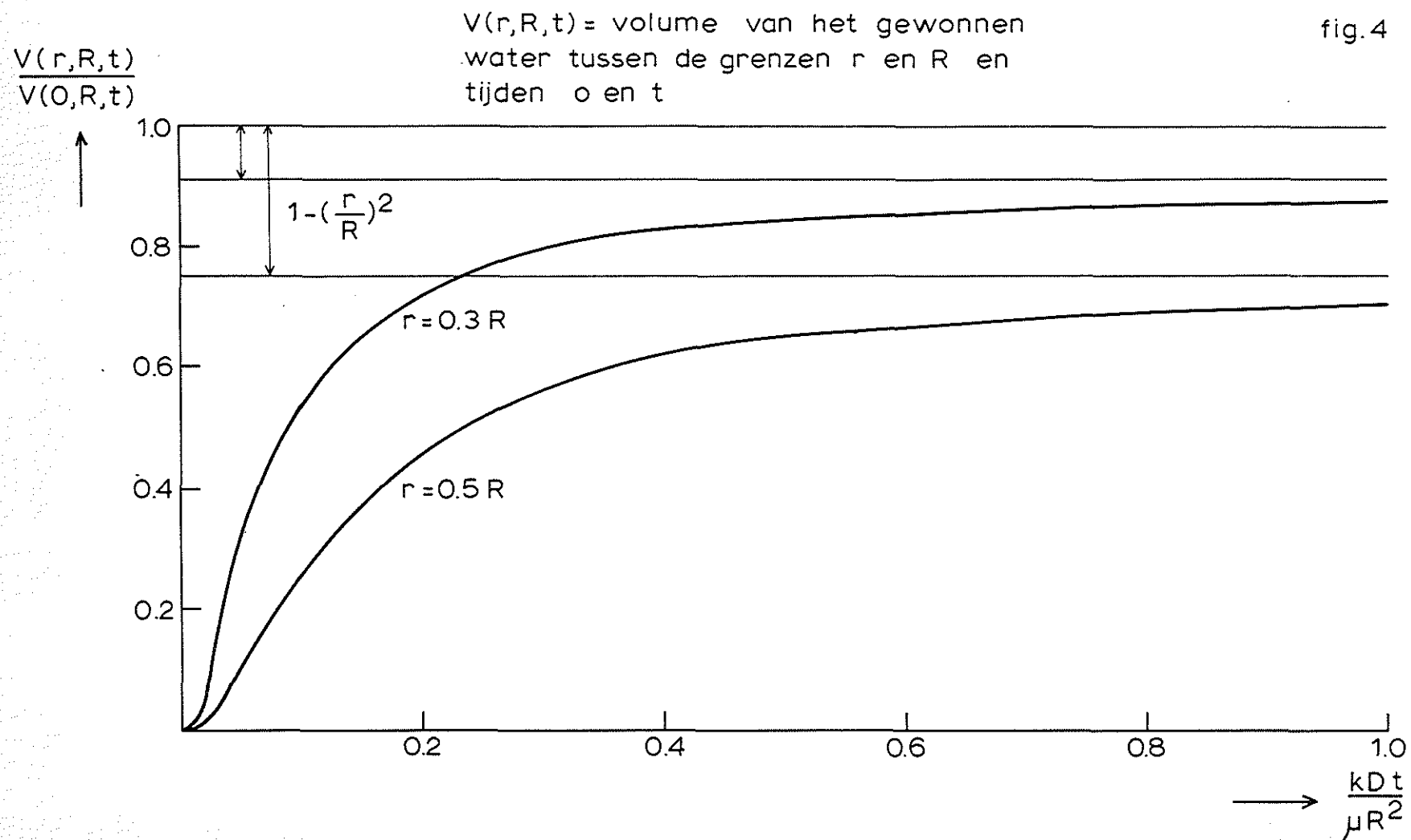


fig 5a

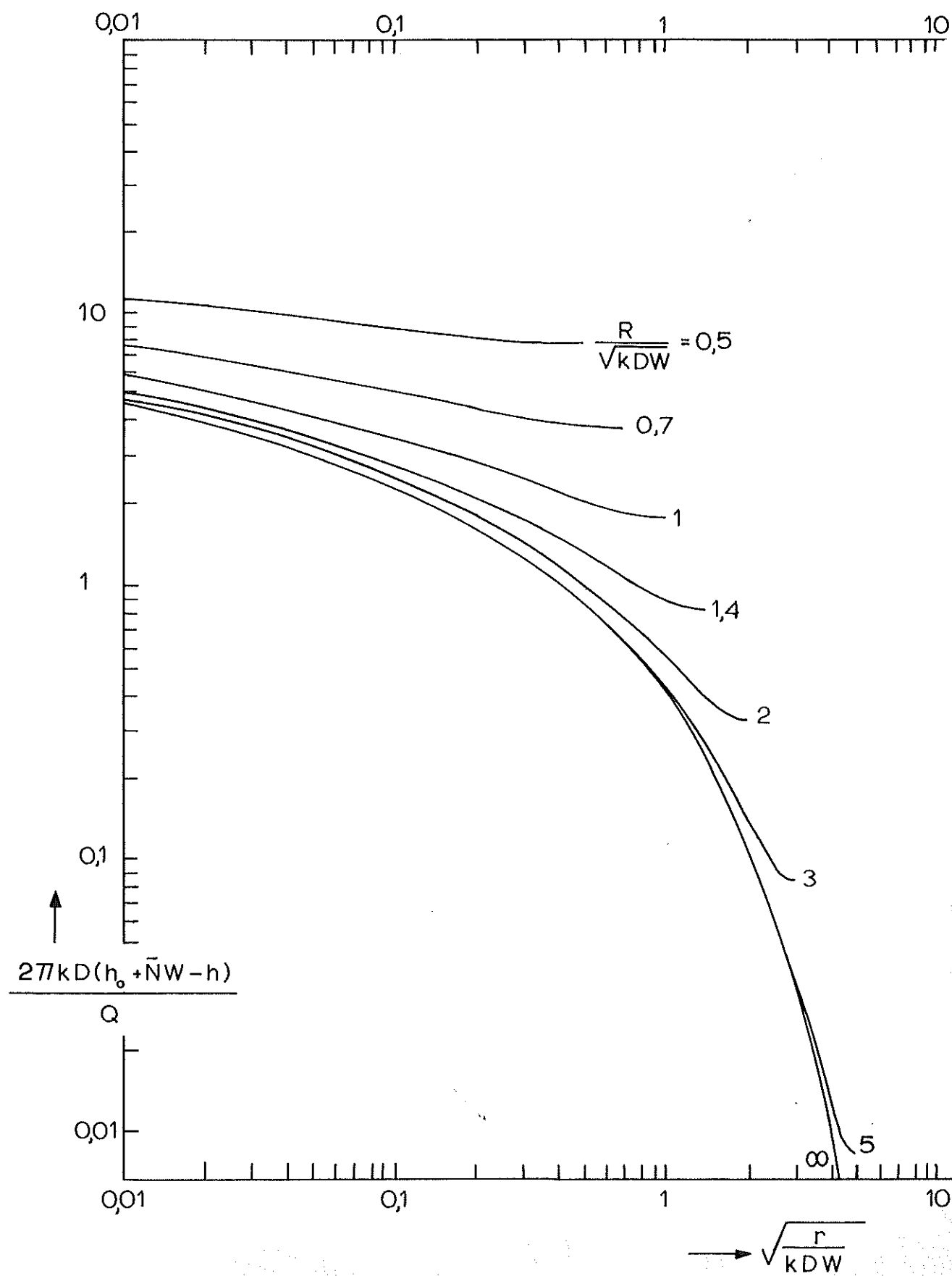


fig 5b

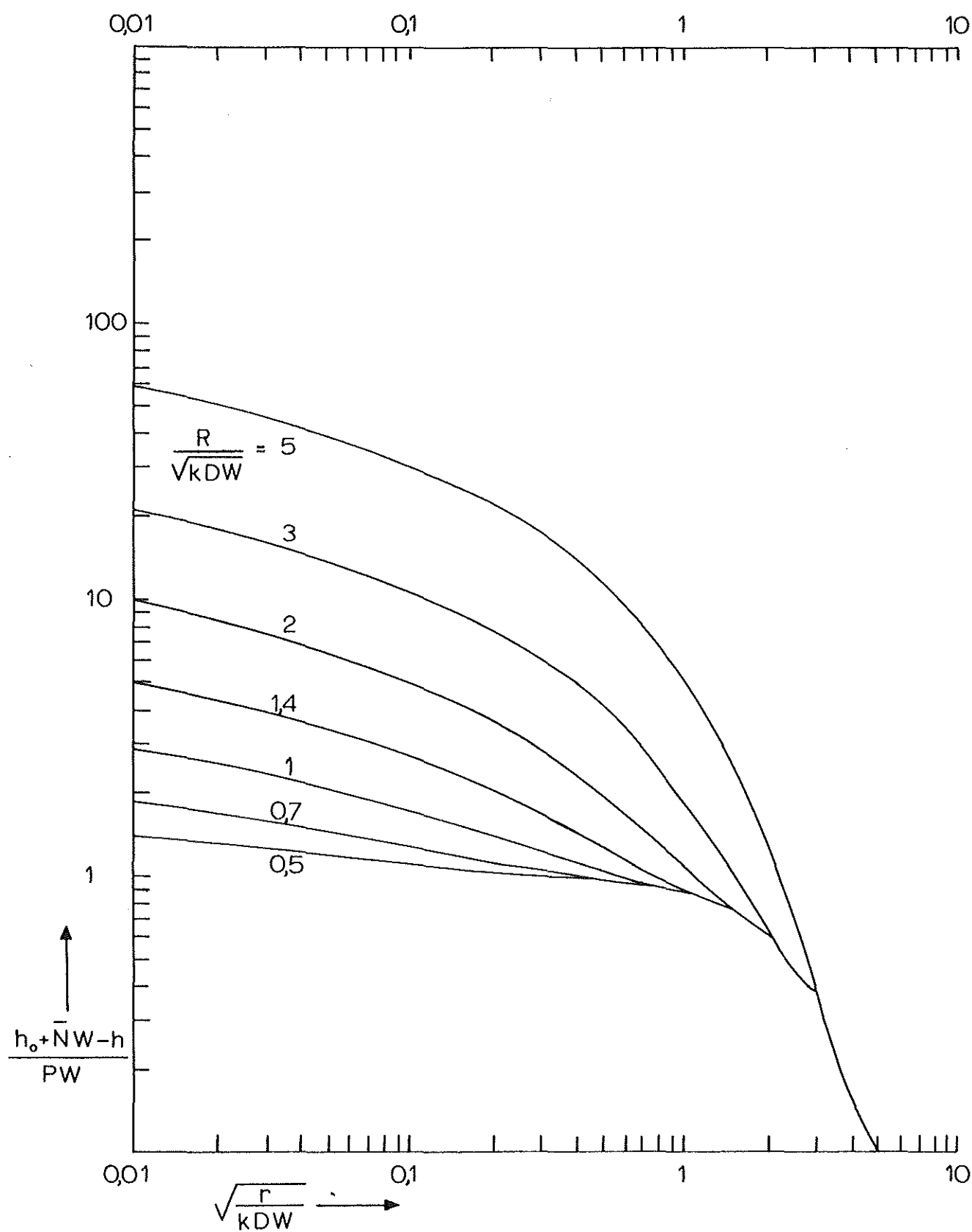


