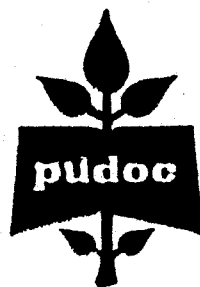


*Verlagen van  
landbouwkundige onderzoekingen*

L. F. ERNST

GRONDWATERSTROMINGEN IN DE  
VERZADIGDE ZONE EN HUN BEREKENING  
BIJ DE AANWEZIGHEID VAN HORIZONTALE  
EVENWIJDIGE OPEN LEIDINGEN



NR. 67.15



GRONDWATERSTROMINGEN IN DE VERZADIGDE ZONE  
EN HUN BEREKENING BIJ AANWEZIGHEID VAN  
HORIZONTALE EVENWIJDIGE OPEN LEIDINGEN



GRONDWATERSTROMINGEN IN DE VERZADIGDE  
ZONE EN HUN BEREKENING BIJ AANWEZIGHEID  
VAN HORIZONTALE EVENWIJDIGE  
OPEN LEIDINGEN

GROUNDWATER FLOW IN THE SATURATED ZONE  
AND ITS CALCULATION WHEN HORIZONTAL  
PARALLEL OPEN CONDUITS ARE PRESENT

L. F. ERNST

*Instituut voor Cultuurtechniek en Waterhuishouding*



CENTRUM VOOR LANDBOUWPUBLIKATIES EN LANDBOUWDOCUMENTATIE



# INHOUD

	blz.
I. INLEIDING . . . . .	1
1. Eigenschappen van grondwater en grond . . . . .	1
2. De invloed van de lithostratigrafische en topografische gesteldheid . . . . .	7
II. STATIONAIRE GRONDWATERSTROMINGEN . . . . .	10
1. Het gebruik van constante radiale, horizontale en verticale weerstanden bij een vrijwel horizontale grondwaterspiegel . . . . .	10
a. Het homogene pakket van constante dikte . . . . .	10
b. Het heterogene pakket met twee lagen van constante dikte . . . . .	28
c. De symmetrische drainage bij een van $x$ afhankelijke laagdikte . . . . .	31
d. Asymmetrische stromingen in een pakket met een of twee lagen . . . . .	36
e. Het heterogene pakket met meer dan twee lagen van constante dikte . . . . .	37
f. Drainage van een rechthoekig perceel door een pakket met een of twee lagen van constante dikte . . . . .	41
g. Algemene beschouwing van de stationaire symmetrische drainage . . . . .	43
2. De invloed van de vorm van de grondwaterspiegel op de vlakke stroming in de omgeving van open leidingen . . . . .	47
3. De stroming naar de stootvoegen tussen drainbuizen . . . . .	60
III. NIET-STATIONAIRE GRONDWATERSTROMINGEN . . . . .	64
1. Veldwaarnemingen en laboratoriummetingen van bergingscoëfficiënten . . . . .	64
2. Toestanden waarbij het superponeren van bijzondere oplossingen niet toelaatbaar is . . . . .	76
3. Superponeerbare oplossingen van de vorm $h(x, z, t)$ of $h(x, y, t)$ . . . . .	83
4. Superponeerbare oplossingen van de vorm $h(x, t)$ bij bijzondere randvoorwaarden . . . . .	89
a. Het homogene pakket . . . . .	90
b. Het gelaagde pakket . . . . .	105
c. Het homogeen doorlatende pakket met bergingscoëfficiënt en overtollige neerslag afhankelijk van $x$ . . . . .	112
d. Het homogene pakket met veranderingen in $h(x, t)$ en $N(t)$ door veranderingen in $h_0(t)$ . . . . .	122
5. Grondwaterstromingen onder invloed van een vertraagde levering uit de onverzadigde zone . . . . .	125
6. Superponeerbare oplossingen van de vorm $h(x, t)$ en $h(z, t)$ bij een pakket bestaande uit twee lagen van verschillende samendrukbaarheid . . . . .	128
7. De berekening van niet-stationaire grondwaterstromingen bij aanneming van quasi-stationaire toestanden . . . . .	139

IV. VLOEISTOFMODELLEN . . . . .	160
1. Modelregels en nabootsing van randvoorwaarden bij zandmodellen en spleetmodellen . . . . .	160
SAMENVATTING . . . . .	171
SUMMARY . . . . .	175
LITERATUUR . . . . .	179
VERKLARING VAN DE GEBRUIKTE SYMBOLEN . . . . .	184
EXPLANATION OF USED SYMBOLS . . . . .	187



De auteur promoveerde op 4 juni 1962 op een gelijkloidend proefschrift aan de Rijksuniversiteit te Utrecht tot Doctor in de Wiskunde en Natuurwetenschappen.



# I. INLEIDING

## I.1. EIGENSCHAPPEN VAN GRONDWATER EN GROND

De stroming van het grondwater vormt een onderdeel van de kringloop van het water. Voor elk onderdeel van deze kringloop kan een waterbalans worden opgesteld. De voeding van het grondwater gebeurt voornamelijk door de neerslag en door infiltratie vanuit open leidingen (rivieren, kanalen, sloten, enz.); de onttrekking van water aan de grond gebeurt voornamelijk door drainerende open leidingen en aan het maaiveld door de planten, welke een grote hoeveelheid water verdampen. Als waterbalansformule voor een oppervlakte  $F$  volgt onmiddellijk:

$$R - E = N = \frac{1}{F} (Q + \iint \frac{dS}{dt} dx dy) = \frac{Q}{F} + \frac{d\bar{S}}{dt} \quad (1)$$

Voor een eenduidige oplossing van de grondwaterstromingen is het nodig, dat behalve het geleidend vermogen van het medium nog de flux, of de potentiaal, of een zekere betrekking tussen deze grootheden, langs de rand van het beschouwde gebied gegeven moet zijn.

In principe moet het mogelijk zijn om voor het gehele watervoerende pakket een differentiaalvergelijking op te stellen om daaruit met de genoemde randvoorwaarden een eenduidige oplossing af te leiden. Een dergelijke poging leidt echter tot praktisch onoverkomelijke moeilijkheden. Om deze reden is het gebruikelijk de berekeningen voor de, meestal diepere, verzadigde zone (luchtgehalte = 0) en de, meestal aan het maaiveld grenzende, onverzadigde zone van elkaar te scheiden.

Het geringere geleidende vermogen van de onverzadigde zone houdt in, dat de stroming hier in de meeste gevallen vrijwel verticaal moet zijn. Behalve een afvoer van regenwater door een dunne laag over het maaiveld, is echter ook een oppervlakkige afvoer in horizontale richting door het bovenste deel van de onverzadigde zone mogelijk in die gevallen, dat dicht onder de bouwvoor een, zelfs in de verzadigde toestand, slecht doorlatende laag wordt gevonden. Het aannemen van een verticale stroming in de onverzadigde zone leidt in het bijzonder bij stationaire stromingen tot een belangrijk voordeel. In het laatst genoemde geval kan men namelijk op een verticale lijn de flux door het freatisch oppervlak gelijkstellen aan de flux door het maaiveld =  $R - E$ . Het is duidelijk, dat een oppervlakkige afvoer na een afzonderlijke berekening hierop in mindering gebracht moet worden.

Voor de flux in een punt van de verzadigde zone met isotrope doorlatendheid geldt de wet van Darcy (DARCY, 1856; DACHLER, 1936; MUSKAT, 1937):

$$\vec{v} = -k \text{ grad } h \quad (2)$$

Bij de stroming van willekeurige vloeistoffen kan (2) analoog aan de wet van Poiseuille in de volgende vorm gebracht worden:

$$\vec{v} = -\frac{\alpha}{\eta} \text{ grad } \Phi \quad (3)$$

met:

$$\Phi = \rho gh = p + \rho gz \quad k = \frac{\rho g \alpha}{\eta} \quad (4)$$

De specifieke doorlatendheid  $\alpha$  is onafhankelijk van de aard van de vloeistof en de temperatuur en alleen afhankelijk van de eigenschappen van het medium. Bij de behandeling van grondwaterstromingen kan meestal met goede benadering worden aangenomen, dat de temperatuur in de verzadigde zone vrijwel constant is ( $10^\circ\text{C}$ ) en dus ook dichtheid en viscositeit constant zijn. Om deze reden wordt in deze publikatie verder uitsluitend gebruik gemaakt van de grootheid  $k$ .

Bij grote waarden van  $v$  gaat de lineaire betrekking (2) niet meer op. Forchheimer was een van de eerste onderzoekers die op grond van metingen in grof zand en grind een vergelijking kwadratisch in  $v$  heeft voorgesteld (FORCHHEIMER, 1901). Volgens Lindquist kan deze kwadratische formule verklaard worden door naast de wrijvingswarmte overeenkomstig de wet van Poiseuille, nog te rekenen met een zekere omzetting van kinetische energie in warmte ten gevolge van de onregelmatige snelheden in het netwerk van poriën met sterk veranderlijke richting en doorsnede. Uit metingen met water stromend tussen loden korrels van gelijke diameter ( $d$  minimaal 1 mm, maximaal 5 mm) heeft Lindquist de volgende formule afgeleid (LINDQUIST, 1933):

$$-\frac{dh}{dx} = 1300 \frac{\eta}{\rho g d^2} v + \frac{20}{gd} v^2 \quad (5)$$

Houdt men rekening met de omstandigheden welke in het veld kunnen voorkomen, dan blijkt dat slechts bij uitzondering in zeer kleine gebieden de laatste term van (5) van belang kan zijn. De stroming van het water in zandgrond gaat nog bij zeer kleine potentiaalgradiënten overeenkomstig de wet van Darcy zoals door laboratoriummetingen is aangetoond (MEINZER and FISHEL, 1934).

In de laatste jaren zijn verschillende onderzoekers er toe overgegaan het geldigheidsbereik van de constante  $k$  te controleren voor zandsteen en voor zeer slecht doorlatende klei (voor een overzicht zie SWARTZENDRUBER, 1962), waaruit gebleken is dat  $k$  vrij sterk afhankelijk kan zijn van de potentiaalgradiënt en van de ionenconcentratie. Gezien de zeer grote verschillen in doorlatendheid tussen grove zouden (1 tot 100 m/dag) en dichte kleien ( $10^{-5}$  tot  $10^{-3}$  m/dag) behoeft dit meestal geen bezwaar te zijn tegen aanneming van constante waarden voor de doorlatendheden bij de praktische bewerking van grondwaterstromingsproblemen in de verzadigde zone. Combineert men daarom de wet van Darcy met de continuïteitsvergelijking bij stationaire toestanden in een gebied met homogene isotrope doorlatendheid, dan volgt hieruit de differentiaalvergelijking van Laplace:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (6)$$

Daar volgens de elasticiteitstheorie een drukverandering, die ergens in een vloeistof ontstaat, tot gevolg heeft dat deze drukverandering zich met zeer grote snelheid voortplant (bijvoorbeeld bij een vlakke golfbeweging in vrij water:  $v = \sqrt{E_w/\rho}$ ), kan bij niet-stationaire grondwaterstromingen in de verzadigde zone dikwijls een onmiddellijke aanpassing van de drukverdeling aan de randvoorwaarden worden verondersteld (MUSKAT, 1937, pag. 622). Op elk tijdstip kan de toestand als quasi-stationair worden beschouwd bij de op dat tijdstip heersende randvoorwaarden en blijft de differentiaalvergelijking van Laplace geldig. Een dergelijke verwaarlozing houdt in dat de samendrukbaarheid van vloeistof en korrelskelet van geen belang wordt geacht. In het bijzonder is dit toegestaan als de bergingsveranderingen in de onverzadigde zone van overwegende invloed zijn en in het algemeen als de afmetingen van het beschouwde gebied relatief klein zijn. Is de samendrukbaarheid wel van belang, dan kan de differentiaalvergelijking van Laplace niet worden gehandhaafd, daar de bergingsveranderingen in de continuïteitsvergelijking en dus ook in (6) moeten worden opgenomen.

Indien de doorlatendheid van de grond homogeen anisotroop is en niet van de coördinaten  $x$ ,  $y$  en  $z$ , maar wel van de stromingsrichting afhankelijk is, dan is (6) niet geldig. Door lineaire transformaties van de plaatscoördinaten ( $x = X\sqrt{k_x k_0}$ , enz. met voor  $k_0$  een willekeurige constante) kan men echter weer overgaan op de differentiaalvergelijking van Laplace (VREEDENBURGH, 1935). Wil men na de transformatie in elk punt een onveranderde stijghoogte en voor elk oppervlakte-element een onveranderde doorvoer van vloeistof per tijdseenheid behouden, dan moet in het getransformeerde systeem een nieuwe doorlatendheid gebruikt worden en wel:  $K = \sqrt{k_x k_y k_z} k_0$ . Daar dit bij de praktische berekeningen geen moeilijkheden veroorzaakt, wordt bij de verdere beschouwingen steeds een isotrope doorlatendheid aangenomen.

Temperatuursverschillen, verschillen in ionenconcentratie en elektrische potentiaalverschillen kunnen van invloed zijn op de stroming van het water zowel in de verzadigde als in de onverzadigde zone. Bij de bestudering van het water in de onverzadigde zone wordt om onafhankelijk te worden van een nauwkeurige onderscheiding van dergelijke effecten, in vele gevallen gebruik gemaakt van de vrije energie om daarmee de toestand te karakteriseren. Wordt aangenomen, dat de genoemde effecten van geen invloed zijn, dan is de energetische toestand van het water alleen afhankelijk van de cohesie, de adhesie, de luchtdruk en de plaats in het zwaartekrachtsveld. Bij de hogere vochtgehalten, waarbij het transport van water in de vloeibare fase vooral van belang kan zijn, zijn de adsorptiekrachten tussen water en gronddeeltjes van weinig betekenis en kan de stroming door de gedeeltelijk met water gevulde poriën verklaard worden uit verschillen in de som van druk en potentiële energie.

Onder deze voorwaarden kan men zowel de doorlatendheid als de vochtspanning uitsluitend afhankelijk van het vochtgehalte beschouwen, hoewel dit niet geheel juist behoeft te zijn (bijvoorbeeld door opgesloten luchtbelletjes). De wet van Darcy kan nu in iets andere vorm geschreven worden en voor de in eerste benadering verticale beweging geldt:

$$v = -k(M) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) = k(M) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} - 1 \right) \quad (7)$$

waarbij  $p = -\rho g \Psi$  = de druk van het water dat niet onderworpen aan adsorptiekrachten is minus de atmosferische druk ( $p < 0$  en  $\Psi > 0$ ).

Door combineren met de continuïteitsvergelijking (RICHARDS, 1931) volgt uit (7):

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left\{ k(M) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} - 1 \right) \right\} \quad (8)$$

Uit laboratoriummetingen is gevonden, dat voor het verband tussen  $k$  en  $\Psi$  eenvoudige empirische formules geldig verklaard mogen worden (HALLAIRE, 1949, 1950; WIND, 1955; WESSELING, 1957; GARDNER, 1958). Hieruit volgt, dat bij stationaire toestanden de differentiaalvergelijking (8) langs elementaire weg oplosbaar is. Bij niet-stationaire toestanden is behalve de functie  $k(\Psi)$  ook nog de functie  $\Psi(M)$  als gegeven nodig om een oplossing van (8) expliciet mogelijk te maken. De afleiding van een dergelijke oplossing is tot nu toe alleen onder bijzondere voorwaarden en gedeeltelijk langs numerieke weg mogelijk gebleken (KLUTE, 1952; PHILIP, 1957, 1958).

Door talrijke metingen heeft men gevonden, dat het verband tussen  $\Psi$  en  $M$  sterk afhankelijk is van de grondsoort (zie fig. 1). Voor het verband tussen  $k$  en  $\Psi$  geldt dit in mindere mate. Uit dergelijke gegevens kan worden afgeleid, dat zowel bij zandgrond als bij kleigrond, en dit vooral als door wateronttrekking aan de bewortelde laag een

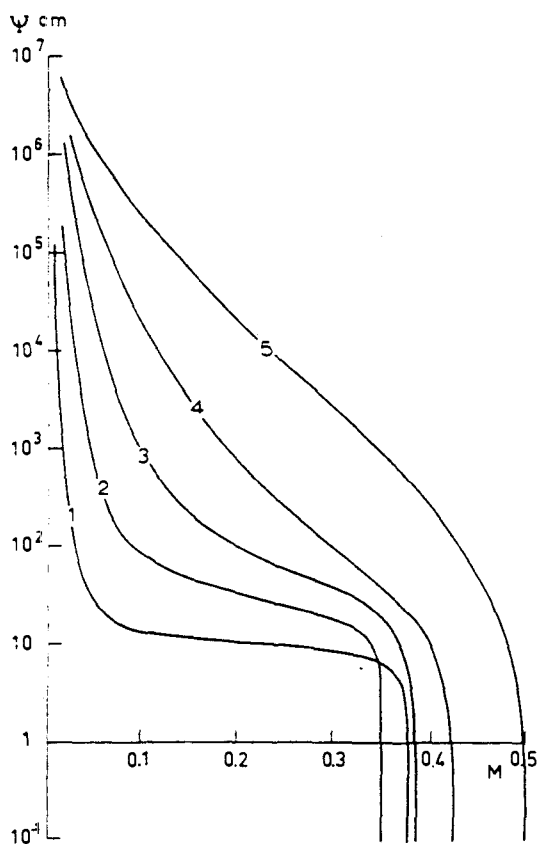


FIG. 1. Het verband tussen vochtgehalte ( $M$ ) en vochtspanning ( $\rho g \Psi$ ) bij verschillende grondsoorten en kunstmatige porieuze media (SCHOFIELD, 1935; BAVER, 1949). 1. Uitgezeefd zand, glasparels, enz.; 2. Grof zand; 3. Fijn zand; 4. Zavel; 5. Klei

*The relation between moisture content ( $M$ ) and moisture tension ( $\rho g \Psi$ ) for different soil types and artificial porous media (SCHOFIELD, 1935; BAVER, 1949). 1. Sand separate, glass beads, etc.; 2. Coarse sand; 3. Fine sand; 4. Loam; 5. Clay*

zekere uitdroging is ontstaan, de dikwijls gebruikte indeling van de onverzadigde zone in twee lagen tot een redelijke benadering moet leiden. Voor de bovenste laag neemt men aan, dat door het lage vochtgehalte een zeer lage doorlatendheid ontstaat en er ofwel geen stroming of een vrijwel verticale stroming is. In de diepere laag mag het vochtgehalte slechts zo weinig van volledige verzadiging afwijken, dat hier bij benadering dezelfde doorlatendheid geldt als in de verzadigde toestand (KOZENY, 1927; WYCKOFF, BOTSET and MUSKAT, 1932; WEDERNIKOV, 1935). Wordt voor de vochtspanning in deze laag aangenomen, dat  $0 < \rho g \Psi < \rho g \Psi_0$ , dan is  $\Psi_0$  de dikte van deze laag, wanneer er geen beweging of slechts een horizontale beweging is (zie fig. 24b, 27b en pag. 80).

