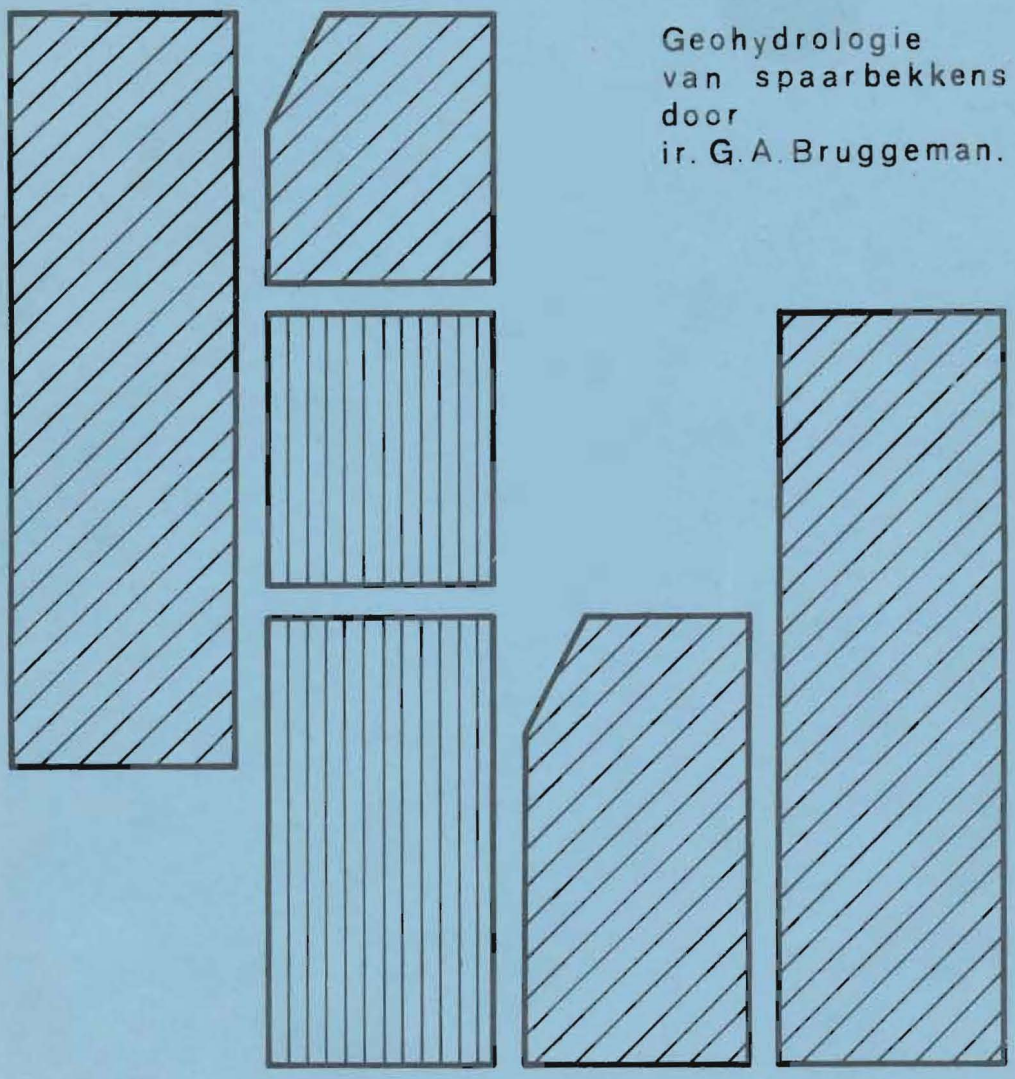
MEDEDELINGEN

1



Geohydrologie
van spaarbekkens
door
ir. G. A. Bruggeman.

Rijksinstituut voor Drinkwatervoorziening
Parkweg 13
's-Gravenhage

Geohydrologie van spaarbekkens

door ir. G. A. Bruggeman.

rijksinstituut voor drinkwatervoorziening

parkweg 13 's-gravenhage

Geohydrologie van spaarbekkens.

1. Inleiding.

In vele publicaties over spaarbekkens is reeds gewezen op het belang van de gesteldheid van de grond, waarop of waarin een spaarbekken moet worden gebouwd, in verband met de grondwaterstromingen die optreden als gevolg van de verstoring van het bestaande grondwaterregime door de introductie van een constant of variërend spaarbekkenpeil over een bepaalde oppervlakte.

De kennis van de grootte en richting van de door de aanleg van een spaarbekken veroorzaakte grondwaterstroming naar plaats en tijd is van groot belang, enerzijds om een inzicht te verkrijgen in de beïnvloeding van het grondwaterpeil in de omgeving van het bekken met het oog op veroorzaking van schade aan andere belangen, anderzijds om te worden geïnformeerd over de richting en grootte van de kwelstromingen naar en vanuit het bekken uit kwantitatieve, kwalitatieve (aantrekken van brak of zout water) of constructieve overwegingen.

Een zeer belangrijke bijdrage tot die kennis vormt uiteraard het geologisch en geohydrologisch onderzoek ter plaatse en in de directe omgeving van het aan te leggen bekken. Echter is zelfs een vrij gedetailleerd inzicht in het verloop van de watervoerende en weerstandbiedende grondlagen met bijbehorende grondconstanten zoals kD- en c-waarden nog niet voldoende om juiste voorspellingen ten aanzien van de opgewekte grondwaterstromingen te doen; daarnaast moet ook bekendheid aanwezig zijn met de berekeningsmethoden welke voor verschillende gevallen moeten worden aangewend om de relatie vast te stellen tussen de geohydrologische en geografische gegevens enerzijds en de grootte en richting van de grondwaterstroming anderzijds.

Indien die relatie eenmaal is gevonden in de vorm van een wiskundige formule, dan is het beschouwde geohydrologische probleem in wezen opgelost. Zodra bijv. het stijghoogteverloop φ van het grondwater in het grondmassief ten gevolge van de verandering der omstandigheden gegeven is als functie van plaats en tijd en tevens als functie van de grond- en geografische constanten, dan zijn alle andere geohydrologische wetenswaardigheden van dat potentiaalverloop af te leiden. Deze functie is echter niet direct te vinden, maar moet worden bepaald met behulp van een aantal elementaire wetten, welke voor grondwaterstroming gelden en met behulp van de eigenschappen van zowel grond als water. Wiskundige

combinatie van die wetten en eigenschappen resulteert dan in een differentiaalvergelijking, welke algemeen geldig is voor elke grondwaterstroming, hoe ingewikkeld ook. Uit die differentiaalvergelijking alleen is nog niet het potentiaalverloop φ te bepalen; dit wordt pas mogelijk indien ook de begin- en randvoorwaarden mee in de beschouwing worden betrokken en oplossing van de differentiaalvergelijking met bijbehorende voorwaarden levert dan het gezochte functionele verband op.

In vele gevallen, vooral bij een gecompliceerd verloop van grondconstanten en afmetingen, zullen de thans bekend mathematische technieken niet toereikend zijn om de differentiaalvergelijkingen met begin- en randvoorwaarden exact op te lossen. Men is dan aangewezen op toepassing van numerieke methoden, waarbij men tracht door middel van iteratie met behulp van een computer de juiste eindwaarden zo dicht mogelijk te benaderen.

Voor minder gecompliceerde problemen, waarbij steeds een zekere mate van symmetrie aanwezig is en waarbij met gemiddelde grondconstanten kan worden gewerkt kunnen in een aantal gevallen exacte oplossingen worden gevonden; deze oplossingen zijn ook van belang voor een globaal inzicht in de grondwaterstroming voor ingewikkelder gevallen met toepassing van meer of minder sterke vereenvoudigingen en schematisaties en tevens als grondslag voor itererende bewerkingen.

In het navolgende zullen voor een aantal van dergelijke geschematiseerde gevallen van grondwaterstroming van en naar spaarbekkens oplossingen worden gegeven. De nadruk zal hierbij worden gelegd op de invloed van natuurlijke horizontale en kunstmatige verticale weerstandbiedende lagen en de invloed van vorm en afmetingen van bekkens op het potentiaalverloop van het grondwater en de grootte van de kwel.

2. Differentiaalvergelijkingen en berekeningsmethoden.

De algemene differentiaalvergelijking voor een driedimensionale, niet-stationaire grondwaterstroming in homogene grond met anisotropie in drie hoofdrichtingen luidt:

$$K_x \frac{d^2\varphi}{dx^2} + K_y \frac{d^2\varphi}{dy^2} + K_z \frac{d^2\varphi}{dz^2} + F = S_s \frac{d\varphi}{dt}$$

waarin

φ = stijghoogte van het grondwater of de zakking of stijging van het grondwater ten opzichte van de oorspronkelijke stijghoogte;

x, y en z = plaatscoördinaten ten opzichte van een aangenomen oorsprong van een rechthoekig assenkruis;

t = tijd sinds een aangenomen aanvangstijdstip;

K_x, K_y en K_z = doorlatendheidscoëfficiënten in resp. de x-, de y- en de z-richting;

S_s = specifieke bergingscoëfficiënt;

F = een functie van x, y z en t welke aangeeft hoeveel water per volume-eenheid en per tijdseenheid aan de grond wordt toegevoerd of ontnomen ten gevolge van voeding of onttrekkingen.

Bij permanente grondwaterstromingen vervalt de term $S_s \frac{d\varphi}{dt}$ en zonder injectie, onttrekking of voeding van elders ook de term F. De differentiaalvergelijking voor permanente stroming in homogene isotrope grond reduceert zich dan tot de differentiaalvergelijking van Laplace:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$$

voor het driedimensionale geval.

Bij aanwezigheid van axiale symmetrie kan met vrucht gebruik worden gemaakt van cylindercoördinaten; de differentiaalvergelijking wordt dan:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$$

Is de stroming onafhankelijk van één van de drie asrichtingen dan ontstaat voor homogene isotrope grond in het stationaire geval de zogenaamde tweedimensionale potentiaalstroming, welke beheerst wordt door de tweedimensionale differentiaalvergelijking van Laplace:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0 \qquad \text{of} \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$$

Deze potentiaalstromingen hebben de eigenschap dat voor elk probleem een complexe potentiaalfunctie bestaat, waarvan het reële gedeelte de potentiaalfunctie φ en het imaginaire gedeelte de stroomfunctie Ψ voorstelt, zodat de berekeningsmethode der conforme transformaties op het vraagstuk kan worden toegepast.

In het algemeen zullen bij de berekeningen de verticale snelheidscomponenten van de grondwaterstroming niet kunnen worden verwaarloosd, aangezien in de meeste gevallen spaarbekkens zeer "onvolkomen" zijn ten opzichte van de watervoerende lagen waarboven of waarin zij gesitueerd worden gedacht. Dit impliceert echter dat, wil men bijv. voor de verticale kwel niet al te ongunstige uitkomsten krijgen, ook rekening moet worden gehouden met het in de praktijk veel voorkomende verschijnsel van verschillende doorlatendheden in verticale en horizontale richting als gevolg van de veelal aanwezige gelaagdheid van de ondergrond, in dien zin dat de horizontale doorlatendheid de verticale vele malen kan overtreffen.

De in het navolgende gegeven oplossingen zijn bijna alle verkregen met behulp van integraaltransformaties, met name de Laplace-transformatie met betrekking tot de tijdsvariabele bij niet-permanente stromingen, Hankel-transformaties (eindige en half oneindige) voor axiaal symmetrische gevallen en Fourier-transformaties (sinus- en cosinustransformaties; eindige en half oneindige) voor tweedimensionale stromingen. Een klein aantal oplossingen is verkregen met de methode der conforme transformaties.

Ter wille van de beknoptheid zijn slechts de oplossingen van de vraagstukken gegeven en niet de uitwerkingen; bovendien is voornamelijk uitgegaan van permanente stromingsgevallen; waar ook niet-stationaire oplossingen bekend zijn zal dit worden vermeld zonder ze te noemen.

In alle gevallen is de Z-as de verticale as, met het positieve gedeelte naar beneden gericht. In plaats van met potentialen zal met zakkingen worden gewerkt, zodat φ de zakking voorstelt met betrekking tot de oorspronkelijke (grond)waterstanden. Daardoor worden de snelheidscomponenten in horizontale en verticale richting:

$$v_x = + K_x \frac{d\varphi}{dx} \text{ en } v_z = + K_z \frac{d\varphi}{dz}$$

waarbij K_x en K_z resp. de doorlatendheidscoëfficiënten in horizontale en verticale richting voorstellen, terwijl tevens de verhouding van deze beide laatsten = a^2 wordt gesteld:

$$a^2 = \frac{K_z}{K_x} \quad (a^2 \text{ steeds kleiner dan 1 genomen}).$$

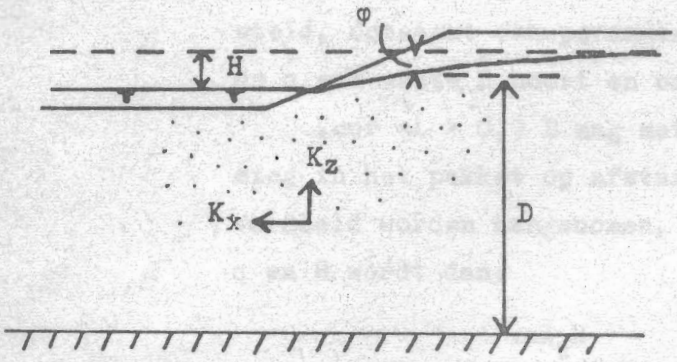
Achtereenvolgens zullen oplossingen worden gegeven voor een bekken in of op doorlatende ondergrond, waarbij semipermeabele lagen ontbreken en waarbij deze wel aanwezig zijn.