fig 6

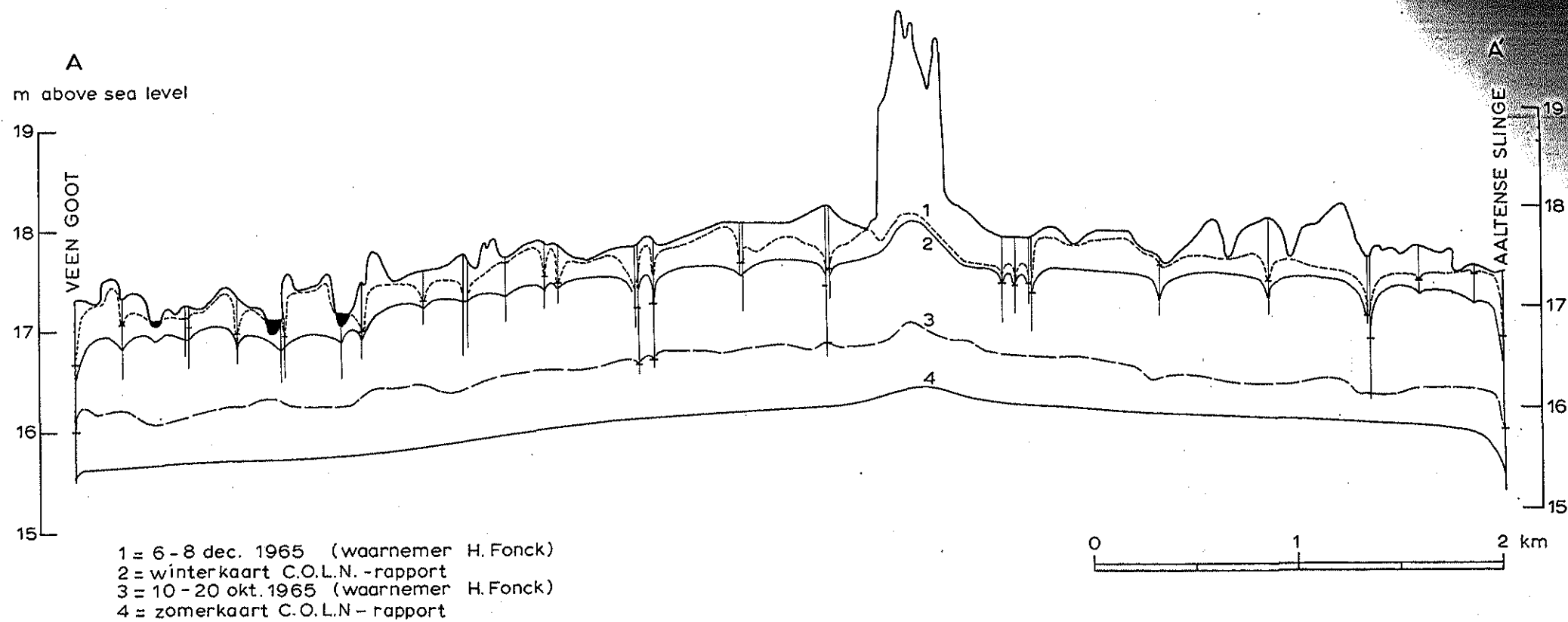
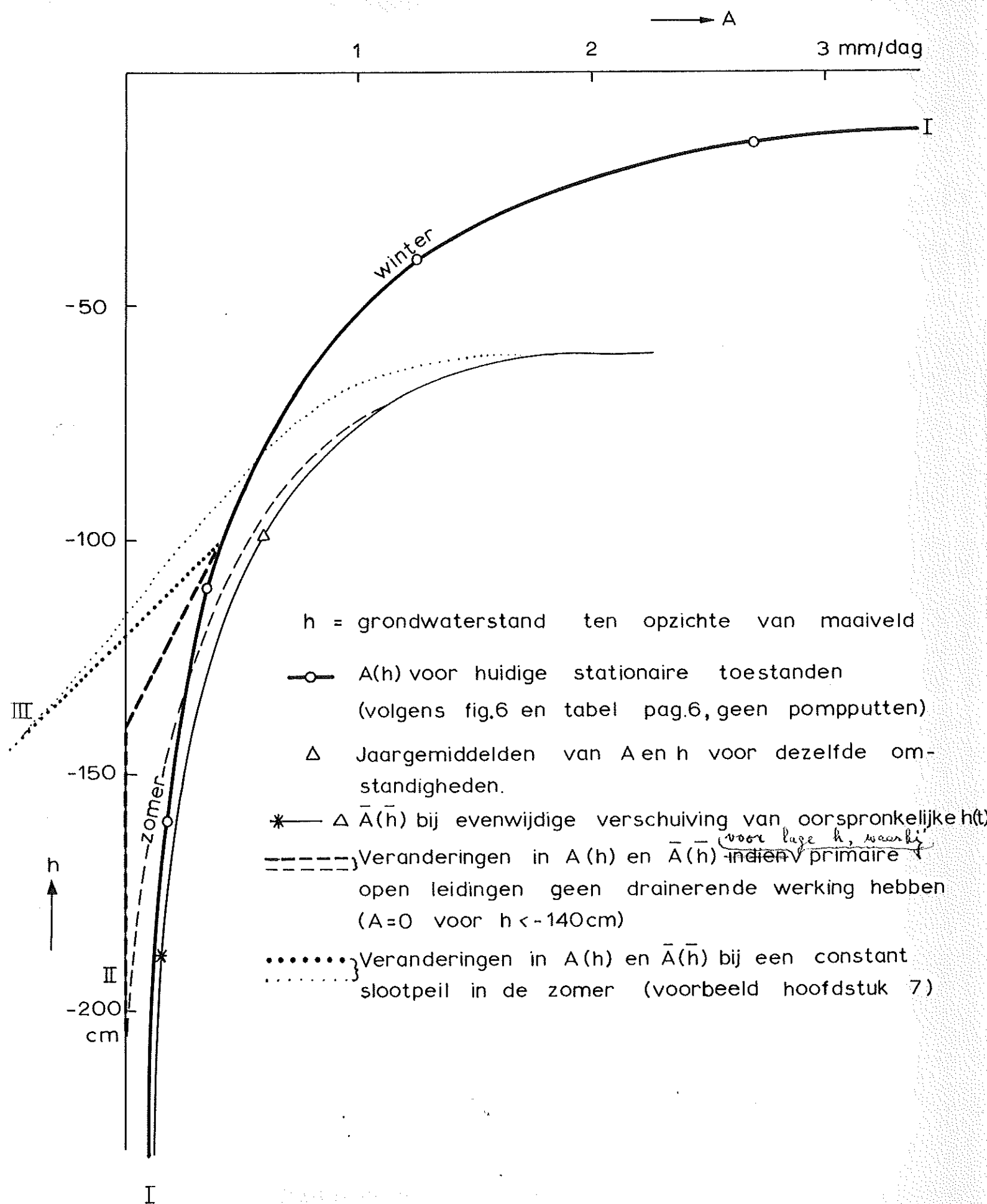


fig.7



Voor elke kromme geldt : $N_a = 1,2 \text{ mm/dag}$; $T = 360 \text{ dagen}$; $\mu = 0,1$; $N_{\min}$ op 1 juli , $N_{\max}$ op 1 jan.