Dat de grondwaterstand afhankelijk is zowel van de temperatuur als van de atmosferische druk, is een sinds lang bekend feit, dat verklaard kan worden door de bijbehorende volumeveranderingen van opgesloten luchtbelletjes (KING, 1892, pag. 71-72; VEATCH, 1906). Eerst in de laatste tijd werd hieraan weer meer aandacht besteed. Terzaghi heeft gewezen op het toenemende volume van de opgesloten luchtbelletjes bij toenemende vochtspanning (TERZAGHI, 1943, pag. 305-308). Door Peck werd aangetoond dat in de onverzadigde zone een vrij belangrijk gehalte aan opgesloten lucht moet voorkomen (PECK, 1960). De grootte van het effect is relatief klein zowel volgens veldwaarnemingen (KING, 1892; VEATCH, 1906; KOEHNE, 1929; MEYER, 1960) als volgens de theoretische overwegingen en de laboratoriummetingen van Peck en zal vermoedelijk voor de praktijk van weinig belang zijn (-0.1 tot -0.3 cm/mbar en 0.3 tot 1 cm °C). Vooral de invloed van de temperatuur is klein, daar de dagelijkse temperatuurfluctuaties op 30 cm onder het maaiveld grotendeels uitgedempt zijn.

De sterke grondwaterstands dalingen, die bij vriezend weer zijn waargenomen, hangen vermoedelijk samen met de vorming van soms zeer dikke ijslenzen in de bovenste laag van de bodem (TABER, 1929, 1930; KOKKONEN, 1926, 1933). Krischer en Rohnalter behoren tot de eerste onderzoekers, die er op wezen dat bij de door temperatuurverschillen veroorzaakte stromingen een transport in de dampfase van plaatsen met hoge naar plaatsen met lage temperatuur optreedt, met in de vloeistoffase een tegengesteld effect (KRISCHER und ROHNALTER, 1937; KRISCHER, 1938).

Voor de berekening van niet-stationaire grondwaterstromingen in de verzadigde zone is het van belang, dat rekening gehouden wordt met de hysteresis van het vochtgehalte ten opzichte van de vochtspanning. Het vochtgehalte  $M$ , dat bij een bepaalde waarde van  $\Psi$  behoort, hangt af van de voorgeschiedenis. Uit het experimentele onderzoek blijkt, dat in eerste benadering een bevochtigende en een uitdrogende toestand kunnen worden onderscheiden (zie fig. 2). Bij overgang van bevochtiging naar uitdroging en omgekeerd treden grote veranderingen in vochtspanning op bij kleine veranderingen in vochtgehalte.

Behalve de bergingsveranderingen in de onverzadigde zone zijn er door de samen-drukbaarheid van de grond ook bergingsveranderingen in de verzadigde grond mogelijk, welke bergingsveranderingen per volume-eenheid weliswaar veel minder groot zijn, maar door de soms zeer grote dikte van het verzadigde pakket toch van groot belang kunnen zijn. De daling van de bodem bij wateronttrekking evenals een relatief snelle vermindering van de opbrengst van artesische putten wordt door deze samen-

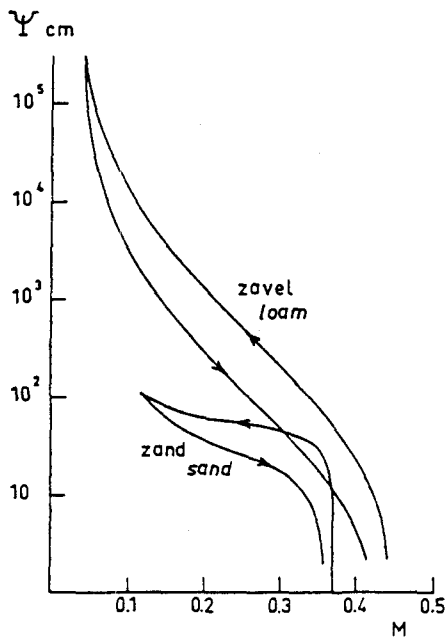


FIG. 2. Het verband tussen vochtgehalte ( $M$ ) en vochtspanning ( $\rho g \Psi$ ) is afhankelijk van uitdroging of bevochtiging. Het vochtgehalte heeft een zekere hysteresis ten opzichte van de vochtspanning. (SCHOFIELD, 1935; BAVER, 1949)

*The relation between moisture content ( $M$ ) and moisture tension ( $\rho g \Psi$ ) depends on the wetting or drying. The moisture content has some hysteresis with regard to the moisture tension (SCHOFIELD, 1935; BAVER, 1949)*

drukbaarheid veroorzaakt (RUSSELL, 1928; MEINZER, 1928). Dat de stroming van water uit artesische putten verklaard kan worden door de druk die de hoger gelegen slecht doorlatende lagen uitoefenen op de goed doorlatende artesische laag, was reeds geruime tijd eerder bekend (zie onder meer HAY, 1890). De vermindering van de laagdikte bij toenemende belasting hangt zowel samen met een verschuiving van de gronddeeltjes ten opzichte van elkaar als met veranderingen in de laagdikte van het geadsorbeerde water dat de kleideeltjes van elkaar scheidt (TERZAGHI and PECK, 1948).

Terzaghi was de eerste onderzoeker, die een groot aantal experimenten met zand en klei heeft uitgevoerd, waarbij de samenhang tussen laagdikte en belasting werd gemeten; tevens heeft hij een wiskundige oplossing gevonden voor de vertraging, die in de zetting ontstaat, doordat de uitdrijving van een deel van het poriënwater een zekere tijd nodig heeft. Door Terzaghi werd het volgende empirische verband afgeleid tussen het poriëngetal  $\varepsilon$  en de korrelspanning  $p$  in met water verzadigde grondmonsters (TERZAGHI, 1925; KEVERLING-BUISMAN, 1940; TERZAGHI and PECK, 1948):

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = -\frac{1}{C} \ln \frac{p}{p_0} \quad (9)$$

Bij wisselingen in belasting beneden een vroegere maximale belasting is het proces in eerste benadering reversibel en wordt voor de samendrukkingscoëfficiënt  $C$  een drie tot tien maal hogere waarde gevonden dan bij een eerste overschrijding van het tevoren bereikte maximum. Afgezien van dit effect is de samendrukkingscoëfficiënt bij veen kleiner dan bij klei en bij zand het grootst.

De samendrukkingscoëfficiënt wordt meestal gemeten aan kleine monsters van enkele centimeters dikte. Afhankelijk van de samendrukbaarheid en de doorlatend-



heid duurt het een zekere tijd voordat het evenwicht voldoende is bereikt: bij zand enige minuten, bij klei enige uren tot rond een dag. Volgens metingen van Keverling-Buisman gaat bij veen en klei de relatief snelle primaire zakking overeenkomstig formule (9) geleidelijk over in de seculaire zakking, welke nog geruime tijd, en volgens waarnemingen aan oude gebouwen zelfs gedurende honderden jaren, doorgaat. Voor  $t > 1$  dag geldt de volgende empirische formule (KEVERLING-BUISMAN, 1940):

$$\frac{D_0 - D}{D_0} = (\alpha_1 + \alpha_2 \ln t) (p - p_0) \quad (10)$$

De beste empirische formule, welke op dit ogenblik bekend is, verkrijgt men door (9) en (10) te combineren. Deze formules zijn echter te ingewikkeld voor de toepassing bij berekeningen van niet-stationaire grondwaterstromingen in de verzadigde zone, zoals in hoofdstuk III.6 zal worden uiteengezet. De wet van Darcy mag hierbij worden gebruikt voor zover het poriëngehalte niet te sterk verandert en de gemiddelde stroomsterkte in een poriënkanaal overheerst ten opzichte van de bergingsverandering per tijdseenheid over een afstand gelijk aan enkele malen de poriëndiameter. Dit laatste zou immers een relatief grote verandering in de vorm van de stroomlijnen inhouden. De nog niet genoemde veranderingen in de gemiddelde kinetische energie, welke bij niet-stationaire stromingen ook in een onsamendrukbaar pakket moeten optreden, zijn in de praktijk relatief zo klein, dat dit zelden van belang kan zijn.

Tenslotte moet op de mogelijkheid gewezen worden, dat vrij gas behalve boven het freatisch oppervlak ook in diepere lagen voorkomt. Bij de in zeer diepe lagen voorkomende zeer hoge drukken kan een belangrijke hoeveelheid gas in opgeloste toestand aanwezig zijn. Stroomt het water naar plaatsen van lagere druk dan volgt uiteindelijk een vrijkomen van het gas. Dit laatste verschijnsel treedt vooral op in de stijgbuis van verticale putten bij het oppompen van water uit diepe lagen. Vermoedelijk is dit verschijnsel verder van weinig belang gezien de weinige vermeldingen in de literatuur (JACOB, 1940), zowel als wegens het feit, dat alle bekende waarnemingen, waarbij bergingsveranderingen van de diepe lagen van invloed waren, door de samen-drukbaarheid van het korrelskelet konden worden verklaard.

## I.2. DE INVLOED VAN DE LITHOSTRATIGRAFISCHE EN TOPOGRAFISCHE GESTELDHEID

Geologische toestand en stroming van het grondwater houden in het algemeen nauw verband met elkaar. Dit geldt ook voor Nederland, waar de Noordzee en de rivieren Rijn, Maas en Schelde een zeer dik, vrijwel volledig uit ongeconsolideerd materiaal bestaand, pakket hebben opgebouwd. Voor de grondwaterhydrologie zijn de grote totale dikte van de goed doorlatende en matig doorlatende lagen, de vrijwel horizontale ligging van deze lagen en de geringe diepte van het freatisch oppervlak ten opzichte van het maaiveld de belangrijkste kenmerken van dit gebied, hoewel hierop ook uitzonderingen voorkomen. In de meeste gevallen is het mogelijk met

goede benadering te veronderstellen, dat de grond is opgebouwd uit horizontale lagen met in elke laag een isotrope of anisotrope doorlatendheid onafhankelijk van  $x$ ,  $y$  of  $z$ . Deze veronderstelling brengt het belangrijke voordeel met zich mee, dat de differentiaalvergelijking van Laplace gehandhaafd kan worden, hetgeen niet het geval is als de doorlatendheid volgens een willekeurige functie van  $z$  afhangt.

Door de geringe hoogteverschillen van het landoppervlak zijn in Nederland de afstanden tussen de open leidingen meestal gering. De peilen van het open water vertonen in sommige gevallen met het maaiveld toch wel enige variatie. Zo vindt men bijvoorbeeld op de hoge zandgronden een geleidelijke afname van het peil van het open water samenhangend met de maaiveldshelling, welke zowel vanaf het midden van de rug naar de drainerende rivieren, als in dezelfde richting als de drainerende rivieren, loopt. Daarentegen vindt men plotselinge sprongen door een verschil in polderpeil tussen twee aan elkaar grenzende polders. In vele gevallen wijkt het peil van scheepvaartkanalen af van de ongestoorde grondwaterstand.

Door de grote dikte van het watervoerend pakket hebben deze verschillen in peil van het open water en de daarmee samenhangende verschillen in stijghoogte van het grondwater tot gevolg, dat soms zwakke maar onder omstandigheden ook belangrijke grondwaterstromingen zich voortzetten over afstanden welke veel groter zijn dan de afstanden tussen de evenwijdig gedachte open leidingen\*). In het bijzonder is dit het geval, waar een bovenste, matig goed geleidende laag door een slecht doorlatende laag gescheiden is van een diepere, zeer goed doorlatende laag met zeer grote dikte. Bij de berekening van dergelijke grondwaterstromingen, welke zich over meerdere kilometers en soms zelfs over meer dan tien kilometer kunnen uitstrekken, pleegt men vaak elke bijzonderheid in de vorm van de grondwaterspiegel evenals de verschillen tussen de peilen van primaire en secundaire open leidingen te verwaarlozen en de grondwaterspiegel door een eenvoudige functie voor te stellen: b.v. een constante stijghoogte of een constante helling evenwijdig aan een hellend maaiveld (MAZURE, 1932). Voor landbouwkundige doeleinden zijn bepaalde details in de vorm van de grondwaterspiegel en de invloed van de afmetingen van de open leidingen in het algemeen van zoveel belang, dat het niet wenselijk is deze eigenschappen te verwaarlozen.

De onderhavige publikatie is voortgekomen uit het zoeken naar berekeningsmethodes waarvan de resultaten in de landbouw kunnen worden toegepast. Wegens de ingewikkelde toestanden welke in de praktijk veelvuldig voorkomen, maar in de literatuur meestal verwaarloosd werden, was het dus van belang te zoeken naar een methode waarmee samengestelde grondwaterstromingen berekend kunnen worden en waarbij niet de vorm van de grondwaterspiegel maar wel de peilen van de open waterlopen als gegeven worden beschouwd. De enig geschikte oplossingsmethode bestaat uit het superponeren. Ook bij het berekenen van niet-stationaire symmetrische grondwaterstromingen zal blijken dat het superponeren van bijzondere oplossingen een belangrijk hulpmiddel is. Het superponeren is alleen dan exact als de randvoorwaarden voor de verschillende deeloplossingen betrekking hebben op gebieden van gelijke

\*) Onder open leidingen worden niet alleen rivieren, kanalen, sloten of greppels verstaan, maar ook elke soort buizen, die een mogelijkheid tot uitwisseling van water met de grond hebben.

vorm. Verschillende oplossingen verschillen in het algemeen ook in vorm van de grondwaterspiegel, zodat de uitkomst van het superponeren in principe een benadering is.

Beperkt men zich verder tot de stromingen tussen evenwijdige open leidingen, dan zal blijken dat een groot aantal grondwaterstromingsproblemen herleid kan worden tot het zoeken van een oplossing van de eenzijdige toestroming met constante stroomsterkte vanuit het oneindige naar een rechte open leiding. Aan de stroomsterkten moeten zekere voorwaarden gesteld worden, afhankelijk van de gewenste nauwkeurigheid en zodanig dat de onderlinge afwijkingen in de vorm van de grondwaterspiegel relatief klein blijven. Een zekere helling of zelfs een willekeurige vorm van de laag, die het doorlatende gebied aan de onderzijde afsluit, is op de toelaatbaarheid van het superponeren van geen invloed. Als het watervoerende pakket een vrijwel constante dikte heeft en  $\alpha$  de helling is van dit pakket, dan mogen in de stroomsterkte geen extreme afwijkingen van  $-kD \operatorname{tg} \alpha$  voorkomen. Een constante helling is echter voor de verdere beschouwingen van geen betekenis als  $D$  ook constant is en daarom wordt steeds aangenomen, dat de ondoorlatende basis en de grondwaterspiegel in eerste benadering horizontaal zijn. Het omkeren van de stromingsrichting is onder de gestelde voorwaarden toegestaan.

Bij te grote stroomsterkten ontstaan zekere fouten afhankelijk van de vorm van de grondwaterspiegel. De grondwaterspiegel kan vooral in de nabijheid van de open leidingen belangrijk van een plat vlak afwijken. Nadat in hoofdstuk II.1 meestal verondersteld is, dat de vorm van de grondwaterspiegel een verwaarloosbare invloed heeft, zal daarom vervolgens in hoofdstuk II.2 de omgeving van de open leidingen nader in beschouwing worden genomen.

Bij een geringe diepte van een horizontale afsluitende laag of bij kleine afstanden tussen de drainerende leidingen, welke omstandigheden in bepaalde delen van Nederland geen uitzondering zijn, kan de vorm van de grondwaterspiegel ook op grotere afstand van de drainerende leidingen nog een relatief grote invloed op de stroming hebben, voor zover de werkelijke of effectieve laagdikte in belangrijke mate van  $x$  afhangt. Bij stationaire asymmetrische toestanden is het superponeren dan minder belangrijk en kunnen andere oplossingsmethodes (DACHLER, 1936; MUSKAT, 1937; SOUTHWELL, 1946) worden toegepast. Voor niet-stationaire stromingen, zowel symmetrisch als asymmetrisch, is echter bij een van  $x$  of  $t$  afhankelijke laagdikte nog geen algemeen toepasbare en voor de praktijk geschikte oplossingsmethode bekend.

Een bijzondere grondwaterstroming ontstaat in het geval dat het maaiveld onder water staat. Het horizontale maaiveld is dan een equipotentiaal vlak, zodat de bovenrand van het gebied in dat geval weinig moeilijkheden geeft. Zolang het maaiveld onder water staat, mag het probleem als stationair of quasi-stationair beschouwd worden (KIRKHAM, 1945, 1949; GUSTAFSSON, 1946; FUKUDA, 1957). Ligt een horizontale grondwaterspiegel gelijk aan maaiveld of dieper met een afwijkend peil in de open leidingen, dan is een dergelijke quasi-stationaire toestand belangrijk als begin-toestand van een niet-stationair probleem. In hoofdstuk III.2 zal hierop worden teruggekomen.

## II. STATIONAIRE GRONDWATERSTROMINGEN

### II.1. HET GEBRUIK VAN CONSTANTE RADIALE, HORIZONTALE EN VERTICALE WEERSTANDEN BIJ EEN VRIJWEL HORIZONTALE GRONDWATERSPIEGEL \*)

#### a. *Het homogene pakket van constante dikte*

De drainage door evenwijdige open leidingen \*\*) is voor de praktijk van groot belang en veel eenvoudiger oplosbaar dan willekeurige drie-dimensionale grondwaterstromingen. Daarom wordt in deze paragraaf en in de meeste volgende paragrafen verondersteld, dat de grondwaterstroming slechts van de plaatscoördinaten  $x$  en  $z$  afhangt. Bovendien wordt hier om te beginnen verondersteld, dat de grond homogeen en isotroop doorlatend is.

Bij een puntvormige put gelegen in een oneindig groot twee-dimensionaal veld zijn voor de potentiaal  $\varphi = kh$  en de stroomfunctie  $\psi$  de volgende vergelijkingen in poolcoördinaten geldig ( $r$  = voerstraal;  $\alpha$  = poolhoek):

$$\varphi = \frac{q_0}{2\pi} \ln r \quad (11)$$

$$\psi = \frac{q_0}{2\pi} \alpha \quad (12)$$

Bij een lijnvormige put met lengte  $B_w$ , eveneens voor een oneindig groot twee-dimensionaal veld, vormen de equipotentiaallijnen en stroomlijnen een orthogonaal stelsel van confocale ellipsen en hyperbolen met als vergelijkingen:

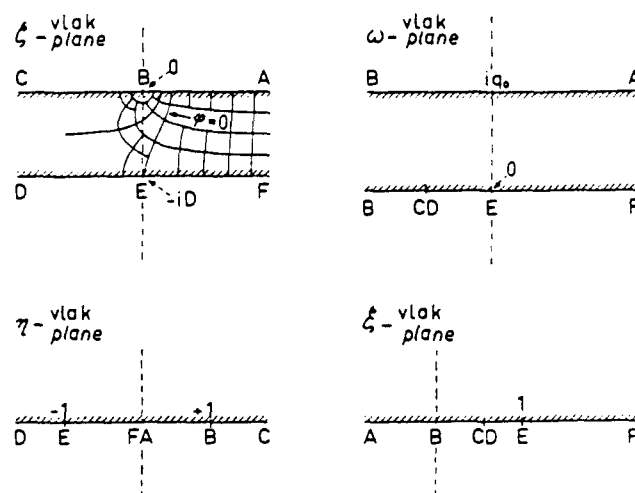
$$\frac{x^2}{\frac{1}{4} B_w^2 \cosh^2 \frac{2\pi\varphi}{q_0}} + \frac{y^2}{\frac{1}{4} B_w^2 \sinh^2 \frac{2\pi\varphi}{q_0}} = 1 \quad (13)$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4} B_w^2 \cos^2 \frac{2\pi\psi}{q_0}} - \frac{y^2}{\frac{1}{4} B_w^2 \sin^2 \frac{2\pi\psi}{q_0}} = 1 \quad (14)$$

\*) De inhoud van hoofdstuk II.1 komt voor een groot deel reeds voor in vroegere publikaties van de schrijver (ERNST, 1954 en 1956).