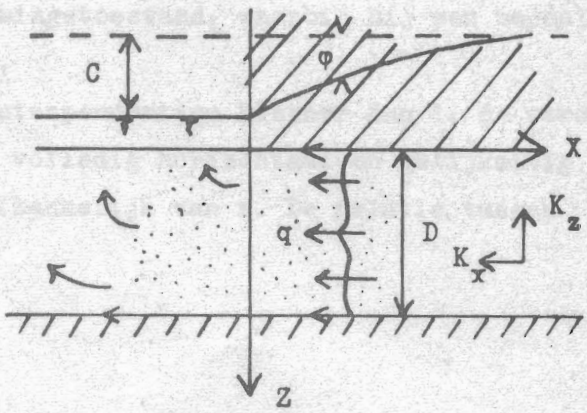
De invloed van de vorm van het bekken zal worden nagegaan door zowel cirkelvormige als langwerpige bekkens te beschouwen.

3. Afwezigheid van horizontale weerstandbiedende lagen.

3.1. Zeer breed, langwerpig spaarbekken ingegraven in watervoerend pakket met dikte D.

Geschematiseerd tot





Deze schematisatie van een phreatisch pakket tot een spanningswaterpakket van constante dikte is geoorloofd, indien de verlagingen gering zijn t.o.v. de pakketdikte.

Indien een zeer snelle peilverlaging plaatsvindt tot een bedrag H en daarna het peil constant wordt gehouden, ontstaat een niet-stationair stromingsgeval.

In werkelijkheid zal bij een groot bekken de peilverlaging niet eindelijk plaatsvinden; tijdens de daling van het bekkenpeil zal zich van een zogenaamde quasi stationaire toestand instellen, waarbij de grondwaterstroming stationair is, maar de verhanglijnen, evenals het bekkenpeil, zich evenwijdig aan zichzelf verplaatsen. De kwel q $\left[L^2T^{-1}\right]$ treedt hier op als een constant gegeven.

Voor de zakking als functie van x en z wordt gevonden:

$$\varphi\,(x,z) = c - \frac{2q}{\pi a K_x}\,\mathrm{bgcosh}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{v^2+(u+1)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{v^2+(u-1)^2}\right\}$$

met $u = e^{\frac{\pi a x}{2D}} \cos\left(\frac{\pi z}{2D}\right)$ en $v = e^{\frac{\pi a x}{2D}} \sin\left(\frac{\pi z}{2D}\right)$

waarin $a = \sqrt{\frac{z}{K_x}}$ en c = willekeurige constante.

De stroomfunctie Ψ (x,z) (dimensie als q) wordt:

$$\Psi\ (x,z) = -\frac{2q}{\pi}\ \mathrm{bgcos}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{v^2+(u+1)^2} - \frac{1}{2}\sqrt{v^2+(u-1)^2}\right\}.$$

Indien op afstand x = L een vaste potentiaal (φ = 0) wordt verondersteld, ontstaat een permanente stromingstoestand, waarbij bij een bepaalde q een vaste H hoort en omgekeerd.

Voor aL > 0,9 D mag met een foutenpercentage kleiner dan 1, de stroming in het pakket op afstand x = L volledig horizontaal en gelijkmatig verdeeld worden aangenomen, dus onafhankelijk van z. De relatie tussen q en H wordt dan:

$$q = \frac{\pi a K_x H}{2\ \mathrm{bgcosh}\left(e^{\frac{\pi a L}{2D}}\right)}$$

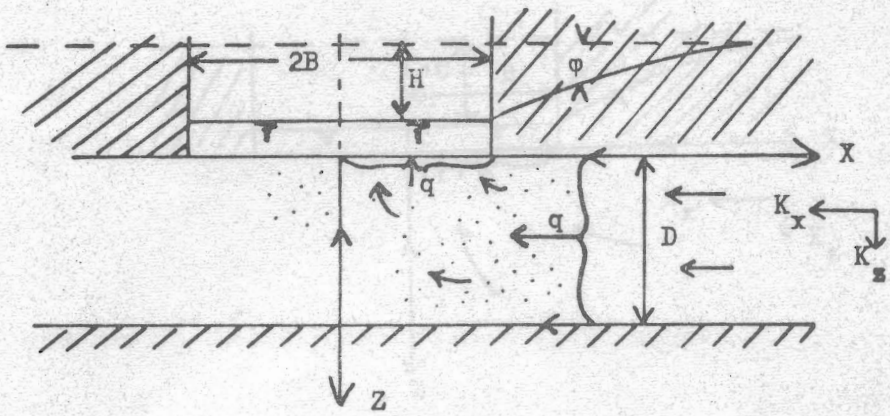
= kwel per strekkende meter.

Voor K_x = 10 m/dag, H = 5 m en L = 4D is op bijlage 3.1. het verband aangegeven tussen de kwel q en de anisotropiefactor a.

Uit de grafiek blijkt dat bij afname van a, dus afname van K_z de kwel slechts langzaam afneemt tot een waarde van a van ca 0,25 dat wil zeggen van K_z = ca 0,17 m/dag, beneden welk getal een steeds sterkere invloed van de verticale doorlatendheid op de kwel waarneembaar is.

3.2. <u>Langwerpig spaarbekken met breedte 2B, ingegraven in een watervoerend pakket met dikte D.</u>

Schema:



$$\varphi\ (x,z) = c - \frac{2q}{\pi a K_x}\ \mathrm{bgcosh}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{v^2+(u+1)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{v^2+(u-1)^2}\right\}$$

$$\Psi\ (x,z) = -\frac{2q}{\pi}\ \mathrm{bgcos}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{v^2+(u+1)^2} - \frac{1}{2}\sqrt{v^2+(u-1)^2}\right\}$$

$$\text{met } u = \frac{\sinh(\frac{\pi a x}{2D})\ \cos(\frac{\pi z}{2D})}{\sinh(\frac{\pi a B}{2D})} \quad \text{en } v = \frac{\cosh(\frac{\pi a x}{2D})\ \sin(\frac{\pi z}{2D})}{\sinh(\frac{\pi a B}{2D})}$$

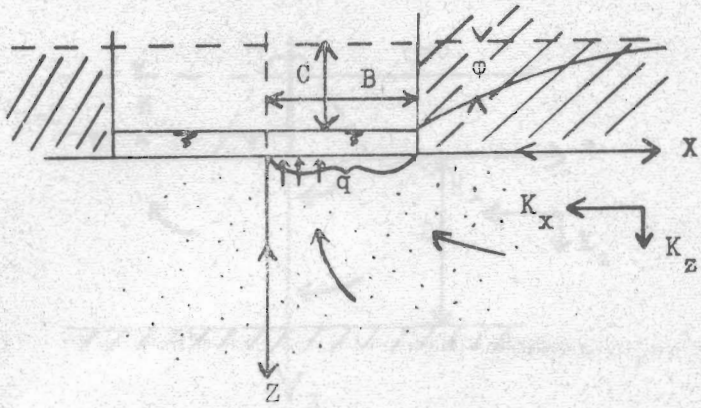
Op voldoend grote afstand L vanuit de as van het bekken, kunnen de stroomlijnen volledig horizontaal worden aangenomen. Is daar ter plaatse een vaste potentiaal ($\varphi = 0$) aanwezig dan is de stroming stationair en kan de eenzijdige kwel q worden berekend bij een peilverlaging H in het bekken:

$$q = \frac{\pi a K_x H}{2\ \mathrm{bgcosh}\left\{\dfrac{\sinh(\frac{\pi a L}{2D})}{\sinh(\frac{\pi a B}{2D})}\right\}}$$

Indien aB > 1,7 D, mag, met een fout < 1%, worden gerekend met een oneindig breed bekken en kunnen dus de formules van geval 3.1. worden gebruikt.

3.3. <u>Langwerpig spaarbekken met breedte 2B, ingegraven in een watervoerend pakket met zeer grote dikte.</u>

Schema:



$$\varphi\,(x,z) = C - \frac{2q}{\pi a K_x}\,\mathrm{bgcosh}\left\{\frac{1}{2B}\sqrt{\frac{z^2}{a^2} + (x+B)^2} + \frac{1}{2B}\sqrt{\frac{z^2}{a^2} + (x-B)^2}\right\}.$$

$$\psi\,(x,z) = -\,q + \frac{2q}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha}\,J_0\,(B\alpha)\,\sin\,(x\alpha)\,e^{-\frac{z\alpha}{a}}\,d\alpha$$

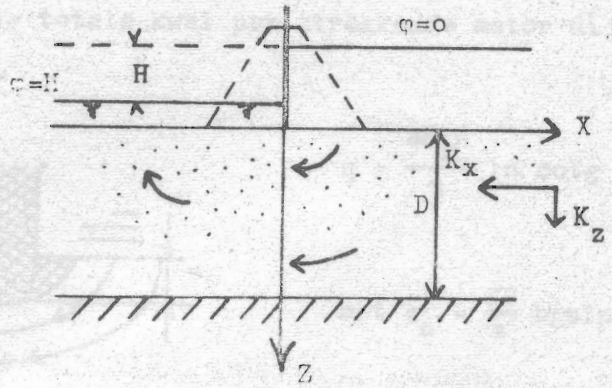
$$= -\,\frac{2q}{\pi}\,\mathrm{bgcos}\left\{\frac{1}{2B}\sqrt{\frac{z^2}{a^2} + (x+B)^2} - \frac{1}{2B}\sqrt{\frac{z^2}{a^2} + (x-B)^2}\right\}.$$

Indien $D > 7\,aB$ mag dit stromingsgeval worden toegepast voor punten waarvoor geldt $x^2 + z^2 < 4\,B^2$.

In de praktijk zal dit stromingsgeval voor spaarbekken slechts kunnen optreden indien a zeer klein is, omdat meestal B enkele malen groter zal zijn dan D.

De formules zijn daarom meer geschikt voor lange onvolkomen waterlopen en drains.

3.4. Zeer breed, langwerpig spaarbekken op watervoerend pakket met dikte D met constante buitenwaterstand; doorlatende dijk met waterdichte wand.



De zakking als functie van x en z is:

$$\varphi\,(x,z) = \frac{H}{2} - \frac{H}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha}\,\sin\,(ax\alpha)\,\frac{\cosh\,(D\alpha - z\alpha)}{\cosh\,(D\alpha)}\,d\alpha$$

$$= \frac{H}{\pi}\,\mathrm{bgtg}\left\{\frac{\sin\,(\frac{\pi z}{2D})}{\sinh\,(\frac{\pi a x}{2D})}\right\}$$

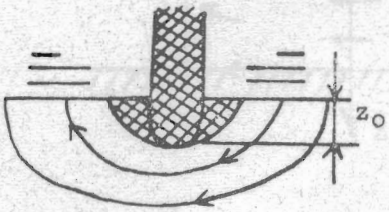
en de stroomfunctie:

$$\psi\,(x,z) = \frac{aK_x H}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha}\,\cos\,(ax\alpha)\,\frac{\sinh\,(D\alpha - z\alpha)}{\cosh\,(D\alpha)}\,d\alpha$$

$$= \frac{aK_x H}{\pi}\,\mathrm{bgtgh}\left\{\frac{\cos\,(\frac{\pi z}{2D})}{\cosh\,(\frac{\pi a x}{2D})}\right\}.$$

Op bijlage 3.4. zijn voor dit geval de stroom- en equipotentiaallijnen geconstrueerd welke met behulp van bovenstaande formules exact zijn bepaald voor isotrope ondergrond (a = 1).

Theoretisch wordt de kwel naar het bekken oneindig groot ten gevolge van de oneindig grote filtersnelheid t.p.v. de oorsprong. Indien zodanige voorzieningen worden getroffen dat de maximale optredende snelheid nog toelaatbaar is, bijv. door het een eindweegs doorzetten over een afstand z_o en afronden van de wand volgens een stroomlijn (zie figuur) kan de totale kwel per strekkende meter dijk worden berekend:



$$q = \frac{aK_x H}{\pi} \ln \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi z_o}{4D}\right)$$

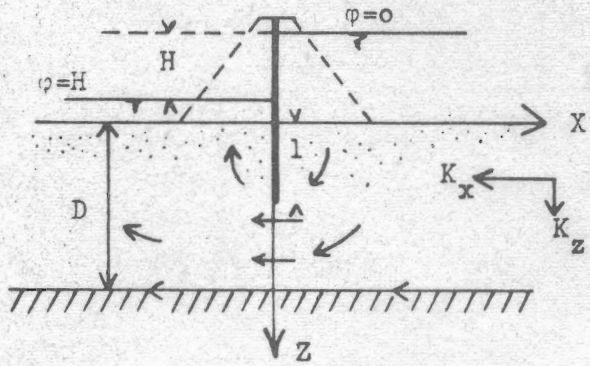
met $z_o = \frac{2D}{\pi} \operatorname{bgsin} \left(\frac{aH}{2nD}\right)$ indien bijv.

$V_{max.toel.} = nK_x$ wordt gesteld.

