

Instituut voor Cultuurtechniek en Waterhuishouding
Wageningen

EEN NUMERIEKE OPLOSSING VAN DE PARAMETERS
IN DE WATERBALANSVERGELIJKING

I

G.W. Bloemen, Ing.

Nota's van het Instituut zijn in principe interne communicatiemiddelen, dus geen officiële publikaties.

Hun inhoud varieert sterk en kan zowel betrekking hebben op een eenvoudige weergave van cijferreeksen, als op een concluderende discussie van onderzoeksresultaten. In de meeste gevallen zullen de conclusies echter van voorlopige aard zijn omdat het onderzoek nog niet is afgesloten.

Bepaalde nota's komen niet voor verspreiding buiten het Instituut in aanmerking

I N H O U D

	Blz.
1. INLEIDING	1
2. SAMENVATTING VAN ENIGE HOOFDZAKEN	2
3. DE BETEKENIS VAN AFHANKELIJKHEID TUSSEN PARAMETERS	4
4. MODELONTWIKKELING	5
a. Het eenvoudigste model	5
b. Uitbreiding van het model	7
c. Een model met grotere fysische betekenis	9
d. Overzicht van vier verschillende modellen	11
5. DRIE MET ELKAAR VERGELEKEN VEREFFENINGSMETHODEN	12
a. De simplex-methode	12
b. Een uni-variate methode	13
c. Visuele minimalisatie	16
6. RESULTATEN VAN HET VERGELIJKEND ONDERZOEK	16
a. De efficiëntie-coëfficiënten	16
b. De standaardafwijking van de berekende grondwaterstanden	18
c. Parameteroplossingen	20
d. Een test op de vereffeningresultaten	22
7. TEST OP DE UNI-VARIATE METHODE	24
a. Synthetische restgegevens	24
b. Het resultaat van vereffening met foutloze testgegevens	26
c. Vergelijking met vereffening van gemeten waarnemingen	27
8. CONCLUSIES	29
9. LITERATUUR	30

1. INLEIDING

Het belang van de informatie over de landbouwhydrologie van een gebied, die ligt opgesloten in reeksen grondwaterstanden, wordt over het algemeen wel erkend. Dit blijkt uit het feit dat steeds wordt getracht om de analyse van de grondwaterstandsschommelingen te betrekken in regionale waterhuishoudkundige studies. De omvang hiervan noodzaakt echter tot mechanische verwerking van de gegevens en de zogenaamde grondwaterstandsanalyse, oorspronkelijk uitgevoerd als een grafische techniek, ontwikkelde zich tot een met de computer uitgevoerde numerieke bewerking. Deze bleef echter beperkt tot berekening van een aantal regressiecoëfficiënten, die in de waterbalansvergelijking een voorwaardelijke betekenis hadden (BLOEMEN, 1970). Voortgezette bewerkingen leverden inzicht in de fundamentele achtergrond van de waterbalans op. Deze bewerking werd sterk gekenmerkt door een grote discontinuïteit en aan een integrale oplossing van de parameters die in een fysische beschrijving van de waterbalans passen, zou sterk de voorkeur moeten worden gegeven. Door de gecompliceerdheid van de waterbalans is dit echter alleen mogelijk door toepassing van moderne 'trial and error' vereffeningstechnieken, die worden samengevat onder de naam 'optimalisatie'-technieken (KOWALIK and OSBORNE, 1968). Dit zijn iteratieve rekentechnieken waarmee een grote verscheidenheid van niet-lineaire problemen kan worden opgelost.

Hierna volgt een beschouwing over de oplossing van parameters in de waterbalansvergelijking, die voor de zandgronden in het oosten

van het land met één van deze rekentechnieken werd verkregen.

2. SAMENVATTING VAN ENIGE HOOFDZAKEN

Met het waterbalansmodel worden de variaties in afvoer, werkelijke verdamping en grondwaterdiepte berekend, die samenhangen met variaties in neerslag en atmosferische verdamping. De iteratie, die kenmerkend is voor moderne vereffeningstechnieken, houdt in dat met steeds aangepaste waarden voor de parameters in de in het model gebruikte formules de fouten van de berekende waarden van de variabele grootheden zo klein mogelijk worden gemaakt. In de praktijk is als vereffeningscriterium meestal alleen de grondwaterdiepte beschikbaar omdat de andere grootheden niet gemeten zijn. De oplossing bestaat nu in principe uit die parameterwaarden, waarmee een voldoende groot aantal gemeten grondwaterdiepten zo nauwkeurig mogelijk wordt berekend. Of deze oplossing compleet is in die zin, dat behalve de grondwaterstanden ook de afvoer en de verdamping met voldoende nauwkeurigheid worden berekend, is een vraag waarop zonder metingen hiervan geen antwoord is te geven.

De gang van zaken bij deze vereffening is, zoals in de reken-schema's die in de bijlagen 1, 2 en 3 worden gegeven voor drie modellen die gebaseerd zijn op in par. 4 gegeven functies. Voor de parameters worden zo goed mogelijk beginwaarden geschat. Met een gegeven begingrondwaterstand en een gegeven dagwaarde voor de Penman-verdamping berekent de computer voor de eerste dag de grootte van de afvoer A, de verdamping E, eventueel de kwel of wegzijging K en de bergingscoëfficiënt μ . Afvoer, verdamping en kwel worden verrekend met de gemeten neerslag N. Dit levert de bergingsverandering in de eerste dag op en deze wordt met de bergingscoëfficiënt omgerekend in een grondwaterstandsverandering. Uitgaande van de gemeten begingrondwaterstand berekent men nu de grondwaterstand voor de volgende dag. Zo wordt dag voor dag de tijdstijghoogtelijn gereconstrueerd.

Samenvattend:

$$\frac{N_k - A_k - E_k - K_k}{\mu_k} = \Delta W_k \quad (1)$$

$$W_k = W_{k-1} - \frac{N_k - A_k - E_k - K_k}{\mu_k} \quad (2)$$

$$W_{k+1} = W_k - \frac{N_{k+1} - A_{k+1} - E_{k+1} - K_{k+1}}{\mu_{k+1}} \quad (3)$$

Op dagen dat de grondwaterstand gemeten is, wordt de reconstructie van de tijdstijghoogtelijn getoetst aan het verschil tussen de gemeten grondwaterstand W^* en de berekende grondwaterstand W_1 . Om statistische redenen verdient het aanbeveling om hiervan de kwadraatsom te berekenen (IBBITT, 1970). Dus

$$f_1 = W_1^* - W_1 \quad (4)$$

en de functiewaarde, die geminimiseerd moet worden, is:

$$F^2 = \sum_{i=1}^n f_i^2 \quad (5)$$

Nu wordt nagegaan hoe met andere parameterwaarden de functiewaarde F^2 kan worden verkleind, zodat met zo weinig mogelijk functieberekeningen een combinatie van parameterwaarden wordt gevonden, die een minimale waarde van F^2 oplevert. Om subjectiviteit in deze optimalisatie te voorkomen wordt automatisatie in de literatuur aanbevolen (ROSENEROCK, 1960; O'DONNELL, 1966). Overigens zijn de modernste technieken zo gecompliceerd dat de toepassing ervan zonder computerprogramma praktisch onmogelijk is.

De efficiëntie van een optimalisatie kan in een coëfficiënt R^2 worden uitgedrukt, die aangeeft welk deel van de oorspronkelijke variantie van de gemeten grondwaterstanden W^* met het model kan worden verklaard (MURRAY, 1970). Deze coëfficiënt wordt berekend als:

$$R^2 = \frac{F_0^2 - F^2}{F_0^2} \quad (6)$$

waarin

$$F_0^2 = \sum_{i=1}^n (w_i^* - \bar{w}^*)^2 \quad (7)$$

Naarmate R^2 groter is, is de efficiëntie van het model groter, maar een hoge waarde van R^2 houdt niet noodzakelijkerwijs in dat de parameteroplossingen nauwkeurig zijn.

3. DE BETEKENIS VAN AFHANKELIJKHEID TUSSEN PARAMETERS

Bij vereffenen door het minimiseren van een fout kunnen moeilijkheden worden veroorzaakt doordat de invloed, die een verandering van de waarde van parameter x heeft op de functiewaarde F^2 , gedeeltelijk kan worden gecompenseerd door verandering van de waarde van parameter y . Ook tussen parametercomplexen kan deze correlatie bestaan.

Het gevolg ervan is dat een groot aantal combinaties van parameterwaarden ongeveer gelijke functiewaarden kan opleveren. Bij gecompliceerde problemen kan men met functiewaarden, die dicht bij het minimum liggen, zeer verschillende combinaties van parameterwaarden vinden. Het is in dergelijke gevallen vaak minder moeilijk om één van deze combinaties te vinden dan om van daaruit de unieke combinatie die behoort bij het minimum van F^2 te vinden. Er is dan een grote kans op onbetrouwbare oplossingen, die sterk afhankelijk zijn van secundaire voorwaarden, zoals de beginschattingen van de parameterwaarden.

In de loop der laatste decennia is een verscheidenheid van optimalisatietechnieken ontworpen, die de moeilijkheden als gevolg van parameterafhankelijkheid trachten te overwinnen. Verschillende hiervan hebben een wat algemenere toepassing gekregen (ROSENBROCK, 1960; NELDER and MEAD, 1965; POWELL, 1964). Algemeen wordt erkend dat het bij een groter aantal parameters met gecorreleerde invloeden moeilijker wordt om betrouwbare oplossingen te krijgen. In de literatuur over de vereffening van hydrologische modellen komt dan ook duidelijk de neiging naar voren om het aantal parameters te beperken. Dat daardoor een zelfstandige fysische betekenis van de parameters ge-

makkelijk verloren gaat, is een overweging die er ongetwijfeld toe bijdraagt dat men bijvoorbeeld afvoermodellen tegenkomt met slechts enkele, maar toch ook met meer dan een dozijn parameters. Het hangt van het doel van de toepassing van het model af of een gering aantal parameters zonder fysische betekenis wordt geprefereerd boven een groot aantal parameters met fysische betekenis, maar waarvan de oplossing een geringe betrouwbaarheid kan hebben.

De grondwaterbeweging is de resultante van voortdurende en gelijktijdige veranderingen in de grootte van de waterbalanstermen. Deze wordt bepaald door verandering van de waarde van een parameter in de functies, waarmee de waterbalanstermen worden berekend. Voor het waterbalansmodel geldt dan ook dat iedere parameter invloed op de gereconstrueerde tijdstijghoogtelijn zal hebben. Zou dit niet het geval zijn, dan zijn de betreffende parameters in het model niet actief. Ze hebben dan geen betekenis in het model en kunnen vervallen. Het houdt in dat alle (actieve) parameters in een waterbalansmodel onderling meer of minder sterke afhankelijkheid zullen vertonen. Verwacht mag daarom worden dat de oplossing ervan hierdoor zal kunnen worden bemoeilijkt.

4. MODELONTWIKKELING

a. H e t e e n v o u d i g s t e m o d e l

Een waterbalansmodel is een deterministisch model want de termen in de waterbalansvergelijking worden geschreven als functies waarin de parameters gekoppeld zijn aan variabelen, waarin de openwaterverdamping, de neerslag of de grondwaterdiepte voorkomen. Voor een eenvoudig model voor de zandgronden in het oosten des lands kan eerdergenoemde studie over de afleiding van de grootte van waterbalanstermen uit grondwaterstandsfluctuaties (BLOEMEN, 1970) als uitgangspunt dienen.

De afvoer in de zandgronden in het oosten van het land vindt plaats naar verschillende drainage-niveaus op verschillende afstand. Meestal kunnen de belangrijkste hiervan wel worden aangewezen, maar voor het beschrijven van een dergelijke samengestelde afvoer zullen

veel parameters nodig zijn, omdat voor het beschrijven van de stroming naar elk niveau een functie nodig is. Het moet mogelijk worden geacht om een samengestelde afvoer A met een vloeiende kromme weer te geven (ERNST, 1967). De functie hiervoor heeft minimaal 3 parameters en luidt:

$$A = b(S - W)^m \quad (8)$$

De parameters hierin zijn b, S en m, W is een bekende grondwaterdiepte. S heeft in vergelijking (8) de betekenis van de grondwaterdiepte, waarbij geen afvoer meer optreedt. De parameter b is een integratie van alle weerstanden, die de grondwaterstroming ondervindt. De parameter m garandeert een goede aanpassing van de kromme aan de samengestelde afvoer en kan in voorkomende gevallen nog een lineaire afvoerfunctie geven. In dat geval zal de oplossing van de parameters b en S een duidelijke fysische betekenis hebben, evenals wanneer zou blijken dat vergelijking (8) van de tweede graad zou zijn.

De verdamping E_w bleek te kunnen worden berekend als de laagste van twee functiewaarden. De ene is

$$E_w = gE_o \quad (9)$$

waarin E_o een gemeten of berekende open-waterverdamping voorstelt. De alternatieve functie is

$$E'_w = d_1 W^{-d_2} \quad (10)$$

waarin W weer een bekende grondwaterdiepte voorstelt. In vergelijking (9) en (10) zijn g, d_1 en d_2 de parameters waarmee zo goed mogelijk wordt getracht aan te geven of de werkelijke verdamping wordt beperkt door de stromingsweerstand in het gewas of door die in de grond (VISSER, 1968).