\*\*) Daar steeds wordt verondersteld dat deze evenwijdige leidingen oneindig lang zijn, kan de stroming in een verticaal plat vlak worden afgebeeld. De puntvormige put en de lijnvormige put, op deze en volgende pagina's te behandelen, hebben dus in werkelijkheid de vorm van een oneindig lange rechte lijn en een oneindig lange strook met breedte  $B_w$ . Van deze twee-dimensionale beschouwing in een verticaal plat vlak wordt in deze publikatie slechts bij uitzondering afgeweken.

FIG. 3. Conforme afbeelding van de eenzijdige toestroming van grondwater naar een puntvormige put B in een pakket van constante dikte  
*Conformal transformation of the one-sided flow of groundwater to a point-shaped sink B in an aquifer of constant thickness. The difference between the straight upper boundary and the real shape of the phreatic surface is neglected*



Maakt men in een verticaal plat vlak uit (11) of (13) een oneindige reeks van oplossingen door in verticale richting naar boven of naar beneden telkens met een constant bedrag  $2D$  te verschuiven en neemt men hiervan de som, dan verkrijgt men een nieuwe oplossing voor een horizontale watervoerende laag met constante dikte  $D$ . Met behulp van complexe functies is een oplossing van het gestelde probleem echter veel eenvoudiger te bereiken. Een uiteenzetting van het principe van deze methode is te vinden zowel in wiskundige handboeken als in enkele hydrologische handboeken (DACHLER, 1936; MUSKAT, 1937; BREITENÖDER, 1942).

Om te beginnen moet beslist worden of gezocht zal worden naar een oplossing van de symmetrische (dus tweezijdige) toestroming of naar een oplossing van de eenzijdige toestroming. Voor de toestroming naar een puntvormige put maakt dit geen verschil uit, daar men door toevoeging van een horizontale stroming elke willekeurige symmetrische of asymmetrische toestroming kan doen ontstaan; de oplossing van de eenzijdige toestroming is echter iets eenvoudiger. Bij de lijnvormige put kan de breedte  $B_w$  echter zo groot zijn, dat een toe te voegen horizontale stroming over de afstand  $B_w$  een te grote daling in stijghoogte geeft om bij benadering als een constante stijghoogte over deze afstand te worden beschouwd; in dat geval moet dus de eenzijdige toestroming berekend worden.

De eenzijdige toestroming naar een puntvormige put kan aan de hand van figuur 3 afgeleid worden. Door enkele geschikte transformaties kan het gebied in het  $\zeta$ -vlak ( $\zeta = x + iz$ ) overgebracht worden op het gebied in het  $\omega$ -vlak ( $\omega = \varphi + i\psi$ ), zodanig dat de randpunten uit het  $\zeta$ -vlak omkeerbaar eenduidig overgaan in de randpunten in het  $\omega$ -vlak.

Het werkelijke stroomgebied in het  $\zeta$ -vlak wordt door de volgende functie afgebeeld, op de bovenste helft van het complexe vlak ( $\eta$ -vlak):

$$\eta = e^{-\frac{\bar{z}}{D}} \quad (15)$$

Het gebied in het  $\omega$ -vlak kan door een functie van dezelfde vorm als (15) eveneens op de bovenste helft van het complexe vlak afgebeeld worden:

$$\xi = e^{\frac{\pi\omega}{q_0}} \quad (16)$$

Hoewel de gebiedsvormen in het  $\eta$ -vlak en het  $\xi$ -vlak gelijk zijn, hebben de punten A(F), B en C in deze vlakken echter niet dezelfde ligging. Het bovenhalfvlak op zichzelf afbeelden, zodanig dat punten van de reële as in het  $\eta$ -vlak overgaan in punten van de reële as in het  $\xi$ -vlak en omgekeerd, kan alleen gebeuren door een zogenaamde gebroken lineaire transformatie. De coëfficiënten van deze transformatie worden bepaald door de voorwaarde, dat de punten A (F), B en C in elkaar moeten overgaan.

$$\xi = \frac{\eta - 1}{2\eta} \quad (17)$$

Uit (15), (16) en (17):

$$\frac{\pi\omega}{q_0} = \ln \frac{1 - e^{\frac{\pi\xi}{D}}}{2} \quad (18)$$

Uit de theorie der conforme afbeelding volgt, dat er onder de gegeven omstandigheden slechts 1 oplossing kan zijn (HURWITZ und COURANT, 1929), zodat (18) inderdaad de juiste oplossing moet zijn. Alle gewenste gegevens kunnen hieruit worden afgeleid, zoals bijvoorbeeld de potentiaalverdeling langs een horizontale en langs een verticale rechte lijn door de puntbron.

Voor  $z = 0$ ;  $x > 0$  geldt:

$$h = \frac{q_0}{\pi k} \ln \frac{e^{\frac{\pi x}{D}} - 1}{2} = \frac{q_0 x}{kD} + \frac{q_0}{\pi k} \ln \frac{1 - e^{-\frac{\pi x}{D}}}{2} \quad (19)$$

Voor  $z = 0$ ;  $x < 0$  geldt:

$$h = \frac{q_0}{\pi k} \ln \frac{1 - e^{\frac{\pi x}{D}}}{2} \quad (20)$$

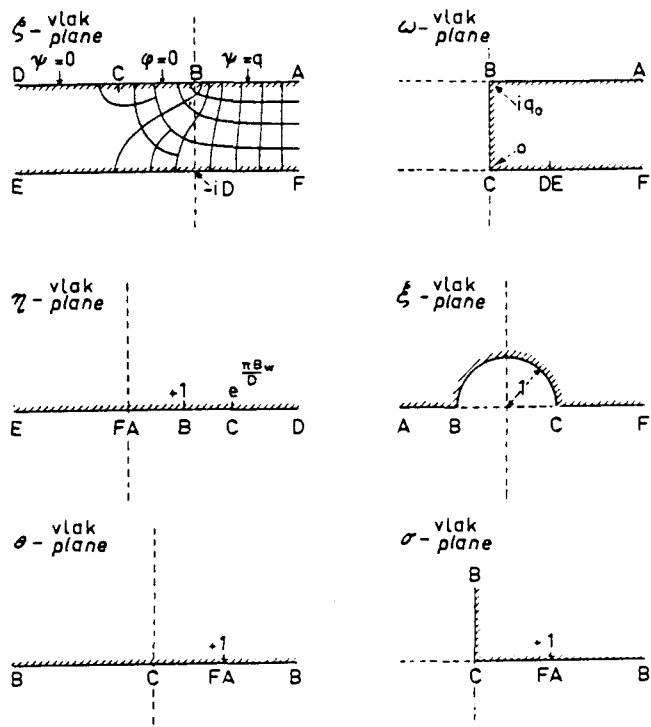
Voor  $x = 0$ ;  $z < 0$  geldt:

$$h = \frac{q_0}{\pi k} \ln \sin \left( -\frac{\pi z}{2D} \right) \quad (21)$$

Door aan de beschouwde stroming een horizontale stroming met intensiteit  $0,5 q_0$  toe te voegen ontstaat een symmetrische stroming, zodat de oplossing van de symmetrische stroming onmiddellijk uit (18) kan worden afgeleid:

$$\omega = \frac{q_0}{\pi} \ln \frac{1 - e^{\frac{\pi\xi}{D}}}{2} - \frac{q_0 \zeta}{2D} \quad (22)$$

FIG. 4. Conforme afbeelding van de eenzijdige toestroming van grondwater naar een drainerende leiding BC met diepte nul en breedte  $B_w$  in een pakket van constante dikte  $D$   
*Conformal transformation of the one-sided flow of groundwater to a drainage channel BC with zero depth and width  $B_w$  in an aquifer of constant thickness  $D$*



Voor de toestroming naar een lijnvormige put met lengte  $B_w$  kan een analoge afleiding gevonden worden (zie fig. 4). De volgende functies verbinden  $\zeta$ -vlak en  $\omega$ -vlak met elkaar.

$$\eta = e^{-\frac{\pi \zeta}{D}} \quad (23)$$

$$\zeta = e^{\frac{\pi \omega}{q_0}} \quad (24)$$

$$\sigma = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \quad (25)$$

$$\theta = \sigma^2 \quad (26)$$

$$\theta = \frac{\eta e^{-\frac{\pi b}{D}} - 1}{\eta - 1} \quad (27)$$

Uit (24) ... (27):

$$\frac{\pi \omega}{q_0} = \ln \frac{\sqrt{1 - \eta} + \sqrt{1 - \eta e^{-\frac{\pi B_w}{D}}}}{\sqrt{1 - \eta} - \sqrt{1 - \eta e^{-\frac{\pi B_w}{D}}}} \quad (28)$$

Vergelijking (23) kan onmiddellijk in (28) gesubstitueerd worden. Bij eenzijdige

toestroming van links behoeft alleen (27) gewijzigd te worden. In plaats van (28) volgt dan:

$$\frac{\pi\omega}{q_0} = \ln \frac{\sqrt{1-\eta} + \sqrt{e^{\frac{\pi B_w}{D}} - \eta}}{\sqrt{1-\eta} - \sqrt{e^{\frac{\pi B_w}{D}} - \eta}} \quad (29)$$

De oplossing voor  $B_w = \infty$  met toestroming van rechts kan eveneens op deze manier afgeleid worden, maar volgt ook direct uit (28):

$$\frac{\pi\omega}{q_0} = \ln \frac{\sqrt{1-\eta} + 1}{\sqrt{1-\eta} - 1} \quad (30)$$

Het is duidelijk, dat als er geen overtollige neerslag is ( $N = 0$ ), op voldoende afstand van het open water de stijghoogte  $h$  een vrijwel lineaire functie van  $x$  is. Zowel uit de aequipotentiaallijnen in de figuren 3 en 4 als uit de formules (19) en (20) en uit (23), (28), (29) en (30) volgt, dat hiervoor als praktische grens genomen kan worden  $|x| \geq D$ . Voor toenemende  $|x|$  wordt de benadering steeds beter (zie fig. 5). Deze eigenschap is van belang bij praktische toepassingen, daar het niet zelden voorkomt, dat de horizontale afmetingen van het beschouwde gebied enkele honderden of duizenden meters groot zijn, terwijl  $D$  niet meer dan enkele tientallen meters groot is. Bij een willekeurige asymmetrische stroming kan men aan weerszijden van de open leiding de grondwaterspiegel in gedachten vervangen door twee rechte lijnen, die de

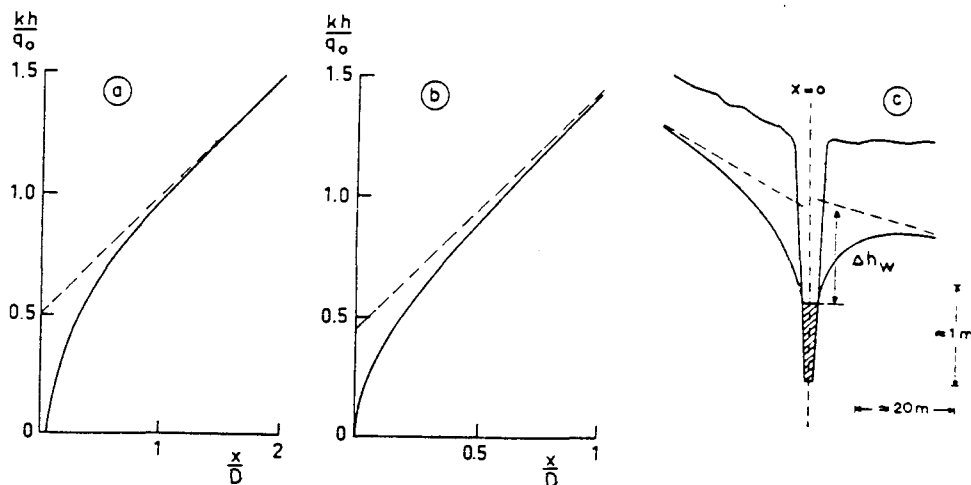


FIG. 5. Vorm van het freatisch oppervlak in de omgeving van een drainerende leiding. a. Volgens formule (22) bij een symmetrische stroming naar een open leiding met halfcirkelvormig profiel; b. Volgens formule (30) bij een eenzijdige toestroming naar een open leiding met  $B_w \gg D$ ; c. Voorbeeld van een asymmetrische toestand  
*Shape of the phreatic surface in the proximity of a drainage channel. a. According (22) for a symmetrical flow to a drainage channel with a half-circular profile; b. According (30) for a one-sided flow to a drainage channel with  $B_w \gg D$ ; c. Example of an asymmetric situation*



verticaal door  $x = 0$  (zie fig. 5c) snijden op twee verschillende niveaus, welke in absolute waarde weinig verschillend zijn. Dit verschil hangt samen met het feit, dat een doorgaande stroming door de eindige afmetingen van de open leiding niet zuiver horizontaal kan zijn. De oplossing van elke asymmetrische stroming kan men immers doen ontstaan door op een symmetrische oplossing de oplossing van een dergelijke doorgaande stroming te superponeren. Genoemd verschil is in het algemeen zo klein, dat men alleen met de gemiddelde waarde van deze twee niveaus behoeft te rekenen. Indien men nu de hoogte van dit gemiddelde niveau boven het open water aanduidt door  $\Delta h_w$  en vervolgens een grootte  $w$  definieert door de formule:

$$\Delta h_w = q_0 w \quad (31)$$

dan is  $w$  niets anders dan de extra weerstand, die ondervonden wordt, doordat drainage of infiltratie door de open leiding een van de horizontale richting afwijkende stroming geeft.

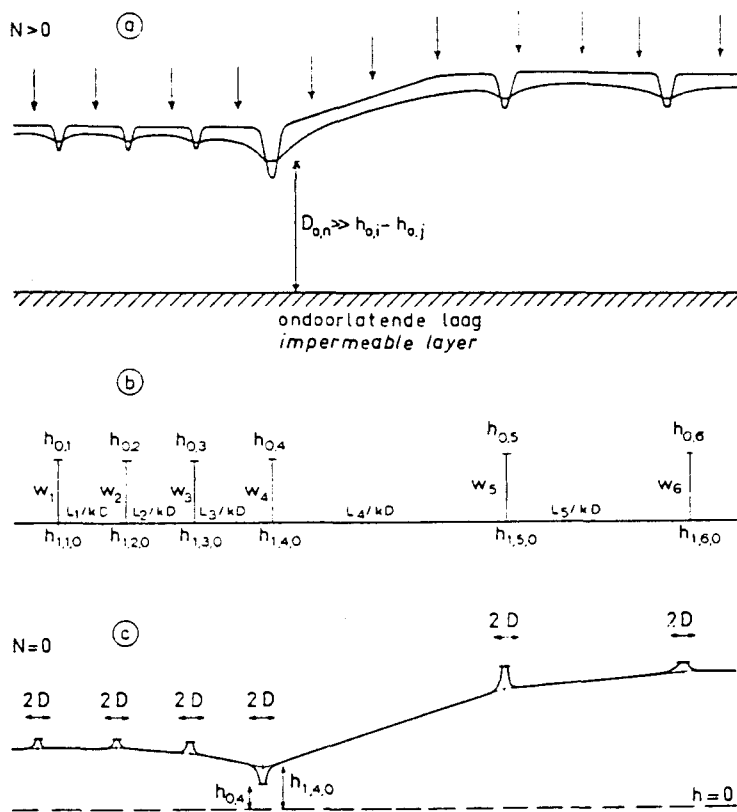


FIG. 6. Asymmetrische grondwaterstromingen. De peilen van het open water, de radiale weerstanden en de afstanden tussen de open leidingen kunnen van geval tot geval verschillend zijn. a. Afbeelding van het stroomgebied (horizontale schaal niet gelijk aan verticale schaal); b. Draden-schema dat toestand a vervangt; c. Vorm van de grondwaterspiegel, zoals verkregen door toepassing van formule (67) op b bij  $N = 0$

*Asymmetrical flow of groundwater. The levels of the open water, the radial resistances and the distances between the drainage channels may be different from case to case. a. Representation of the considered area with different horizontal and vertical scales; b. Wire-scheme replacing situation a; c. Result obtained by applying (67) on b with  $N = 0$*

De aanneming van formule (31) houdt in, dat dan ook de vervanging van de werkelijke stroming door de stroming in een stelsel van dunne buizen of draden (zie fig. 6) met weerstanden  $L_i/kD$  en  $w_i$  als voldoende benadering wordt beschouwd. In hoofdstuk II. 1d zal uiteengezet worden, hoe in een homogeen profiel de waarden  $h_{1, n, 0}$  berekend kunnen worden. Deze punten worden bij  $N = 0$  door rechte lijnstukken, bij  $N \neq 0$  door parabolische lijnstukken verbonden. Door de radiale stromingscomponenten wijkt de werkelijke grondwaterspiegel in de omgeving van de open leidingen af van de berekende  $h_{1, n, x}$ . Uit (19) ... (22) of uit (28) kan deze afwijking berekend worden (zie fig. 5) en daaruit blijkt, dat de afwijking op afstanden  $> D$  zo klein wordt, dat  $h_{1, n, x}$  daar als een voldoende benadering beschouwd mag worden. Als enige voorwaarde moet dus gesteld worden, dat  $L_i \geq 2D$ , omdat alleen dan in minstens 1 punt tussen twee open leidingen de stijghoogte  $h$  met een dradenschema als in fig. 6 berekend kan worden. Gaat het alleen om de berekening van de in- of uittredende stroomsterkten  $q_{0, i}$ , dan kan deze voorwaarde nog iets minder streng genomen worden:  $L_i \geq D$ .

Reeds door Burgers werd het effect van de symmetrische radiale stroming gelijk gesteld aan een intreedweerstand (BURGERS, 1926). Hieruit werd door Burgers echter nog niet de conclusie getrokken dat dezelfde waarde voor de intreedweerstand voor elke symmetrische of asymmetrische stroming gebruikt kan worden.\*) Hierboven is aangeduid dat dit slechts met enige benadering geldig is; uit de figuren 8 en 9 zal echter blijken dat de invloed van de verhouding van de intensiteiten van de toestroming of afstroming aan de beide zijden van de open leiding voor praktische toepassingen van geen enkele betekenis is.

Tot nu toe werd stilzwijgend verondersteld, dat door de grondwaterspiegel geen in- of uitvoer bestaat ( $N = 0$ ). Het is echter duidelijk, dat men bij  $N = 0$  naast de radiale en de horizontale stromingscomponent ook een verticale stromingscomponent kan afsplitsen. Als  $N > 0$ , is dit een stroming, die op zijn weg naar beneden continu in intensiteit afneemt, zodanig dat de afname evenredig is met de doorlatendheid in het betrokken punt en op de ondoorlatende laag de verticale stroomsterkte nul geworden is. In het inwendige van het gebied (twee-dimensionaal) geldt dus  $\text{div } \vec{v} \neq 0$ . Bij de deeloplossing met horizontale stroming heeft  $\text{div } \vec{v}$  dezelfde maar tegengestelde waarde.