Indien i.p.v. een waterdichte wand in de dijk een semipermeabele core wordt aangebracht, zal het lekverlies door de core gering zijn in verhouding tot de kwel onder de dijk en kan worden berekend voor een potentiaalverschil dat praktisch gelijk is aan het peilverschil H.

Voor dit geval kan bij een daling of stijging H (t) welke een willekeurige functie is van de tijd, de niet-stationaire stromingstoestand analytisch worden bepaald.

3.4.a. Invloed van een eindweegs in het pakket stekende damwand (lengte l) op het stromingsgeval 3.4.



Het potentiaalverloop (eigenlijk zakkingsverloop) langs de damwand ($o \leqq z \leqq l$) wordt gegeven door:

$$\varphi\ (o,z) = \frac{H}{2} - \frac{H}{2K(m)}\ F\ (bgcos\ u|m)$$

$$\text{met } u = \frac{tg\ (\frac{\pi z}{2D})}{tg\ (\frac{\pi l}{2D})} \qquad \text{en} \qquad m = \sin^2\ (\frac{\pi l}{2D})$$

waarin $F\ (\alpha|m)$ de incomplete elliptische integraal van de eerste soort, met amplitude α en parameter m en $K(m) = F\ (\frac{\pi}{2}|m)$ de complete elliptische integraal van de eerste soort voorstelt.

Het verloop van de zakking langs de basis van het pakket is:

$$\varphi\ (x,D) = \frac{H}{2} - \frac{H}{2K(m)}\ F\ (bgtg\ v|m)$$

$$\text{met } v = \frac{\sinh\ (\frac{\pi a x}{2D})}{\cos\ (\frac{\pi l}{2D})}\ .$$

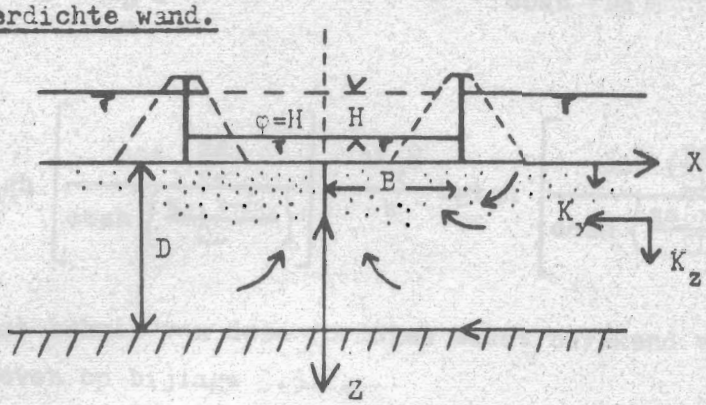
Voor de kwel per strekkende meter wordt gevonden:

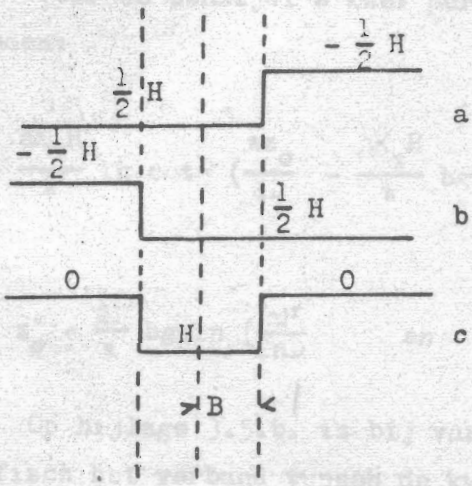
$$q = \frac{aK_x H}{2} \cdot \frac{K(m_1)}{K(m)}$$

waarin $m_1 = 1 - m = \cos^2\ (\frac{\pi l}{2D})$.

Uit de laatste formule volgt, dat indien de damwand tot halverwege het pakket reikt ($\frac{1}{D} = \frac{1}{2}$), de kwel gelijk is aan het halve peilverschil, vermenigvuldigd met de doorlaatfactor (zie bijlage 3.4.a.).

3.5. Langwerpig spaarbekken met breedte 2B op watervoerend pakket met dikte D met constante buitenwaterstand; doorlatende dijk met waterdichte wand.





De oplossing van dit geval ontstaat door geval 3.4. te spiegelen om de as x = - B met gelijktijdige aanpassing van de waterpeilen: a+b = c

$$\varphi\,(x,z) = \frac{2H}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha}\,\sin\,(aB\alpha)\,\cos\,(ax\alpha)\,\frac{\cosh\,(D\alpha - z\alpha)}{\cosh\,(D\alpha)}\,d\alpha$$

$$= \frac{H}{\pi}\,\mathrm{bgtg}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi z}{2D}\right)}{\sinh\left\{\frac{\pi a\,(x-B)}{2D}\right\}}\right] - \frac{H}{\pi}\,\mathrm{bgtg}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi z}{2D}\right)}{\sinh\left\{\frac{\pi a\,(x+B)}{2D}\right\}}\right]$$

$$\Psi(x,z) = \frac{2aK_xH}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} \sin(aB\alpha) \sin(ax\alpha) \frac{\sinh(D\alpha - z\alpha)}{\cosh(D\alpha)} d\alpha$$

$$= \frac{aK_xH}{\pi} \text{bgtgh} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi z}{2D}\right)}{\cosh\left\{\frac{\pi a(x-B)}{2D}\right\}} \right] - \frac{aK_xH}{\pi} \text{bgtgh} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi z}{2D}\right)}{\cosh\left\{\frac{\pi a(x+B)}{2D}\right\}} \right]$$

Een met behulp van deze formules exact berekend vierkantonnet is weergegeven op bijlage 3.5.a.

Voor de éénzijdige kwel per strekkende meter dijk wordt gevonden:

$$q = \frac{aK_xH}{\pi} \ln \text{cotg}\left(\frac{\pi z_o}{4D}\right) - \frac{aK_xH}{\pi} \text{bgtgh} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{\pi z_o}{2D}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi aB}{D}\right)} \right\}.$$

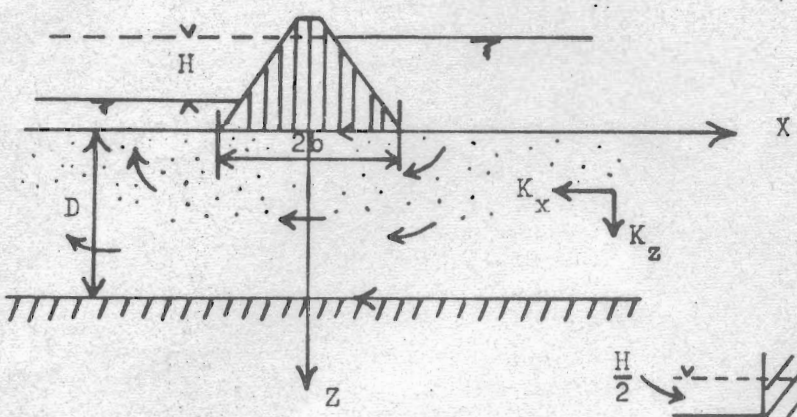
met $z_o = \frac{2D}{\pi} \text{bgsin}\left(\frac{aH}{2nD}\right)$ en $v_{toel.} = nK_x$ (zie 3.4.).

Op bijlage 3.5.b. is bij variërende breedten van het bekken grafisch het verband tussen de kwel en de pakketdikte weergegeven.

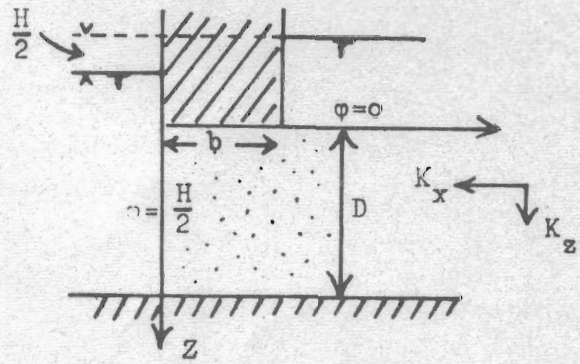
Indien $aB > 2D$ mag worden gerekend met een bekken met oneindige breedte en kunnen de eenvoudiger formules van 3.4. worden gebruikt.

Evenals geval 3.4. is voor dit geval een formule af te leiden voor de niet-stationaire stroming bij veranderlijke binnenwaterspiegel $H(t)$.

3.6. Zeer breed, langwerpig spaarbekken op watervoerend pakket met dikte D met constante buitenwaterstand; ondoorlatende dijk met breedte 2b.



Schema:



Het verloop van de zakkingen langs de onderzijde van de dijk kan worden voorgesteld door:

$$\varphi\ (x,o) = \frac{H}{2} - \frac{H}{2K(m)}\ F\ (\mathrm{bgsin}\ u|m) \qquad \text{(zie 3.4.a.)}$$

$$\text{met } u = \frac{\mathrm{tgh}\ (\frac{\pi a x}{2D})}{\mathrm{tgh}\ (\frac{\pi a b}{2D})} \qquad \text{en} \qquad m = \mathrm{tgh}^2\ (\frac{\pi a b}{2D})$$

Langs de basis van het pakket wordt de zakking:

$$\varphi\ (x,D) = \frac{H}{2} - \frac{H}{2K(m)}\ F\ (\mathrm{bgsin}\ v|m) \qquad \text{met } v = \mathrm{tgh}\ (\frac{\pi a x}{2D})$$

De kwel per strekkende meter bedraagt:

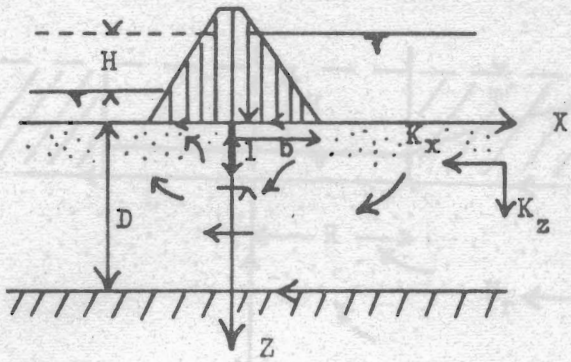
$$q = \frac{aK_x H}{2} \cdot \frac{K(m_1)}{K(m)} \qquad \text{waarin } m_1 = 1 - m = \mathrm{sech}^2\ (\frac{\pi a b}{2D})$$

(zie bijlage 3.6. waar deze formule grafisch is weergegeven).

In bovenstaande formules stelt $F\ (\alpha|m)$ de incomplete elliptische integraal van de eerste soort voor en $K(m) = F\ (\frac{\pi}{2}|m)$ de complete elliptische integraal van de eerste soort.

Indien ab > 0,9D mag, met een fout < 1%, het debiet onder het midden van de dijk gelijkmatig verdeeld over het pakket worden aangenomen en gaat dit stromingsgeval over in dat van 3.1. met een vaste potentiaal op grote afstand.

3.6.a. Invloed van een eindweegs in het pakket stekende damwand (lengte l) op het stromingsgeval 3.6.



De formules voor het verloop van de zakkingen langs de onderzijde van de dijk, langs de damwand en langs de basis van het pakket zijn tamelijk gecompliceerd en zullen hier niet worden vermeld.

De formule voor de optredende kwel luidt:

$$q = \frac{aK_xH}{2} \cdot \frac{K(m_1)}{K(m)} \quad \text{waarin}$$

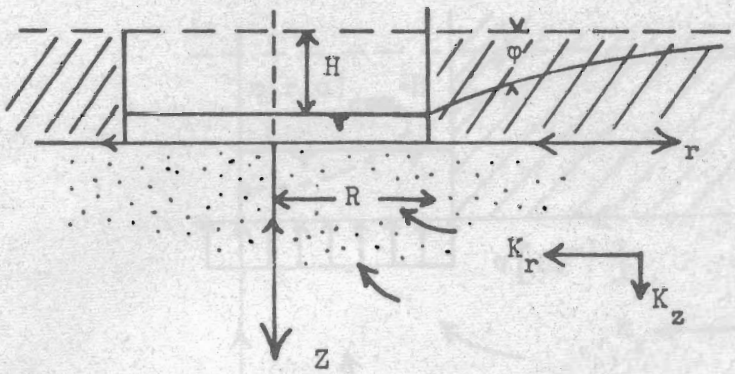
$$m = \sin^2\left(\frac{\pi l}{2D}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi l}{2D}\right) \operatorname{tgh}^2\left(\frac{\pi ab}{2D}\right) \quad \text{en}$$

$$m_1 = 1 - m = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi l}{2D}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\pi ab}{2D}\right)} -$$

K(m) stelt hierin de complete elliptische integraal van de eerste soort voor.

3.7. Rond spaarbekken met straal R, ingegraven in een watervoerend pakket met zeer grote dikte.

Schema:



De zakking als functie van r en z wordt bepaald door:

$$\varphi\,(r,z) = \frac{2H}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha}\sin(R\alpha)\,J_o(r\alpha)e^{-\frac{z\alpha}{a}}\,d\alpha =$$

$$\frac{2H}{\pi}\,\mathrm{bgsin}\left\{\frac{1}{2r}\sqrt{\frac{z^2}{a^2}+(r+R)^2}-\frac{1}{2r}\sqrt{\frac{z^2}{a^2}+(r-R)^2}\right\}$$

De stroomfunctie is gegeven door:

$$\Psi\,(r,z) = 4aK_rHr\int_0^\infty \frac{1}{\alpha}\sin(R\alpha)\,J_1(r\alpha)e^{-\frac{z\alpha}{a}}\,d\alpha$$

$J_o\,(r\alpha)$ en $J_1\,(r\alpha)$ stellen in deze formules Besselfuncties van de eerste soort en nulde resp. eerste orde voor.