De bergingscoëfficiënt μ bleek als een functie van de grondwaterdiepte te kunnen worden berekend met:

$$\mu = c_1 W^{c_2} \quad (11)$$

waarin c_1 de bergingscoëfficiënt voorstelt bij een grondwaterdiepte

van 1 meter onder maaiveld en c_2 de veranderlijkheid daarvan bij veranderende grondwaterdiepte. De bergingsverandering B als gevolg van grondwaterverandering kan worden berekend door integratie waarvan de oplossing luidt:

$$B = - \frac{c_1}{c_2 + 1} (W_2^{c_2+1} - W_1^{c_2+1}) \quad (12)$$

De consequentie hiervan is dat de grondwaterstand aan het eind van een periode, waarin een saldo B op de waterbalans ontstond, kan worden berekend uit de grondwaterstand aan het begin van die periode als:

$$W_2 = \sqrt[c_2+1]{\frac{-(c_2+1)B}{c_1} + W_1^{c_2+1}} \quad (13)$$

Nu kan vergelijking (2) in par. 2 worden herschreven als:

$$W_k = \sqrt[c_2+1]{\frac{-(c_2+1)(N_k - A_k - E_k)}{c_1} + W_{k-1}^{c_2+1}} \quad (14)$$

Het eenvoudigste model waarmee dag voor dag de afvoer, de verdamping, de bergingscoëfficiënt en de grondwaterdiepte kan worden berekend zou als vergelijking (14) kunnen worden geschreven, waarin A_1 en E_1 respectievelijk met (8) als tweede graadsvergelijking en (9) worden berekend, terwijl N_1 de gemeten dagneerslag voorstelt. Dit model heeft dan slechts vijf parameters, hetgeen wel als een minimum moet worden beschouwd.

b. U i t b r e i d i n g v a n h e t m o d e l

Het eenvoudigste model zal slechts in een enkel geval van toepassing kunnen zijn.

In de eerste plaats zal bij wat diepere grondwaterstanden de verdamping in de zomermaanden kunnen worden beperkt door stromingsweerstand in de grond en zal de alternatieve verdampingsfunctie (10) moeten worden toegepast.

In de tweede plaats is er een mogelijkheid dat infiltratie of

wegzijing optreedt. Deze zou op verschillende manieren kunnen worden beschreven. Het eenvoudige is de kwel K uit te drukken als een functie van het verschil in stijghoogte tussen het diepe en het ondiepe grondwater, respectievelijk H en h

$$K = b_4(H-h) \quad (15)$$

waarin b_4 de betekenis heeft van KD . Minder direct is de zogenaamde differentiemethode (ERNST, DE RIDDER en DE VRIES, 1970). Deze berekent de kwel uit de verschillen ΔH_i tussen de stijghoogte van het diepe grondwater op het bestudeerde meetpunt en op vier meetpunten op niet te grote gelijke afstand l daarvan, liggend op twee elkaar in het meetpunt loodrecht snijdende lijnen. De functie zou dan zijn

$$K = b_4 \sum_{i=1}^4 H_i \quad (16)$$

waarin de parameter b_4 de betekenis heeft van $KD/(2l)^2$.

Het model heeft nu negen parameters, maar de oplossing van enkele daarvan zal moeilijkheden opleveren. Doordat zowel de afvoer als de door de stromingsweerstand in de grond belemmerde verdamping met toenemende grondwaterstand afnemen kunnen de vergelijkingen (8) en (10) inconsistent zijn. Deze moeilijkheid kan worden vermeden door de afvoer uit te drukken als een functie van de hoeveelheid water, die in de grond boven de ontwateringsbasis aanwezig is. Dit principe is al oud (DE ZEEUW en HELLINGA, 1958). Hoewel de functie voor stroming naar een gegeven ontwateringsbasis lineair is, wordt een samengestelde afvoer het eenvoudigst beschreven met een kromme met twee parameters als:

$$A = b R^m \quad (17)$$

Hierin is R de watervoorraad boven de diepste ontwateringsbasis S , die ook als parameter fungeert, want R wordt voor de eerste dag analoog aan vergelijking (12) berekend als :

$$R_1 = - \frac{c_1}{c_2+1} (W_1^{c_2+1} - S^{c_2+1}) \quad (18)$$

Voor de volgende dagen wordt R_1 berekend als:

$$R_1 = R_{1-1} + (N_{1-1} - A_{1-1} - E_{1-1}) \quad (19)$$

Voor het opnemen van de kwelfunctie in de berekening ontbreken vrijwel altijd de gegevens over de stijghoogte van het diepe grondwater. De enige mogelijkheid om de kwel te verantwoorden is dan het opnemen van de parameter b_4 zonder variabelen.

Ook dit model met negen parameters heeft duidelijker een statistische dan een fysische betekenis. Iedere poging om het model een bredere fysische basis te geven zal echter het aantal parameters vergroten.

c. Een model met grotere fysische betekenis

Het is op verschillende punten mogelijk om een betere verantwoording van de fysische werkelijkheid in het waterbalansmodel te geven.

In de eerste plaats is het duidelijk dat het beschrijven van de verdamping onder beperking van de uitdroging van de grond als functie van de grondwaterdiepte fysisch niet optimaal kan zijn, omdat tussen de grondwaterdiepte en de vochtspanning in de bovengrond alleen bij evenwichtsvochtprofielen een vaste relatie bestaat. Ook het berekenen van de bergingscoëfficiënt als functie van de grondwaterdiepte veronderstelt een voortdurend evenwicht tussen het vochtgehalte van de grond en de hoogte boven het grondwater. Een betere benadering is die waarbij de vochtspanning in de bovengrond wordt berekend als functie van de grondwaterdiepte en het capillair geleidingsvermogen (RIJTEMA, 1965; VISSER, 1971). Daartoe dient de functie

$$\psi = -\frac{1}{\alpha} \ln \left\{ 1 - \left(1 - e^{-\alpha(w-x)} \right) \left(1 + \frac{V_c}{K_0} \right) \right\} \quad (20)$$

waarin K_0 de capillaire doorlatendheid bij een vochtspanning van 0 cm is en α voorstelt hoe deze capillaire doorlatendheid afneemt bij toenemende vochtspanning, x is de diepte onder het maaiveld waarop de

vochtspanning wordt berekend, V_c is de opwaartse capillaire vochtstroom en als vereenvoudiging wordt aangenomen dat deze gelijk is aan de verdamping. Bij een neerslagoverschot is deze gelijk aan gE_0 , bij een neerslagtekort kan de verdamping worden berekend als:

$$E' = d_1 \psi^{-d_2} \quad (21)$$

De vraag wanneer (21) moet worden toegepast in plaats van (9) wordt beantwoord door in (20) eerst $E = gE_0$ in te vullen. Als hiermee ψ imaginair wordt, dat wil zeggen dat het tussen grote haken geplaatste deel van (20) kleiner is dan nul, dan wordt (21) toegepast.

De bergingscoëfficiënt wordt nu in plaats van volgens (11) berekend als

$$\mu = c_1 \psi^{c_2} \quad (22)$$

Een tweede mogelijkheid tot vergroting van de fysische betekenis van het model is de splitsing van de afvoerfunctie in de noodzakelijke componenten. Dit betekent in beginsel dat de afstroming naar alle ontwateringsniveaus moet worden beschreven. Aangezien de verdamping niet meer met (10) wordt berekend, kan de formule van Hooghoudt weer worden toegepast. Vaak zal men op grond van hetgeen over de stromingsvoorwaarden bekend is bepaalde vereenvoudigingen kunnen toepassen. Voor de lage zandgronden in het oosten des lands mag worden aangenomen dat op grond van de grote diepte van de ondoorlatende laag de kwadratische term in de Hooghoudt-formule zal mogen worden verwaarloosd, althans voor stromingen naar media met grotere onderlinge afstanden, zoals beken en grotere sloten. Voor kleinere sloten en greppels zal dit misschien niet gaan. Dan zou de afvoerfunctie in het waterbalansmodel voor deze zandgronden als volgt moeten worden beschreven:

$$A = b_0(S_1 - w) + b_1(S_1 - w)^2 + b_2(S_2 - w) + b_3(S_3 - w) \quad (23)$$

Hierin zijn b_i en S_i afvoerconstanten en gemiddelde drainagebases van beken of grotere leidingen ($i = 3$) van in ruimer verband lig-

gende forse perceelsslotten ($i = 2$) en van kleinere perceelsslotten en greppels ($i = 1$).

Toepassing van het model op andere gronden zal misschien berekening van de afvoer als $f(S - W)$ met een andere functie noodzakelijk maken.

Het is mogelijk om het model nog verder te ontwikkelen door een functie in te voeren waarmee wordt aangegeven hoe snel de neerslag in de grond dringt. Dit maakt het noodzakelijk om ook een boekhouding van het water in verschillende bergingsstadia in te voeren met alle complicaties van dien (VISSER, 1971). Voor de goed doorlatende zandgronden in het oosten van het land bleek dit weinig voordelen te hebben en er is verder niet op ingegaan.

d. O v e r z i c h t v a n v i e r v e r s c h i l l e n d e m o d e l l e n

Op vier modellen met toenemend aantal parameters zijn vier verschillende vereffeningstechnieken toegepast.

Het eenvoudigste model is in beginsel gelijk aan (14) in par. 4, maar bij de berekening van het neerslagsaldo is rekening gehouden met het voorkomen van kwel of infiltratie. Volgens hetgeen in par. 5 is opgemerkt is hiervoor als parameter de constante b_4 zonder variabele opgenomen. Om het aantal parameters zo laag mogelijk te houden is aangenomen dat in de afvoerfunctie (8) geldt dat $m = 2$. In bijlage 1 is een berekeningsschema voor het nu zes parameters tellende model opgenomen.

Een model met negen paramters wordt verkregen door de alternatieve verdampingsfunctie (10) op te nemen en zoals in par. 5 is aangegeven een als gevolg daarvan noodzakelijke verandering in de afvoerberekening. In bijlage 2 is het rekenschema voor dit model weer gegeven.

In het derde en vierde model is de berekening van de verdamping en van de bergingscoëfficiënt als een functie van de vochtspanning - zoals aangegeven in par. 4c - geïntegreerd. Dit heeft ten opzichte van de andere twee modellen slechts één nadeel, namelijk dat het verschijnsel dat tijdens een verandering van de vochttoestand van

het profiel de bergingscoëfficiënt mede verandert, niet verantwoord wordt. De berekening van de dagelijkse grondwaterstanden vindt in dit model weer plaats volgens (2), waarvoor de bergingscoëfficiënt μ wordt berekend volgens (22). Een rekenschema voor het derde en vierde model is gegeven in bijlage 3. In het derde model is de afvoerfunctie beperkt gebleven tot de twee termen met S_1 in (23). Het derde model heeft dus elf parameters, het vierde vijftien. Voor beide geldt dat de vochtspanning op 10 cm onder maaiveld wordt berekend.

In de eenheden waarmee in de verschillende modellen wordt gerekend zitten verschillen. In de modellen met zes en negen parameters worden de bergingscoëfficiënten c_1 en c_2 om technische redenen geschreven zoals past bij grondwaterstanden, die in meters zijn uitgedrukt. Hetzelfde geldt voor de parameters d_1 en d_2 . In de modellen met elf en vijftien parameters passen deze vier parameters bij vochtspanningen, die zijn uitgedrukt in centimeters. De afvoerparameters passen bij grondwaterstanden in centimeters en de kwelconstante b_4 wordt in millimeters verrekend.

5. DRIE MET ELKAAR VERGELEKEN VEREFFENINGSMETHODEN

a. D e s i m p l e x - m e t h o d e

Van de drie vergeleken vereffeningstechnieken is de simplex methode bekend uit de literatuur (NELDER and MEAD, 1965). Deze methode was door het IWIS-TNO geprogrammeerd^{x)}.

De simplex wordt bij n parameters gevormd door $n+1$ punten P_1 in de parameterruimte. P_0 wordt bepaald door de beginschattingen van de parameterwaarden, P_1 tot en met P_n worden bepaald door telkens van één parameter de beginschatting met een bepaald bedrag te veranderen. P_1 met de hoogste waarde van F^2 , berekend volgens (5),

^{x)} De afdeling Wageningen van het Instituut voor Wiskundige Informatie en Statistiek van TNO heeft alle voor deze studie benodigde berekeningen geprogrammeerd en uitgevoerd.

wordt vervangen door P_i^x . Dit punt ligt op de lijn door P_i en $\bar{P}$, het zwaartepunt van P_0 tot en met P_n , uitgezonderd P_i . De coördinaten van P_i^x worden op eenvoudige manier berekend en P_i^x heeft een zo laag mogelijke functiewaarde. In de nieuwe simplex wordt weer het hoekpunt met de hoogste functiewaarde F^2 vervangen en dit proces vervormt en verplaatst de simplex totdat met één der hoekpunten een minimum wordt bereikt. Een criterium hiervoor wordt gevonden in de standaardafwijking van de functiewaarden F^2 op alle hoekpunten van de simplex, berekend als:

$$S_a = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} \quad (24)$$

waarin y_i de functiewaarde F^2 volgens (5) voorstelt. Deze S_a is het door NELDER gesuggereerde criterium voor het stoppen van het vereffeningsproces. Bij zeer kleine arbitrair vast te stellen waarden van S_a wordt dan aangenomen dat de simplex een minimum heeft gevonden. Aangezien dit criterium zijn betekenis verliest als de simplex zeer klein wordt, is het bij de vergelijkende berekeningen niet toegepast en werd bij de eerste drie modellen na 602 functieberekeningen de vereffening gestopt. Dit aantal is volgens een door NELDER gegeven functie het gemiddelde dat nodig is om bij elf parameters een minimum te vinden, dat aan een zeer scherp criterium voldoet. Bij het model met vijftien parameters zouden 1096 iteraties gedaan hebben moeten worden als hetzelfde voorschrift ook hier was toegepast.

b. E e n u n i - v a r i a t e m e t h o d e

Wat in de Engelstalige literatuur als 'uni-variate' methoden wordt aangeduid heeft gemeen dat slechts één coördinaat tegelijk wordt veranderd (SPANG, 1962). In het algemeen wordt de volgorde van de coördinaten, waarlangs achtereenvolgens een minimum wordt gezocht, objectief bepaald, bijvoorbeeld door het berekenen van eerste afgeleiden. De minima langs de coördinaten worden gezocht met behulp van tweede afgeleiden of polynomen. De iteraties worden voortgezet tot de verdere daling van de functiewaarde F^2 kleiner wordt dan een arbitrair bedrag.