In figuur 7 is deze splitsing in drie componenten toegelicht aan het symmetrische drainageprobleem. Langs de rand van het beschouwde gebied is overal de stroomfunctie gegeven. Langs de bovenzijde geldt een lineaire functie  $\psi = Nx$ ; langs de zijkanten en onderkant is de stroomfunctie constant en gelijk aan de waarde, die de stroomfunctie heeft in het freatisch oppervlak halverwege de open leidingen. De natte omtrek van de open leiding is een equipotentiaallijn. De drie deeloplossingen moeten zodanig gekozen worden, dat de som van randvoorwaarden overeenkomt met de genoemde gegevens. De figuren 7b en 7c zijn afgebeeld met een kleine dikte

\*) Het is naar mijn mening beter de termen „intreedweerstand” en „uittreedweerstand” te gebruiken voor de weerstand van de aangroeiende bezinkingslaag op de bodem van open leidingen, respectievelijk bij leidingen, waaruit water wegzijgt en bij drainerende leidingen, en de totale weerstand in de omgeving van de open leiding aan te duiden door radiale weerstand.

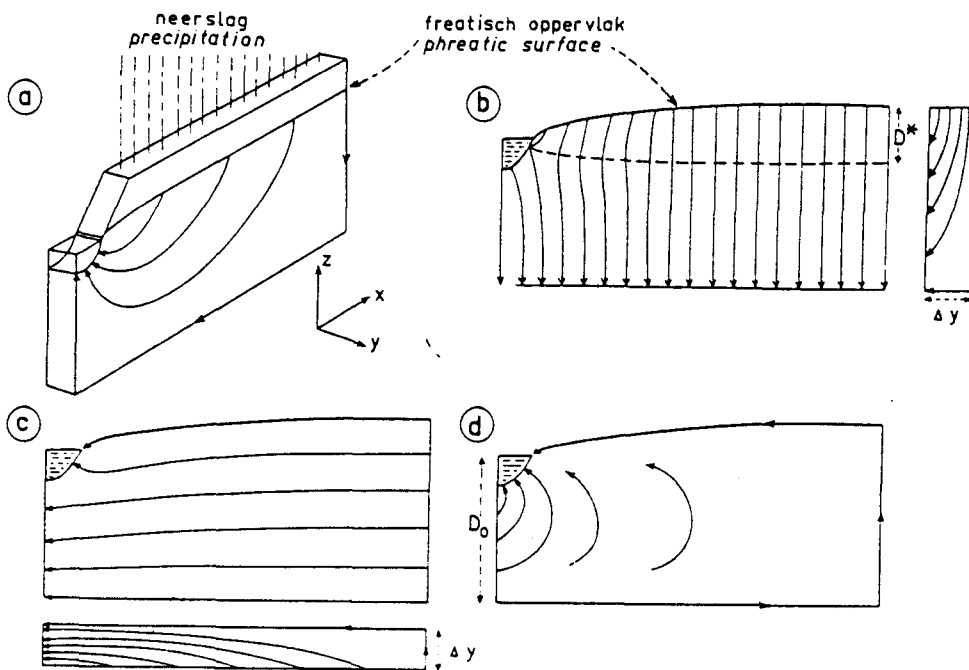


FIG. 7. Symmetrische drainage door evenwijdige open leidingen: ontleding van de werkelijke grondwaterstroming (zie a) in 3 componenten (zie b, c en d). Indien in b en c de afmeting  $\Delta y \rightarrow 0$  dan zijn ook deze componenten door twee-dimensionale vergelijkingen voor te stellen, echter met  $\text{div} \vec{v} \neq 0$

*Symmetrical drainage by parallel open channels: division of the real groundwater flow (see a) in three components (see b, c and d). If in b and c the dimension  $\Delta y \rightarrow 0$ , these components may be represented by two-dimensional equations, however with  $\text{div} \vec{v} \neq 0$*

$\Delta y$ , waardoor het uittreden van water in een van de zijvlakken kon worden getekend: in het inwendige van de schijf (drie-dimensionaal) geldt  $\text{div} \vec{v} = 0$ . Door  $\Delta y$  tot nul te laten naderen, keert men in elk van de deeloplossingen terug tot het twee-dimensionale probleem.

Wil men bij de symmetrische drainage het hoogteverschil bepalen tussen het hoogste punt in het freatisch oppervlak en het peil van het open water, dan kan hiervoor van de deeloplossingen volgens de figuren 7b, 7c en 7d gebruik gemaakt worden. De som van de stijghoogteverschillen tussen telkens dezelfde twee punten geeft de gevraagde uitkomst.

In figuur 7b is de vorm van de natte omtrek van de open leiding oorzaak, dat de stroming niet zuiver verticaal kan zijn. Op de stippellijn in deze figuur is de potentiaal gelijk aan het peil van het open water. Deze equipotentiaallijn ligt grotendeels horizontaal met een hoogte ongeveer overeenkomend met de onderkant van de natte omtrek van de open leiding. De figuur toont aan, dat het betrokken stijghoogteverschil alleen van betekenis kan zijn bij een slecht doorlatende bovenlaag.

In figuur 7c hebben grondwaterspiegel en natte omtrek weinig invloed op de horizontale richting van de stroming, mits  $D$  voldoende groot is ten opzichte van het hoogteverschil in de grondwaterspiegel. Inplaats van de lineaire potentiaalverdeling bij een horizontale stroming van constante intensiteit ontstaat door  $N \neq 0$  een parabolische verdeling.

Zou men een rechthoekig homogeen gebied aannemen met een zeer kleine open leiding, dan kan de samenvoeging van twee stromingen als afgebeeld in de figuren 7b en 7c door de volgende complexe functie worden voorgesteld:

$$\omega = -a\zeta^2 \quad (32)$$

Bij de radiale stromingscomponent in figuur 7d kan men twee gevallen onderscheiden. Voor kleine waarden van  $q_0$ , waarbij de bovengrens van het stroomgebied vrijwel niet van vorm verandert, is het potentiaalverschil tussen twee vaste punten evenredig met de drainerende stroomsterkte. Het potentiaalverschil tussen de natte omtrek van de open leiding en een punt in het freatisch oppervlak op grote afstand gedeeld door de stroomsterkte  $q_0$  geeft de radiale weerstand  $w$ . Voor de afwijkingen, die bij grote  $q_0$  optreden, wordt verwezen naar het volgende hoofdstuk.

Wordt voldaan aan de voorwaarden, dat de grondwaterspiegel weinig van een horizontaal vlak afwijkt en de gemiddelde dikte van het homogene pakket kleiner is dan een kwart van de afstand tussen de evenwijdige open leidingen (zie pag. 26 en 27), echter ook weer niet zo klein dat  $D$  niet als constante beschouwd mag worden, dan geldt bij symmetrische drainage de volgende formule voor het hoogteverschil tussen het hoogste punt in de grondwaterspiegel en het peil van het open water:

$$\frac{\Delta h}{N} = \frac{D^*}{k} + \frac{L^2}{8kD} + Lw \quad (33)$$

Elk van de drie stromingscomponenten draagt met een term tot deze formule bij. Daar voor  $D^*$  (zie fig. 7b) vrijwel altijd geldt  $D^*/L \ll L/8D$ , mag bij een homogeen doorlatende watervoerende laag de eerste term rechts van het gelijkteken in (33) worden verwaarloosd.

Oplossingen van het symmetrische drainageprobleem bij kleine hoogteverschillen in de grondwaterspiegel en met in achtneming van de radiale stroming zijn in de vorm van oneindige reeksen gevonden door Hooghoudt en Kirkham. Hooghoudt heeft het gebruik van oneindige dubbelreeksen vermeden door het gebied te splitsen in twee delen, gescheiden door een ongeveer verticale potentiaallijn, in het gebied rondom de open leiding wordt het potentiaalverschil berekend met een oneindige reeks, waarvan elke term de som is van vier afzonderlijke termen: in het resterende gebied wordt formule (34) toegepast (HOOGHOUDT, 1940). Volgens een recente publikatie heeft Labye aangetoond, dat de oneindige reeksen van Hooghoudt door een gesloten functie vervangen kunnen worden (LABYE, 1960). Kirkham heeft voor hetzelfde probleem reeksen met hyperbolische functies gebruikt (KIRKHAM, 1958).

In die gevallen, dat bij een homogene grond behalve de verticale ook de radiale stromingscomponent verwaarloosd mag worden, blijft van het rechterlid van (33) slechts één term over. De vorm van de grondwaterspiegel is een parabool.

$$h(x) = \frac{NL^2}{8kD} \left( 1 - \frac{4x^2}{L^2} \right) \quad (34)$$

$$\Delta h = \frac{NL^2}{8kD} \quad (35)$$

Formule (33) heeft bij de praktische toepassing niet alleen het voordeel van zijn eenvoudige vorm, maar deze formule is ook toepasbaar als de grond is opgebouwd uit twee horizontale lagen van willekeurige dikte en doorlatendheid (zie ook Hoofdstuk II.1b), mits een methode beschikbaar is, waarmee  $w$  bepaald kan worden.

Een zeer eenvoudige bepaling van de radiale weerstand is in de praktijk dikwijls mogelijk als de helling van de grondwaterspiegel in het gebied met horizontale stroming relatief klein is in vergelijking met de helling in het gebied met radiale stroming ( $L \gg D$  of bij een profiel bestaande uit twee lagen:  $L \gg D_1$  en  $k_1 \ll k_2$ ). In de grondwaterspiegel op wat grotere afstand aan weerszijden van de open leiding kan men dan de gemiddelde hellingen  $\alpha_1$  en  $\alpha_2$  zonder moeite bepalen ( $\alpha$  wordt positief gerekend als de stroming naar de open leiding is gericht). Is bovendien de  $kD$ -waarde bekend, dan volgt de waarde van  $w$  onmiddellijk uit de volgende uitdrukkingen voor  $q_0$ :

$$q_0 = (\alpha_1 + \alpha_2) \sum k_i D_i = \frac{\Delta h_w}{w} \quad (36)$$

Formule (36) kan toegepast worden op figuur 8. Bij het onderzoek, waaruit deze figuur is voortgekomen, werd door middel van een pompproef gevonden:  $\sum k_i D_i =$

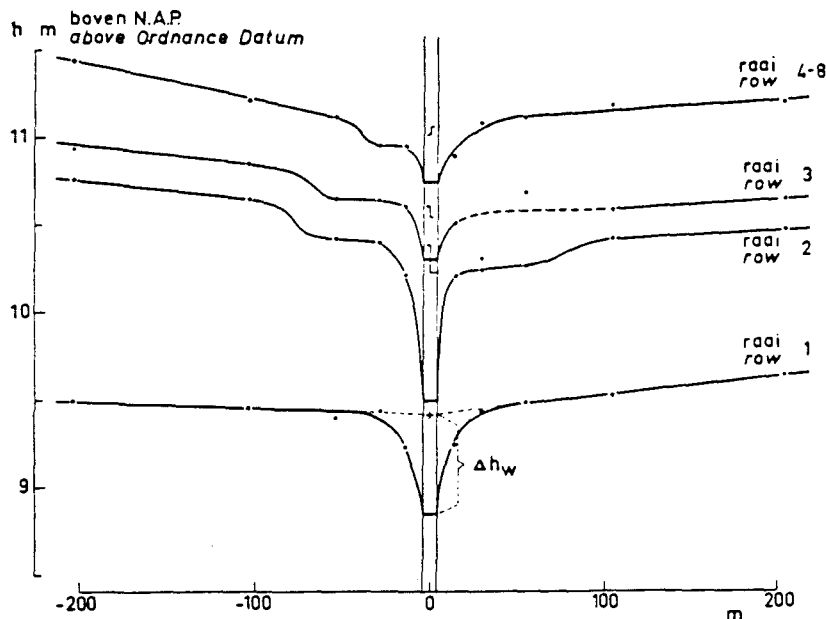


FIG. 8. Grondwaterstanden in het waterschap „Het stroomgebied van de Aa” (provincie Noord-Brabant) gemeten in raaien loodrecht op de rivier de Aa tussen Gemert en Erp. De waarnemingen zijn gedaan in 3 meter diepe grondwaterstandsbuizen en gemiddeld over de periode 15 juni–13 juli 1949

*The groundwater table according to observations in 3 meter deep piezometers placed in rows perpendicular to the river Aa between Gemert and Erp. Average values over 1949, June 15–July 13*

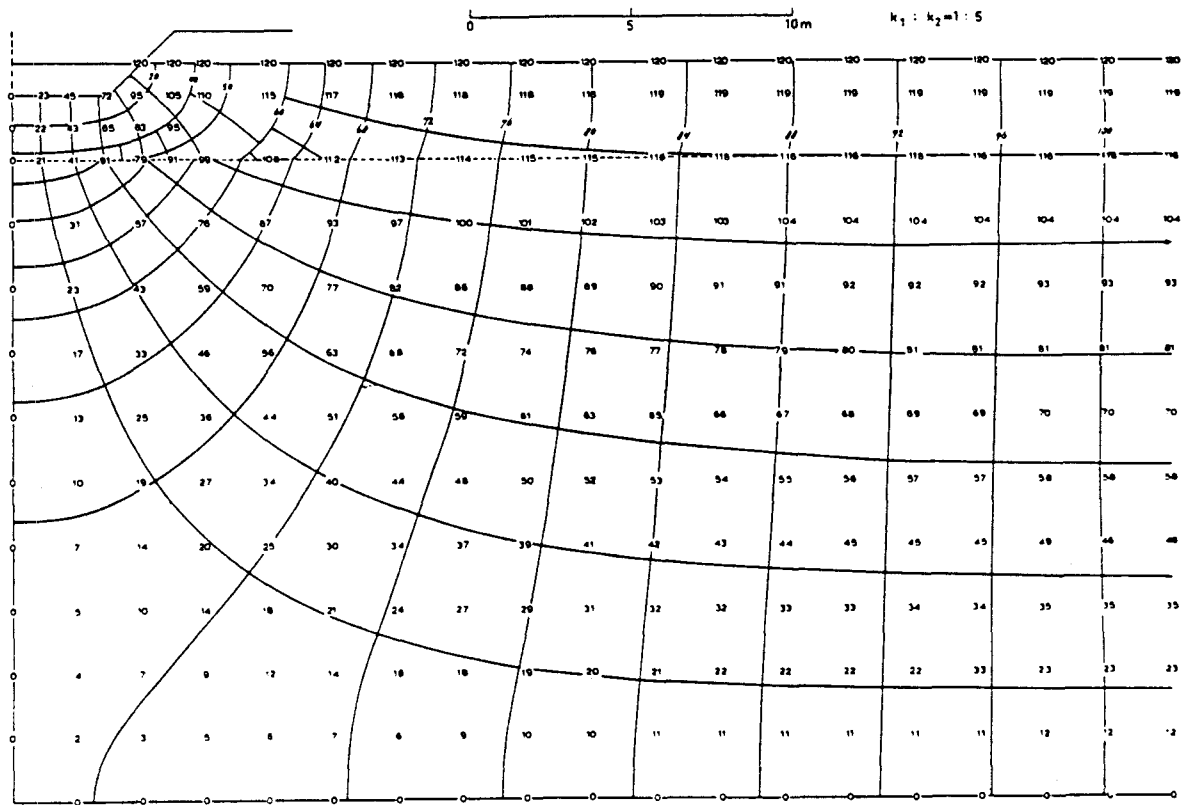


FIG. 9. Symmetrische drainage door een open leiding afgeleid met de relaxatie-methode. Voor de afmetingen van de open leiding, voor de laagdikten en voor de verhouding van de doorlatendheden zijn waarden genomen zoals gevonden bij de rivier de Aa (provincie Noord-Brabant) in hetzelfde gebied waarop fig. 8 betrekking heeft. 120 = stroomfunctie; 20 = stijghoogte (relatieve waarden)

*Symmetrical flow of groundwater to a drainage channel as obtained with the relaxation-method. The dimensions of the open channel, the thickness of the layers and the ratio of the permeabilities agree with the situation as found in the area to which fig. 8 refers. 120 = streamfunction; 20 = hydraulic head (relative values)*

= 1200 m<sup>2</sup>/dag. Wegens  $D = 23$  m, volgt hieruit:  $\bar{k} = 50$  m/dag. Uit (36) volgt dan:  $w = 0.08$  tot 0.3 dagen/meter. De hoge radiale weerstand wordt aangetroffen in het noordwestelijke deel van het onderzochte gebied, waar onder de bodem van de rivier slecht doorlatende klei- en veenlagen voorkomen. In het zuidwestelijke deel van dit gebied bestaat het watervoerende pakket tot gemiddeld 5 m onder maaiveld uit fijn zand, daaronder tot gemiddeld 25 m diepte uit grof zand en grind.