Voor bovenste kromme : $\Delta\Delta$ is periode met slootpeil constant op -120 cm .

N_a = amplitude van N

h_a = amplitude van h

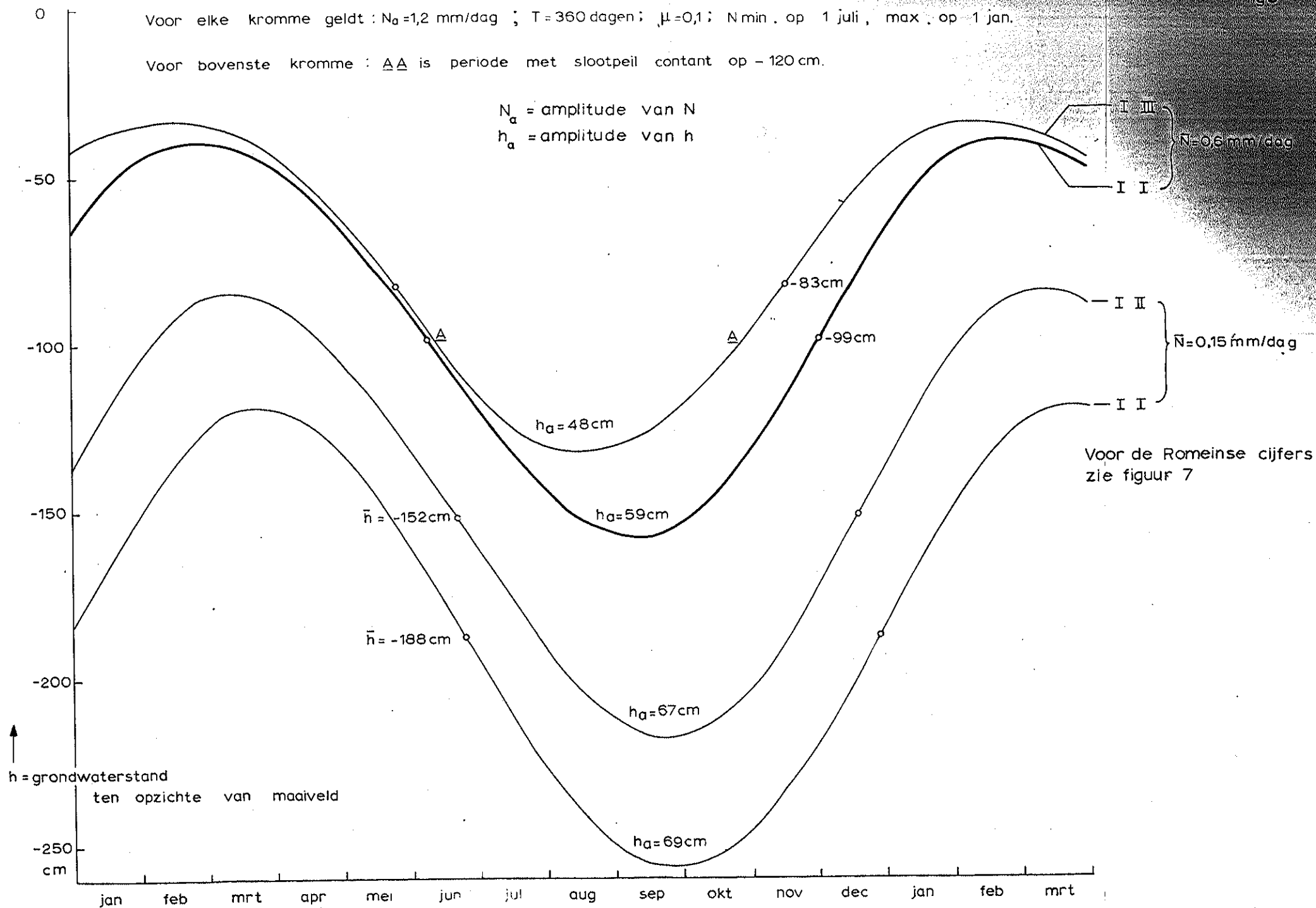


fig.9a

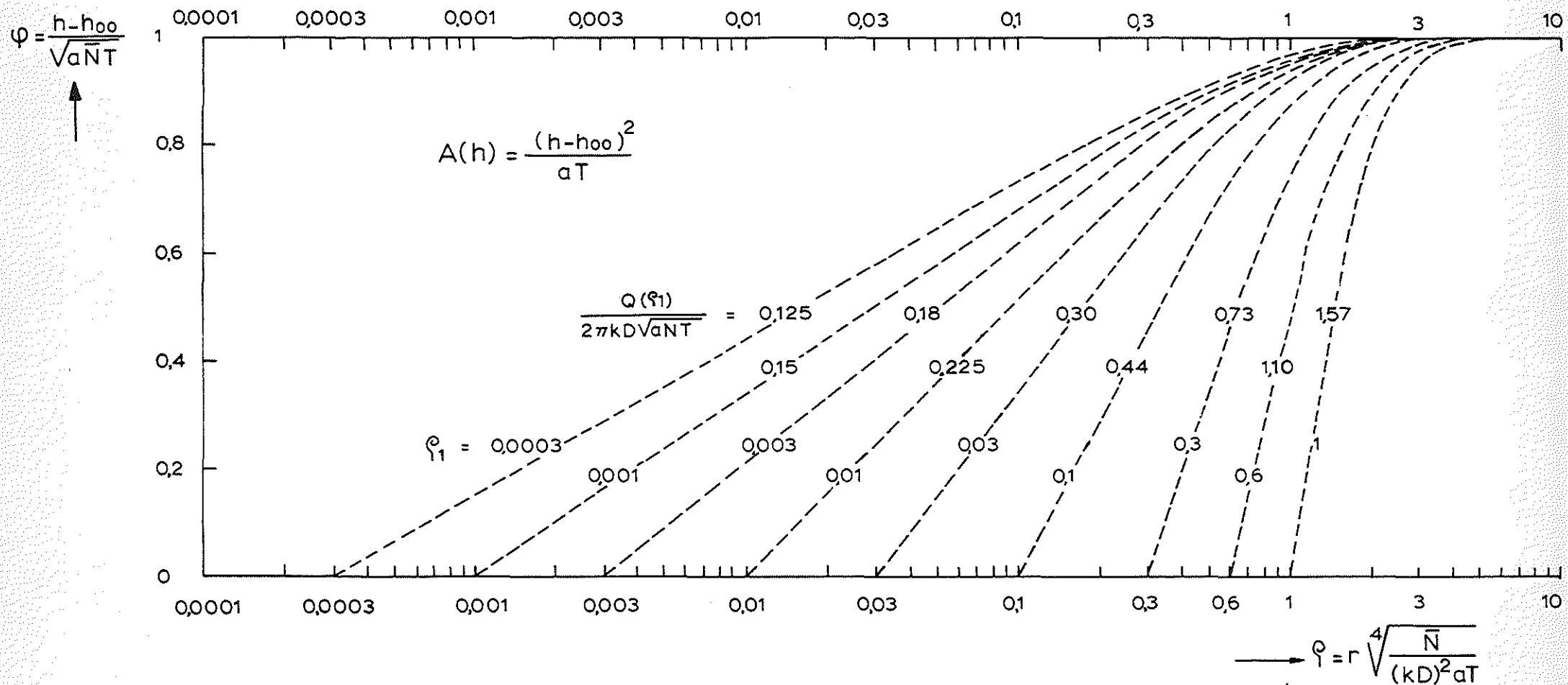