Hoe met een uni-variate methode in principe de minimumwaarde voor een functie wordt gevonden kan alleen voorgesteld worden als het probleem beperkt blijft tot twee parameters x en y . De functiewaarde $f(x,y)$ is dan de derde dimensie. In fig. 1 zijn de coördinaten x en y de begrenzing van een vlak waarop lijnen van gelijke functiewaarden zijn geprojecteerd. Als parameterinteractie tussen x en y bestaat, dan loopt door het vlak, dat door $f(x,y)$ wordt gevormd, een geul met lage functiewaarden niet evenwijdig aan één van de coördinaatassen. De as van de geul noemen we de interactie-as en het laagste punt hierop is het functie-minimum. Het punt x_0, y_0 geeft de beginschattingen van de parameterwaarden weer, waarmee de vereffening wordt begonnen. De geul wordt ondieper ten opzichte van $f(x_0, y_0)$ naarmate de afstand tot het minimum toeneemt.

De uni-variate methoden gaan uit van $f(x_0, y_0)$ en berekenen bijvoorbeeld in een richting evenwijdig aan de Y -as waar de laagste functiewaarde wordt gevonden. Dit punt x_0, y_1 ligt in de buurt van de interactie-as en deze moet nu worden gevolgd naar het minimum. Dit gebeurt door vanuit het punt x_0, y_1 evenwijdig aan de x -as het punt x_1, y_1 met de laagste functiewaarde te berekenen. Van hieruit weer langs de Y -as naar x_1, y_2 en zo door tot een waarde $f(x_{n-1}, y_n)$ wordt gevonden, die in één van beide richtingen niet verder afneemt. Uitgaande van $f(x_0, y_0)$ kan ook via $f(x_1, y_0)$ naar $f(x_n, y_{n-1})$ worden gezocht en het ideaal is dan dat $f(x_{n-1}, y_n) = f(x_n, y_{n-1})$. Dat dit niet het geval behoeft te zijn, blijkt in fig. 1. Hierin is bij verschillende punten $f(x_i, y_{i-1})$ of $f(x_{i-1}, y_i)$ genoteerd voor een vereffening met twee parameters waarvan de bijzonderheden hier geen betekenis hebben. Het blijkt dat zeer snel een enorme reductie in de functiewaarde optreedt als langs één der coördinaten de interactie-as wordt gesneden. Het volgen van deze as is veel minder efficiënt en tijdrovend doordat min of meer ingewikkelde berekeningen van eerste of tweede afgeleiden steeds herhaald worden. Uit fig. 1 blijkt dat zowel de duur van de berekeningen als het eindresultaat nogal afhankelijk kan zijn van de beginschattingen van de parameterwaarden en van de beginrichting, dat wil zeggen bij meer dan twee parameters van de volgorde waarin ze in de berekening aan de orde komen. Bij ongunstige beginschattingen, zoals in fig. 1 worden voorgesteld door het punt x_0, y_0 , kan het

bovendien voorkomen dat de iteraties moeilijk op gang komen doordat geen snijpunt met de interactie-as wordt gevonden.

Het vergelijkend onderzoek werd verricht met een zeer eenvoudige en direct werkende variant van de uni-variate methoden. Hierbij werd ervan uitgegaan dat de minima, die langs de assen voor de afzonderlijke parameters worden gevonden, in het begin van de vereffening weinig betekenis voor de lokalisatie van het minimum hebben. Een meer directe weg wordt gezocht door vanuit $x_0 y_0$ de waarde van x of van y met een bepaald bedrag te verhogen of te verlagen. De keus van de parametervolgorde is arbitrair. Als bijvoorbeeld $f(x_0 + \Delta x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x_0 - \Delta x, y_0)$ dan wordt de verandering $+\Delta x$ geaccepteerd en voor het punt x, y_0 geldt dan dat $x_1 = x_0 + \Delta x$. Vanuit $x_1 y_1$ - of wanneer met y was begonnen $x_0 y_1$ - wordt $x_1 y_1$ gevonden door $f(x, y_0 + \Delta y)$ en $f(x_1, y_0 - \Delta y)$ te vergelijken met $f(x, y_0)$. Na dit begin worden de geaccepteerde parameterveranderingen in dezelfde volgorde herhaald. Als in een bepaald stadium, bijvoorbeeld $x_4 y_4$, een herhaling van de parameterverandering Δy niet wordt geaccepteerd omdat $f(x_4 y_5) > f(x_4 y_4)$ dan verandert y niet en worden in het volgende stadium weer twee tegengestelde waardeveranderingen van y getest en een daarvan geaccepteerd. Beide kunnen ook worden verworpen. De procedure gaat verder tot de verlaging van $f(xy)$ bij geen enkele van de parameterveranderingen, die mogelijk zijn, groter is dan een vooraf gekozen percentage van de functiewaarde op dat ogenblik. In dit stadium worden Δx en Δy gehalveerd. De iteraties gaan dan weer door tot de daling van de functiewaarde beneden het gekozen criterium daalt. Dan worden $\frac{1}{2}\Delta x$ en $\frac{1}{2}\Delta y$ gehalveerd. Als voor de vierde maal de verlaging van de functiewaarde niet meer aan een arbitrair criterium voldoet, dan wordt, om te voorkomen dat de vereffening op een plaatselijke depressie in het vlak door de functiewaarden blijft steken, opnieuw met Δx en Δy geprobeerd om de minimalisatie weer op gang te brengen. De gehele procedure van het verkleinen van Δx en Δy kan dan weer herhaald worden in een tweede ronde, waarna weer een derde ronde kan volgen. In feite kan de herhaling doorgaan tot op geen enkele manier nog verlaging van de functiewaarde is te bereiken.

In fig. 2 is in tekening gebracht hoe in het geval van fig. 1

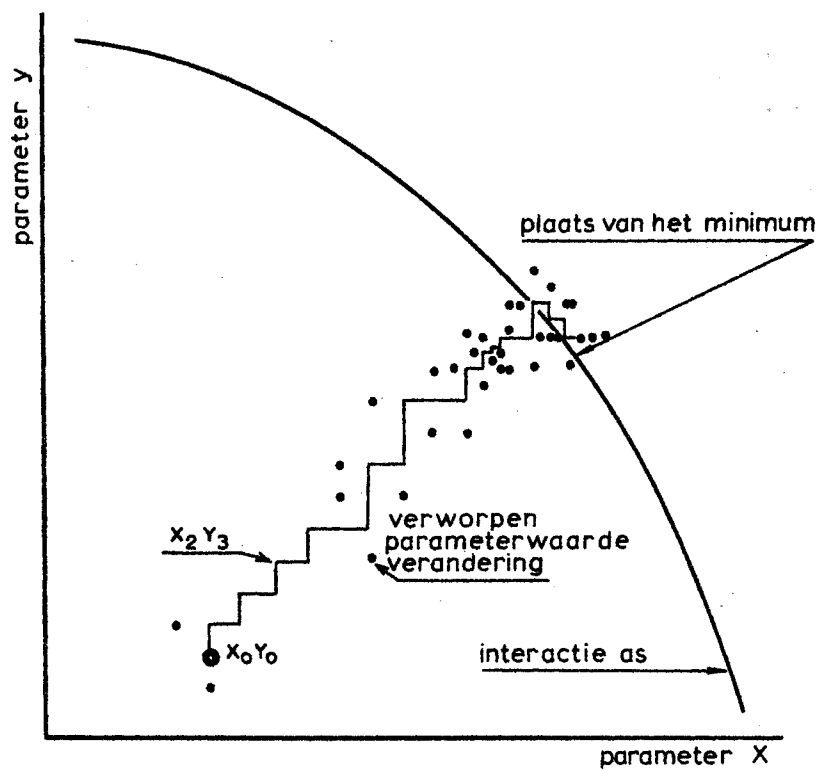


Fig. 2. Voorstelling van de gang van zaken bij vereffening volgens een eenvoudige en directe uni-variate methode en twee parameters

het hiervoor beschreven vereffeningsproces verliep. Er worden geen afgeleiden of vectoren berekend. De tussenberekeningen van $\Delta f(x,y)$ zijn uiterst eenvoudig en blijven tot een minimum beperkt. De methode lijkt minder afhankelijk te zijn van beginschattingen en volgorde der parameters en de kans dat door zeer ongunstige beginschattingen de vereffening moeilijk op gang komt, is klein.

c. V i s u e l e m i n i m i s a t i e

Het is niet beslist noodzakelijk om gebruik te maken van een geprogrammeerde vereffeningstechniek. Deze heeft het voordeel van volstrekte objectiviteit bij het benutten van de informatie, die afnemende functiewaarden over de ligging van het minimum verschaffen. Men mist echter het weliswaar subjectieve, doch op de bekendheid met het model en de kennis van de fysische processen gebaseerde oordeel van de hydroloog. Visuele vereffening komt mede tot stand op grond van de informatie van veranderende functiewaarden, maar steunt in belangrijke mate op vergelijking van de tijdstijghoogtelijn, die wordt getekend met gegeven grondwaterstanden, met de tijdstijghoogtelijn, die wordt verkregen als met bepaalde parameterwaarden de grondwaterstanden worden berekend. Uit de afwijking tussen beide lijnen kunnen conclusies over de te veranderen parameterwaarden worden getrokken.

6. RESULTATEN VAN HET VERGELIJKEND ONDERZOEK

a. D e e f f i c i ë n t i e - c o ë f f i c i ë n t e n

Het vergelijkend onderzoek werd uitgevoerd op basis van de grondwaterstandsgegevens uit de jaren 1958, 1959 en 1960 van het Archief van Grondwaterstanden TNO van tien waarnemingspunten in Sal-land. In deze jaren waren de uitersten tussen nat en droog, zowel in de zomers als in de winters, zeer groot en de voorwaarde voor een nauwkeurige oplossing van alle parameters is dus in beginsel wel vervuld. Ook het aantal graden van vrijheid is voldoende want de oplossingen zijn gebaseerd op gemiddeld 58 grondwaterstandswaarnemingen

in de drie betreffende jaren.

De benodigde neerslagcijfers werden ontleend aan de bekende boeken van het K.N.M.I. Voor iedere buis werd het dichtstbijzijnde station genomen. Een gemiddelde dagelijkse open waterverdamming voor de periode tussen twee grondwaterstandsmetingen werd verkregen door interpolatie op een vloeiende lijn door de maandgemiddelden volgens het K.N.M.I. Het gemiddelde van de stations Winterswijk en Dedemsvaart werd genomen. Voor alle buizen werden dezelfde verdampingscijfers gebruikt.

In tabel 1 zijn de efficiëntie-coëfficiënten voor de verschillende combinaties van model en vereffeningstechniek opgegeven. De visuele methode is alleen toegepast op het model met elf parameters. Het aantal iteraties is ook opgegeven. Voor de uni-variate methode geldt dat niet meer dan twee rondes werden doorgerekend.

Het blijkt dat bij alle combinaties een vrij grote spreiding optreedt in de efficiëntie van de vereffening. Er zijn volgens tabel 1 duidelijk 'goede' en 'slechte' buizen. Blijkbaar passen de modellen niet altijd even goed. Dit behoeft overigens niet aan het model te liggen. Gezien de gelijkvormigheid van het gebied waar de waarnemingspunten liggen is het denkbaar dat de kwaliteit van neerslag- en grondwaterstandsmetingen en van de berekening van de open waterverdamming hier de belangrijkste rol speelt. Gezien de regelmaat waarmee bepaalde buizen bij alle modellen en vereffeningsmethoden slechte resultaten geven, is dit waarschijnlijker dan dat bijvoorbeeld de vereffening steeds te vroeg zou zijn vastgelopen.

Als men de modellen vergelijkt, dan blijkt dat het model met de grootste fysische betekenis en het grootste aantal verklarende constanten de grootste efficiëntie heeft. Van de vereffeningsmethoden blijkt de simplex-methode gemiddeld wat minder efficiënt te zijn dan de uni-variate methode. Verrassend is de efficiëntie van de visuele vereffening, evenals het geringe aantal iteraties, dat ervoor nodig is. Het blijkt dat de uni-variate methode gemiddeld een kleiner aantal iteraties nodig had dan de simplex-methode.

Voor een objectieve beoordeling van tabel 1 moet een kanttekening bij de resultaten van de simplex-methode worden gemaakt.

Zoals in par. 5a werd opgemerkt is voor de vergelijkende bereke-

Tabel 1. Efficiëntie-coëfficiënten (R^2) en het aantal iteraties (n) voor verschillende modellen en vereffeningsmethoden (S = simplex-methode; n.it. = 602 iteraties; U = uni-variate methode)

Aantal parame- ters		Zes			Negen			Elf					Vijftien	
		S		U	S	U		S	U		Visueel		U	
		n=602	R ²	n	n=602 it.	R ²	n	n=602 it.	R ²	n	R ²	n	R ²	n
Methode														
Buisnr.	4	0,875	0,947	183	0,750	0,875	218	0,942	0,958	489	0,954	75	0,965	655
	5	0,844	0,917	673	0,933	0,942	195	0,935	0,922	412	0,930	84	0,934	510
	8	0,650	0,727	370	0,633	0,880	476	0,910	0,910	1000	0,886	52	0,910	1220
	11	0,677	0,608	475	0,730	0,748	184	0,604	0,703	715	0,759	39	0,786	1265
	12	0,780	0,828	182	0,890	0,880	358	0,862	0,879	813	0,889	99	0,922	1494
	13	0,780	0,572	283	0,366	0,720	332	0,778	0,758	248	0,585	62	0,878	820
	14	0,775	0,719	862	0,780	0,743	128	0,667	0,775	434	0,794	77	0,864	1056
	16	0,900	0,908	253	0,855	0,928	339	0,941	0,928	249	0,920	55	0,933	996
	18	0,956	0,947	456	0,770	0,936	193	0,941	0,941	845	0,936	36	0,942	958
	22	0,927	0,933	126	0,935	0,932	254	0,922	0,942	446	0,933	48	0,941	719
Gem.		0,816	0,811	386	0,764	0,855	268	0,851	0,870	552	0,859	63	0,909	969

ningen geen test in het simplex-programma opgenomen, waardoor de iteraties bij een bepaald resultaat van de vereffening stoppen. Er werd een objectief berekend aantal iteraties uitgevoerd en het eindresultaat werd als de oplossing beschouwd. In fig. 3 is nu de efficiëntie-coëfficiënt van de oplossing uitgezet tegen de standaardafwijking van de functiewaarden op de hoekpunten van de laatste simplex in de reeks iteraties.