Metingen in geroerde zandmonsters, uit deze zelfde lagen afkomstig, leverden respectievelijk op 4.5 m/dag en 17 m/dag. Volgens vergelijking (36) is hiervan alleen de verhouding nodig om  $k_1w$  te bepalen. Uit een relaxatietekening (SHAW and SOUTHWELL, 1941; SOUTHWELL, 1946) werd afgeleid:  $k_1w = 0.25$  (zie fig. 9). Deze waarde is wat aan de lage kant in vergelijking met de vorige uitkomsten. Een verklaring hiervan is mogelijk door aan te nemen, dat  $k_2/k_1 > 5$  en dat de beide lagen (eventueel alleen de bovenste laag) nog een fijnere gelaagdheid hebben, waardoor de horizontale doorlatendheid groter is dan de verticale doorlatendheid. Deze laatste veronderstelling wordt ondersteund door het feit, dat de afwijking in de lineaire vorm

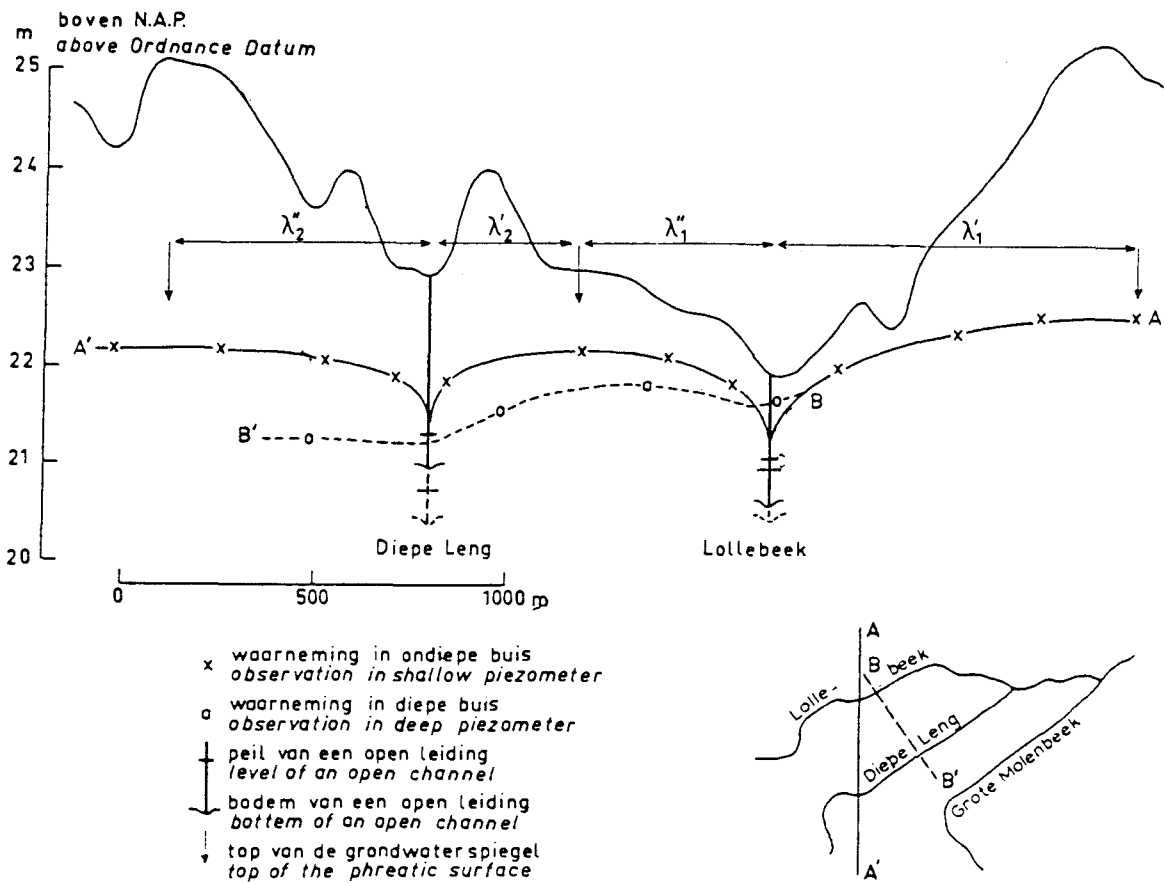


FIG. 10. Grondwaterstanden in het stroomgebied van de Lollebeek (provincie Limburg); waarnemingen gemiddeld over 1957. De waarnemingen in raai BB' zijn scheef geprojecteerd op raai AA'  
*Observations of the hydraulic head in the drainage basin of a small river (river Lollebeek); average values over 1957. The observations in row BB' are projected in an oblique direction on row AA'*

van de grondwaterspiegel in figuur 9 op kortere afstand van de open leiding begint dan in figuur 8.

Tot eenzelfde conclusie heeft een bewerking van figuur 10 geleid. In dit geval was op enige afstand van de raai met ondiepe buizen (1 meter lange filters op 2 tot 3 m onder maaiveld) een raai geplaatst met diepe buizen (dezelfde soort filters op ongeveer 20 m onder maaiveld). Door de waarnemingen in laatstgenoemde buizen te herleiden tot de omstandigheden bij de raai met ondiepe buizen, waarbij gecorrigeerd werd voor de gemiddelde terrehelling loodrecht op het vlak van afbeelding, konden geen systematische verschillen tussen de ondiepe en de diepe buizen aangetoond worden. Uit vergelijking (33) volgt, dat dit slechts het geval kan zijn, als  $k_1$  een zodanig lage waarde heeft, dat  $ND_1/k_1$  gelijk is aan rond 10 cm of meer en dit zou inhouden dat  $k_1 = 0,01$  m/dag, hetgeen hier blijkbaar niet het geval is geweest.

Uit figuur 10 blijkt verder, dat het beschouwde geval niet zuiver twee-dimensionaal is. Loodrecht op het vlak van afbeelding is er een afname van de helling veroorzaakt zowel door de maaiveldsvorm als door enkele stuwen in het lagere gedeelte van deze

waterlopen. Indien de open leidingen (evenwijdig en recht bij projectie op het horizontale vlak) door evenwijdige verschuiving in elkaar overgaan, blijven de tweedimensionale vergelijkingen bruikbaar, maar moet aan  $N$  een term worden toegevoegd wegens het verloop van genoemde helling. Volgens de afvoermetingen in de open leidingen is de som van de neerslag en de kwel (ondergrondse invoer aan de westkant van het betrokken gebied omgerekend per oppervlakte-eenheid van het beschouwde gebied) gelijk aan 1,2 mm/dag en bij  $L = 800$  m kan uit het parabolische gedeelte van de grondwaterspiegel [zie formule (34)] berekend worden, dat  $\sum k_i D_i = 250$  m<sup>2</sup>/dag. Met de vergelijking  $A(\lambda_i' + \lambda_i'')w_i = h_{i, i, 0} - h_0, i$ , waarbij  $h_{i, i, 0}$  de hoogte van het snijpunt van de verticaal door de open leiding met index  $i$  en de parabolen aan weerszijden is\*, volgen als uitkomsten voor  $w_1$  en  $w_2$  respectievelijk 0,35 dagen/meter en 0,45 dagen/meter.

Bij een homogeen doorlatende grond en korte afstanden tussen de open leidingen verandert de helling in het freatisch oppervlak veel geleidelijker vanaf het midden van het perceel naar de randen, zodat dan, als  $D$  niet bekend is, uit een gemeten freatisch oppervlak een nauwkeurige scheiding van  $\Delta h$  in twee componenten voor de horizontale en de radiale stroming minder goed mogelijk is. Hoewel in het veld een volmaakte homogeniteit van de grond slechts zelden wordt benaderd, moet men hiervan echter uitgaan om voor de radiale weerstand enkele eenvoudige formules te kunnen afleiden.

Wordt de definitie van  $w$  toegepast op de eenzijdige toestroming met een constante intensiteit  $q_0$  uit het oneindige, dan geldt voor grote waarden van  $x$ :

$$q_0 w = h(x) - h_0 - \frac{q_0 x}{kD} \quad (37)$$

Indien de natte omtrek van de open leiding de vorm heeft van een halve cirkel, kan vervolgens van de afleiding op pagina 11 en 12 gebruik worden gemaakt. Rondom de aangenomen puntvormige put zijn de aequipotentiaallijnen geen zuivere cirkels en daarom wordt het peil van de open leiding met straal  $r_0$  gelijk gesteld aan het gemiddelde van de extreme waarden op een cirkelboog met dezelfde straal in het berekende stroomveld. Formule (37) gaat over in:

$$q_0 w = h(x) = \frac{h(r_0) + h(-r_0)}{2} - \frac{q_0 x}{kD} \quad (38)$$

Vervolgens worden (19) en (20) in (38) gesubstitueerd:

$$w = \frac{1}{\pi k} \ln \left( 1 - e^{-\frac{\pi x}{D}} \right) - \frac{r_0}{2kD} - \frac{1}{\pi k} \ln \left( 1 - e^{-\frac{\pi r_0}{D}} \right) \quad (39)$$

De eerste term uit het rechterlid mag verwaarloosd worden als  $x > 2D$  en met deze veronderstelling volgt uit (39):

\*) Voor de betekenis van  $h_{i, i, 0}$  enz. zie lijst van symbolen en voetnoot op pagina 36.



$$w = -\frac{1}{\pi k} \ln \left( e^{\frac{\pi r_0}{2D}} - e^{-\frac{\pi r_0}{2D}} \right) = -\frac{1}{\pi k} \ln \left( 2 \sinh \frac{\pi r_0}{2D} \right) \quad (40)$$

Voor kleine waarden van  $x$  kan  $\sinh x$  met goede benadering vervangen worden door  $x$ . Uit figuur 11 blijkt echter, dat formule (40) ook voor grote waarden van  $r_0/D$  met redelijke benadering door (41) mag worden vervangen:

$$w = \frac{1}{\pi k} \ln \frac{D}{\pi r_0} \quad (41)$$

In figuur 11 zijn verder nog opgenomen de resultaten van enkele relaxatietekeningen voor gevallen met symmetrische en met eenzijdige stroming. De overeenkomst met de formules (40) en (41) is zeer goed. De krommen voor de waarden van de radiale

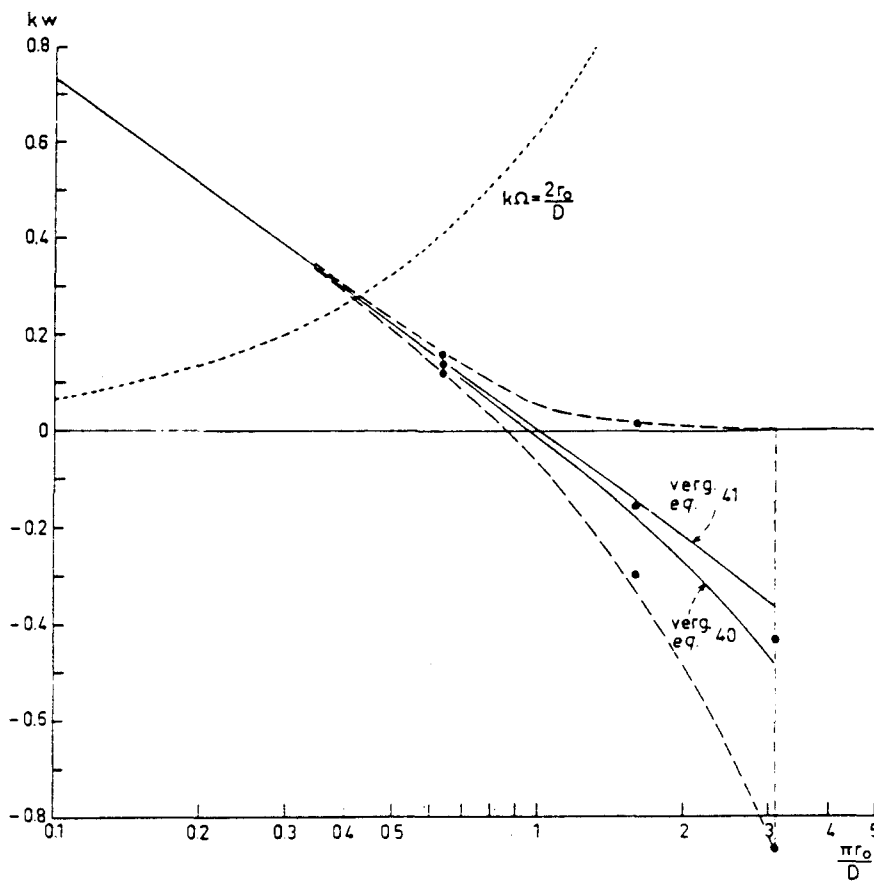


FIG. 11. De radiale weerstand ( $w$ ) van een open leiding met halfcirkelvormige natte omtrek in homogene grond ( $\Omega$  is de weerstand die een horizontale stroming ondervindt over een afstand  $2 r_0$ )

*The radial resistance ( $w$ ) of an open conduit with half circular wetted perimeter in a homogeneous soil ( $\Omega$  is the resistance encountered by a horizontal flow over a distance  $2 r_0$ )*

- symmetrische stroming; *symmetrical flow*
- - - eenzijdige stroming; *one-sided flow*
- ..... zie formule; *see formula*
- uitkomst van relaxatietekening; *result of relaxation figure*

weerstand, welke aan weerszijden van de open leiding gebruikt zouden moeten worden, wijken bij eenzijdige afstroming of toestroming (zie streeplijnen) sterker van elkaar af. Vergelijkt men dit echter met de weerstand, die een horizontale stroming ondervindt over een afstand van  $2r_0$  (zie stippellijn in figuur 11), dan is het duidelijk, dat ook dit verschil voor de praktijk van geen betekenis is.

Om een formule te vinden voor de radiale weerstand van alzijdig doorlatende (porieuze) drainbuizen, welke op een diepte  $b$  onder een vrijwel horizontale grondwaterpiegel liggen, zou men dezelfde weg als voor de afleiding van (41) kunnen gebruiken. Een snellere weg is echter mogelijk door in het verticale vlak de drainerende leiding een oneindig aantal malen te spiegelen en de zo verkregen reeks te splitsen in twee oneindige reeksen op elk waarvan de voorgaande afleiding weer van toepassing is. Met behulp van (19), (21) en (41) vindt men dan, waarbij  $r_0 \leq b$ :

$$w = \frac{1}{2\pi k} \left( \ln \frac{D}{2\pi r_0} - \ln \sin \frac{\pi b}{D} \right) \quad (42)$$

De radiale weerstand van een open leiding, waarvan de breedte  $B_w$  veel groter is dan de diepte  $B_h$ , kan benaderd worden uit de vergelijkingen (28) en (30) met  $B_h = 0$ . Indien  $B_h = 0$ , dan geldt  $B_w = B$ , maar om verschil te maken met diepe leidingen, waar  $B_h \approx 0,3 B_w$ , wordt het symbool  $B_r$  in de volgende formules gehandhaafd.

Substitutie van (23) met zeer grote waarden voor  $x$  en met  $z = 0$  in (28) levert op voor de eenzijdige toestroming van rechts:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \frac{q_0}{kD} \left( x + \frac{B_w}{2} \right) - \frac{q_0}{\pi k} \ln \frac{e^{\frac{\pi B_w}{2D}} - e^{-\frac{\pi B_w}{2D}}}{4} \quad (43a)$$

$$x \lim_{x \rightarrow} h(x) = \frac{q_0}{\pi k} \ln \frac{1 + e^{-\frac{\pi B_w}{2D}}}{1 - e^{-\frac{\pi B_w}{2D}}} \quad (43b)$$

De vormen achter het logaritme-teken in (43a) en (43b) zijn ongelijk, waaruit evenals in het vorige geval volgt, dat feitelijk aan linker- en rechterkant verschillende waarden voor  $w$  ingevoerd zouden moeten worden.

$$w_r = -\frac{1}{\pi k} \ln \frac{e^{\frac{\pi B_w}{2D}} - e^{-\frac{\pi B_w}{2D}}}{4} = -\frac{1}{\pi k} \ln \left( \frac{1}{2} \sinh \frac{\pi B_r}{2D} \right) \quad (44)$$

$$w_l = \frac{1}{\pi k} \ln \frac{1 + e^{-\frac{\pi B_w}{2D}}}{1 - e^{-\frac{\pi B_w}{2D}}} = -\frac{1}{\pi k} \ln \operatorname{tgh} \frac{\pi B_w}{4D} \quad (45)$$

Uit (44) en (45) volgt voor de symmetrische toestroming:

$$w = \frac{1}{2} (w_l + w_r) = -\frac{1}{\pi k} \ln \sinh \frac{\pi B_w}{4D} \quad (46)$$

Voor kleine  $B_w$  kan formule (46) met goede benadering vervangen worden door (47):

$$w = \frac{1}{\pi k} \ln \frac{4D}{\pi B_w} \quad (47)$$

Terwijl bij de afleiding van (28) gemakshalve het nulpunt van de  $x$ -as aan de rand van de open leiding werd gelegd, moest voor de uiteindelijke berekening van de radiale weerstand volgens (37) het nulpunt weer in het midden van de open leiding worden gelegd. Voor  $B_w = \infty$  is dit echter onmogelijk en ook voor zeer grote  $B_w$  praktisch niet gewenst, zodat dan de radiale weerstand gerekend wordt vanaf de

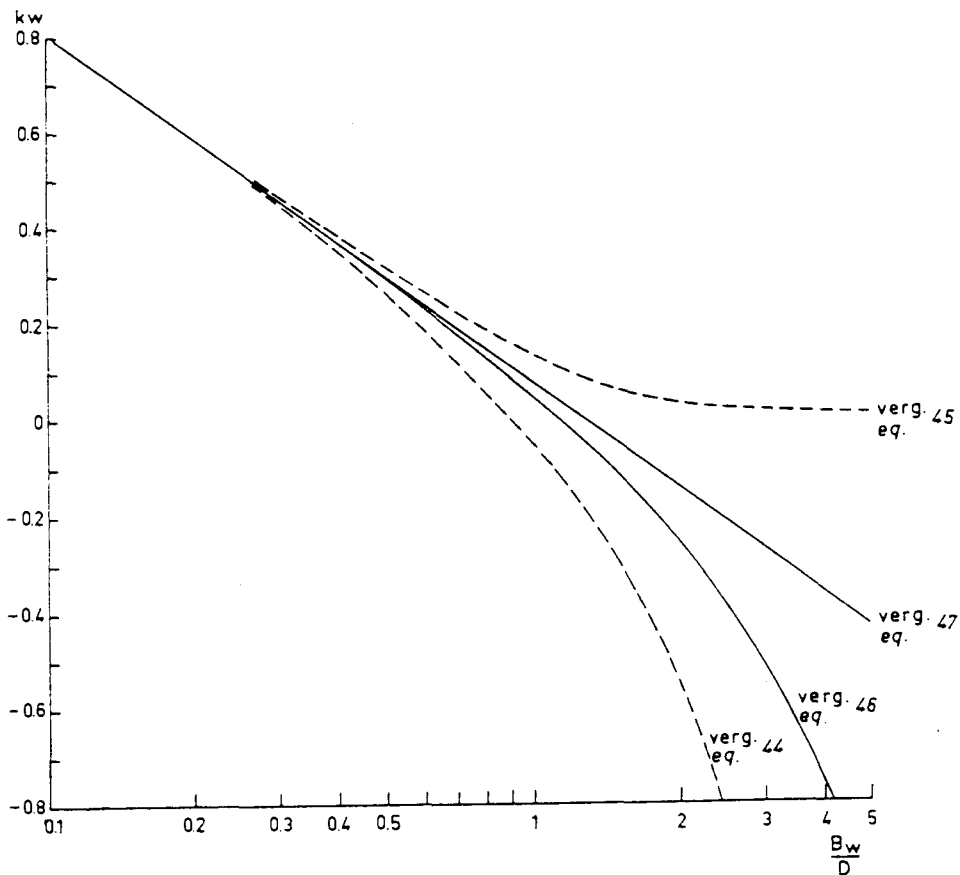


FIG. 12. De radiale weerstand ( $w$ ) van een open leiding met diepte nul en breedte  $B_w$  gelegen in homogene grond

*The radial resistance ( $w$ ) of an open conduit with zero depth and width  $B_w$  in a homogeneous soil*

- symmetrische stroming; *symmetrical flow*
- - - eenzijdige stroming; *one-sided flow*

rand van het open water. Door substitutie van  $B_w = \infty$  in (43a) ontstaat de volgende formule:

$$w = \frac{1}{\pi k} \ln 4 = \frac{0,441}{k} \quad (48)$$

In figuur 12 zijn de formules (44) ... (47) grafisch uitgezet en evenals bij de puntvormige put blijkt ook nu bij de lijnvormige put, dat de verschillen tussen deze formules in de praktijk van weinig belang zullen zijn. Bovendien volgt uit deze figuren dat, zolang het om de grootte van de radiale weerstand gaat, de verhouding tussen breedte en diepte van de watergang van minder invloed is dan de grootte van de natte omtrek. Uit figuur 8 blijkt, dat het verschil tussen de radiale weerstanden volgens (41) en (47), indien  $\pi r_0$  gelijk gesteld kan worden aan  $B_w$ , steeds ofwel kleiner is dan 10% van  $w$ , ofwel kleiner dan de weerstand, die een horizontale stroming ondervindt over een afstand  $2r_0$ . Om deze reden is de afleiding van formules voor tussengelegen vormen van de natte omtrek (bijvoorbeeld een halfellipsvormige of een trapeziumvormige natte omtrek, zoals in de praktijk dikwijls voorkomt) achterwege gelaten. Een dergelijke afleiding moet veel moeilijker zijn (bijvoorbeeld voor het trapeziumprofiel de berekening van elliptische integralen uit de Schwarz-Christoffel-transformatie) en volgens bovenstaande beschouwing slechts weinig voordeel opleveren. Om deze reden werd door Hooghoudt zelfs aanbevolen alleen open leidingen met halfcirkelvormige natte omtrek te veronderstellen (HOOGHOUDT, 1940, pag. 563-571).