De totale kwel bedraagt:

$$Q = 4aK_rHR$$

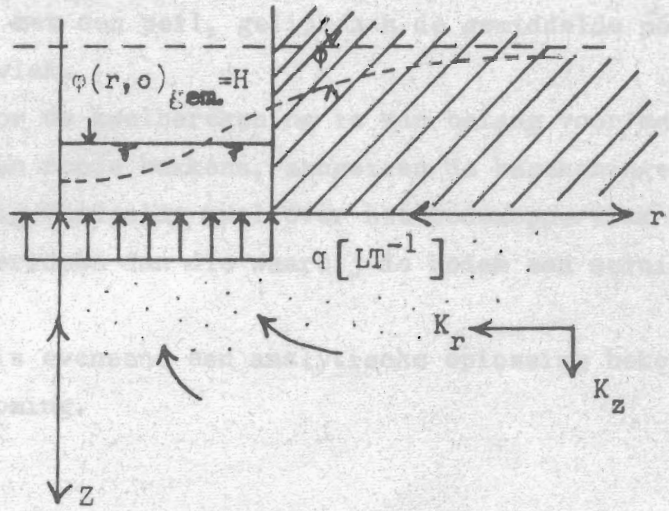
waarbij $a = \sqrt{\frac{K_z}{K_r}}$

Tengevolge van de oneindig groot aangenomen dikte van het pakket is voor dit stromingsgeval een stationaire toestand mogelijk.

In de praktijk zal dit geval slechts worden benaderd indien a zeer klein is nl. $a < \frac{L}{7R}$; de formules zijn daarom meer geschikt voor betrekkelijk kleine, ronde bouwputten.

3.9. Rond spaarbekken met straal R, ingegraven in een watervoerend pakket met zeer grote dikte.
Aangenomen gelijkmatig verdeelde kwel over de bodem.

Schema:



De zakking φ en de stroomfunctie Ψ als functies van r en z worden in dit geval:

$$\varphi\ (r,z) = \frac{qR}{aK_r} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} J_1\ (R\alpha)\ J_o\ (r\alpha) e^{-\frac{z\alpha}{a}}\ d\alpha$$

$$\Psi\ (r,z) = 2\pi qRr \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} J_1\ (R\alpha)\ J_1\ (r\alpha) e^{-\frac{z\alpha}{a}}\ d\alpha.$$

$J_o\ (r\alpha)$ en $J_1\ (R\alpha)$ stellen in deze formules Besselfuncties voor van de eerste soort en de orde nul respectievelijk een.

De gemiddelde zakking ter plaatse van de bodem van het bekken wordt:

$$\varphi_{gem} = \frac{3qR}{3\pi aK_r} = \frac{Q}{3\pi^2 aK_r R}$$

Indien φ_{gem} = H wordt gesteld volgt voor de totale kwel:

$$Q = 3,7aK_r HR$$

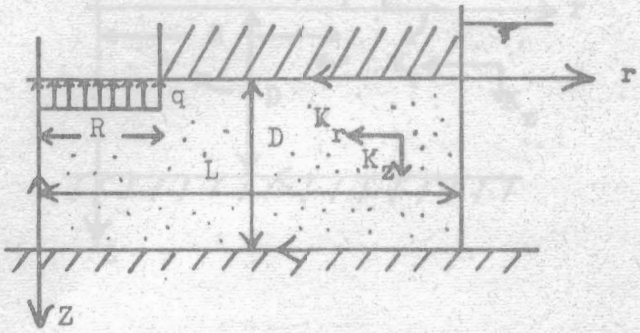
Deze uitkomst benadert vrij goed die voor geval 3.7. Hoewel dit stromingsgeval, wat de verlagingen betreft, betrekking heeft op een infiltratie vanuit een cirkelvormige vijver, kan het totale debiet met een goede benadering gelijk worden genomen aan de kwel naar een spaarbekken in dezelfde situatie met een peil, gelijk aan de gemiddelde potentiaal over het cirkeloppervlak.

Deze methode voor de kwelberekening is van belang voor meer gecompliceerde gevallen van ronde bekkens, aangezien de berekeningen met een aangenomen gelijkmatig verdeelde kwel over het bodemoppervlak aanzienlijk gemakkelijker verlopen dan die waarbij de bodem een aequipotentiaalvlak is.

Voor dit geval is eveneens een analytische oplossing bekend voor de niet-stationaire stroming.

3.9. Rond spaarbekken met straal R, ingegraven in een watervoerend pakket met dikte D.
Aangenomen gelijkmatig verdeelde kwel over de bodem.
Op afstand r = L is de zakking = 0.

Schema:



$$\varphi\,(r,z) = \frac{2qR}{aK_r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_o(\frac{\alpha_n r}{L})\,J_1(\frac{\alpha_n R}{L})}{\alpha_n^{\,2}\,J_1^{\,2}(\alpha_n)}\cdot\frac{\cosh\,(\frac{\alpha_n D - \alpha_n z}{aL})}{\sinh\,(\frac{\alpha_n D}{aL})}$$

$$\Psi\,(r,z) = 4\pi qRr\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\frac{\alpha_n r}{L})\,J_1(\frac{\alpha_n R}{L})}{\alpha_n^{\,2}\,J_1^{\,2}(\alpha_n)}\cdot\frac{\sinh\,(\frac{\alpha_n D - \alpha_n z}{aL})}{\sinh\,(\frac{\alpha_n D}{L})}$$

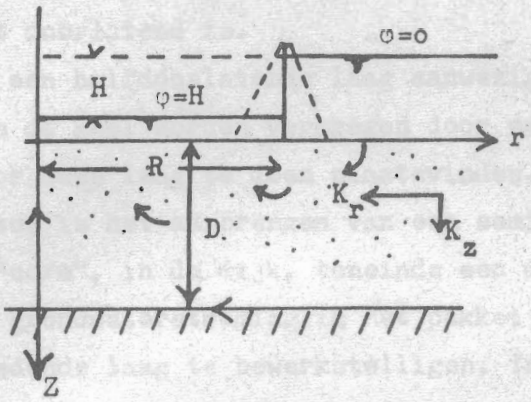
waarin α_n (n = 1,2,3,...) de wortels zijn uit de vergelijking $J_o\,(\alpha_n) = 0$.

De gemiddelde zakking ter plaatse van de bodem van het bekken bedraagt:

$$\varphi_{gem} = H = \frac{4qL}{aK_r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1^{\,2}(\frac{\alpha_n R}{L})}{\alpha_n^{\,3}\,J_1^{\,2}(\alpha_n)}\,\mathrm{cotgh}\,(\frac{\alpha_n D}{aL}).$$

De niet-stationaire oplossing voor dit geval is eveneens bekend.

3.10. Rond spaarbekken met straal R op watervoerend pakket met dikte D met constante buitenwaterstand; doorlatende dijk met waterdichte wand.



$$\varphi\ (r,z) = aHR \int_0^\infty J_1\ (aR\alpha)\ J_o\ (ar\alpha)\ \frac{\cosh\ (D\alpha - z\alpha)}{\cosh\ (D\alpha)}\ d\alpha.$$

$$\Psi\ (r,z) = 2\pi K_z HRr \int_0^\infty J_1\ (aR\alpha)\ J_1\ (ar\alpha)\ \frac{\sinh\ (D\alpha - z\alpha)}{\cosh\ (D\alpha)}\ d\alpha.$$

De totale kwel wordt:

$$Q = 2\pi K_z R^2 H \int_0^\infty J_1^{\,2}(aR\alpha)\ .\ \frac{\sinh\ (D\alpha - z_o\alpha)}{\cosh\ (D\alpha)}\ d\alpha$$

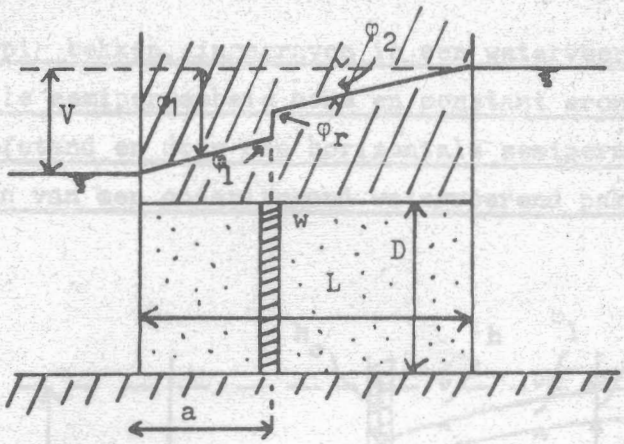
waarin $z_o \sim \frac{aH}{\pi n}$ en $v_{toel.} = nK_r$ (zie 3.4.).

Laatstgenoemde integraal kan worden ontwikkeld in complete elliptische functies van de eerste en tweede soort.

4. Ondoorlatende of halfdoorlatende laag als bodem van het spaarbekken.

De in het voorgaande behandelde voorbeelden voor spaarbekkens bij afwezigheid van weerstandbiedende lagen, zijn, indien grote kwel dient te worden vermeden, slechts te verwezenlijken, indien de ondergrond slecht doorlatend is.

Indien een halfdoorlatende laag aanwezig is kan een aanzienlijke reductie van de kwel worden verkregen door een gedeelte van de kwelstroming door deze laag te doen plaatsvinden. Een voor de hand liggend middel hiertoe is het aanbrengen van een semipermeabele kleikern, een zogenaamde "core", in de dijk, teneinde een meer of minder grote weerstand tegen grondwaterstroming in het pakket boven de horizontale weerstandbiedende laag te bewerkstelligen. In het navolgende zijn voor verschillende gevallen betrekkingen tussen grondwaterstanden en kwel enerzijds en de weerstanden van cores en horizontale semipermeabele lagen anderzijds, gegeven. In alle gevallen is de stroming in het watervoerende pakket horizontaal en door de c-lagen verticaal aangenomen.



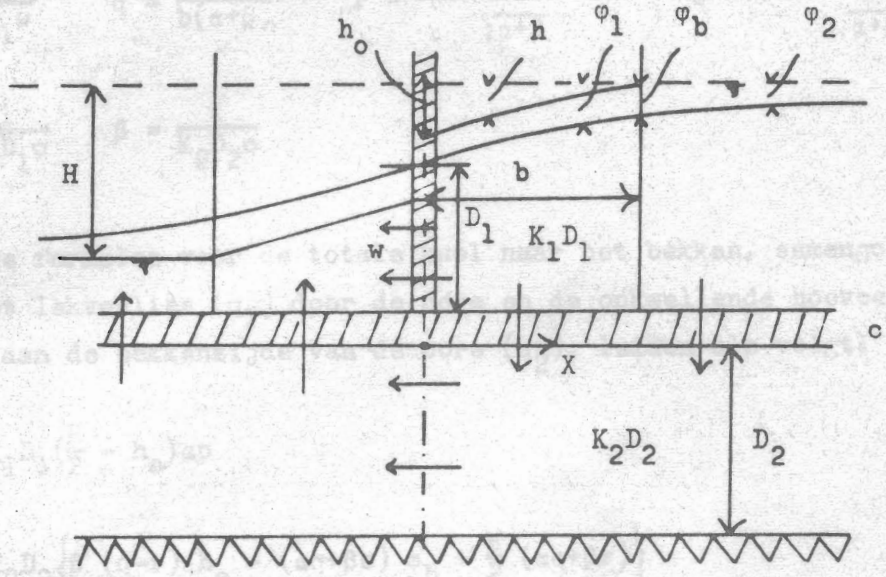
$$\varphi_1 = V\left(1 - \frac{x}{Kw+L}\right) \quad \text{voor } o \leq x \leq a$$

$$\varphi_2 = \frac{V\,(L-x)}{Kw+L} \quad \text{voor } a \leq x \leq L$$

$$|q| = \frac{KDV}{Kw+L} = \frac{D\,(\varphi_1 - \varphi_r)}{w}$$

4.2. **Langwerpig bekken, ingegraven in een watervoerend pakket met verticale semipermeabele core en constant grondwaterpeil op enige afstand en door een horizontale semipermeabele laag gescheiden van een onderliggend watervoerend pakket.**

Schema:



De zakkingen in resp. het bovenste en onderste pakket worden:

$$h(x) = \frac{\phi_1(x) - \alpha\phi_2(x)}{\alpha+\beta} \qquad \varphi_1(x) = \frac{\phi_1(x) + \beta\phi_2(x)}{\alpha+\beta} \qquad \text{voor } o \leq x \leq b$$

$$\text{en } \varphi_2(x) = \varphi_b e^{-(x-b)\sqrt{\beta}} \qquad \text{voor } x \geq b$$

$$\text{met } \phi_1(x) = (\alpha\varphi_b - \beta h_o - \frac{\alpha H}{2})\frac{x}{b} + \beta h_o + \frac{\alpha H}{2}$$

$$\phi_2(x) = (\frac{H}{2} - h_o)\frac{\sinh\{(b-x)\sqrt{\alpha+\beta}\}}{\sinh(b\sqrt{\alpha+\beta})} + \varphi_b\frac{\sinh(x\sqrt{\alpha+\beta})}{\sinh(b\sqrt{\alpha+\beta})}$$

$$h_o = \frac{B_2C_1 - B_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1} \qquad \varphi_b = \frac{A_1C_2 - C_1A_2}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

$$A_1 = \alpha\,(p+r) + \beta q \qquad B_1 = \alpha(s-q) \qquad C_1 = \frac{H\alpha}{2}\,(p-q+r)$$

$$A_2 = \beta\,(s-q) \qquad B_2 = \sqrt{\beta}+\alpha q+\beta r \qquad C_2 = \frac{H}{2}\,(\alpha q+\beta s)$$

$$p = \frac{2}{\alpha K_1 w} \qquad q = \frac{1}{b(\alpha+\beta)} \qquad r = \frac{\coth\,(b\sqrt{\alpha+\beta})}{\sqrt{\alpha+\beta}} \qquad s = \frac{\operatorname{cosech}\,(b\sqrt{\alpha+\beta})}{\sqrt{\alpha+\beta}}$$

$$\alpha = \frac{1}{K_1 D_1 c} \qquad \beta = \frac{1}{K_2 D_2 c}$$

De formules voor de totale kwel naar het bekken, samengesteld uit het lekverlies (q_1) door de core en de opkwellende hoeveelheid water aan de bekkenzijde van de core (q_2), luiden als volgt:

$$q_1 = K_1 D_1 \left(\frac{H}{2} - h_o\right)\alpha p$$

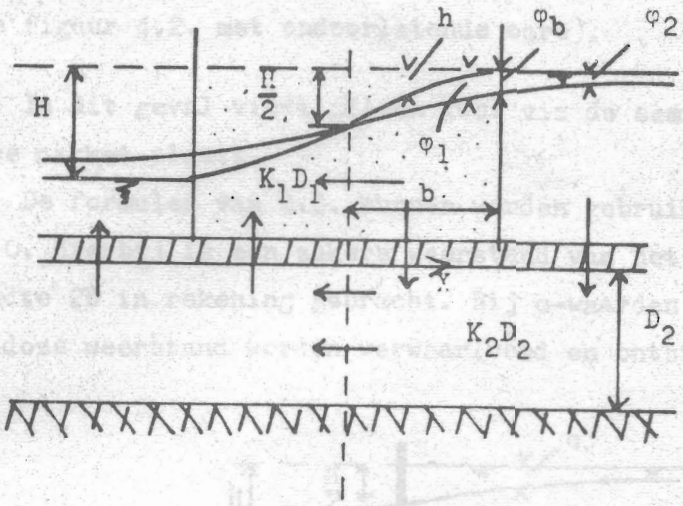
$$q_2 = K_2 D_2 \left\{\beta\,(q-r)\,h_o - (\alpha q+\beta s)\,\varphi_b + \frac{H}{2}\,(\alpha q+\beta r)\right\}.$$

(Grafisch zijn deze formules weergegeven op bijlagen 4.2.a. en 4.2.b.)

De hier genoemde formules zijn uit rekentechnische overwegingen gebaseerd op symmetrie-overwegingen, met welk doel de core in het midden van de scheidingsdijk is gedacht. Bij aanwezigheid van freatisch water in het bovenste pakket, gaat deze symmetrie, strikt genomen, niet meer op en zou de berekening van de verhanglijnen kunnen worden uitgevoerd voor een asymmetrisch geval, met de core op een willekeurige plaats in het dijkslichaam. Hoewel de formules hierdoor nog meer gecompliceerd worden (2 h-krommen en 4 φ-krommen) is dit bij berekening van numerieke waarden met behulp van een tafelcomputer niet bezwaarlijk. Echter zullen de uitkomsten voor de kwel als functie van de weerstand van de core in het symmetrische geval met zeer goede benadering ook voor het asymmetrische geval gelden.

4.3. Als 4.2. maar zonder core.

Schema:



De zakkingen in resp. het bovenste en onderste pakket worden:

$$h(x) = \frac{\phi_1(x) - \alpha\phi_2(x)}{\alpha+\beta} \qquad \varphi_1(x) = \frac{\phi_1(x) + \beta\phi_2(x)}{\alpha+\beta} \qquad \text{voor } c \leqslant x \leqslant b$$

$$\text{en} \quad \varphi_2 = \varphi_b e^{-(x-b)\sqrt{\beta}} \qquad \text{voor } x \geqslant b$$

$$\text{met} \quad \phi_1(x) = \left\{\alpha\varphi_b - (\alpha+\beta)\frac{H}{2}\right\}\frac{x}{b} + (\alpha+\beta)\frac{H}{2}$$

$$\phi_2(x) = \varphi_b \frac{\sinh(x\sqrt{\alpha+\beta})}{\sinh(b\sqrt{\alpha+\beta})}$$

$$\varphi_b = \frac{H}{2bB_2}$$

De totale kwel naar het bekken, berekend uit de horizontale schroten in de twee pakketten ter plaatse van x = o wordt:

$$Q_1 = K_1D_1\left\{\frac{Hc}{2}(\alpha+\beta) + \alpha(s-q)\varphi_b\right\}$$

$$Q_2 = k_2D_2\left\{\frac{Hc}{2}(\alpha+\beta) - (\alpha q + \beta s)\varphi_b\right\}$$

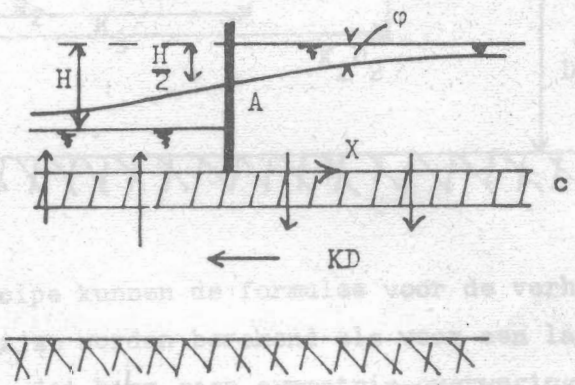
Met uitzondering van φ_b zijn de symbolen als in 4.2.

4.4. Langwerpig bekken met semipermeabele bodem op een watervoerend pakket; door een waterdichte dijk gescheiden van een ondiep pakket met constant peil.

(Zie figuur 4.2. met ondoorlatende core).

In dit geval vindt alleen kwel via de semipermeabele laag en het diepe pakket plaats.

De formules van 4.2. kunnen worden gebruikt, met $w = \infty$ en dus $p = 0$. Hierbij is een zekere weerstand van het dijkslichaam over een breedte 2b in rekening gebracht. Bij c-waarden van enige importantie mag deze weerstand worden verwaarloosd en ontstaat het volgende schema:



De zakking in het watervoerende pakket t.o.v. het constante buitenwaterpeil kan worden voorgesteld door

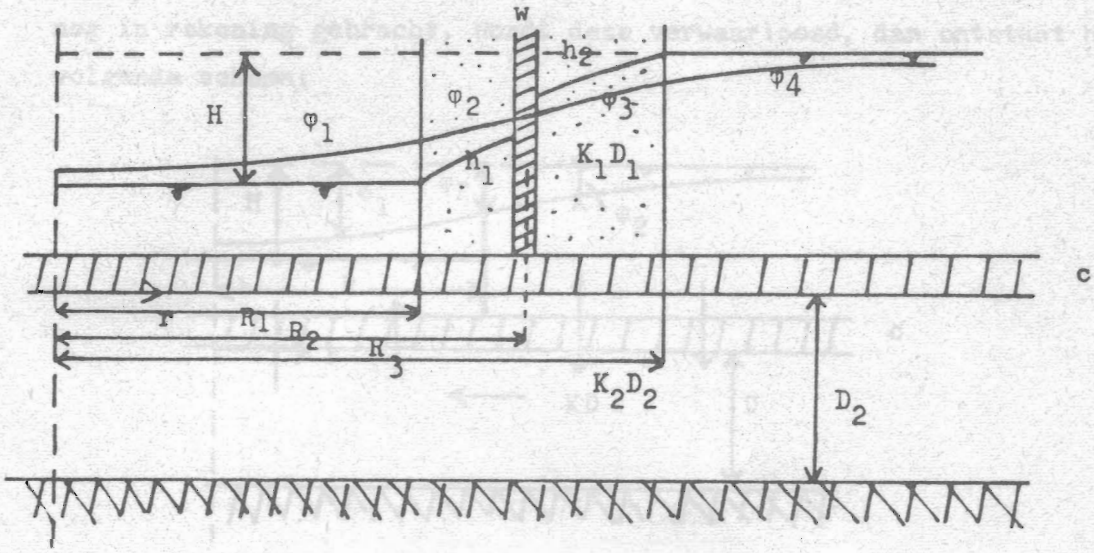
$$\varphi = \frac{H}{2} e^{-\frac{x}{\lambda}} \qquad \text{met} \quad \lambda = \sqrt{KDc}$$

De zakkingslijn verloopt symmetrisch t.o.v. het punt A.
De kwel kan worden berekend uit

$$|q| = \frac{HKD}{2\lambda}$$

Voor dit geval kunnen ook formules worden afgeleid voor de niet-stationaire toestand voor een peildaling in het bekken als willekeurige functie van de tijd $H = H(t)$, met tevens inachtneming van de berging in de c-laag.
(R.I.D.-mededeling 70-2).

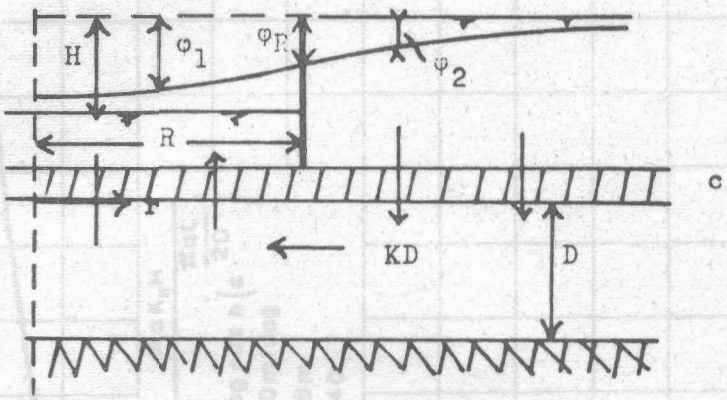
4.5. Rond spaarbekken, ingegraven in een watervoerend pakket met verticale semipermeabele core en constant grondwaterpeil op enige afstand en door een horizontale halfdoorlatende laag gescheiden van een onderliggend watervoerend pakket.



In principe kunnen de formules voor de verhanglijnen en de kwel op analoge wijze worden berekend als voor een langwerpig bekken, met dit verschil, dat hier geen symmetrie-overwegingen gelden, waardoor het probleem in vier gedeelten moet worden opgelost. De tamelijk gecompliceerde uitkomsten daarvan zullen hier niet worden gegeven, omdat het niet mogelijk is deze in algemene vorm op overzichtelijke wijze weer te geven; programmering is op eenvoudige wijze mogelijk

4.6. <u>Rond spaarbekken met semipermeabele bodem op een watervoerend pakket; door een waterdichte dijk gescheiden van een ondiep pakket met constant peil.</u>

Dit is een bijzonder geval van voorbeeld 4.5. nl. met w = ∞. Een zekere weerstand van het dijkslichaam over een breedte 2b is dan nog in rekening gebracht. Wordt deze verwaarloosd, dan ontstaat het volgende schema:



De zakkingen in het watervoerende pakket t.o.v. het constante buitenwaterpeil kunnen worden voorgesteld door:

$$\varphi_1 = H - \frac{HR}{\lambda} K_1 \left(\frac{R}{\lambda}\right) I_o \left(\frac{r}{\lambda}\right)$$

(zie bijlage 4.6.a.)

$$\varphi_2 = \frac{HR}{\lambda} I_1 \left(\frac{R}{\lambda}\right) K_o \left(\frac{r}{\lambda}\right)$$

terwijl de kwel kan worden berekend uit:

$$Q = \frac{2\pi R^2 HKD}{\lambda^2} I_1 \left(\frac{R}{\lambda}\right) K_1 \left(\frac{R}{\lambda}\right)$$