Er treedt in fig. 3 een duidelijke correlatie op. Bij een lagere efficiëntie-coëfficiënt neemt deze standaardafwijking S_a toe. Dit betekent dat in een aantal gevallen wanneer S_a als stopcriterium geprogrammeerd zou zijn geweest een hogere efficiëntie zou zijn bereikt. Het is waarschijnlijk dat de gemiddelde coëfficiënten voor de simplex-methode in tabel 1 wat te laag zijn uitgevallen. Een schatting van het beloop van de gemiddelde lijn in fig. 3 maakt het aannemelijk dat de simplex-methode eenzelfde resultaat zou kunnen hebben gegeven als de uni-variate methode. Tegelijkertijd zou echter het aantal iteraties zijn toegenomen en het verschil met de uni-variate methode zou op dit punt groter zijn geworden. De benodigde computertijd voor een gelijk aantal iteraties van dezelfde berekening is bij de simplex-methode langer dan bij de uni-variate methode. Zowel beoordeeld op efficiëntie-coëfficiënt als op computerkosten lijkt dus de uni-variate methode te verkiezen boven de simplex-methode. Als belangrijk voordeel komt daar nog bij dat de toegepaste uni-variate methode gemakkelijk kan worden gebruikt om op twee of zelfs meer variabele grootheden te vereffenen, hetgeen niet van de simplex-methode evenmin als van andere bekende methoden gezegd kan worden.

Het geringe aantal iteraties van de visuele vereffening heeft weinig praktische voordelen. De mogelijkheden van deze methode zijn gunstig, maar als routinemethode voor toepassing op grote schaal komt hij niet in aanmerking, omdat er te veel tijd nodig is voor de beslissing welke de volgende iteraties zullen zijn.

b. De standaardafwijking van de berekende grondwaterstanden

De efficiëntie-coëfficiënt van een vereffening zegt niets over de afwijking tussen de berekende en de gemeten grondwaterstand. Deze

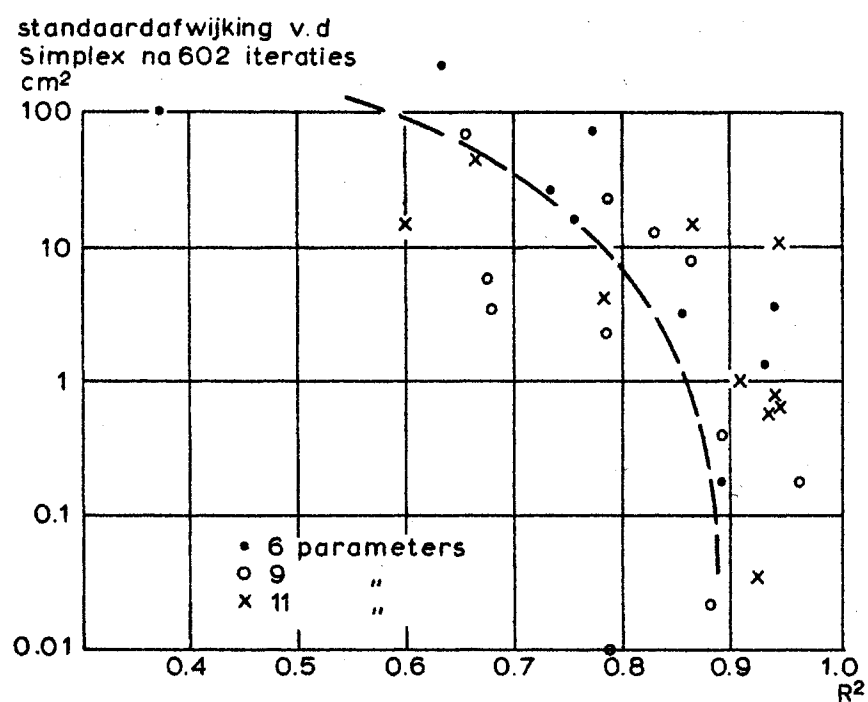


Fig. 3. Samenhang tussen de efficiëntie-coëfficiënt van de simplex-methode en de standaardafwijking van de functiewaarden op de hoekpunten van de laatste simplex bij 602 iteraties

kan bij een hoge efficiëntie-coëfficiënt groot zijn en bij een lage coëfficiënt klein blijven. Dat hangt van de oorspronkelijke variatie van de gemeten grondwaterstanden af. De efficiëntie-coëfficiënt alleen heeft voornamelijk relatieve betekenis als maatstaf bij de vergelijking van parameteroplossingen, die uit dezelfde waarnemingen op verschillende manieren zijn verkregen. Voor een beoordeling van de absolute betekenis van een vereffening behoort behalve de efficiëntie-coëfficiënt ook de standaardafwijking van de verschillen tussen gemeten en berekende grondwaterstanden te zijn gegeven.

In tabel 2 is voor het vierde model naast de efficiëntie-coëfficiënt van de tien buizen uit tabel 1 de standaardafwijking tussen beide grootheden gegeven, berekend als:

$$S_a = \sqrt{\frac{\sum \Delta w^2}{n-p}} \quad (25)$$

Hierin is Δw het verschil tussen een gemeten en een voor dezelfde dag berekende grondwaterstand, n is het aantal malen dat Δw bepaald kan worden en p is het aantal parameters in het model.

Tabel 2. Efficiëntie-coëfficiënten (R^2) en standaardafwijking van de gemeten ten opzichte van de berekende grondwaterstanden (S_a) voor het model met 15 parameters

Nr.	R^2	S_a	Nr.	R^2	S_a
4	0,965	8,3 cm	13	0,878	14,3 cm
5	0,934	8,8 cm	14	0,864	12,7 cm
8	0,910	15,5 cm	16	0,933	10,8 cm
11	0,786	14,0 cm	18	0,942	11,4 cm
12	0,911	14,7 cm	22	0,954	10,2 cm

De standaardafwijking is gemiddeld 12 cm. Dit lijkt vrij veel bij een efficiëntie-coëfficiënt van gemiddeld 0,909, maar de variatie van de gemeten grondwaterstanden is in deze zandgronden groot. Op de vraag welke standaardafwijking van de berekende grondwaterstand minimaal zal zijn, wordt in par. 7c wat verder ingegaan.

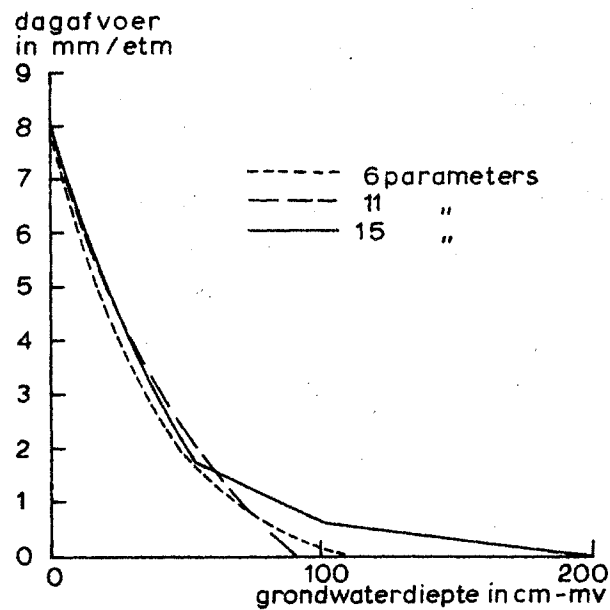


Fig. 4. De voor tien gevallen gemiddelde afvoerfuncties in de modellen met zes (-----), met elf (— · — · —) en met vijftien parameters (————)

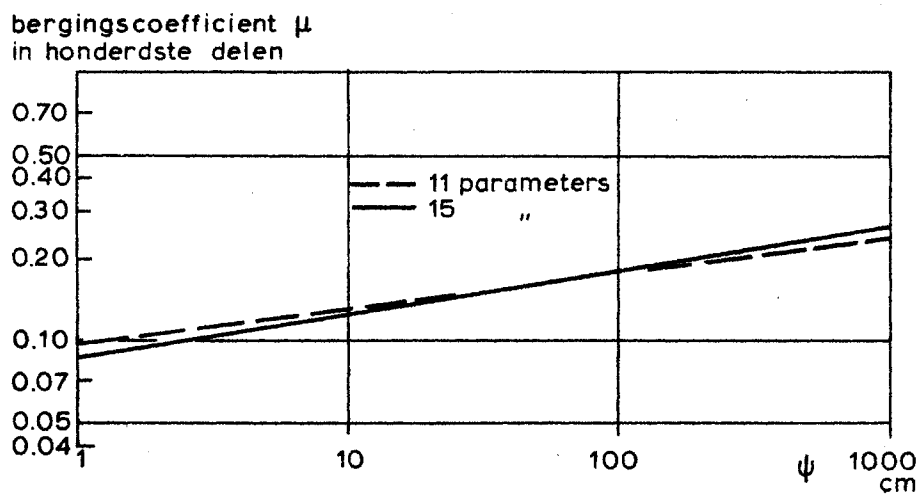


Fig. 5. De functie voor de bergingscoëfficiënt $\mu = c_1 \psi^{c_2}$ voor het model met elf parameters (-----) en met vijftien parameters (————)

c. Parameteroplossingen

Bijlage 4 geeft een overzicht voor de tien buizen van tabel 1 van de oplossingen van de parameters in de verschillende modellen, zoals die met de uni-variate methode werden verkregen. De volgende beschouwingen blijven tot deze resultaten beperkt omdat de uni-variate methode hogere efficiëntie-coëfficiënten gaf dan de simplex-methode. Bij bijlage 4 zijn de oplossingen van parameters, die hetzelfde symbool hebben gekregen, niet altijd vergelijkbaar. Zo bleek in hoofdstuk 4 dat de bergingsparameters c_1 en c_2 in de eerste twee modellen een andere betekenis hebben dan in de laatste twee en hetzelfde geldt voor de parameters d_1 en d_2 . De afvoerparameters hebben een engere betekenis naarmate er meer worden toegepast.

In de verschillen tussen de parameteroplossingen voor de afzonderlijke buizen is nauwelijks aanleiding tot commentaar te vinden. Het zijn voornamelijk de gemiddelde waarden voor de parameters in een model, waaruit bepaalde conclusies met betrekking tot het waterbalansmodel volgen. In par. 7a wordt de spreiding der oplossingen om deze gemiddelden nog ter sprake gebracht.

In fig. 4 zijn voor de drie modellen, waarin de afvoer direct als functie van de grondwaterdiepte wordt berekend, de gemiddelde afvoerfuncties voor de tien buizen in beeld gebracht. Het blijkt dat de gedifferentieerde beschrijving van het afvoerproces volgens (23) mogelijk is. Het is onverwacht dat de gedifferentieerde beschrijving in het eerste model hier beter bij aansluit dan de wat betere in het derde model. Met $m > 2$ in (8) zou vermoedelijk een kwantitatief weinig minder waardevolle oplossing dan met (23) zijn verkregen.