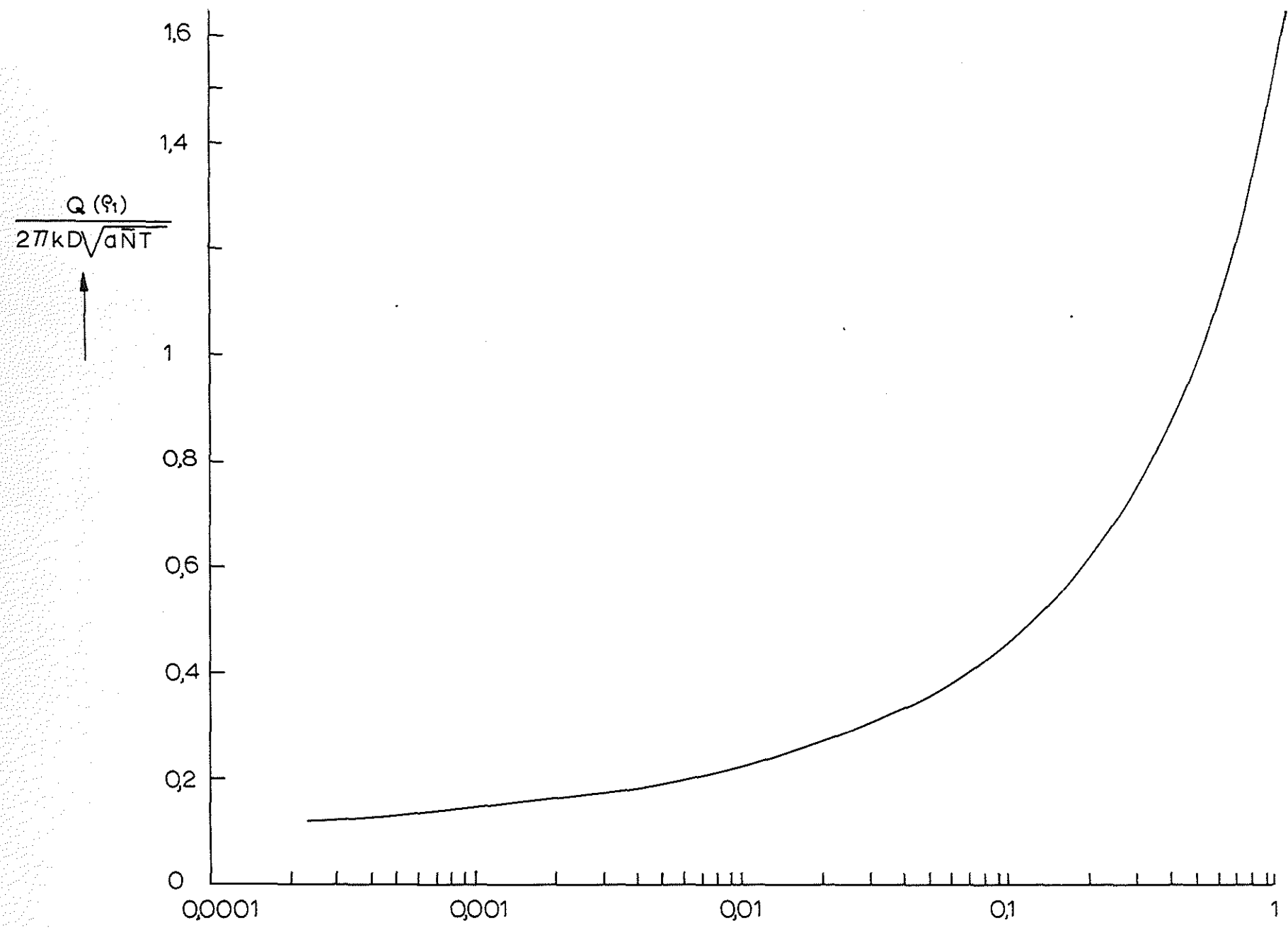
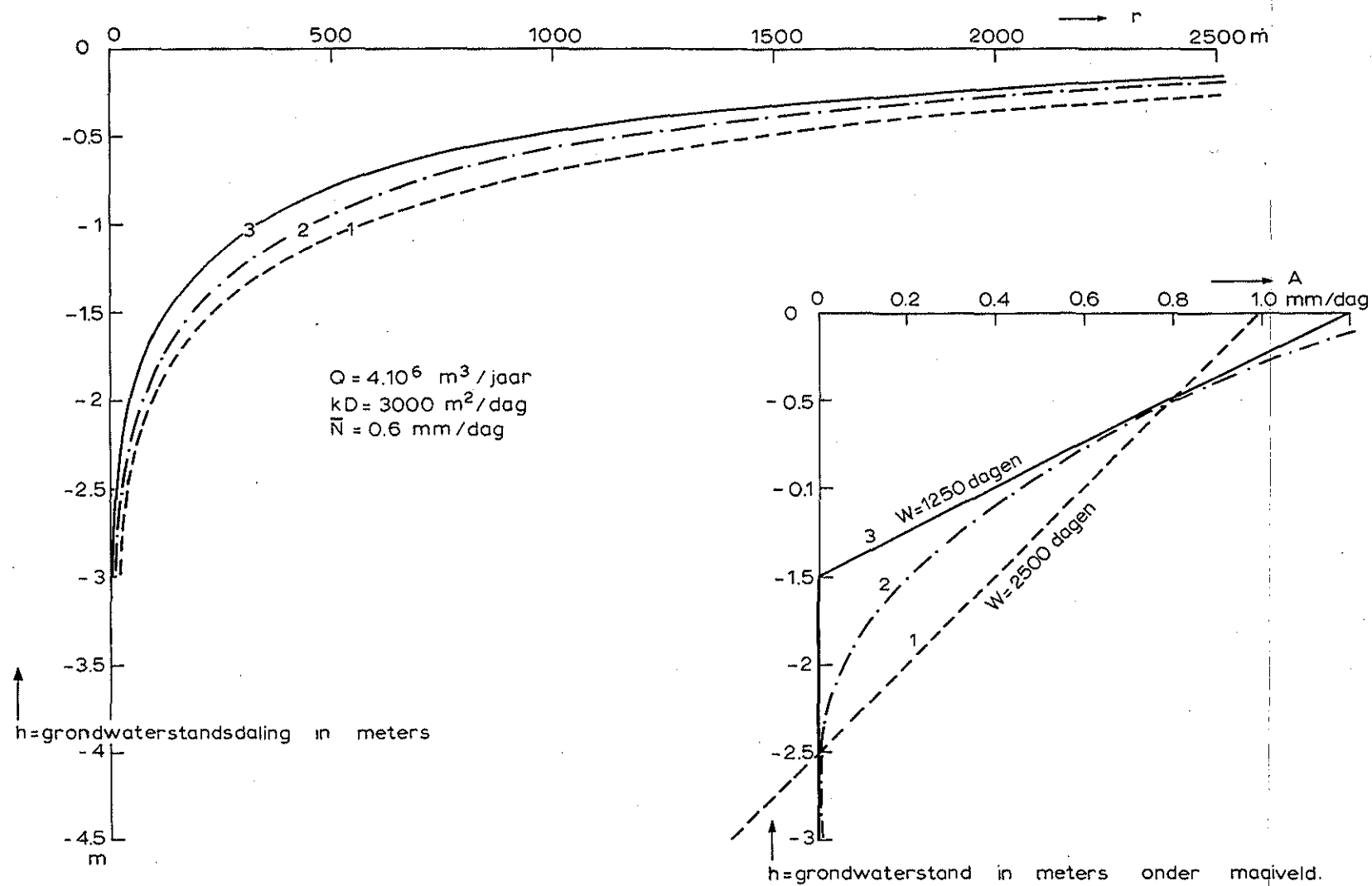