Het voorkomen van negatieve radiale weerstanden in de figuren 11 en 12 kan verklaard worden uit het feit, dat bij een zeer grote straal een halfcirkelvormige natte omtrek gemakkelijker te bereiken is dan een verticaal door het middelpunt van de halve cirkel over de volle dikte van het doorlatende pakket. Dat met toenemende  $D$  ook de radiale weerstand  $w$  toeneemt, wordt duidelijk bij beschouwing van figuur 7d.

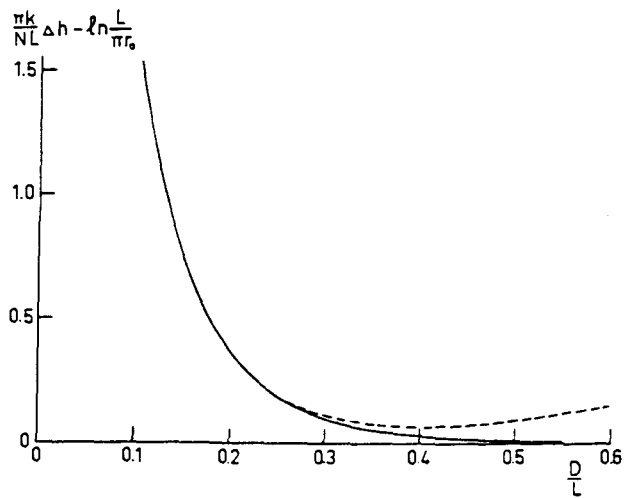
Bij de overgang van formule (39) naar (40) werd aangenomen dat  $x > 2D$  en om dezelfde reden kan (33) slechts een goede benadering geven als  $D < L/4$ . Tot deze conclusie komt men ook als men (41) of (47) met een grote  $D$  in (33) substitueert. Immers voor  $D \rightarrow \infty$  wordt de tweede term van (33) gelijk nul, maar  $w$  nadert daarentegen tot oneindig, hoewel door de steeds minder wordende invloed van de laagdikte  $\Delta h$  tot een eindige limiet zou moeten naderen.

Voor  $D \rightarrow \infty$  is het op de volgende eenvoudige manier mogelijk tot een oplossing te komen. Indien we het  $\zeta$ -vlak in figuur 3 een kwart slag tegen de klok in draaien, zien we dat de onderste helft van deze figuur gelijk is aan het gevraagde stroomveld en bijgevolg met een draaiing van vergelijking (18) het gestelde probleem reeds is opgelost. Dat langs BE in de niet gedraaide figuur 3 de stroomfunctie lineair van  $z$  afhangt, volgt ook hieruit, dat door toevoeging van een horizontale stroming met intensiteit  $q_0$  de verticale lijn BE tot stroomlijn wordt. Uit (19), (20) en (21) kan het verschil worden afgeleid tussen de stijghoogte in het punt E ( $\varphi = 0$ ) en het gemiddelde van de extreme waarden op een kwart cirkelboog om het punt B getrokken met straal  $r_0$ . Substitutie van  $-r_0$  en  $-ir_0$  levert respectievelijk op:

FIG. 13. Symmetrische drainage in homogene grond. Voor  $D/L < 0,25$  volgt uit de formules (33) en (41) een zeer goede benadering van  $\Delta h$ . Naarmate voor  $D/L$  grotere waarden genomen worden, is deze afleiding minder goed bruikbaar (zie gebroken kromme). Het juiste verband wordt gegeven door de getrokken kromme naderende tot de horizontale as in overeenstemming met formule (51)

*Symmetrical drainage in a homogeneous aquifer of constant thickness. A very good approximation of  $\Delta h$  follows from (33) and (41) provided  $D/L < 0,25$ . The larger the value of  $D/L$  the*

*smaller the accuracy of this derivation (see broken curve). The correct relation is given by the full curve approaching the horizontal axis in agreement with (51)*



$$h(-r_0) = \frac{q_0}{\pi k} \left( -\frac{\pi r_0}{2D} + \ln \sinh \frac{\pi r_0}{2D} \right) \quad (49)$$

$$h(-ir_0) = \frac{q_0}{\pi k} \ln \sin \frac{\pi r_0}{2D} \quad (50)$$

Voor  $\pi r_0/2D < 0.1$  zijn niet alleen  $\sinh$  en  $\sin$  ongeveer gelijk aan  $\pi r_0/2D$ , maar wegens de logaritme wordt ook de term  $-\pi r_0/2D$  van minder belang. Vervanging van  $q_0$  door  $NL$  en  $2D$  door  $L$  levert ten slotte op:

$$\Delta h = \frac{NL}{\pi k} \ln \frac{L}{\pi r_0} \quad (51)$$

Uit figuur 13 blijkt, dat  $D/L = 0.5$  inderdaad in grootte-orde de maximale waarde is, waarbij de substitutie van (41) in (33) met  $D^* = 0$  nog een goede uitkomst geeft. Voor  $D/L = 0.25$  wordt voor  $\Delta h$  een waarde verkregen, die slechts een zeer klein verschil heeft met de limietwaarde volgens (51) voor  $D = \infty$ . Voor toenemende  $D/L$  wordt de afwijking steeds groter, zoals blijkt uit de gestippelde kromme in figuur 13. Het rechter deel van de getrokken kromme is afgeleid door superponeren van een oneindige reeks van bijzondere oplossingen, welke uit (18) verkregen werden door telkens in horizontale richting over een afstand  $L$  te verschuiven.

Evenals formule (18), waaruit (51) is afgeleid, geldt ook (51) voor een open leiding met halfcirkelvormige natte omtrek. Wil men een gelijksoortige formule hebben voor  $D = \infty$ , maar bij een brede ondiepe leiding, dan dient de coëfficiënt achter het logaritme-teken gewijzigd te worden in dezelfde verhouding, als reeds tussen (41) en (47) gevonden is:

$$\Delta h = \frac{NL}{\pi k} \ln \frac{4L}{\pi B_w} \quad (52)$$

*b. Het heterogene pakket met twee lagen van constante dikte*

De formules, die tot nu toe in dit hoofdstuk afgeleid zijn, zijn alleen geldig voor een homogene watervoerende laag. Het is echter duidelijk, dat het principe om de stroming in een gebied waarin zich verschillende evenwijdige open leidingen bevinden te splitsen in een verticale component, een horizontale component en bij elke open leiding een radiale component, ook toepasbaar is bij heterogeen doorlatende profielen en wel in het bijzonder als de grond is opgebouwd uit horizontale lagen van verschillende doorlatendheid.

Voor praktische toepassingen is vooral van belang de grootte van de radiale weerstand van een open leiding die met zijn natte omtrek volledig is gelegen in een minder goed doorlatende laag waaronder zich een goed doorlatende laag bevindt. Een berekening van de vorm van de grondwaterspiegel en van de grootte van de radiale weerstand op eenzelfde manier als voor een homogeen profiel werd voor dit geval niet gevonden. Uit de elektriciteitstheorie is wel een methode bekend om het veld te berekenen van een puntlading of een lijnvormige lading in een gebied bestaande uit lagen met verschillende diëlektrische constanten door spiegeling en optelling van oneindige reeksen. Deze weg werd door Kirkham gevolgd voor het geval van drainage door op zekere diepte onder het maaiveld gelegen horizontale buizen om de grondwaterstroming te berekenen welke van een horizontaal met water bedekt maaiveld uitgaat (KIRKHAM, 1951, 1954).

Voor de symmetrische toestroming vanuit het oneindige naar een leiding gelegen in een horizontaal gelaagd pakket van eindige dikte geeft de relaxatie-methode een eenvoudige en snelle weg om tot een oplossing te komen. Uit 13 relaxatie-tekeningen voor een pakket bestaande uit 2 lagen en een halfcirkelvormige open leiding met  $r_0'D_1 = 0,25$  werd figuur 14 afgeleid. Deze waarde voor  $r_0/D_1$  werd gekozen, omdat voor kleinere waarden de stroming in de directe omgeving van de open leiding met goede benadering een rotatie-symmetrie om de as vertoont en dit voor  $r_0/D_1 > 0,5$  zeker niet het geval is. Indien  $r_0/D_1 < 0,25$  mag de volgende formule voor de radiale weerstand  $w$  gebruikt worden met voor  $k_1w'$  de waarde, die in figuur 14 afgelezen kan worden:

$$k_1w = k_1w' + \frac{1}{\pi} \ln \frac{D_1}{4r_0} \quad (53)$$

Voor grotere  $r_0/D_1$  mag (53) slechts met het nodige voorbehoud gebruikt worden. Zou men figuur 14 gebruiken om de radiale weerstand bijvoorbeeld in figuur 9 te berekenen, dan verkrijgt men als uitkomst  $k_1w = 0,15$ . De vorm van de natte omtrek en in het bijzonder de ligging van de bodem ten opzichte van het grensvlak tussen de twee lagen met doorlatendheden  $k_1$  en  $k_2$  zijn in dit geval dus oorzaak geweest van een belangrijke fout. Voor kleinere  $r_0/D_1$  mag deze vorm-invloed in eerste benadering wel verwaarloosd worden, evenals dit bij het homogeen doorlatende pakket aanbevolen werd op grond van de overeenkomst tussen de figuren 11 en 12, ofwel men vervangt  $4r_0$  in de noemer door  $B_w$ . Deze laatste correctie bij figuur 9 toegepast levert een veel betere uitkomst op, namelijk  $k_1w = 0,22$ .

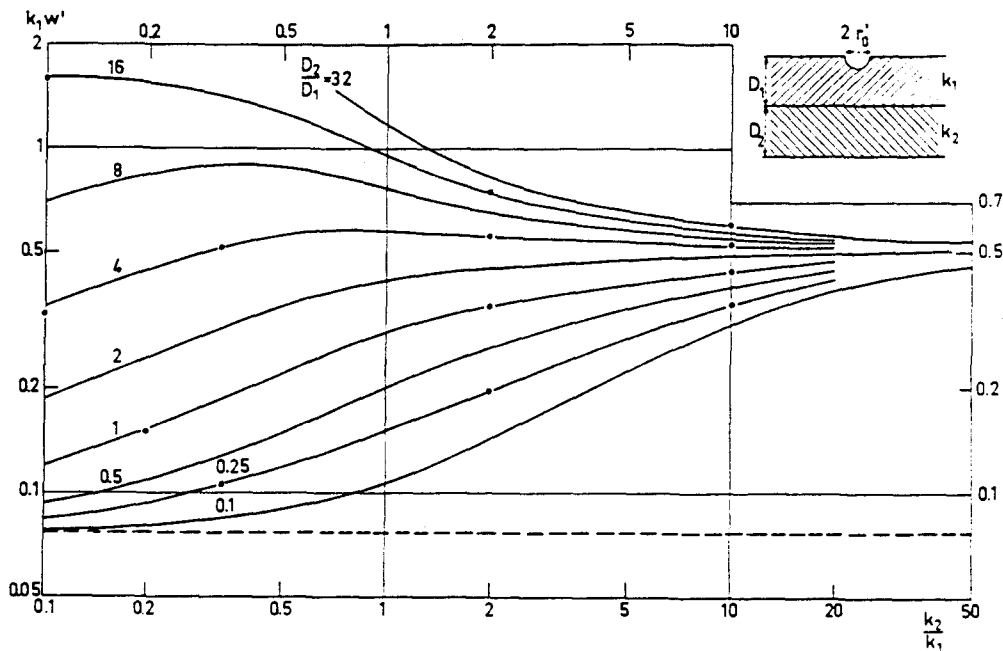


FIG. 14. De radiale weerstand van een open leiding met half cirkelvormige natte omtrek in een watervoerend pakket bestaande uit twee lagen met doorlatendheden respectievelijk  $k_1$  en  $k_2$  en met dikten  $D_1$  en  $D_2$ . Indien  $r_0' = D_1/4$  kan de bijbehorende waarde voor  $kw'$  onmiddellijk uit de grafiek worden afgelezen. Voor andere waarden van  $r_0$  kan formule (53) worden gebruikt

*The radial resistance of an open conduit with half-circular wetted perimeter in an aquifer consisting of two layers, respectively with permeabilities  $k_1$  and  $k_2$  and with thicknesses  $D_1$  and  $D_2$ . If  $r_0' = D_1/4$ , the corresponding value of  $kw'$  may be read immediately from the graph. For other values of  $r_0$  use (53)*

Terwijl bij een homogeen profiel met (19) en (20) of (28) en (29) voor de vorm van de grondwaterspiegel een redelijke benadering is bereikt (wegens verwaarlozing van het kweloppervlak zijn tot op een afstand van ongeveer 30 cm van de open leiding bijzondere afwijkingen te verwachten, zie hoofdstuk II.2), is een dergelijke benadering bij een profiel bestaande uit twee horizontale lagen niet gevonden. Voor  $x/D_1 < 0.25$  kan men echter de werkelijke vorm met voldoende benadering voorstellen door een logaritmische functie. In het gebied dat door figuur 14 wordt bestreken, geldt bovendien dat voor  $k_2/k_1 > 3$  en  $x/D_1 > 2$  de grondwaterspiegel met goede benadering een lineaire of parabolische vorm heeft (respectievelijk voor  $N = 0$  en  $N = 0$ ). Dit laatste geldt ook voor  $k_2/k_1 < 3$  als  $x > D_1 + D_2$ .

Indien  $k_2/k_1 = \infty$ , dan kan met behulp van complexe functies eveneens een uitkomst gevonden worden:

$$w = \frac{1}{\pi k_1} \ln \frac{4D_1}{\pi r_0'} \quad (54)$$

Deze formule is praktisch bruikbaar voor  $k_2/k_1 > 20$ . Uit (51) volgt, dat de kromme lijnen in figuur 14 naar rechts voortgezet naderen tot dezelfde waarde:

$$\lim_{k_2 \rightarrow \infty} k_1 w' = \frac{1}{\pi} \ln \frac{4D_1}{\pi r'_0} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{16}{\pi} = 0,52 \quad (55)$$

De laagste waarde, welke in figuur 14 kan voorkomen, vindt men bij  $D_2 = 0$  door  $D/r_0 = 4$  te substitueren in (41):

$$k_1 w' = \frac{1}{\pi} \ln \frac{4}{\pi} = 0,077 \quad (56)$$

Terwijl uit figuur 13 kan worden afgeleid, dat bij de symmetrische drainage in homogene grond een waarde van  $D > L/4$  weinig invloed heeft, blijkt na vergelijking met formule (55), dat ook als in de diepere lagen zeer hoge doorlatendheden voorkomen, het verwaarlozen van deze diepere lagen geen grote fouten kan opleveren. De conclusie dat het meten van doorlatendheden op grotere diepte dan  $L/4$  van weinig praktisch belang is, geldt echter alleen voor zover het gaat om symmetrische drainage.

De formules, welke zijn afgeleid voor de radiale weerstand in een pakket bestaande uit twee lagen, mogen ook in de drainage-formule (33) gesubstitueerd worden, mits daarbij in de noemer van de eerste term wordt gelezen  $k_1$  en in de noemer van de

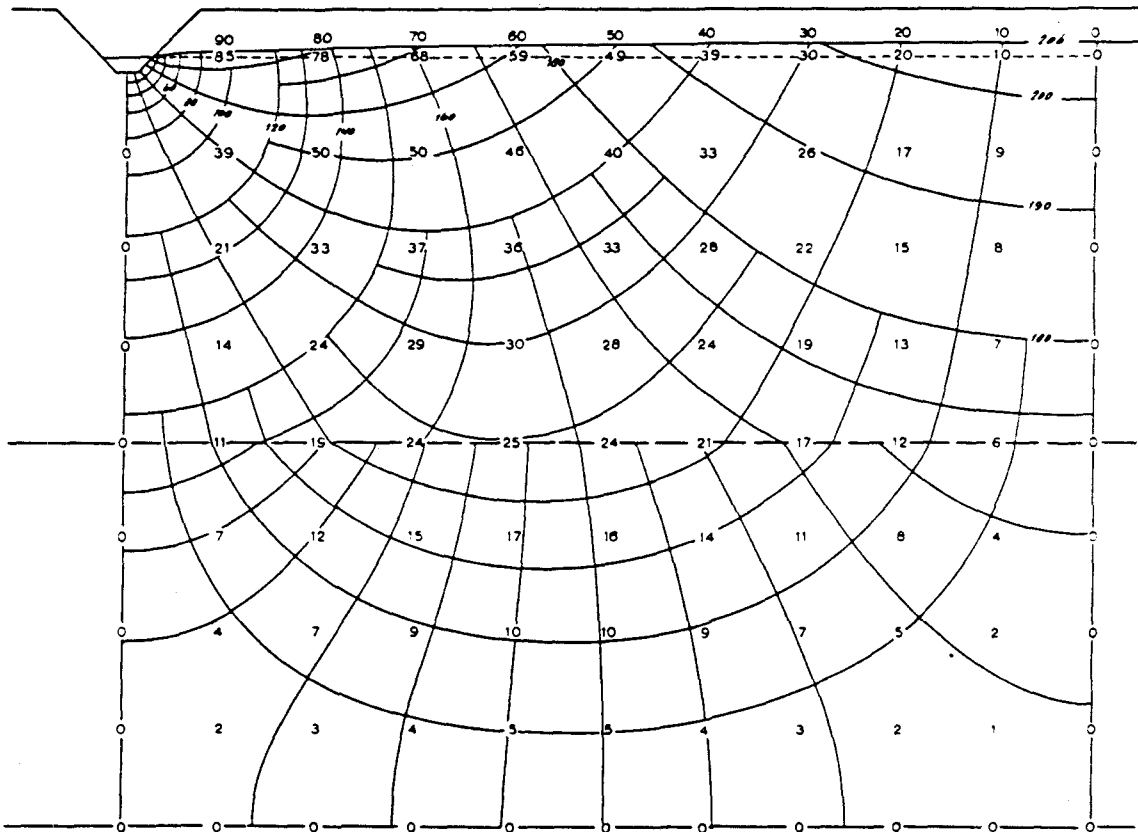
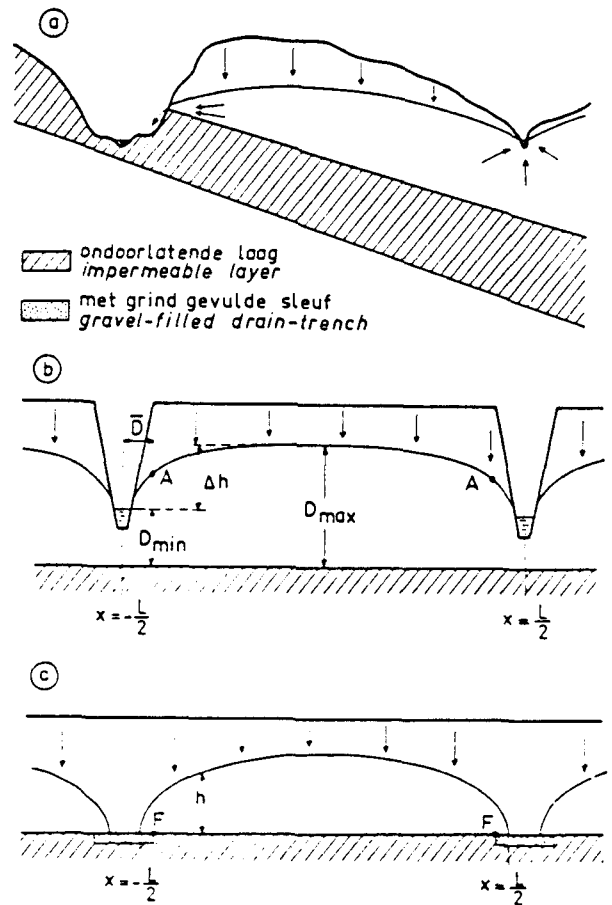