De afvoer volgens het vierde model zal de hoogste afvoertotalen in een waterbalans opleveren, omdat alleen in dit model bij diepe grondwaterstanden nog afvoer wordt berekend. Dit moet in de waterbalans gecompenseerd worden. Als de beschouwing nu even beperkt blijft tot de gemiddelde parameteroplossingen van het derde en vierde model - die afgezien van de afvoerfunctie vergelijkbaar zijn - dan lijkt dat in de parameteroplossingen wel tot uiting te komen. In de eerste plaats is in het vierde model de kwel 0,04 millimeter per etmaal groter. Dan blijkt in fig. 5 dat volgens de bergingsparameters c_1 en c_2

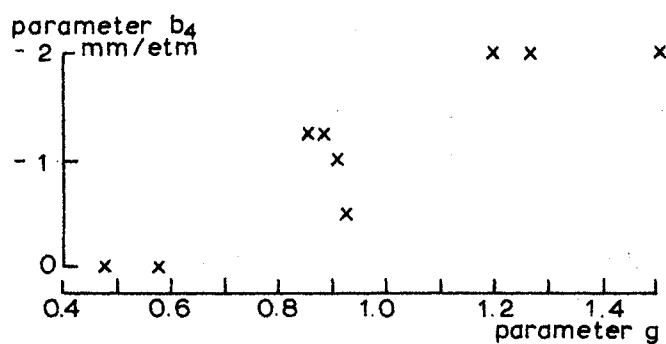


Fig. 6. Samenhang tussen de parameter voor de reductie van de potentiële verdamping g en die voor de kwel b_4 in het model met zes parameters

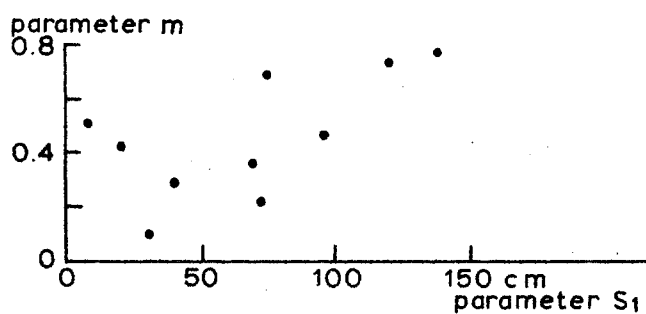


Fig. 7. Samenhang tussen de parameter voor de diepte van de drainagebasis S_1 en de exponent m in de afvoerfunctie in het model met negen parameters

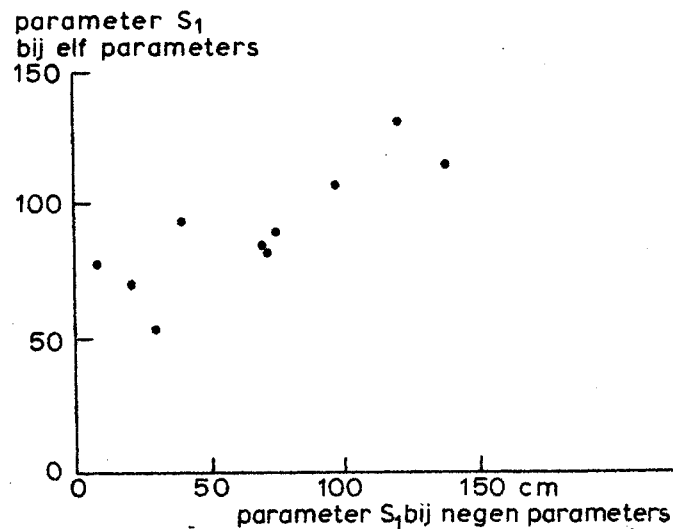


Fig. 8. Samenhang tussen de parameter voor de diepte van de drainagebaiss S_1 in het model met elf en met negen parameters.

bij een vochtspanning $\psi \gg 100$ cm bij het derde model de bergingscoëfficiënt kleiner wordt. Deze vochtspanning zal bij diepere grondwaterstanden voortdurend worden overschreden. In het vierde model zijn dan bij bergingsveranderingen grotere hoeveelheden water betrokken mits de vochtspanning volgens het derde model niet aanzienlijk hoger uitvalt dan volgens het vierde. De parameters α en K_0 wijzen hier niet op. De eerste is in beide modellen gelijk en de tweede is in het vierde model wat hoger uitgevallen dan in het derde. Dit wijst op iets lagere vochtspanningen in het vierde model, maar het verschil is zo klein dat het nauwelijks van betekenis kan zijn. Tenslotte kan de grotere afvoer in het vierde model nog compensatie vinden door een lagere verdamping. De parameter g is inderdaad in het vierde model lager, maar de parameters d_1 en d_2 wijzen erop dat in het vierde model de functiewaarden van $d_1 \psi^{-d_2^2}$ wat hoger zullen zijn.

De aanpassingsmogelijkheden van het model met zes parameters zijn beperkt. Voor de afvoer werd dit al gedemonstreerd. Voor de verdamping is dit onontkoombaar, omdat geen alternatieve verdampingsfunctie is toegepast. De bergingscoëfficiënt μ heeft een te geringe spreiding, omdat hij wordt berekend als functie van de grondwaterdiepte, die een veel kleinere variatie heeft dan de vochtspanning. Het blijkt nu dat in het eerste model de constante b_4 een grote positieve waarde krijgt, waardoor de hoeveelheid water op de waterbalans sterk wordt vergroot. De compensatie treedt op door een sterk vergrote verdamping. In fig. 6 blijkt dat er zelfs een duidelijke correlatie bestaat tussen de voor verschillende buizen gevonden waarden van de parameters b_4 en g .

Het blijkt dat in het tweede model met de afwijkende afvoerberekening de parameter S een grotere spreiding en een lager gemiddelde heeft dan in het eerste en derde model. Volgens fig. 7 is hieraan de invloed van de parameter m in (17) niet vreemd. Deze parameter is behalve fysisch zonder betekenis, statistisch weinig succesvol. Dat er overigens wel systeem in de oplossingen zit, blijkt uit fig. 8, waarin de parameter S volgens het tweede model is uitgezet tegen die volgens het derde.

Uit het voorgaande wordt het duidelijk dat, aangezien de waterbalansvergelijking moet voldoen aan de wet tot behoud van de materie, het mechanisme van de waterbalansmodellen bepalend is voor systematische verschillen in de uitkomsten van verschillende parameters. Hierdoor kunnen bepaalde parameters fysisch gezien een schijnbetekenis krijgen. Hoewel de aanpassing aan een vereffeningscriterium er weinig door hoeft te verbeteren, zal door een zo goed mogelijke verantwoording der fysische processen in de waterbalans de betekenis der parameteroplossingen zo duidelijk mogelijk worden. Het model met 15 parameters verdient daarom boven de anderen de voorkeur en hierna zal alleen nog over dit model gesproken worden.

d. Een test op de vereffeningsresultaten

Een bekende methode om de resultaten van een vereffening te beoordelen is de zogenaamde 'split record test'. Deze houdt in dat de parameteroplossingen, die men heeft verkregen op basis van waarnemingsmateriaal uit een gegeven periode, worden gebruikt om in een voorafgaande of volgende periode de grootte, die als vereffeningscriterium is gebruikt, te berekenen en te vergelijken met de gemeten waarden daarvan. Het resultaat hiervan kan weer met de efficiëntiecoëfficiënt en met de standaardafwijking van de verschillen tussen berekende en gemeten grondwaterstand worden weergegeven.

De split record test geeft ook een indruk van het voorspellend vermogen van de parameteroplossingen van een model. Wanneer dit niet groot zou blijken te zijn, hoeft dit echter nog niet te betekenen dat het model niet goed is. Wanneer de oplossingen zijn verkregen uit waarnemingen, waarin niet alle omstandigheden die zich kunnen voordoen zijn bemonsterd, dan is extrapolatie naar deze omstandigheden zeker niet succesvol, ook al is het model goed.

De split record test werd toegepast op de buizen 16, 18 en 22. Met de parameteroplossingen in bijlage 4, die zijn gebaseerd op waarnemingen in de jaren 1958, 1959 en 1960, werden de grondwaterstanden in de vrij normale jaren 1956 en 1957 berekend en vergeleken met de gemeten grondwaterstanden. Omgekeerd werden met parameteroplossingen

gebaseerd op waarnemingen in de jaren 1956, 1957 en 1958 de grondwaterstanden in de sterk afwijkende jaren 1959 en 1960 berekend en vergeleken met gemeten waarden. Het resultaat van deze test is samengevat in tabel 3. Ter vergelijking is berekend welke efficiëntie-coëfficiënt en standaardafwijking voor de testjaren worden gevonden als de parameterwaarden worden gebruikt, die zijn gevonden op grond van de waarnemingen in deze testjaren en het tamelijk natte jaar 1958.

Tabel 3. Resultaten van een split record test

Testjaren 1956, 1957				Testjaren 1959, 1960			
Parameterwaarden uit				Parameterwaarden uit			
1956, '57, '58		1958, '59, '60		1958, '59, '60		1956, '57, '58	
R_2	S_a	R^2	S_a	R_2	S_a	R^2	S_a
0,904	10,8 cm	0,876	12,8 cm	0,950	10,8 cm	0,819	20,4 cm
0,869	11,0 cm	0,847	11,9 cm	0,942	13,2 cm	0,730	28,1 cm
0,833	13,1 cm	0,797	14,4 cm	0,961	10,1 cm	0,795	23,2 cm

Het blijkt dat parameteroplossingen goed passen bij tweederde deel van de waarnemingen waarop ze zijn gebaseerd. In 1956, '57 is deze aanpassing vrijwel gelijkwaardig aan die in 1959, '60. De lagere efficiëntie-coëfficiënt in 1956, '57 komt doordat de variantie van de grondwaterstanden in deze jaren kleiner was dan in de afwijkende jaren 1959 en 1960. De test op de jaren 1956 en 1957 levert een weinig grotere standaardafwijking van de berekende grondwaterstanden op. De test op de jaren 1959 en 1960 laat echter een ruime verdubbeling van de standaardafwijking zien.

Extrapolatie vanuit natte tot normale naar droge toestanden lukte dus niet. Onvolledige bemonstering is hiervan de oorzaak. Interpoleren tussen natte en droge situaties wordt hierdoor niet bemoeilijkt en dit leverde dan ook een zeer bevredigend resultaat op. Dat dit toch nog voor verbetering vatbaar lijkt, kan veroorzaakt worden doordat in het model nog een invloed op de grondwaterbeweging

wordt veronachtzaamd, die zich in de periode van de vereffening en in die van de split record test niet even sterk voordoet. Dit zou bijvoorbeeld vorst kunnen zijn. Het is echter veel waarschijnlijker dat het resultaat van de vereffening niet optimaal is geweest. Het is bijvoorbeeld mogelijk dat het echte minimum niet is gevonden. In hoofdstuk 7 zal hieraan de aandacht worden gegeven.

7. TEST OP DE UNI-VARIATE METHODE

a. Synthetische testgegevens

Voor een beoordeling van de betekenis van de parameteroplossingen, die met de gebruikte uni-variate methode zijn verkregen is het van belang om te weten in hoeverre deze methode in staat is om het minimum van de functiewaarde te vinden. Wanneer gemeten grondwaterstanden als vereffeningscriterium worden gebruikt dan is dit niet te beoordelen. Door tekortkomingen in de uitwerking van de waterbalansvergelijking en door onnauwkeurigheden van de grondwaterstands- en neerslagmeting en van de berekening van dagwaarden voor de Penman-verdamping is de grootste waarde van de efficiëntie-coëfficiënt, die in een gegeven geval kan worden bereikt, onbekend en in ieder geval kleiner dan 1. De werkelijke parameterwaarden zijn ook niet bekend en men is er nooit zeker van of en in hoeverre het resultaat van een vereffening nog verbeterd kan worden.

Het heeft overtuigende voordelen om foutloze testgegevens door te rekenen (O'DONNELL, 1966). Voor het waterbalansmodel betekent dit dat met een gegeven combinatie van parameterwaarden en gegeven neerslag- en verdampingscijfers een tijdstijghoogtelijn wordt berekend. Punten op deze lijn zijn grondwaterstanden, die gebruikt kunnen worden om de gegeven parameterwaarden op te lossen uit afwijkende beginwaarden. Dit criterium is vrij van toevallige en systematische fouten en bovendien is de oplossing van de parameterwaarden bekend. Het testen van de vereffeningsmethode is daarom eenvoudig. Een beoordeling van de fysische beschrijving van de processen in de waterbalansvergelijking geeft deze test uiteraard niet.

Voor de test op de uni-variate methode zijn van buis nr. 16 de

parameterwaarden uit bijlage 4 gebruikt om de grondwaterstanden te berekenen op de dagen in de jaren 1958, 1959 en 1960 waarop ook een grondwaterstand werd gemeten, of althans gemeten had moeten worden volgens de toen geldende instructies. Deze berekende grondwaterstanden werden als criterium gebruikt voor de vereffening met verschillende beginschattingen van de parameterwaarden en met voor één van deze combinaties verschillende parametervolgorden.

Voor het kiezen van verschillende combinaties van beginschattingen werd de opvatting uit de literatuur (IBBITT, 1970) overgenomen, dat men altijd zo goed mogelijke beginschattingen zal doen en dat die een toevallige spreiding om de goede waarde zullen hebben. Daarom werden voor iedere parameter zes mogelijke beginschattingen gemaakt. Dit waren, behalve de 'goede' waarde uit bijlage 4, daarboven en daaronder met 10% en 20% afwijkende waarden en aan een kant een met 30% afwijkende waarde. Dit was afhankelijk van de plaats die de 'goede' waarde in de rangorde van zes innam. Voor de eerste parameter in de iteratievolgorde was dit de derde plaats, voor de tweede de vierde, voor de derde weer de derde, enz. De keuze der beginschattingen uit zes mogelijkheden werd met een dobbelsteen verricht. Op deze wijze werden drie combinaties gemaakt. Als vierde combinatie werden de beginschattingen uit bijlage 4 genomen en hiermee werd de vereffening tweemaal herhaald met andere volgorden van de parameters in de iteratie. De drie volgorden zijn aangegeven in tabel 4.

Tabel 4. Drie parametervolgorden waarmee de vereffening van het model met 15 parameters is herhaald

Nr.	Volgorde														
1	b_0	b_1	b_4	b_2	b_3	S_3	S_2	S_1	c_1	c_2	d_1	d_2	g	α	K_0
2	K_0	α	g	d_2	d_1	c_2	c_1	S_1	S_2	S_3	b_3	b_2	b_4	b_1	b_0
3	b_0	c_1	b_1	c_2	b_4	d_1	b_2	d_2	b_3	g	S_3	α	S_2	K_0	S_1

b. H e t r e s u l t a a t v a n v e r e f f e n i n g m e t
f o u t l o z e t e s t g e g e v e n s

Bij de zes verschillende pogingen, die gedaan zijn om bekende parameterwaarden te vinden werd de vereffening met foutloze testgegevens tot en met de derde ronde (zie onder par. 5a) voortgezet. Het resultaat werd na iedere ronde samengevat. In bijlage 5 zijn de parameterwaarden na iedere ronde opgegeven evenals het totaal aantal iteraties, de efficiëntie-coëfficiënt en de standaardafwijking van de berekende grondwaterstanden. Verder werden uit de n (= zes) voor iedere parameter gevonden waarden p_i na iedere ronde berekend:

- a) de gemiddelde afwijking ten opzichte van de goede waarde p' . Dit is Δp in tabel 5, berekend als

$$\Delta p = \frac{\sum (p_i - p')}{n} \quad (26)$$

- b) de standaardafwijking van de gevonden waarden ten opzichte van de goede waarde. Dit is S_{ao} in tabel 5, berekend als

$$S_{ao} = \sqrt{\frac{\sum (p_i - p')^2}{n}} \quad (27)$$

- c) de standaardafwijking van de gevonden waarden ten opzichte van hun eigen gemiddelde $\bar{p}$. Dit is S_{ag} in tabel 5, berekend als

$$S_{ag} = \sqrt{\frac{\sum (p_i - \bar{p})^2}{n-1}} \quad (28)$$

In tabel 6 worden de grootheden in tabel 5 uitgedrukt in procenten van de goede parameterwaarden.