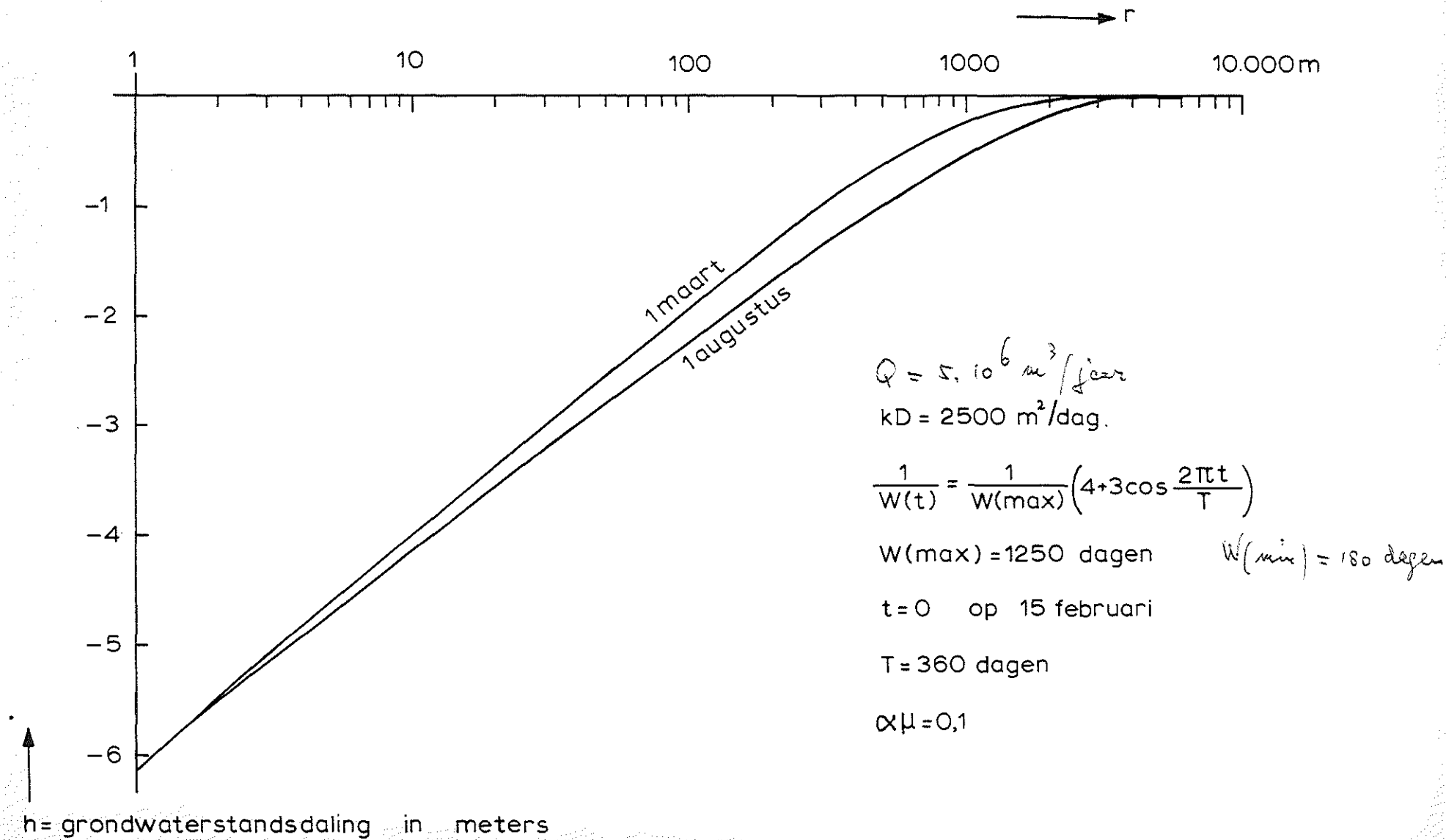
fig.9b



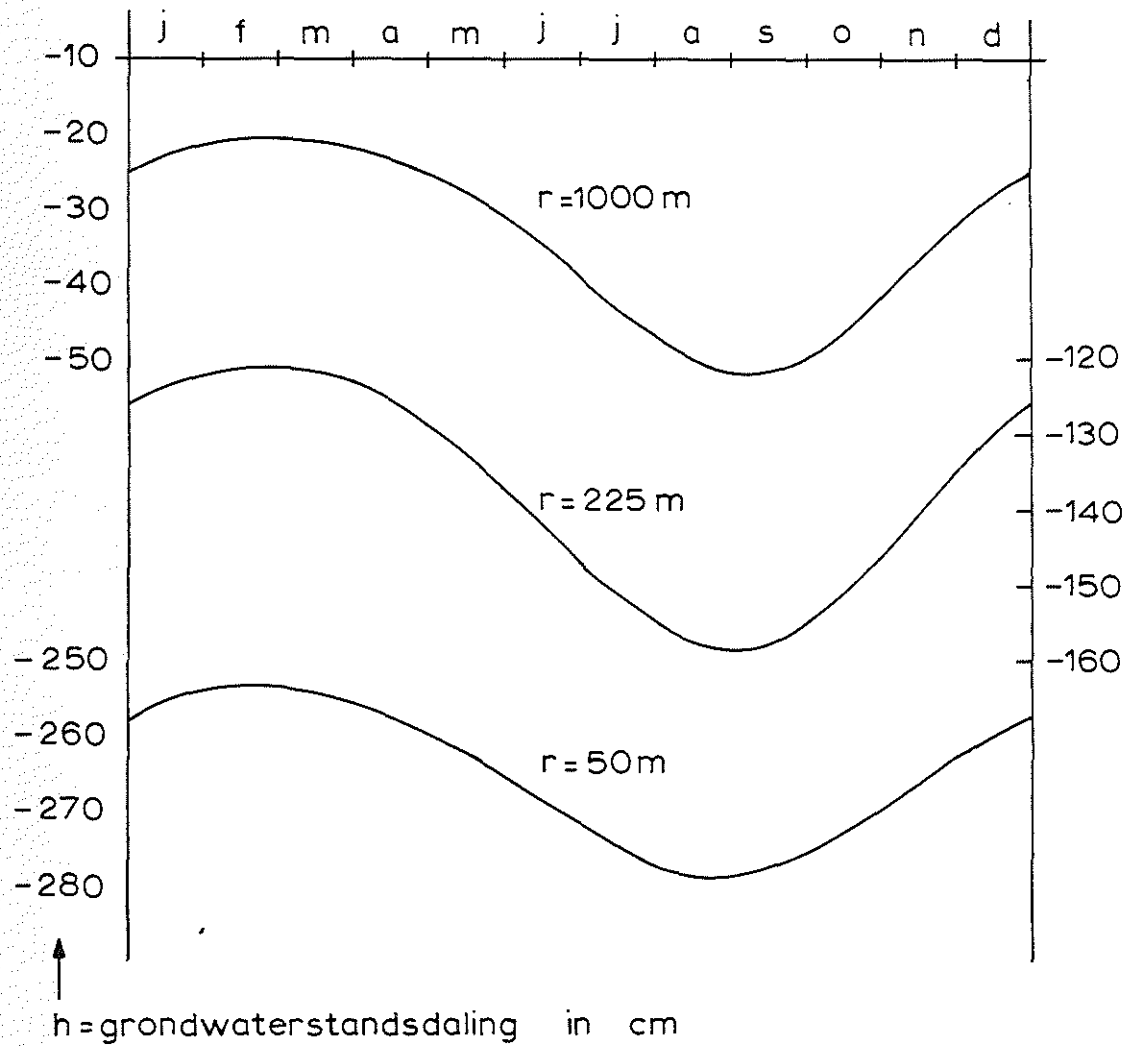
$$\longrightarrow \xi = r\sqrt{\frac{\bar{N}}{(kD)^2 aT}}$$