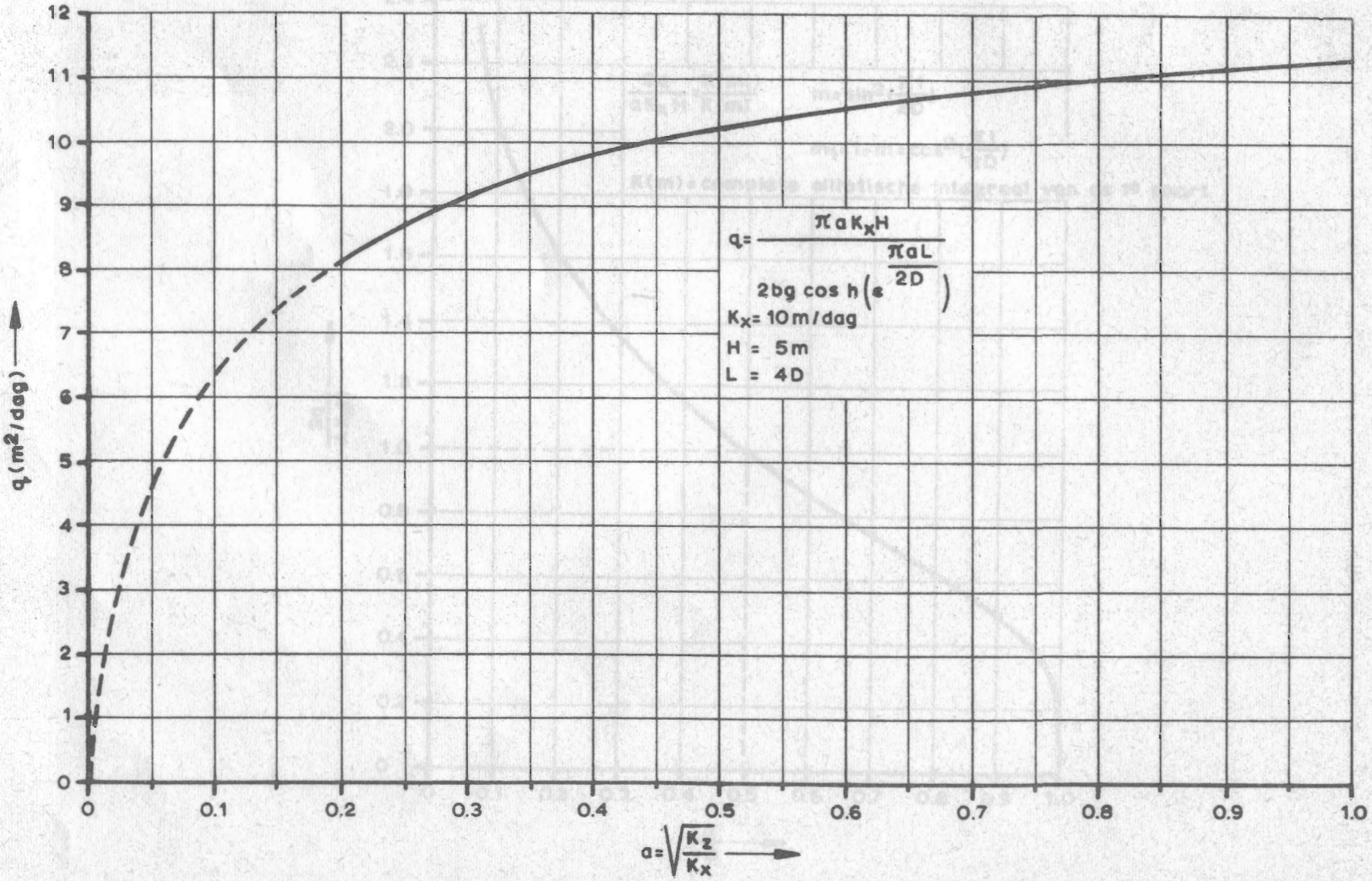
(zie bijlage 4.6.b.)

In deze formules is λ^2 = KDc en stellen $I_o(\alpha)$, $I_1(\alpha)$, $K_o(\alpha)$ en $K_1(\alpha)$ achtereenvolgens gemodificeerde Besselfuncties van de eerste en tweede soort en van de orde nul en een voor.

Voor dit geval kunnen ook formules voor de niet-stationaire toestand worden afgeleid bij een snelle peildaling in het bekken.

VERBAND TUSSEN DE KWEL q EN ANISOTROPIE a

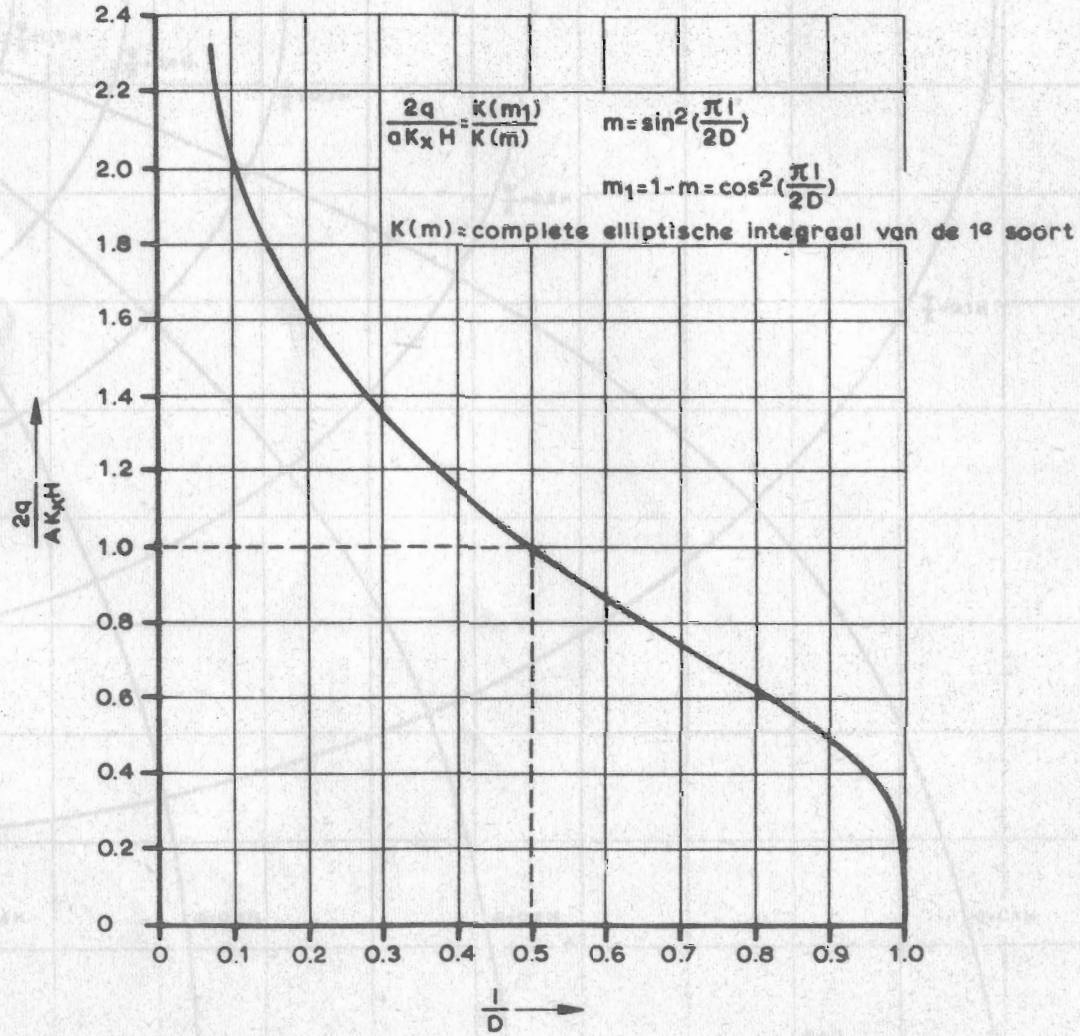
IN VOORBEELD 3.1.



37156

VERBAND TUSSEN DE KWEL EN DE LENGTE VAN DE DAMWAND

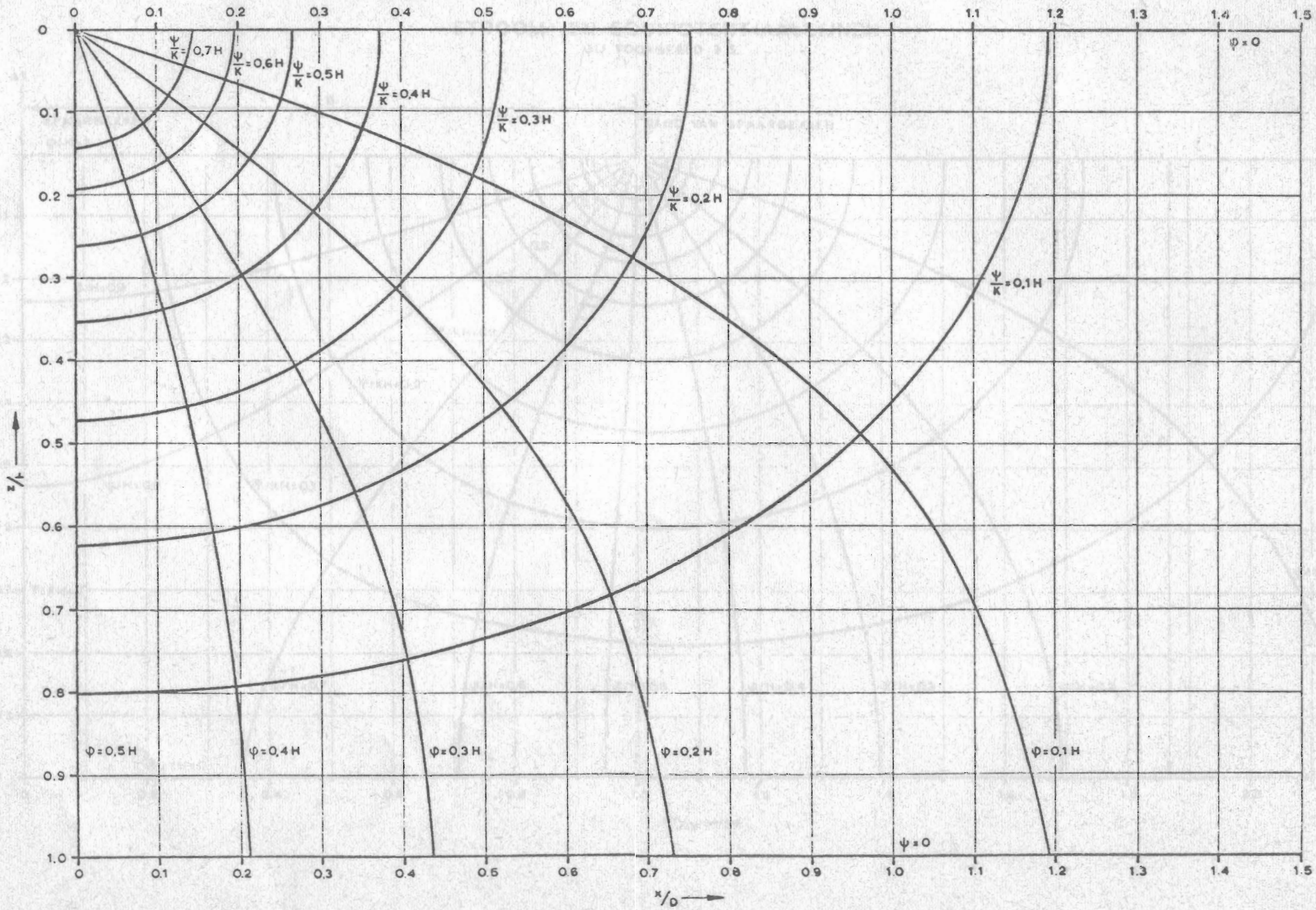
IN VOORBEELD 3.4a.



37158

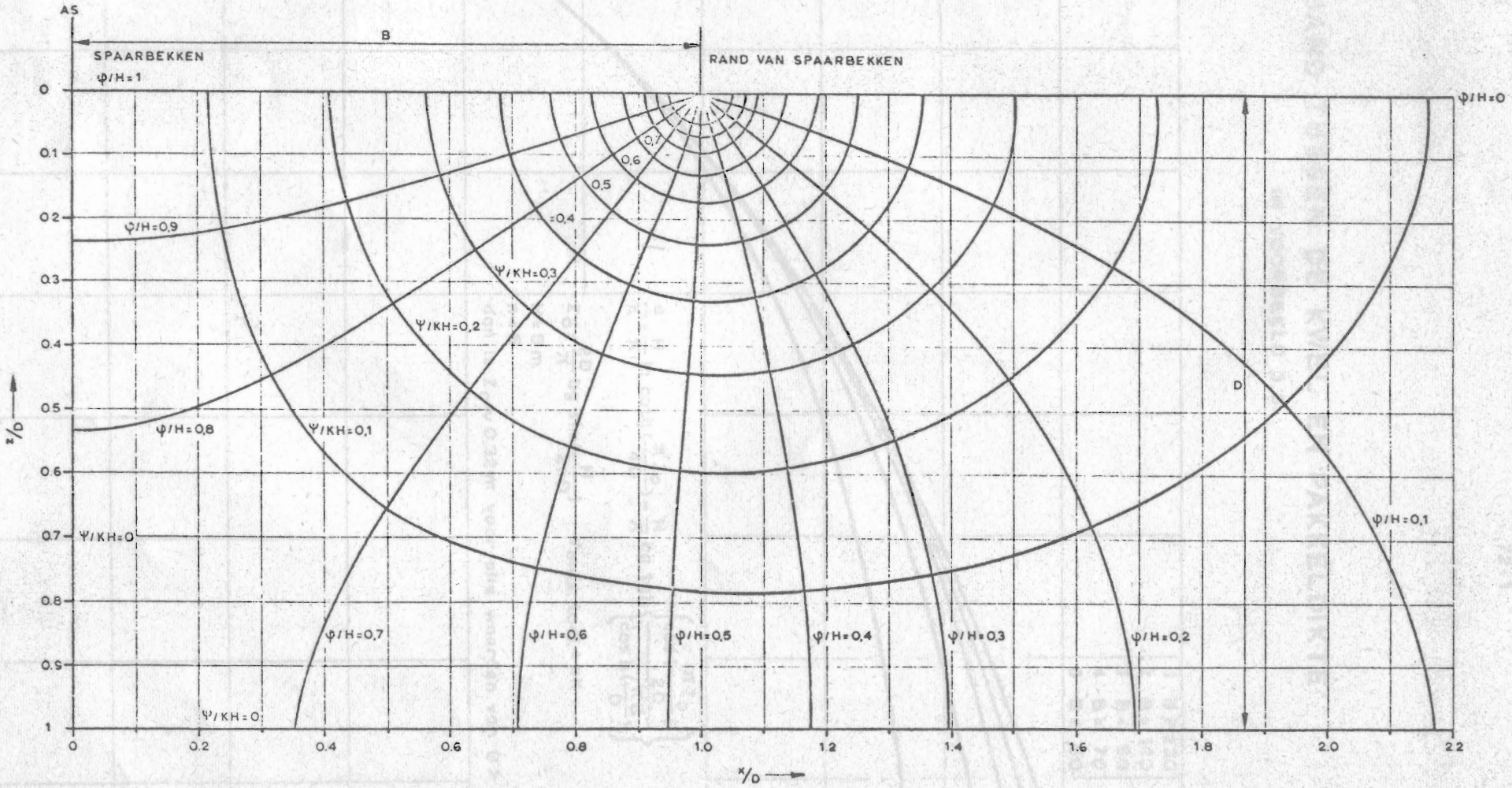
STROOM- EN EQUIPOTENTIAALLIJNEN

BIJ VOORBEELD 3.4.