Het blijkt in bijlage 5 dat het percentage van de oorspronkelijke variantie van de foutloze testgegevens dat verklaard is, zeer hoog is. Toch is na de eerste ronde Δp voor de afvoerparameters nogal groot en S_{ao} is voor enige afvoerparameters zeer hoog en voor de overige parameters over het algemeen aanzienlijk. S_{ag} is over het algemeen wat kleiner dan S_{ao} .

De tweede en derde ronde brengen een kleine verbetering in de

Tabel 5. Overzicht van de gemiddelde afwijking Δp ten opzichte van de goede waarde, van de standaardafwijking S_{ao} t.o.v. de goede waarde en van de standaardafwijking S_{ag} t.o.v. de gemiddelde oplossing van zes verschillende vereffeningen voor buis nr. 16. $\bar{S}_{aw}$ is de gemiddelde standaardafwijking van de berekende t.o.v. de gemeten grondwaterstanden

Ronde	n	$\overline{S}_{aw}$		b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	S_1	S_2	S_3	c_1	c_2	d_1	d_2	g	α	K_0
1	622	1.77	Δp	+0.0174	-.00022	+0.00468	+0.0009	-.0125	-11.5	-1.5	-28.3	+0.0180	-.001	-.17	-.074	-.0221	-.00112	-.0863
			S_{ao}	.0189	.00024	.00996	.00111	.0604	16.7	21.3	32.6	.0601	.0147	8.0	.179	.0677	.00135	.413
			S_{ag}	.0086	.00016	.00941	.00080	.0658	13.3	23.3	20.9	.0474	.0160	8.8	.180	.0722	.00082	.440
2	1077	1.48	Δp	+0.0175	-.00018	+0.00467	+0.00085	-.0209	-11.0	-3.0	-28.0	+0.0134	-.0008	+3.8	-.080	-.0200	-.00108	-.0960
			S_{ao}	.0191	.00022	.00955	.00123	.0481	16.3	21.5	33.9	.0507	.0147	19.3	.197	.0639	.00133	.4140
			S_{ag}	.0107	.00013	.00905	.00103	.0475	12.9	23.3	21.0	.0501	.0160	20.4	.198	.0670	.00084	.4400
3	1448	1.45	Δp	+0.0178	-.00019	+0.00503	+0.00091	-.0209	-11.0	-4.0	-26.8	+0.0134	-.0008	+20.2	-.080	-.0196	-.00114	-.0960
			S_{ao}	.0193	.00020	.00979	.00140	.0481	16.3	22.3	33.9	.0504	.0147	58.1	.197	.0621	.00134	.4140
			S_{ag}	.0085	.00010	.00901	.00117	.0475	12.9	24.0	21.-	.0508	.0160	60.8	.198	.0653	.00085	.4400
$t_{0,90}(v=5)=1.476$			t_o	5.13	4.65	1.37	1.91	1.08	2.09	4.08	3.13	0.65	0.12	0.81	0.99	0.74	3.29	0.53

Tabel 6. Δp , S_{ao} en S_{ag} uit tabel 4 in procenten van de bekende goede waarde

	Ronde	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	S_1	S_2	S_3	C_1	C_2	d_1	d_2	g	α	K_o
Δp	1	+174	-37.9	+161.3	+30.0	-4.9	-15.5	-1.4	-18.2	+2.3	- 1	- 1	-15.2	-3.2	-12.8	-2.7
	2	+175	-31.0	+161.00	+28.3	-8.2	-14.8	-2.7	-17.8	+1.7	- 1	+9.6	-16.5	-2.9	-12.3	-3.0
	3	+178	-32.8	+167.8	+30.3	-8.2	-14.8	-3.6	-17.1	+1.7	- 1	+51.0	-16.5	-2.8	-13.0	-3.0
S_{ao}	1	189	41.3	343	37.0	23.7	22.6	19.4	20.8	7.5	11.6	20.2	36.9	9.9	15.4	12.9
	2	191	37.9	329	41.0	18.8	22.0	19.6	21.6	6.1	11.6	48.8	40.6	9.3	15.2	12.9
	3	193	34.4	337	46.7	18.8	22.0	20.3	21.6	6.3	11.6	147.0	40.6	9.1	15.3	12.9
S_{ag}	1	86	27.6	324	26.7	25.8	18.0	21.2	13.3	5.9	12.6	22.2	37.1	10.5	9.4	13.7
	2	107	22.4	312	34.3	18.6	17.4	21.2	13.4	6.3	12.6	51.6	40.8	9.8	9.6	13.7
	3	85	17.2	300	39.0	18.6	17.4	21.8	13.4	6.4	12.6	154.0	40.8	9.5	9.7	13.7

aanpassing. Op de parameteroplossingen heeft dit een verschillend effect, sommigen worden wat beter, anderen wat slechter, maar veel verandert er over het geheel genomen niet. In een enkel geval zoals bijvoorbeeld nr. 3 gaat een parameter in de achtereenvolgende rondes een steeds sterker afwijkende waarde geven en kan dan een afhankelijke parameter meeslepen. Dit is duidelijk het geval met de parameters d_1 en d_2 en met b_0 en S_3 . In bijlage 5 zijn deze sterk afwijkende waarden gemerkt. Zonder dit verschijnsel zou het resultaat voor deze parameters in tabel 5 en 6 aanmerkelijk beter zijn geweest.

Opmerkelijk is dat in het vierde geval na de eerste ronde in het geheel geen verbetering bereikt wordt. In het zesde geval wordt het minimum het dichtst benaderd en het valt op, dat in dit geval de parameters dicht bij de goede waarde liggen, behalve weer enige afvoerparameters.

Op de parameterwaarden na de derde ronde is de toets van Student toegepast. De waarde van de toetsingsgrootheid, die berekend kan worden als

$$t_o = \frac{\Delta p \cdot \sqrt{6}}{S_{ag}} \quad (29)$$

is in tabel 5 opgegeven. De kritische waarde bij eenzijdige toetsing met een drempelwaarde $\alpha = 0.10$ en $v = 5$ is $t_{0.90} = 1.476$. Hieruit blijkt dat de parameteroplossingen voor b_0 , b_1 , b_3 , S_1 , S_2 , S_3 en α significant te hoog of te laag zijn.

In fig. 9 is het aantal iteraties uitgezet tegen de standaardafwijking S_{aw} van de berekende grondwaterstanden. De cijfers zijn te vinden in bijlage 5. Naarmate het aantal iteraties toeneemt, daalt S_{aw} en in incidentele gevallen kan verwacht worden dat na een groot aantal iteraties een zeer goed resultaat van de vereffening wordt bereikt. Het gemiddelde aantal iteraties na iedere ronde uitgezet tegen de gemiddelde S_{aw} laat echter zien dat gemiddeld voor een enkele oplossing een minder goed resultaat moet worden verwacht.

c. Vergelijking met vereffening van gemeten waarnemingen

De zeer hoge waarden voor de efficiëntie-coëfficiënt R^2 die in

bijlage 5 worden gegeven zijn een gevolg van het werken met foutloze gegevens. Er blijkt wel uit dat het mogelijk is om met de gebruikte vereffeningstechniek een zeer groot gedeelte van de verklaarbare variantie van de grondwaterstanden te elimineren. Men kan zich afvragen welke waarde van R^2 men mag verwachten te bereiken als met gemeten grondwaterstanden wordt gewerkt. Om hiervan een indruk te krijgen, is de vereffening in drie ronden voor buis nr. 16 met dezelfde beginschattingen en parametervolgorde herhaald met de gemeten grondwaterstanden als criterium. De na de drie ronden gevonden parameterwaarden zijn opgegeven in bijlage 6 met het aantal iteraties en de standaardafwijking van de berekende grondwaterstanden. Hieruit is voor iedere ronde het gemiddelde van deze standaardafwijking berekend en in fig. 9 uitgezet tegen het gemiddeld aantal iteraties. De samenhang tussen beide grootheden vertoont hetzelfde verloop als voor de foutloze testgegevens. Er is echter een niveauverschil van ongeveer 9 centimeter, waaruit zou volgen dat voor deze buis een S_{aw} van ca. 10,5 cm het minimum is, dat gemiddeld voor een enkele oplossing te verwachten is. Voor iedere buis zal dit onverklaarbare deel van de oorspronkelijke variantie van de grondwaterstanden verschillend zijn. De cijfers in tabel 2 onder par. 6b wijzen er misschien op, dat dit met de gegevens van het Archief voor grondwaterstanden TNO uit de betreffende jaren en voor de betreffende gronden niet veel minder dan 8 cm zal zijn. In voorkomende gevallen zal dit wat gunstiger kunnen uitvallen en misschien 7 cm bedragen.

Het valt op in bijlage 6 dat de verschillende vereffeningen dezelfde kenmerken vertonen als in bijlage 5. De sterk afwijkende uitkomsten voor parameters b_0 , d_1 en d_2 komen op dezelfde plaats voor. Ook wordt bijvoorbeeld in de vijfde poging de laagste waarde voor de parameter K_0 gevonden. Of er een systematische invloed is van beginschatting of parametervolgorde op de oplossing is een vraag, die hierdoor rijst, maar waarop geen antwoord is te geven zonder een groter aantal buizen in een dergelijke studie te betrekken.

In bijlage 6 is de standaardafwijking van de parameteroplossin-

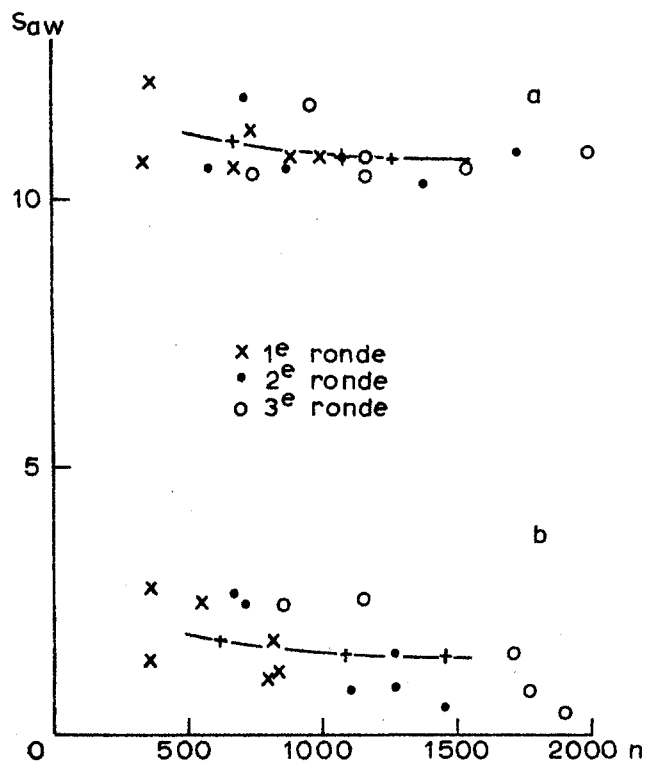


Fig. 9. De samenhang tussen het aantal iteraties n en de standaardafwijking S_{aw} van de berekende grondwaterstanden, voor gemeten waarnemingen (a) en foutloze gegevens (b). De lijnen geven de samenhang tussen het gemiddeld aantal iteraties en de gemiddelde S_{aw} na iedere ronde weer

gen na de derde ronde om hun gemiddelde berekend. Uit vergelijking met dezelfde grootheid S_{ag} van de vereffening met foutloze testgegevens in tabel 5 blijkt dat de met fouten behepte waarnemingen, behalve een grotere standaardafwijking van de berekende grondwaterstanden, uiteraard ook minder betrouwbare parameteroplossingen geven.

8. CONCLUSIES

Het succes van de toepassing van de 'trial and error' technieken op het waterbalansmodel kan op drie niveaus worden beoordeeld, namelijk:

- a) aan de berekende grondwaterstanden, dat is aan de resultante van de werking van alle parameters in het model;
- b) aan de berekende waarden van de afzonderlijke posten op de waterbalans, dat is het samenspel van een deel van de parameters in het model;
- c) aan de berekende waarden van de afzonderlijke parameters in het model.

Het is duidelijk dat van a naar c de eisen steeds toenemen. Het gemakkelijkste wordt voldaan aan de eis sub a, omdat het niet van belang is of de oplossing van de afzonderlijke parameters is beïnvloed door gecorreleerde parametereffecten. Op grond van voorgaande gegevens lijkt de conclusie gerechtvaardigd dat aan de eis sub a met het model met 15 parameters en de weinig verfijnde uni-variate vereffeningstechniek kan worden voldaan binnen de beperkingen, die het gevolg zijn van tekortkomingen van de voor de vereffening beschikbare gegevens. Als deze beperkingen te groot zijn doordat bijvoorbeeld te weinig verschillende omstandigheden zijn bemonsterd, dan krijgt de vereffening een te beperkte betekenis om nog zinvol te zijn.