FIG. 15. Symmetrische drainage door sloten in een watervoerend pakket bestaande uit twee horizontale lagen met verschillende doorlatendheid ( $k_1:k_2 = 1:3$ ). Voor de betekenis van de getallen, zie fig. 9

*Symmetrical drainage by ditches in an aquifer consisting of two horizontal layers with different permeabilities ( $k_1:k_2 = 1:3$ ). For the explanation of the numbers, see fig. 9*



FIG. 16. Drainage door evenwijdige leidingen bij variabele laagdikte  $D$ . a. De asymmetrische stroming boven een sterk hellende ondoorlatende laag; b. De symmetrische stroming boven een horizontale ondoorlatende laag op geringe diepte; c. De symmetrische stroming naar drainsleuven van bijzondere vorm voor welk geval Engelund een exacte oplossing heeft gevonden *Drainage by parallel open conduits in a homogeneous aquifer with variable thickness  $D$* . a. The asymmetric flow over a strongly inclined impermeable layer; b. The symmetric flow over a horizontal impermeable layer lying at a shallow depth; c. The symmetric flow to drain-trenches of a special type for an which exact solution has been given by Engelund



tweede term  $8(k_1 D_1 - k_2 D_2)$ . Om de nauwkeurigheid van de combinatie van de vergelijking (33) en figuur 14 na te gaan, werden als steekproef met de relaxatiemethode 7 verschillende gevallen van symmetrische drainage in een uit twee lagen bestaand pakket opgelost. De verschillen varieerden van  $-4\%$  tot  $-7\%$ . Figuur 15 geeft hiervan een voorbeeld; voor dit geval is de uitkomst berekend uit vergelijking (33) en figuur 14 slechts  $3\%$  hoger dan hetgeen uit de relaxatie-tekening volgt.

c. *De symmetrische drainage bij een van  $x$  afhankelijke laagdikte*

In het voorgaande is steeds verondersteld, dat bij een vrijwel horizontale grondwaterspiegel de dikte  $D$  van het watervoerende pakket als constant mag worden beschouwd. In bergachtige gebieden, waar ondoorlatend gesteente onder meer of minder steile hellingen kan voorkomen en de drainage plaats vindt hetzij in het laagste punt van het dal, hetzij aan de dagzoom van de ondoorlatende laag (zie fig. 16a), wordt hieraan niet voldaan. Zowel de grote hoogteverschillen in de grondwaterspiegel als het duiken van de ondoorlatende laag zijn dan oorzaak van een belangrijke variatie in de dikte  $D$  van de watervoerende laag.

Indien  $D$  lineair van  $x$  afhangt, geeft de afleiding van een formule overeenkomstig (34) geen bijzondere moeilijkheden; daar niet-horizontale ondoorlatende lagen verder buiten beschouwing blijven, wordt bedoelde afleiding achterwege gelaten.

Onder Nederlandse omstandigheden zijn de hellingen van de lagen en de hoogteverschillen in de grondwaterspiegel door het vlakke reliëf veel kleiner. Maar zelfs bij een zuiver horizontale ligging van de ondoorlatende laag kunnen hoogteverschillen in de grondwaterspiegel ontstaan die ten opzichte van de gemiddelde laagdikte niet meer verwaarloosbaar zijn. Naarmate de ondoorlatende laag hoger ligt, zou  $L$  evenredig met  $D$  kleiner moeten worden om eenzelfde graad van nauwkeurigheid te bereiken. Het gehele stroomgebied zou dan immers gelijkvormig verkleind worden. Dat  $\Delta h/N$  in dezelfde verhouding kleiner zou worden, is een eis die voor de praktijk geen enkele betekenis heeft. De gemiddelde waarde van  $\Delta h$  wordt grotendeels bepaald door de topografische gesteldheid. Een afhankelijkheid van de diepte van de ondoorlatende laag is nooit gevonden. Een toestand als in figuur 16b afgebeeld, is dan ook geen uitzondering. Een exacte oplossing voor de grondwaterstromingen in de figuren 16a en 16b is momenteel nog niet bekend, daarentegen wel voor figuur 16c. Deze bijzondere vorm van het drainagecentrum komt het eerst voor in een publikatie van Kozeny (KOZENY, 1932). De exacte oplossing met behulp van de hodograafmethode werd voor dit geval gegeven door Engelund; de punten F in figuur 16c zijn brandpunten van de elliptische grondwaterspiegel (ENGELUND, 1951):

$$\frac{4x^2}{L^2} + \frac{4kh^2}{NL^2} = 1 \quad (57)$$

Indien het stroomgebied, afgebeeld in figuur 16c door symmetrische afsnijding tot een kleinere breedte  $L'$  wordt teruggebracht en men substitueert vervolgens  $x = 0,5 L'$  en  $x = 0$  in (57), dan kan  $L$  worden geëlimineerd. Nadat van de nieuwe  $L'$  het accent verwijderd is, verkrijgt men de volgende uitkomst ( $h_1$  en  $h_0$  zijn respectievelijk het hoogste en het laagste punt in het freatisch oppervlak gemeten als hoogten boven de ondoorlatende laag):

$$h_1^2 - h_0^2 = \frac{NL^2}{4k} \quad (58)$$

Volgens Gustafsson werd deze formule reeds in 1872 door Colding gepubliceerd. Colding ging uit van de veronderstelling, dat uitsluitend met de horizontale stromingscomponent gerekend behoeft te worden en vond daarmee dus een uitkomst waarvoor eerst veel later door Engelund bewezen kon worden, dat deze onder bepaalde voorwaarden als een exacte oplossing beschouwd mag worden. Het werk van Colding kreeg vrijwel geen bekendheid en dezelfde afleiding werd later door Rothe onafhankelijk van Colding opnieuw gepubliceerd (ROTHE, 1924; GUSTAFSSON, 1946).

De formules (34) en (35) zijn bijzondere gevallen van (57) en (58) en kunnen onmiddellijk uit laatstgenoemde formules worden afgeleid door de constant gedachte laagdikte gelijk te stellen aan  $\frac{1}{2}(h_0 + h_1)$ . De formules (35) en (58) zijn voor de praktijk vrijwel gelijkwaardig; in beide gevallen wordt de radiale weerstand verwaarloosd, hetgeen afhankelijk van de gewenste nauwkeurigheid des te eerder geoorloofd zal zijn, naarmate  $D/L$  kleiner is. In de praktijk vindt men echter vaak dikke, hetero-

geen doorlatende pakketten met een slechter doorlatende bovenlaag, waardoor  $w$  groter wordt en (58) een minder goede benadering geeft.

Bij de in de praktijk voorkomende symmetrische drainage vertoont de vorm van de grondwaterspiegel in eerste benadering dikwijls een grote overeenkomst met een ellips. Het is duidelijk, dat in bijzondere gevallen deze vorm met de ellips volgens (58) identiek gesteld mag worden. De elliptische vorm van de stationaire grondwaterspiegel komt voor bij een homogeen doorlatende grond en een doorlatende laag niet dieper dan de bodem van de open leiding. In figuur 16b heeft de grondwaterspiegel alleen tussen de punten A de vorm van een deel van een ellips.

In die gevallen, dat de grond heterogeen doorlatend is of dat de homogene doorlatendheid dieper reikt dan de drainerende leiding of dat door een andere reden de radiale weerstand merkbaar begint te worden, heeft het weinig zin meer om aan de

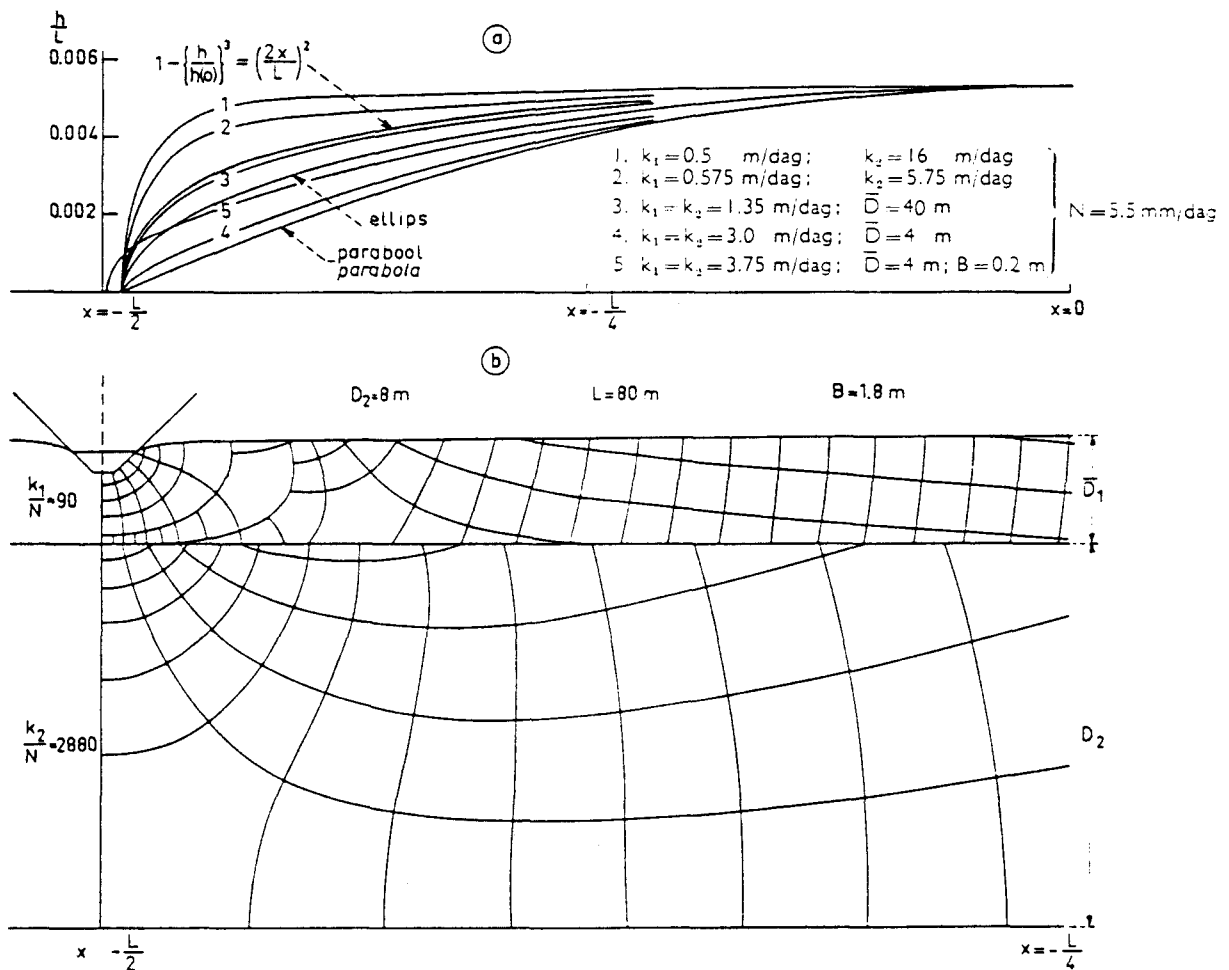


FIG. 17. Het freatisch oppervlak bij symmetrische stationaire drainage. a. Verschillen in vorm, welke volgens de theorie mogelijk zijn, afhankelijk van de geometrie en de doorlatendheid; b. Gedeelte van de stroomlijnen en aequipotentiaalijnen uit de relaxatie-figuur voor kromme 1  
*The phreatic surface in steady state conditions. a. Differences in shape, which may occur according the theory of steady, symmetrical drainage, dependent on the geometry and the permeability; b. Part of the streamlines and the equipotential lines from the relaxation figure for curve 1*

elliptische grondwaterspiegel de voorkeur te geven boven de parabolische grondwaterspiegel. De veronderstelling van de parabolische grondwaterspiegel maakt alle samengestelde en van de tijd afhankelijke problemen aanzienlijk eenvoudiger. Zowel uit veldwaarnemingen (DISERENS, 1935; TALSMAN and HASKEW, 1959) als uit theoretische afleidingen is gebleken, dat ook andere vormen van het freatisch oppervlak afhankelijk van de omstandigheden mogelijk zijn. Figuur 17 geeft enkele voorbeelden van theoretisch afgeleide freatische oppervlakken bij symmetrische drainage. Bij homogeen doorlatende grond met een ondoorlatende laag op zekere diepte onder de open leiding blijkt, dat er toch een ongeveer ellipsvormig freatisch oppervlak kan zijn;  $B/L$  moet hierbij kleiner zijn naarmate  $D/L$  kleiner is. De bovenste krommen behoren bij een profiel bestaande uit twee lagen met  $D_1 \ll L_2$  en  $k_1 \ll k_2$ . Daar in dergelijke gevallen de toestand bepaald gedacht kan worden door vier parameters te weten  $B/D_1$ ;  $D_1/D_2$ ;  $D_2/L$  en  $k_1/k_2$ , moet het zeer moeilijk en praktisch ondoenlijk zijn om uit de vorm van de grondwaterspiegel de gelaagdheid van de bodem en de verhouding tussen de doorlatendheden van de verschillende lagen anders dan zeer globaal te bepalen. Volgens figuur 17 komen de ongeveer op een parabool of een ellips gelijkende grondwaterspiegels voor in homogene grond en vermoedelijk ook als  $k_1 \gg k_2$ . De grondwaterspiegels met eenzelfde waarde voor  $\Delta h/L$ , maar in het middenstuk een zwakkere kromming en in de randstukken een sterkere kromming (zie de krommen 1 en 2) komen voor in gronden met een slecht doorlatende bovenlaag van zodanige dikte, dat de bodem van de open leidingen zich nog ruim boven de onderkant van deze laag bevindt (relatief hoge radiale weerstand). Bij metingen in het veld zijn de omstandigheden ingewikkelder, daar men ook rekening moet houden met het niet-stationaire karakter van de werkelijke grondwaterstromingen en met de toevallige heterogeniteiten in de grond.

De veronderstelde homogeniteit is een voorwaarde, die in de praktijk steeds een zekere twijfel oproept. Zien we bij een heterogeen doorlatende grond met voldoende kleine waarde voor  $D/L$  af van de radiale stroming, dan is het mogelijk bij een gegeven functie  $k(z)$  langs dezelfde weg als bij constante  $k$  tot een oplossing van het symmetrische drainageprobleem te komen (HOOGHOUT, 1937).

$$q_0(x) = - \frac{dh}{dx} \int_0^h k(z) dz \quad (59)$$

$$\frac{dq_0}{dx} = N \quad (60)$$

Uit (59) en (60):

$$- \frac{d}{dx} \left\{ \frac{dh}{dx} \int_0^h k(z) dz \right\} = N \quad (61)$$

Indien naar het maaiveld toe een lineaire toename in de doorlatendheid gevonden wordt, dan geldt:

$$k(z) = \frac{z}{a} \quad (62)$$

en met  $h_1$  en  $h_0$  gemeten vanaf de ondoorlatende laag volgt uit (61) en (62):

$$h_1^3 - h_0^3 = \frac{3aNL^2}{4} \quad (63)$$

Door Hooghoudt is ook een voorschrift gegeven om het maximale hoogteverschil van de stationaire grondwaterspiegel te berekenen in een gelaagde, heterogeen doorlatende grond (HOOGHOUDT, 1940, p. 601–604). Volgens dit voorschrift moet een horizontaal vlak door de drainbuizen of door de waterspiegel in sloten en kanalen worden gedacht en twee gemiddelde waarden voor de doorlatendheid  $k_1$  en  $k_2$  worden bepaald, respectievelijk boven en onder dit vlak. Hoewel dit in de praktijk voorkomt (bijvoorbeeld in kleigrond, die boven het slootpeil periodiek uitdroogt en daardoor een zekere structuur en een betere doorlatendheid kan krijgen), is deze keuze in een bepaald opzicht minder goed te noemen. Door deze herleiding veronderstelt men immers twee homogene lagen met verschillende doorlatendheid, waarvan het gemeenschappelijk grensvlak door de onderkant van het kweloppervlak gaat. In het volgende hoofdstuk zal blijken, dat de stroming in de omgeving van het kweloppervlak zelfs bij homogene grond niet zo eenvoudig is te berekenen. Hooghoudt houdt met deze moeilijkheid geen rekening en merkt verder op, dat de stroming in de bovenste laag niet verticaal mag zijn, wil men het gegeven voorschrift toepassen. Een vrijwel verticale stroming in de bovenste laag vindt men bij  $k_1 \approx k_2$  en bij  $k_1 \ll k_2$  echter altijd. Bij  $k_1 \approx k_2$  wijkt de toestand weinig af van het homogene geval. Bij  $k_1 \ll k_2$  zal men voor de verticale stromingscomponent een extra term moeten toevoegen, zoals in vergelijking (33) reeds voorkomt. Bij  $k_1 \gg k_2$  heeft de welving van de grondwaterspiegel en de grootte van het kweloppervlak een belangrijke invloed, daar de radiale weerstand hierdoor grotendeels bepaald wordt: een aanvaardbare oplossing voor de radiale weerstand is voor dit geval nog niet gevonden.

Uit vergelijking (64) blijkt, dat Hooghoudt een constante verhouding veronderstelt tussen de stroomsterkten in de beide lagen, hetgeen in principe niet geheel juist is. Met deze vergelijking (in Nederland de formule van Hooghoudt genoemd) kan men evenwel voor dit probleem een redelijke benadering geven.

$$NL^2 = 8k_2d(h_1 - h_0) \div 4k_1(h_1^2 - h_0^2) \quad (64)$$

$h_1$  en  $h_0$  worden gemeten vanaf het grensvlak tussen de eerste en de tweede laag; in  $d$  is de invloed van de radiale weerstand in de tweede laag verwerkt; uit een groot aantal door Hooghoudt samengestelde tabellen kan de waarde van  $d$  afgelezen worden.