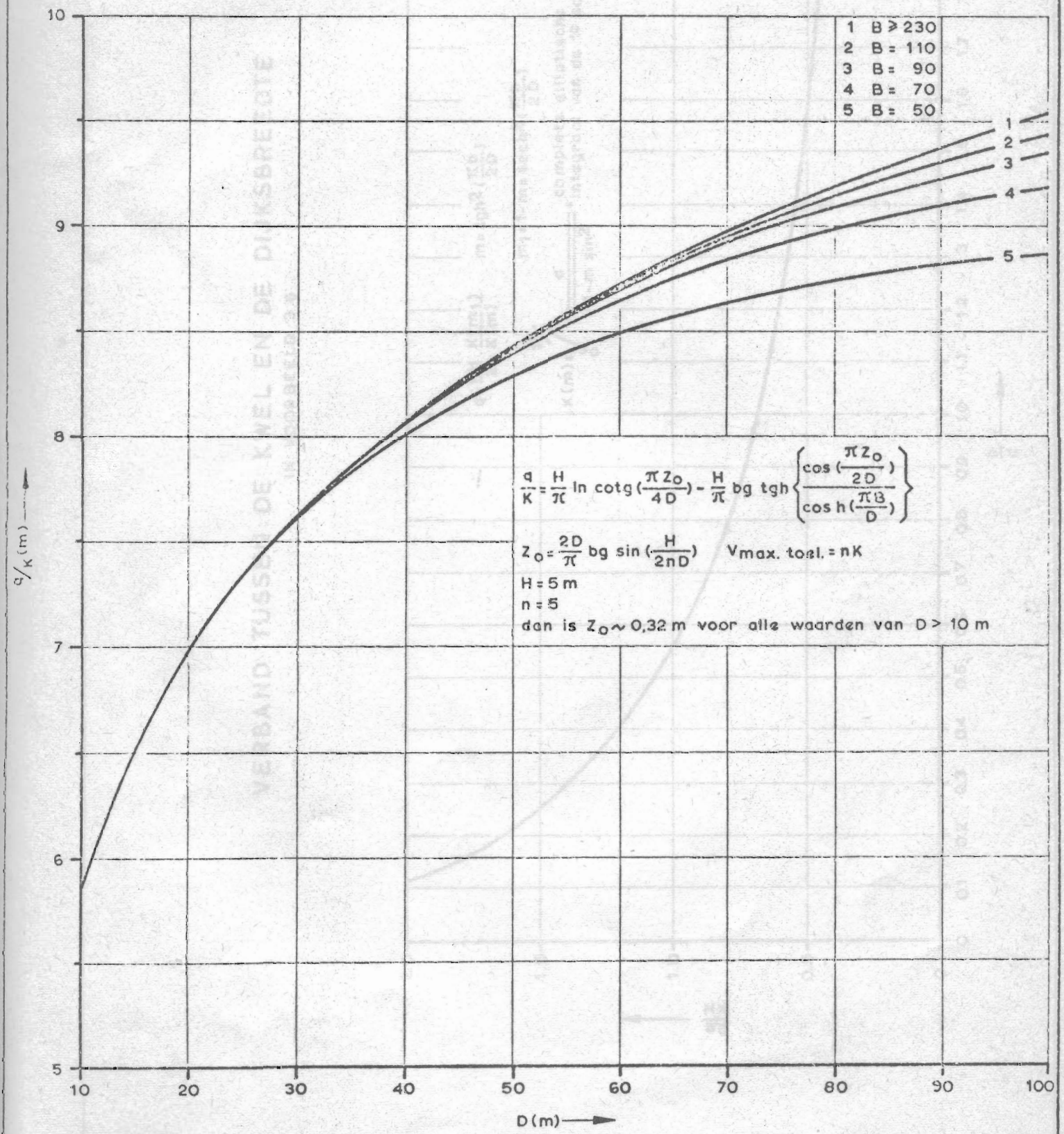
STROOM- EN EQUIPOTENTIAALLIJNEN

BIJ VOORBEELD 3.5.



VERBAND TUSSEN DE KWEL EN PAKKELDIKTE

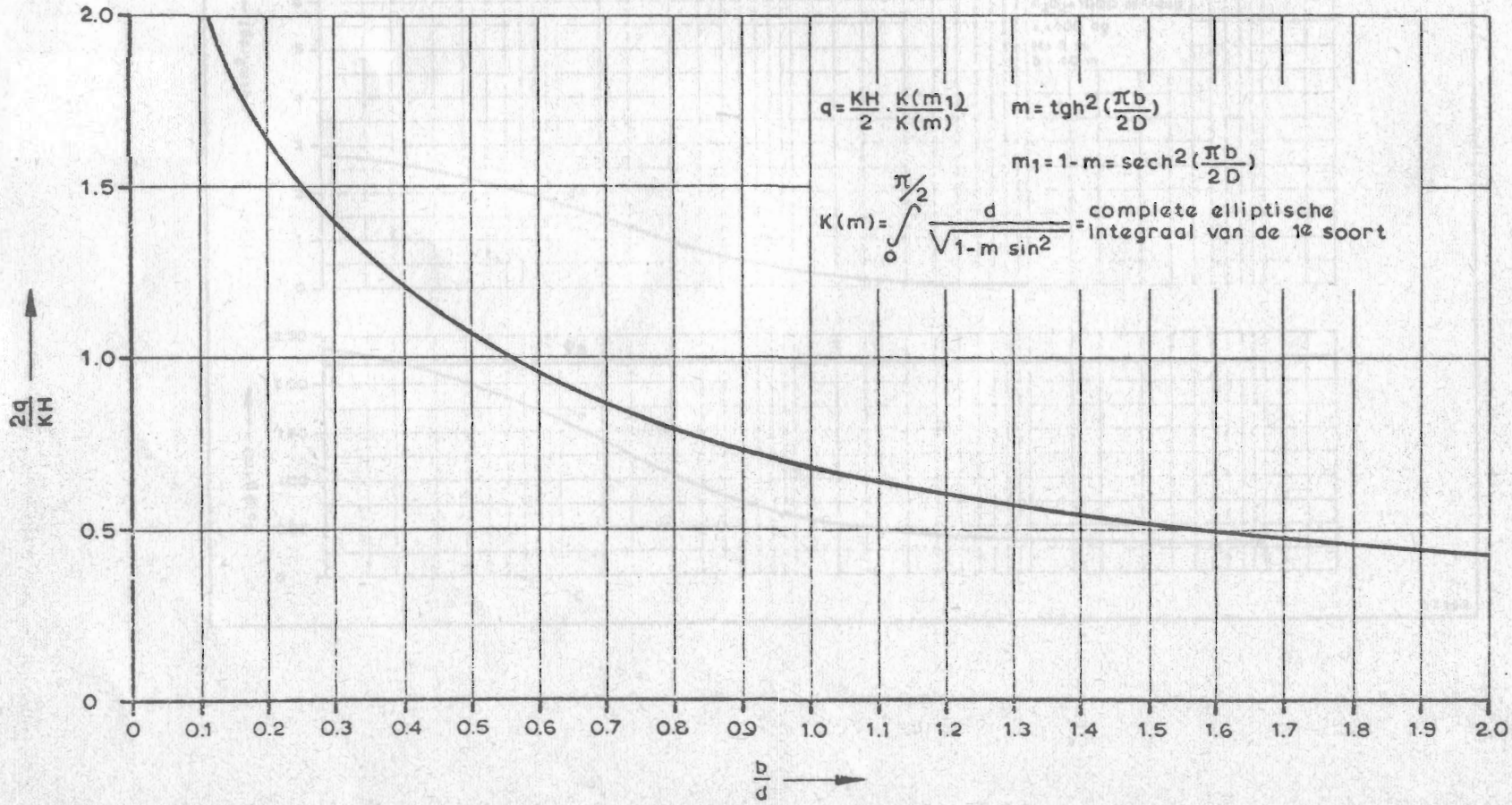
IN VOORBEELD 3.5.



RIJKSINSTITUUT
VOOR
DRINKWATERVOORZIENING
1972

VERBAND TUSSEN DE KWEL EN DE DIJKSBREEDTE

IN VOORBEELD 3.6.