Of aan de eis sub b wordt voldaan, is niet na te gaan omdat de bijdrage aan de afvoer vanuit een bepaald punt in een afvoergebied niet meetbaar is. In een zeer homogeen gebied zou de afvoer van dat gebied misschien als maatstaf kunnen dienen. Wanneer de afvoer als te reconstrueren grootheid van belang is, dan kan in plaats van de

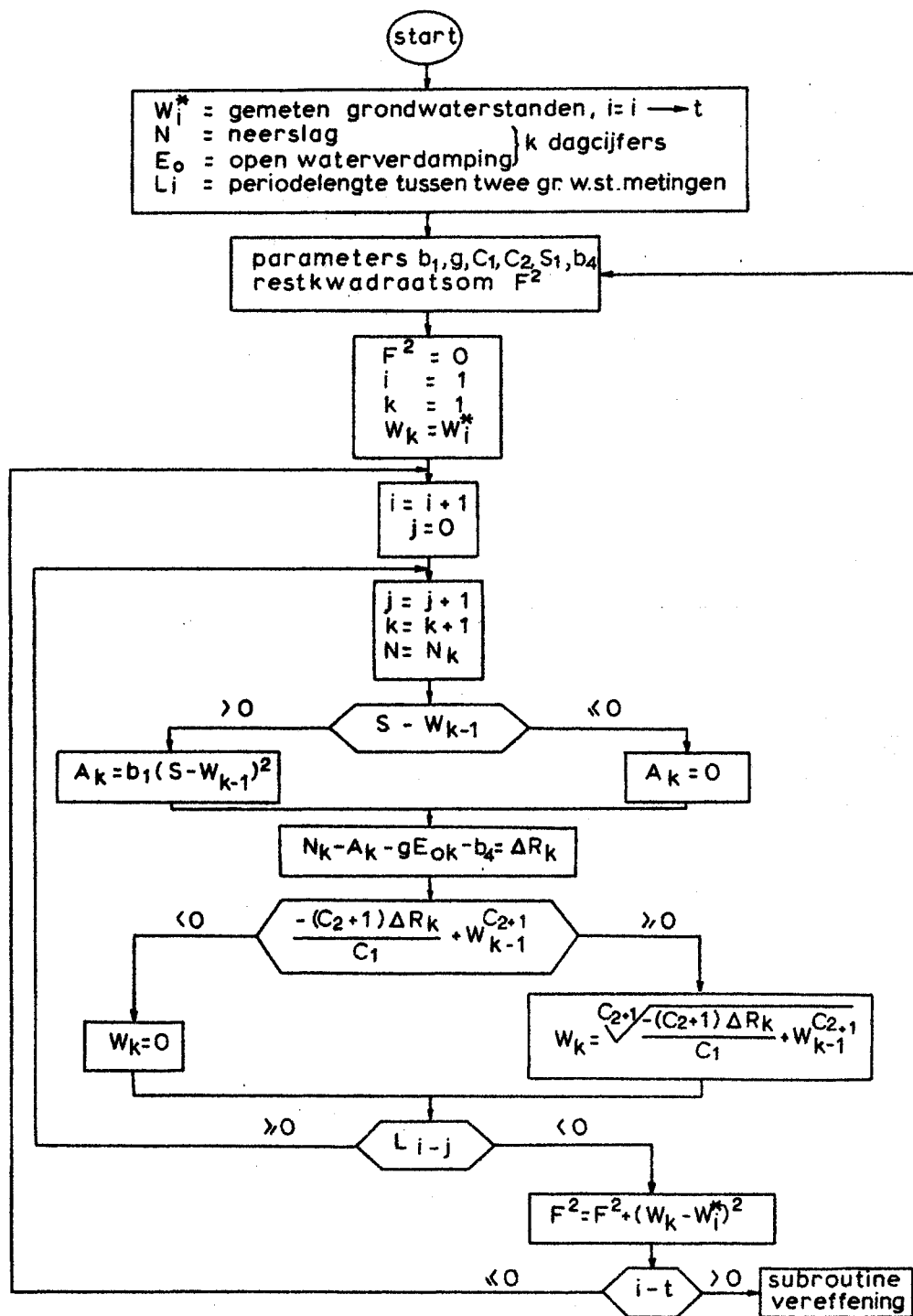
grondwaterstand de op een meetpunt waargenomen afvoer als vereffeningscriterium worden gebruikt. De parameteroplossingen zullen dan voor het afvoergebied gelden en aan dezelfde moeilijkheden en beperkingen onderhevig zijn, maar ook dezelfde mogelijkheden bieden als wanneer gemeten grondwaterstanden de basis ervoor vormen. Succesvolle beginstudies in deze richting zijn al verricht.

Met betrekking tot de eis sub c moet worden geconcludeerd dat ondanks een efficiëntie-coëfficiënt, die gezien de kwaliteit van de waarnemingen en de tekortkomingen in het model hoog moet worden genoemd, de parameteroplossingen niet zeer betrouwbaar lijken. Dit geldt vooral voor een aantal afvoerparameters. Dit lijkt het gevolg te zijn van het optreden van vrij sterke correlaties tussen parameterinvloeden, vooral in de afvoerfunctie, en van het feit dat dicht bij het minimum aanzienlijke veranderingen in de parameterwaarden weinig verandering in de functiewaarde F^2 tot gevolg blijken te hebben. Aangezien deze gegevens uitgangspunten zijn, lijkt de verwachting gerechtvaardigd dat een verfijndere vereffeningstechniek niet zo veel betere resultaten zal opleveren en dat eerder verbetering van de modeleigenschappen noodzakelijk is. Bij voortgezet modelonderzoek zal het toepassen van statistische technieken bij het beoordelen van de resultaten waarschijnlijk een objectiever en scherper beeld te kunnen geven van de mogelijkheden van de vereffening van het hydrologisch model. Vooralsnog lijkt het aan te bevelen om het tot nu toe bereikte resultaat als een stadium in de ontwikkeling van het hydrologisch modelonderzoek te beschouwen en bij de toepassing ervan enige reserve in acht te nemen.

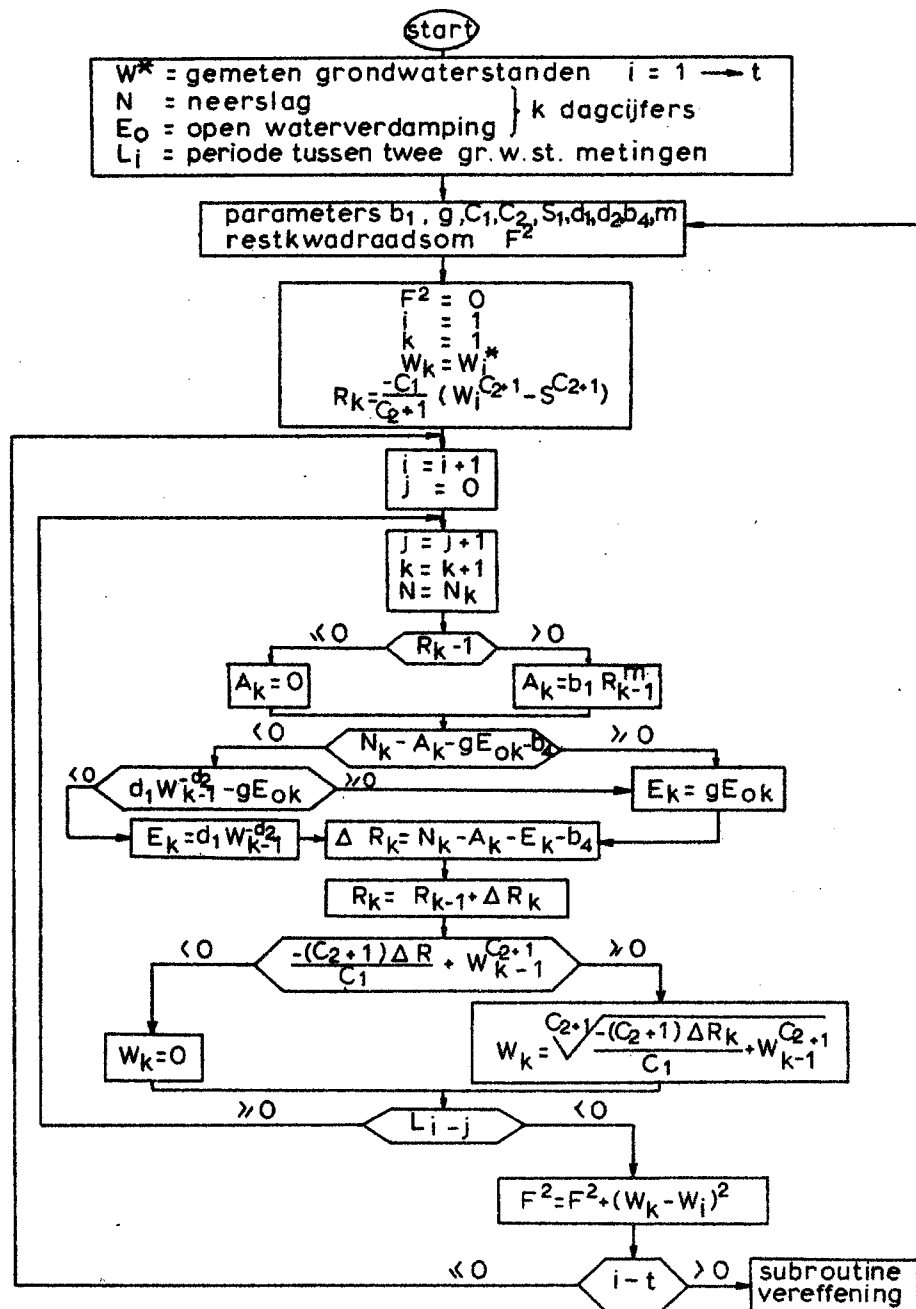
9. LITERATUUR

- BLOEMEN, G.W. 1970. Berging, afvoer en verdamping in de Gelderse Achterhoek volgens grondwaterstandsanalyse. In: Hydrologisch onderzoek in het Leerinkbeekgebied. Tweede interimrapport Commissie ter bestudering van de Waterbehoefte van de Gelderse Landbouwgronden, Arnhem. Deelrapport 9
- ERNST, L.F. 1967. Wateronttrekking door diepe putten. Nota 353 I.C.W. (gewijzigd)

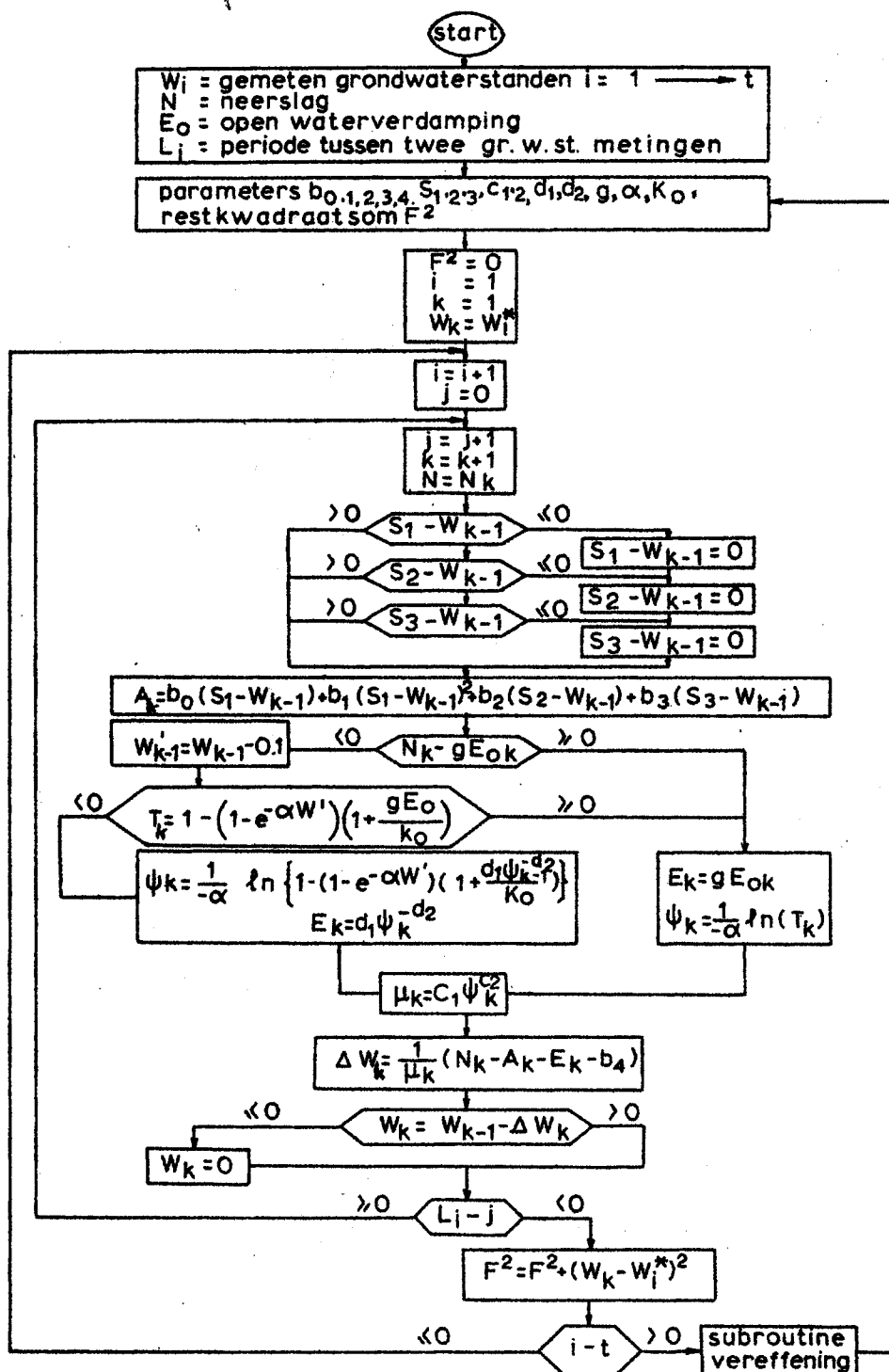
- ERNST, L.F., N.A. DE RIDDER en J.J. DE VRIES. 1970. A geohydrologic study of East Gelderland. *Geologie en Mijnbouw* 49.6
- IBBITT, R.P. 1970. Systematic parameter fitting for conceptual models of catchment hydrology. Thesis University of London
- KOWALIK, J. and M.R. OSBORNE. 1968. Methods for unconstrained optimization problems. New York, American Elsevier Publishing Company
- MURRAY, D.L. 1970. Boughton's daily rainfall-runoff model modified for the Brenig catchment. I.A.S.H.-Unesco. Symposium on the results of research on representative and experimental basins, Wellington (N.Z.)
- NELDER, J.A. and R. MEAD. 1965. A simple function for function minimization. *The Computer Journal*, vol. 7
- O'DONNELL. 1966. Methods of computation in hydrograph analysis and synthesis. Proc. and Inform. no 13, Comm. for Hydrology Research, TNO, Den Haag
- POWELL, M.J.D. 1964. An efficient method for finding the minimum of several variables without calculating derivatives. *The Computer Journal*, vol. 7
- RIJTEMA, P.E. 1965. An analysis of actual evapotranspiration. *Agric. Res. Rep.* 659
- ROSENBROCK, H.H. 1960. An automatic method for finding the greatest or least value of a function. *The Computer Journal*, vol. 3
- SPANG, H.A. 1962. A review of minimization techniques for non linear functions. *S.I.A.M. Review*, vol. 4, no 4
- VISSER, W.C. 1971. The model of the water balance and nutrient uptake as a basis for hydrological, agro-hydrological and other projects. *Nota* 617 I.C.W.
- ZEEUW, J.W. en F. HELLINGA. 1958. Neerslag en afvoer. *Landbouwk. Tijdschr.* 70.5



bijlage I. Rekenschema voor een waterbalansmodel met 6 parameters



bijlage II. Rekenschema voor een waterbalansmodel met 9 parameters



bijlage III . Rekenschema voor een waterbalansmodel met 15 parameters

Bijlage 4a. Overzicht van de parameteroplossingen voor het model van 6 en dat met 9 parameters voor 10 meetpunten van de grondwaterdiepte in Salland met de standaardafwijking S_{aw} van de berekende grondwaterstanden