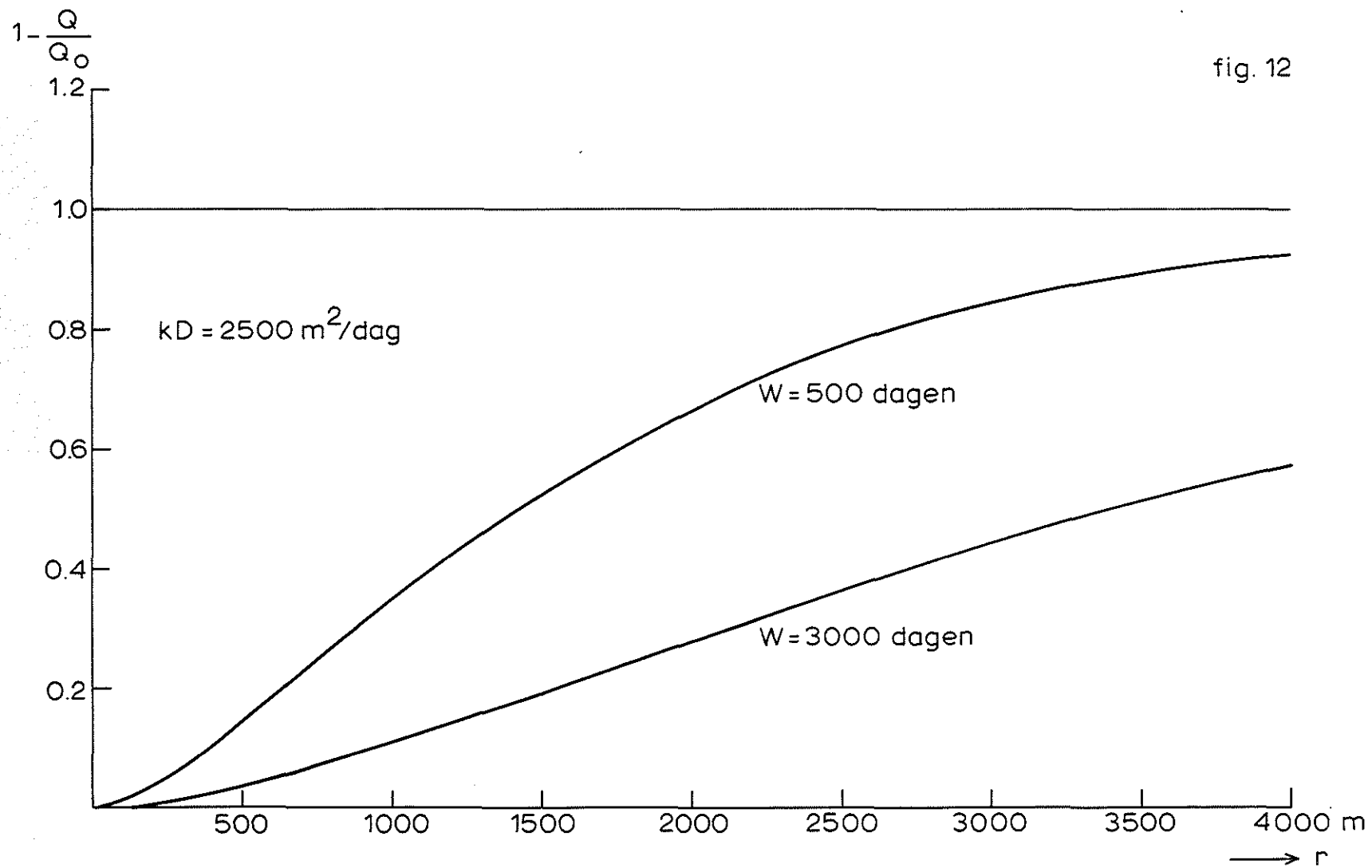
fig. 10





fig, 11 b





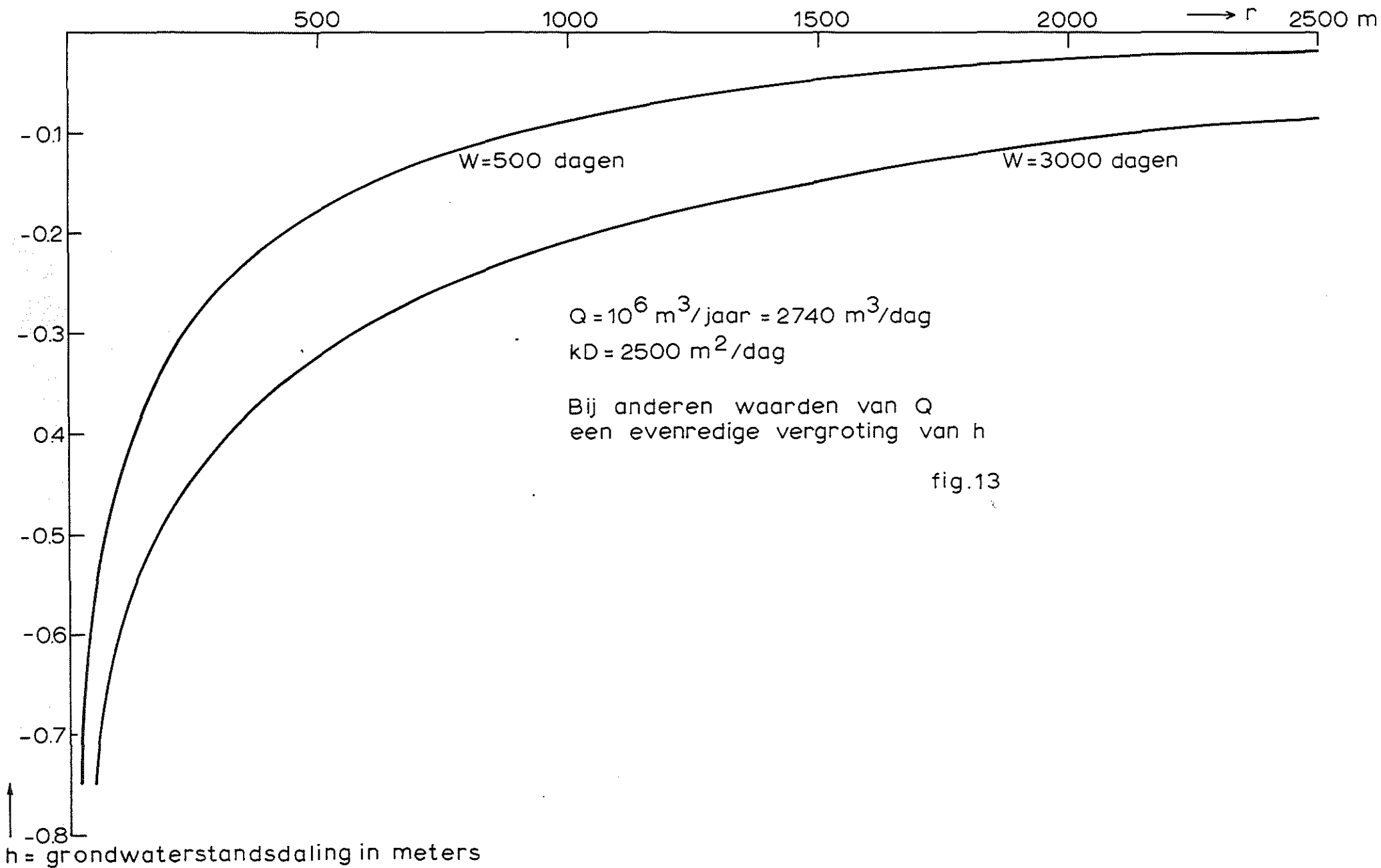


fig.13

fig.13