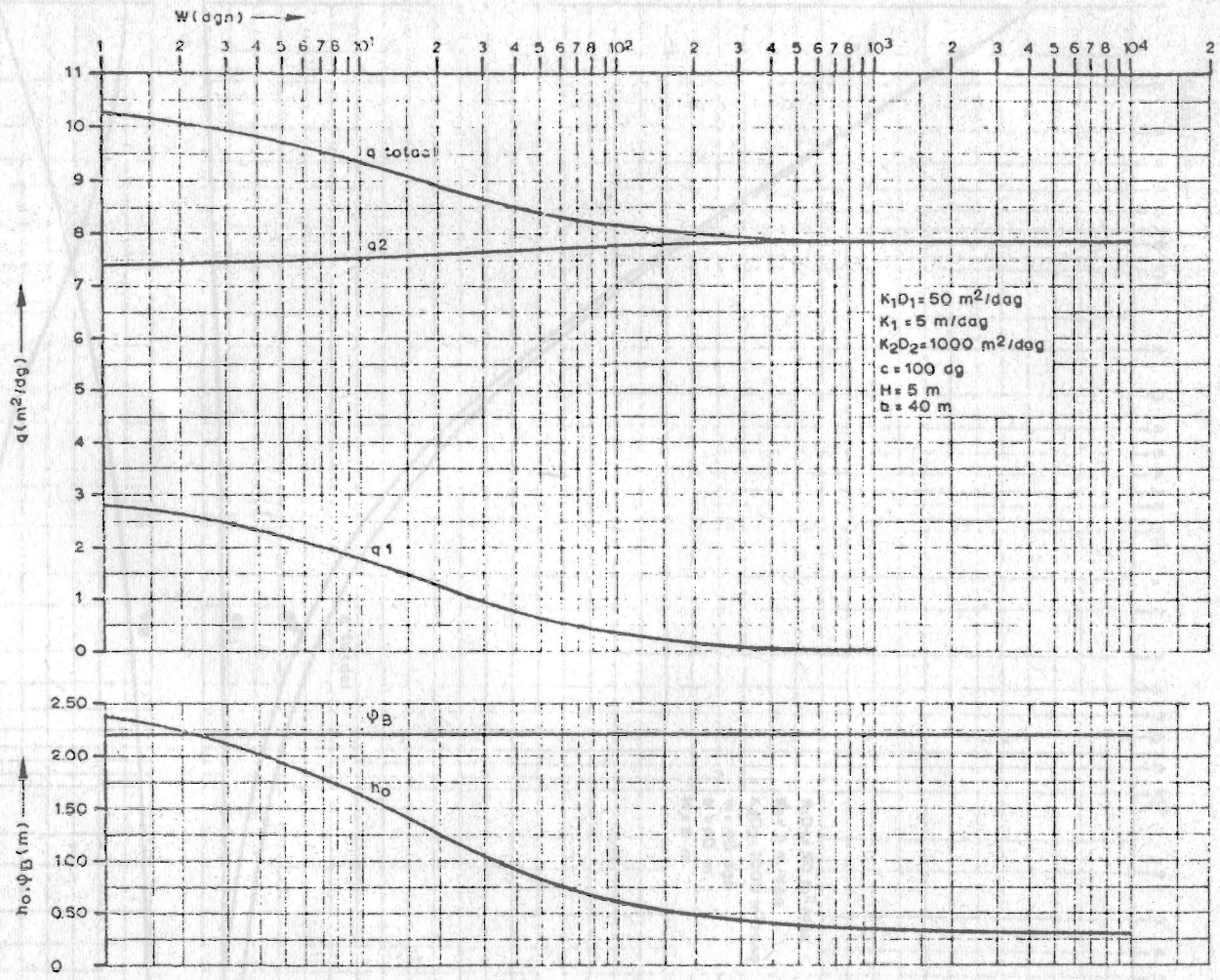


BIJLAGE 3.6.
BEHOORT BIJ RID MEDEDELING
72-1

37161

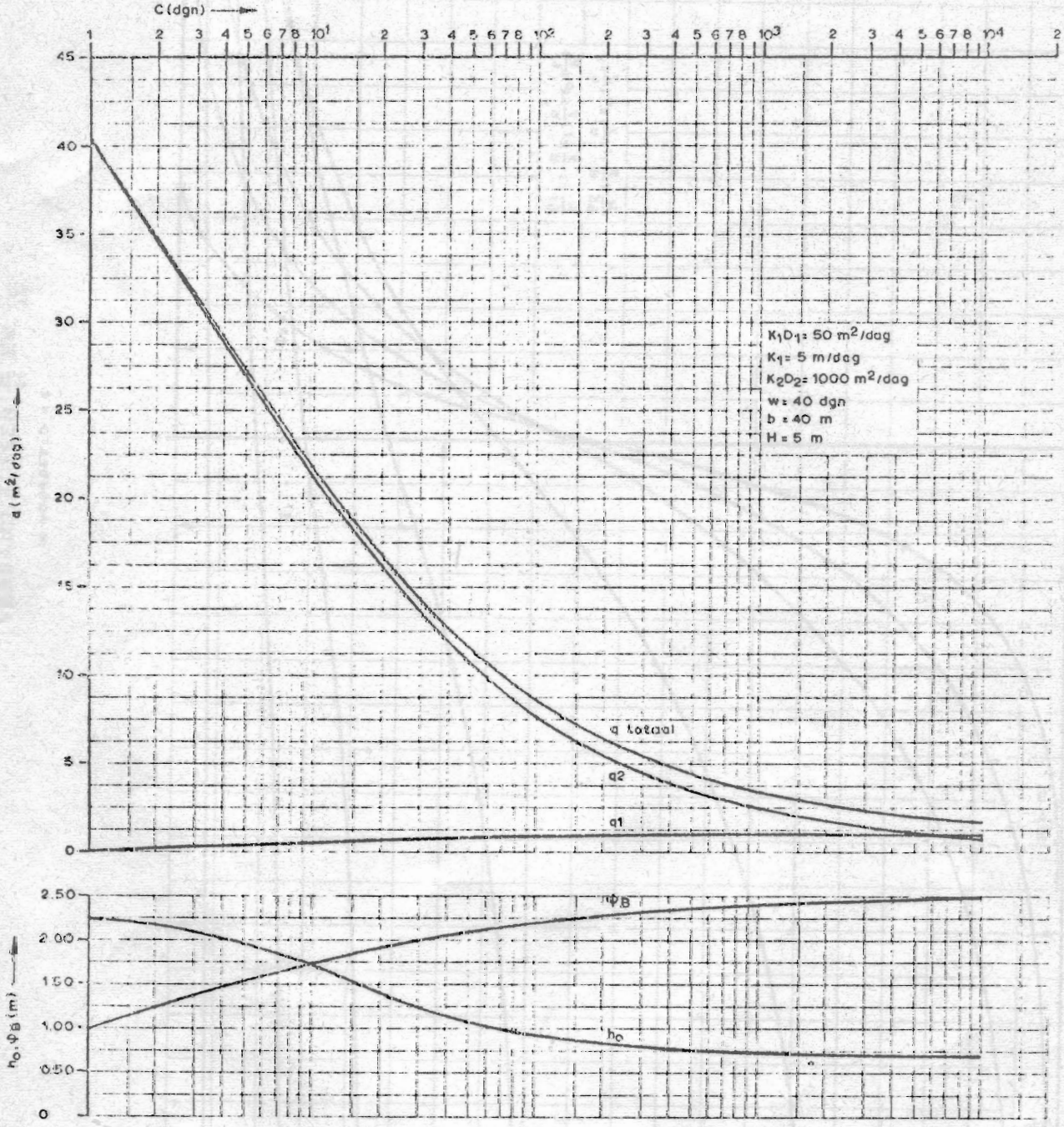
VERBAND TUSSEN DE KWEL q EN DE COREWEERSTAND w

IN VOORBEELD 4.2



37162

VERBAND TUSSEN DE KWEL q EN DE WEERSTAND c
VAN DE HORIZONTALE SEMIPERMEABELE LAAG
IN VOORBEELD 4.2.



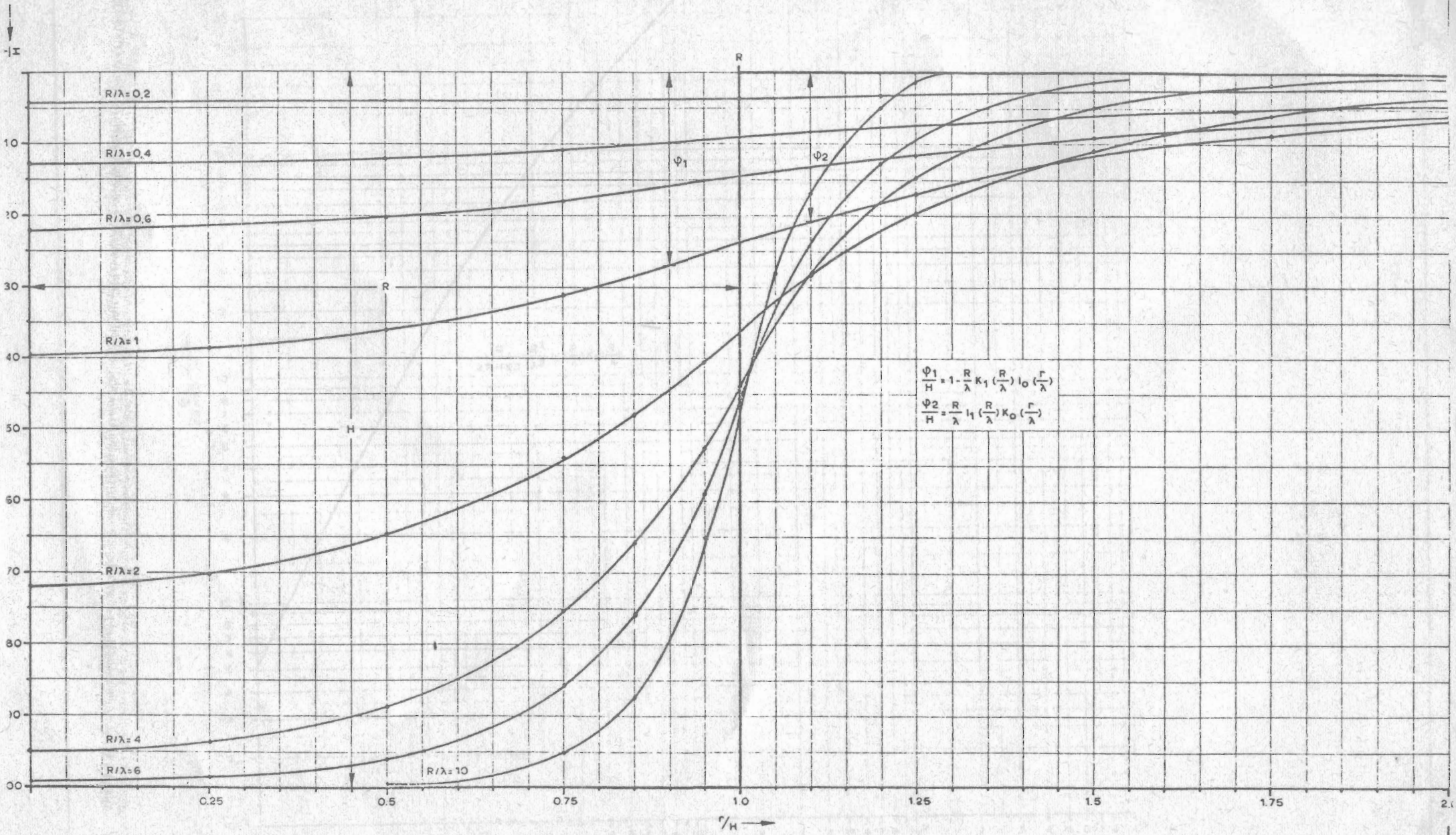
DIENST VOOR DRINKWATERVOORZIENING 19/2

DIENST VOOR GEHOORN BIJ RIO MEDEDELING 72-1

37103

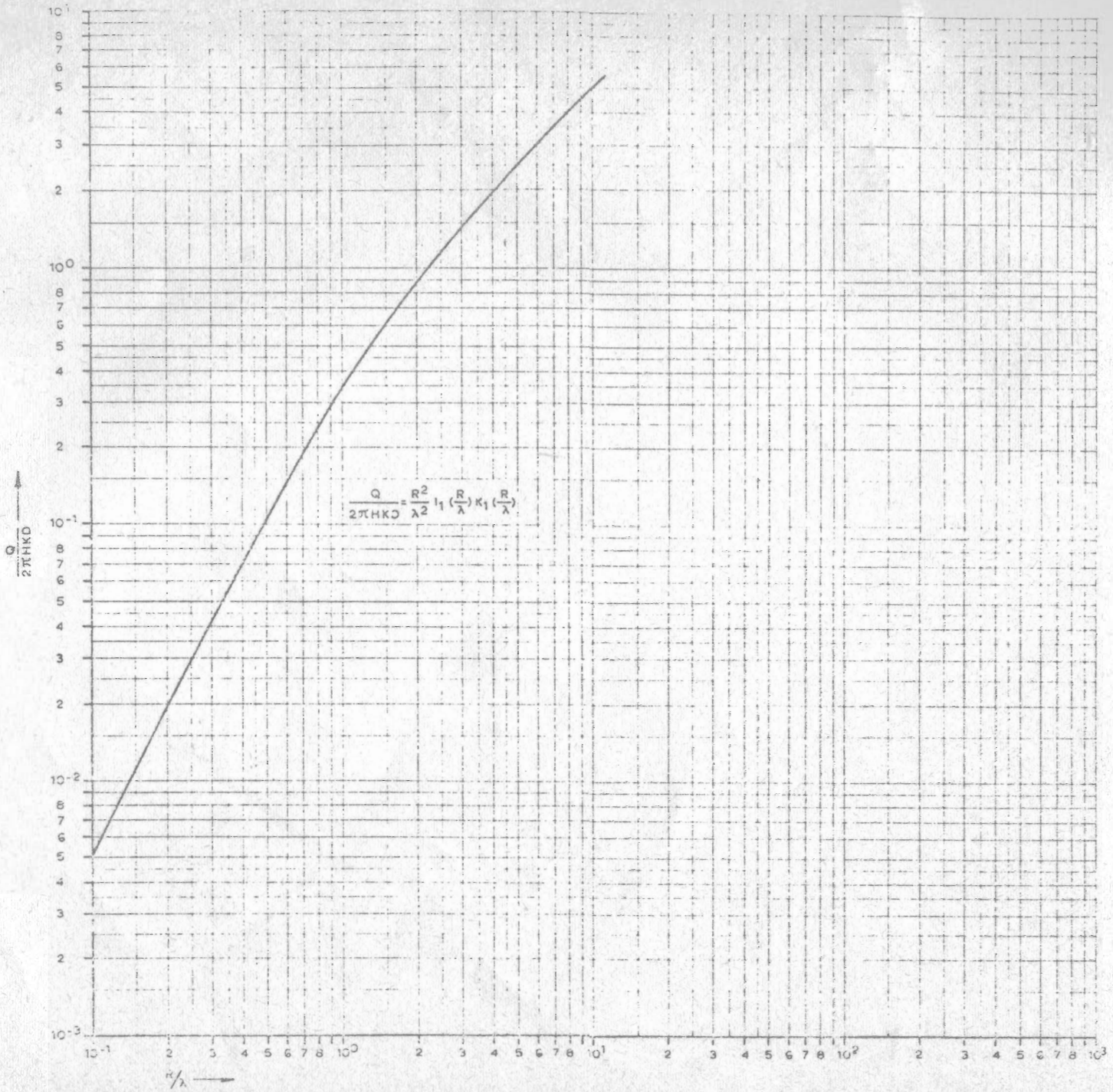
VERBAND TUSSEN $\frac{\varphi}{H}$ EN $\frac{R}{\lambda}$

IN VOORBEELD 4 6



VERBAND TUSSEN DE KWEL EN $\frac{R}{\lambda}$

IN VOORBEELD 4 6



ERRATUM

R.I.D.-Mededelingen 1.

Buitenblad: "Mededelingen 1" moet zijn "Mededelingen 72-1".

Binnenblad: onder "'s-Gravenhage" toevoegen: "november 1972".

Blz. 16 : op de onderste afbeelding dient de horizontale as met de hoofdletter X te worden aangegeven.

Blz. 19 : voor de bovengrens van de tweede integraal moet " ∞ " worden ingevuld.

Blz. 20 : idem voor de bovengrens van de eerste integraal.

Blz. 22 : in de formule voor Ψ (r,z) moet

" $\sinh\left(\frac{\alpha_n D}{L}\right)$ " veranderd worden in " $\sinh\left(\frac{\alpha_n D}{aL}\right)$ "

4e regel van onderen: " $J_o(\alpha_n) = 0$ " moet zijn

" $J_o(\alpha) = 0$ "

Blz. 25 : onderste afbeelding: "Q_1" moet zijn "φ_1"

tweede formule wordt:

" $\varphi_2^2 = H^2 - \frac{L-x}{L-a}(H^2 - \varphi_r^2)$ "

bijlage 3.5b: opschrift: "pakkeldikte" moet zijn "pakketdikte"

bijlage 3.6 : onder integraalteken: achter "d" en "$\sin^2$" de Griekse letter "α" toevoegen.