Nr.	S_{aw}	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	S_1	S_2	S_3	m	C_1	C_2	d_1	d_2	g	α	K_0
4	9.3		.00071			0.0	243				0.16	0.842			0.78		
5	9.3		.00045			-1.35	128				0.30	1.435			0.86		
8	24.7		.00083			-0.50	74				0.22	1.608			0.93		
11	18.4		.00077			-1.25	105.5				0.17	1.533			0.89		
12	18.5		.00059			-2.00	95				0.21	0.895			1.27		
13	17.4		.00049			-2.00	158				0.62	0.003			1.51		
14	13.4		.00167			-2.00	99.5				0.19	1.383			1.20		
16	11.6		.00016			0.0	118				0.19	1.325			0.48		
18	9.7		.00026			0.0	108.5				0.19	1.018			0.58		
22	10.5		.00074			-1.0	127.5				0.19	0.918			0.91		
gem.	14.3		.00067			-1.0	125.7				0.24	1.096			0.94		
4	14.9		.0080			-.27	137.5			.780	.148	1.050	.0032	.29	.650		
5	8.0		.0118			-.38	75.0			.700	.161	.625	.0016	2.23	.688		
8	17.1		.0079			-.57	30.0			.100	.189	.469	.0034	.64	.606		
11	12.4		.0090			-.18	72.5			.225	.128	1.125	.0021	1.03	.600		
12	15.5		.0073			-.19	7.5			.525	.137	.169	.0021	1.04	.681		
13	14.2		.0065			-.50	120.0			.738	.198	.025	.0022	.33	.663		
14	13.6		.0088			-.19	70.0			.369	.134	.790	.0025	.99	.650		
16	10.5		.0094			-.27	20.0			.438	.143	.330	.0016	1.39	.800		
18	11.1		.0248			-.22	40.0			.300	.151	.410	.0020	.51	.800		
22	10.8		.0105			-.13	96.5			.475	.130	.570	.0026	.59	.575		
gem.	12.8		.0104			-.29	67.0			.465	.152	.556	.0023	.90	.67		

Bijlage 4b. Als bijlage 4a, voor het model met 11 en dat met 15 parameters

nr.	S _{aw}	b ₀	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	m	S ₁	S ₂	S ₃	C ₁	C ₂	d ₁	d ₂	g	α	K ₀
4	8.8	.035	.000187			-.180	115.5				.940	.130	67.0	0.50	.873	.0044	2.827
5	9.5	.018	.000633			-.060	90.0				.960	.136	32.75	0.62	.700	.0068	2.842
8	15.1	.045	.000000			-.285	55.0				1.208	.190	50.0	0.50	.760	.00005	3.607
11	13.8	.119	.001452			.000	82.0				1.009	.137	65.0	0.59	.745	.0061	2.530
12	16.3	.010	.000507			-.098	78.0				.902	.067	32.0	0.51	.648	.0068	2.970
13	13.8	.029	.000000			-.165	132.0				1.019	.250	56.0	0.44	.685	.0019	3.120
14	12.9	.042	.000930			.000	84.5				.923	.100	42.5	0.47	.618	.0053	3.000
16	10.8	.032	.000470			.000	70.0				.969	.085	34.0	0.56	.685	.0073	2.840
18	11.2	.000	.000580			-.030	93.5				.776	.167	28.0	0.79	.633	.0068	4.42
22	10.2	.033	.000517			-.008	109.0				.955	.115	57.0	0.58	.588	.0049	3.18
gem.	12.2	.0363	.000528			-.0826	91				.966	.138	47.0	.56	.690	.0050	3.13
4	8.3	.01000	.00044	.0495	.00590	.090	26	100	206		.874	.1495	114.5	.35	.730	.0049	3.705
5	8.8	.06775	.00060	.0345	.00670	-.180	37	88	144.5		.879	.1585	23	.50	.625	.0070	2.865
8	15.5	.01000	.00070	.0045	.00500	-.120	38	56.5	237.5		1.031	.2343	50	.50	.700	.00005	4.178
11	14.0	.2320	.00302	.0135	.00150	-.370	75.5	91	205		.895	.1720	81	.58	.858	.0071	3.353
12	11.1	.03180	.00097	.0030	.00440	-.135	47	95.5	170		.795	.1098	14	1.10	.640	.0054	3.383
13	14.3	.00025	.00011	.0203	.00470	-.015	.5	131	225.5		1.023	.2222	71	.60	.625	.0049	3.128
14	12.7	.00025	.00236	.0143	.00140	-.113	80	91	255.5		.800	.1180	80	.32	.580	.0074	4.200
16	10.8	.01000	.00058	.0029	.03010	-.255	74	110	157		.798	.1270	39.5	.49	.685	.0088	3.255
18	11.4	.06555	.00090	.0180	.00162	-.113	46	97	102		.869	.1555	50	.50	.580	.0041	4.680
22	10.2	.05350	.00138	.0323	.00005	-.083	75.5	118	214		.863	.1518	50	.50	.580	.0002	4.575
gem.	12.1	.0481	.00110	.01927	.00612	-.129	50	98	202		.883	.1600	57	.54	.660	.0050	3.73

Bijlage 5. Overzicht van de parameterwaarden, de efficiëntie-coëfficiënt R^2 en de standaardafwijking S_{aw} van de berekende grondwaterstanden na de eerste, tweede en derde ronde van verschillende vereffeningen met foutloze grondwaterstandsgegevens en bekende parameteroplossingen

	n	R^2	S_{aw}	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	s_1	s_2	s_3	c_1	c_2	d_1	d_2	g	α	K_0
Op1.		1.0000	0.0	.01000	.00058	.00290	.00300	-.2550	74.	110.00	157.00	.7980	.127	39.50	.485	.6850	.00875	3.2550
1	803	.9980	1.76	.03025	.00042	.00380	.00510	-.3000	67.	83	89	.7520	.147	35.75	.485	.7925	.00890	3.9310
2	365	.9988	1.39	.01100	.00041	.00232	.00380	-.3375	81.	122	130	.8005	.136	41.25	.485	.6850	.00700	2.8325
3	369	.9950	2.77	.02600	.00049	.00260	.00450	-.1450	65.	117	130	.8967	.102	54.75	.047	.6250	.00667	3.1900
4	552	.9960	2.47	.03100	.00026	.00620	.00300	-.2400	62.	140	147	.8290	.115	29.00	.500	.5800	.00740	3.0300
5	829	.9992	1.14	.03100	.00041	.02700	.00380	-.2400	40.	80	145	.8100	.126	35.00	.448	.6475	.00755	2.6775
6	816	.9992	1.08	.03550	.00014	.00920	.00300	-.2325	60.	109	131	.8070	.129	40.25	.500	.6475	.00823	3.2925
1	1258	.9985	1.53	.03175	.00033	.00384	.00555	-.2775	67.	83	90	.7482	.147	35.00	.485	.7775	.00898	3.9310
2	1103	.9995	0.87	.01100	.00045	.00142	.00316	-.2775	81.	117	133	.7855	.137	36.00	.485	.6850	.00700	2.8325
3	670	.9955	2.64	.02712	.00044	.00301	.00454	-.1487	65.	118	125	.8967	.102	84.75	.002	.6250	.00667	3.1900
4	703	.9960	2.47	.03100	.00026	.00620	.00300	-.2400	62.	140	146	.8290	.115	29.00	.500	.5800	.00740	3.0300
5	1273	.9995	0.87	.03100	.00059	.02599	.00395	-.2400	41.	78	148	.8027	.126	35.75	.455	.6550	.00770	2.6775
6	1455	.9998	0.52	.03325	.00028	.00860	.00289	-.2212	60.	107	132	.7960	.130	38.75	.500	.6662	.00830	3.2925
1	1719	.9985	1.52	.03175	.00031	.00395	.00592	-.2775	67.	80	90	.7558	.145	35.00	.485	.7775	.00898	3.9310
2	1309	.9995	0.86	.01100	.00045	.00142	.00316	-.2775	81.	117	133	.7855	.137	36.00	.485	.6850	.00700	2.8325
3	1157	.9957	2.56	.02712	.00044	.00331	.00454	-.1487	65.	118	123	.8967	.102	183.75	.002	.6250	.00667	3.1900
4	854	.9960	2.47	.03100	.00026	.00620	.00300	-.2400	62.	140	146	.8290	.115	29.00	.500	.5800	.00740	3.0300
5	1766	.9995	0.86	.03325	.00049	.02591	.00395	-.2400	41.	78	148	.8028	.126	35.75	.455	.6550	.00770	2.6775
6	1884	.9999	0.44	.03250	.00031	.00841	.00289	-.2212	60.	105	135	.7923	.131	38.75	.500	.6699	.00834	3.2925

Bijlage 6. Overzicht van de parameterwaarden, de efficiëntie-coëfficiënten R^2 en de standaardafwijking S_{aw} van de berekende grondwaterstanden na de eerste, tweede en derde ronde van vereffening met gemeten grondwaterstanden en verschillende beginschattingen en parametervolgorden. S_{ag} is de standaardafwijking van de parameteroplossingen na de derde ronde om hun gemiddelde

	n	R ²	S _{aw}	b ₀	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	S ₁	S ₂	S ₃	C ₁	C ₂	d ₁	d ₂	g	α	K ₀	Ronde	
1	682	0.936	10.5	.03325	.00033	.00687	.00097	-.1875	67	50	50	.803	.119	32.75	.485	.8225	.00995	4.156	1	
2	343	0.936	10.6	.00725	.00039	.00282	.00217	-.3150	81	135	160	.738	.144	33.75	.485	.7000	.00745	2.930		
3	371	0.917	12.2	.03425	.00110	.00627	.00330	-.2650	53	100	136	.847	.102	122.25	.002	.7450	.00787	3.580		
4	996	0.933	10.8	.01000	.00058	.00290	.00300	-.2550	74	110	157	.798	.127	39.50	.485	.6850	.00875	3.255		
5	879	0.933	10.8	.05650	.00102	.00170	.02700	-.1050	23	145	84	.791	.120	61.25	.365	.6250	.00725	2.385		
6	734	0.927	11.3	.02050	.00023	.00300	.00395	-.375	74	145	170	.824	.130	14.75	.755	.5950	.00725	3.818		
1	984	onveranderd																		2
2	589	0.936	10.5	.00687	.00039	.00282	.00217	-.3150	81	135	162	.723	.148	33.37	.485	.7037	.00745	2.930		
3	708	0.918	11.8	.03762	.00078	.00627	.00330	-.2650	53	100	135	.847	.089	133.50	.002	.7450	.00787	3.580		
4	1376	0.936	10.5	.00737	.00044	.00380	.00307	-.2550	74	109	160	.753	.136	38.0	.485	.7000	.00890	3.255		
5	1085	0.933	10.8	.05762	.00101	.00170	.02685	-.1050	23	145	84	.791	.120	62.37	.369	.6250	.00725	2.385		
6	1733	0.931	11.0	.00925	.00023	.00334	.00414	-.3750	84	145	158	.768	.146	3.88	.549	.6025	.00710	3.780		
1	1157	0.936	10.4	.03325	.00033	.00687	.00089	-.1875	67	50	50	.803	.119	33.13	.485	.8225	.00999	4.156	3	
2	740	onveranderd																		
3	960	0.918	11.8	.03874	.00070	.00631	.00330	-.2650	53	100	135	.847	.089	146.25	.002	.7450	.00787	3.580		
4	1546	onveranderd																		
5	1163	0.933	10.8	.05837	.00101	.00170	.02677	-.1050	23	146	84	.791	.120	63.49	.369	.6250	.00725	2.385		
6	1982	0.930	10.9	.00925	.00023	.00330	.00414	-.3825	84	145	158	.760	.151	1.63	.556	.6100	.00710	3.780		
		S _{ag}	10.8	.02160	.00029	.00204	.00986	.0970	23	37	47	.046	.023	50.0	.205	.079	.00113	.633		