Door  $k_1 = 0$  te stellen moet (64) gelijk worden aan (36). Na verwaarlozing van  $D^*$  volgt hieruit:

$$\frac{d}{D} = \frac{L}{L + 8kDw} \quad (65)$$

Na een algebraïsche omwerking kan (64) vervangen worden door (66). Laatstgenoemde uitdrukking wordt gelijk aan (58) als de grondwaterstanden gemeten worden vanaf een niveau, dat gedacht wordt op een diepte  $k_2d/k_1$  onder het grensvlak van  $k_1$  en  $k_2$ :

$$NL^2 = 4k_1 \left\{ \left( h_1 + \frac{k_2d}{k_1} \right)^2 - \left( h_0 + \frac{k_2d}{k_1} \right)^2 \right\} \quad (66)$$

In het geval, dat  $k_1 \ll k_2$  en het grensvlak tussen  $k_1$  en  $k_2$  op de hoogte van de drainbuizen of het slootpeil ligt, kan men formule (33) even goed gebruiken als het voorschrift van Hooghoudt met extra term voor de verticale stroming in de bovenste laag. Voor de radiale weerstand  $w$  in (33) doet men dan het beste die waarde te substitueren, die men vindt onder aanneming dat de radiale stroming uitsluitend door de tweede laag gaat. In de tweede term vervangt men  $kD$  door  $k_1\bar{D}_1 + k_2D_2$ , of alleen door  $k_2D_2$  indien tenminste  $k_1\bar{D}_1$  veel kleiner is.

#### d. *Asymmetrische stromingen in een pakket met een of twee lagen*

De voorgaande behandeling van de symmetrische drainage in een watervoerend pakket opgebouwd uit 1 of 2 homogene lagen kan in principe ook toegepast worden op asymmetrische toestanden. Daarbij moet men dus rekening houden met verschillen in peilen, afmetingen en afstanden van de open leidingen. Het is duidelijk, dat de invloed hiervan en in het bijzonder de invloed van een afwijkend peil van het open water zich alleen over grotere afstanden merkbaar zal maken, als de dikte van het watervoerende pakket groot is en dus met een constante  $D$  gerekend mag worden.

Om tot het gebruik van draadschema's als in figuur 6 over te gaan behoeft verder alleen als voorwaarde gesteld te worden, dat  $L_i > 2D$ .

Bij afwezigheid van overtollige neerslag geeft de oplossing van het draadschema weinig moeilijkheden, daar in elk knooppunt van het draadschema de som van de stroomsterkten nul moet zijn (zie fig. 6), en dan de volgende algemene vergelijking geldig is \*):

$$\frac{kD}{L_{i-1}}(h_{1,i-1,0} - h_{1,i,0}) + \frac{kD}{L_i}(h_{1,i-1,0} - h_{1,i,0}) - \frac{1}{w_i}(h_{0,i} - h_{1,i,0}) = 0 \quad (67)$$

Zijn in een zeker gebied  $n$  open leidingen aanwezig, welke evenwijdig zijn, maar verder willekeurige eigenschappen hebben en geldt bovendien  $N = 0$ , dan moet men

\*) De stijghoogte  $h$  wordt nader aangeduid door 3 indices  $m, i, x$ .

$m$  duidt aan op welke laag de stijghoogte  $h$  betrekking heeft. De nummering gebeurt van boven naar beneden. Indien  $m = 0$  dan wordt hiermee het peil van open water aangeduid ( $h_{0,i}$ ).

$i$  is het nummer van de open leiding.

$x$  is de afstand tot de eerste open leiding aan de linkerkant.

In de formule vindt men alleen  $h_m$  voor de goed doorlatende lagen en bovendien  $h_1$  als de eerste relatief slecht doorlatend is. In de andere slecht doorlatende lagen heeft  $h$  bij praktische toepassingen slechts weinig betekenis; verondersteld wordt een lineair verband met de verticale coördinaat.

dus  $n$  onbekenden  $h_{1, i, 0}$  oplossen uit  $n$  vergelijkingen van de eerste graad analoog aan (67). Links van leiding 1 en rechts van leiding  $n$  moeten nog bijzondere randvoorwaarden opgesteld worden. Deze bijzondere randvoorwaarden kunnen bijvoorbeeld op de volgende manieren gegeven worden: een gegeven horizontale stroomsterkte of een gegeven  $h_1$  op zekere afstand van de uiterste in het probleem opgenomen open leiding of symmetrie in de directe omgeving van deze open leiding.

Indien echter geldt  $N = \text{constante} \neq 0$ , dan kan men de oplossing grafisch opgebouwd denken uit parabolen. Eventueel kan men de gevraagde oplossing zien als de som van twee deeloplossingen  $h_1'$  en  $h_1''$ , waarbij  $h_1'$  voldoet aan  $N = 0$  en voor  $h_{0, i}'$  de gegeven waarden genomen worden, terwijl bij  $h_1''$  een constante waarde  $N_0 \neq 0$  behoort en alle  $h_{0, i}'' = 0$ . Voor elke willekeurige constante waarde van  $N$  kan de oplossing dus in de volgende vorm geschreven worden:

$$h_1 = h_1' + \frac{N}{N_0} h_1''(N_0) \quad (68)$$

Bij  $N \neq 0$  moet (67) echter vervangen worden door lineaire vergelijkingen van andere vorm. Daar nu in elke strook tussen twee open leidingen de vorm van een parabool bepaald moet worden ( $h_{1, i} = Nx^2/2kD + a_{1, i}x + a_{0, i}$ ), is het nodig  $2n$  vergelijkingen van de eerste graad op te stellen, ter bepaling van de coëfficiënten  $a_{1, i}$  en  $a_{0, i}$  (links van leiding 1 en rechts van leiding  $n$  slechts 1 onbekende coëfficiënt.)

De tijdsduur, die voor een bijzondere oplossing met  $N \neq 0$  nodig is, kan aanzienlijk bekort worden door toepassing van de volgende kunstgreep. Om te beginnen wordt een eerste deeloplossing aangenomen, welke aan de gegeven  $N$  voldoet en wel zodanig, dat in elke strook tussen twee open leidingen een symmetrische parabool ontstaat en alle  $h_{1, i, 0}' = 0$ . De peilen van het open water in deze eerste deeloplossing kunnen onmiddellijk hierbij berekend worden en behoeven niet te voldoen aan de gegeven voorwaarden; in het algemeen vindt men bij alle open leidingen zekere verschillen, welke in  $n$  vergelijkingen (67) gesubstitueerd de tweede deeloplossing moeten opleveren. Bij de tweede deeloplossing moet  $N = 0$  genomen worden, waardoor de afleiding ervan aanzienlijk eenvoudiger is dan van een willekeurig probleem met  $N \neq 0$ . De som van de twee deeloplossingen voldoet aan de gestelde voorwaarden.

#### *e. Het heterogene pakket met meer dan twee lagen van constante dikte*

Toepassing van de tot nu toe gevolgde methode bij het berekenen van grondwaterstromingen in pakketten, welke uit meer dan twee lagen bestaan, ligt voor de hand. Een eerste bezwaar hierbij is, dat uitgaande van de gegeven definitie de radiale weerstand nu moeilijker te bepalen is. Dit geldt zowel voor de theoretische bepaling analoog aan formule (41) of figuur 14 als voor een bepaling uit veldmetingen. Een tweede bezwaar is, dat bij twee goed doorlatende lagen gescheiden door een slecht doorlatende laag, deze laatstgenoemde laag oorzaak is, dat de stroming eerst op veel grotere afstand met voldoende benadering horizontaal geacht kan worden dan bij een enkele

goed doorlatende laag het geval is. Voor de toepassing wordt dus in ieder geval geëist dat  $L/D \gg 1$ . De minimaal toegestane waarde van  $L/D$  zou men bijvoorbeeld kunnen afleiden door een symmetrische toestroming vanuit het oneindige te veronderstellen en daarbij als voorwaarde te stellen dat voor  $x \geq L/2$  de horizontale stroomsterkten in de grove lagen ongeveer evenredig zijn met de  $kD$ -waarden van deze lagen. Vooruitlopend op het resultaat van de volgende afleiding (voor de betekenis van  $a$  en  $a_2$  zie pag. 39), vindt men dan, dat bij een pakket bestaande uit vier lagen voldaan moet worden aan:

$$ae - \frac{L}{2} \sqrt{a} \ll a_2 \quad (69)$$

De volgende bewerking wijkt van het voorgaande af, doordat aangenomen wordt, dat de radiale stromingen alleen in een bovenste grove laag en in de eventueel erboven liggende slecht doorlatende laag kunnen voorkomen. Deze methode is minder gevoelig voor de verhouding tussen  $L$  en  $D$  en heeft het voordeel, dat  $q_2$  en  $q_4$  niet gebonden zijn aan de verhouding  $k_2 D_2 : k_4 D_4$ . Bij deze methode wordt gebruik gemaakt van twee vereenvoudigende veronderstellingen, namelijk dat de stromingsrichting in de goed doorlatende lagen horizontaal is (het zogenaamde principe van Dupuit) en in de slecht doorlatende lagen verticaal (DE GLEE, 1930). Met behulp van de in figuur 18 gebruikte notatie wordt het duidelijk, dat de volgende vergelijkingen geldig zijn. Tengevolge van de gecompliceerdheid van het onderhavige probleem is omtrent de nauwkeurigheid van de resultaten, die hiermede verkregen worden, nog weinig bekend.

$$N = \frac{h_1 - h_2}{c_1} \quad (70)$$

$$q_2 = -k_2 D_2 \frac{dh_2}{dx} \quad (71)$$

$$\frac{dq_2}{dx} = N - v_{z,3} = N + \frac{h_1 - h_2}{c_3} \quad (72)$$

$$q_4 = -k_4 D_4 \frac{dh_4}{dx} \quad (73)$$

$$\frac{dq_4}{dx} = -v_{z,3} = \frac{h_2 - h_4}{c_3} \quad (74)$$

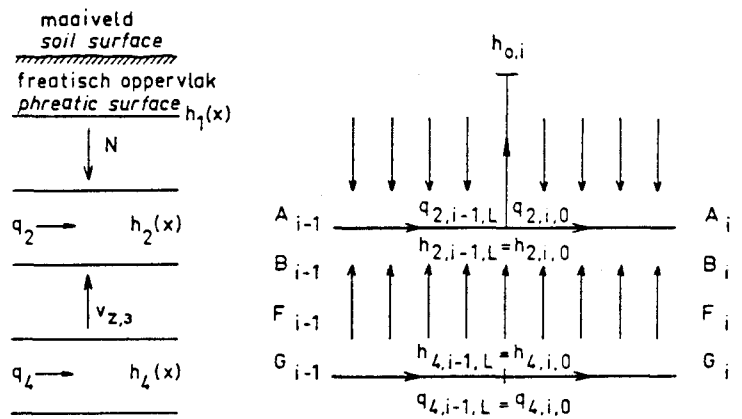
Uit (71) en (72) kan  $q_2$  geëlimineerd worden:

$$\frac{d^2 h_2}{dx^2} = \frac{h_2 - h_4}{k_2 D_2 c_3} - \frac{N}{k_2 D_2} \quad (75)$$



FIG. 18. Schema voor vervanging van de werkelijke stroming door een stroming met horizontale richting in de goed doorlatende lagen en met verticale richting in de slecht doorlatende lagen

*Scheme for replacement of the real groundwater flow by an imaginary flow with a horizontal direction in the high-permeable layers and a vertical direction in the low-permeable layers*



Evenzo kan  $q_4$  geëlimineerd worden uit (73) en (74):

$$\frac{d^2 h_4}{dx^2} = \frac{h_4 - h_2}{k_4 D_4 c_3} \quad (76)$$

Uit (75) en (76) kan door aftrekken een nieuwe differentiaalvergelijking verkregen worden, waarin alleen  $h_2 - h_4$  als onafhankelijke variabele voorkomt. Hieruit kan  $h_2 - h_4$  opgelost worden met twee integratie-constanten  $A$  en  $B$ . Substitutie van deze uitkomst in (75) en (76) levert op  $d^2 h_2/dx^2$  en  $d^2 h_4/dx^2$  als functies van  $x$ . Hieruit volgen tenslotte de functies  $h_2(x)$  en  $h_4(x)$  met vier integratieconstanten  $A$ ,  $B$ ,  $F$  en  $G$ .

$$h_2 = \frac{a_1}{a} \left( A e^{x\sqrt{a}} + B e^{-x\sqrt{a}} \right) - \frac{Nx^2}{2(k_2 D_2 + k_4 D_4)} + Fx + G \quad (77)$$

$$h_4 = -\frac{a_2}{a} \left( A e^{x\sqrt{a}} + B e^{-x\sqrt{a}} \right) - \frac{Nx^2}{2(k_2 D_2 + k_4 D_4)} + Fx + G - \frac{N}{k_2 D_2 a} \quad (78)$$

Ter bekorting zijn hierin de grootheden  $a$ ,  $a_1$  en  $a_2$  gebruikt, waaronder dient te worden verstaan:

$$\frac{1}{k_2 D_2 c_3} = a_1 \quad \frac{1}{k_4 D_4 c_3} = a_2 \quad a_1 - a_2 = a$$

Na differentiatie volgen  $q_2$  en  $q_4$  onmiddellijk uit (77) en (78). Voor de bepaling van de constanten  $A$ ,  $B$ ,  $F$  en  $G$ , die in elke strook verschillend zijn, zijn zekere randvoorwaarden nodig. Waar strook  $i - 1$  aan strook  $i$  grenst, gelden de volgende vergelijkingen:

$$h_{2,i-1,L} = h_{2,i,0} \quad (79)$$

$$h_{4,i-1,L} = h_{4,i,0} \quad (80)$$

$$q_{2,i-1,L} = q_{2,i,0} + \frac{1}{w_i} (h_{2,i,0} - h_{0,i}) \quad (81)$$

$$q_{4,i-1,L} = q_{4,i,0} \quad (82)$$

Links van de eerste strook en rechts van de laatste strook zijn ten slotte nog bijzondere randvoorwaarden nodig (in dit geval 4) evenals bij het asymmetrische probleem met 1 goed doorlatende laag. Wordt bijvoorbeeld aan deze randen symmetrie verondersteld, dan is het nodig bij  $n$  open leidingen uit  $4(n - 1)$  vergelijkingen van de eerste graad de onbekenden  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $F_i$  en  $G_i$  op te lossen. Hoewel in principe zeer goed uitvoerbaar, kan de grote hoeveelheid rekenwerk hieraan verbonden een bezwaar zijn voor praktische toepassing.

Onder  $w_i$  [zie vergelijking (81)] wordt verstaan de radiale weerstand van leiding  $i$  als de laag volgend op de eerste goed doorlatende laag ondoorlatend zou zijn. Deze aanname is niet geheel juist en vooral bij lage  $c_1$  en  $c_3$  zal in de vierde laag onder elke open leiding een vrij belangrijke radiale stroming kunnen voorkomen. Ook de aanname, dat in de slecht doorlatende lagen alleen een verticale stroming kan voorkomen, is onjuist. Bij de voorgestelde oplossingsmethode voor het 3- en 4-lagen-probleem worden bepaalde richtingen aan de stroming voorgeschreven, hetgeen feitelijk niet geoorloofd is, tenzij bewezen kan worden, zoals bij het 1-laags-probleem en bij het 2-lagen-probleem door een ontleding van de stroming in verschillende componenten, dat dit juist is of tenminste een voldoende benadering vormt.

Bij symmetrische drainage behoeft uit de vergelijkingen (70) ... (82) slechts 1 stel constanten  $A$ ,  $B$ ,  $F$  en  $G$  opgelost te worden om tot de volgende formule voor het hoogteverschil in de grondwaterspiegel te komen.

$$\frac{\Delta h}{N} = \frac{D^*}{k_1} + \frac{a_1 c_3}{8a} \left( a_2 L^2 + \frac{4a_1 L}{\sqrt{a}} \operatorname{tgh} \frac{L\sqrt{a}}{4} \right) + Lw \quad (83)$$

De nauwkeurigheid van deze formule is aan een klein aantal relaxatie-figures getoetst. Een voorbeeld hiervan vindt men in figuur 19. In de veronderstelling dat de fout in de relaxatie-figures te verwaarlozen zou zijn, volgde uit 6 steekproeven (extreme waarden voor  $k_i$  zich verhoudend als 1:30; laagdikten  $D_i$  slechts weinig uit-

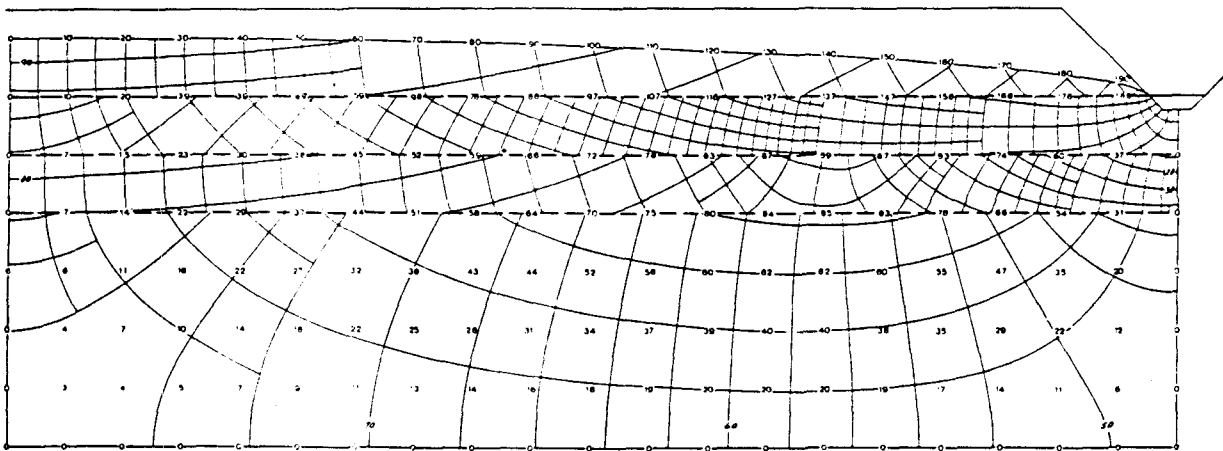


FIG. 19. Symmetrische drainage in een watervoerend pakket bestaande uit vier horizontale lagen ( $k_1:k_2:k_3:k_4 = 1:10:1:10$ ). Voor de betekenis van de getallen, zie fig. 9  
*Symmetrical drainage in an aquifer consisting of four horizontal layers ( $k_1:k_2:k_3:k_4 = 1:10:1:10$ ). For the explanation of the numbers, see fig. 9*

enlopend) als middelbare fout in  $\Delta h$  volgens (83) een waarde van 7%. Een dergelijke grootte-orde van de fout is voor praktische toepassingen zeker aanvaardbaar. Onder afwijkende omstandigheden moeten grotere fouten echter niet uitgesloten geacht worden.

*f. Drainage van een rechthoekig perceel door een pakket met een of twee lagen van constante dikte*

In dit tweede hoofdstuk werd tot nu toe verondersteld, dat alle open leidingen evenwijdig zouden zijn. De werkelijke toestand is in het algemeen afhankelijk van topografische en geologische omstandigheden en daardoor veel onregelmatiger. In de praktijk blijkt, dat het meestal wel aanvaardbaar is bij benadering tot een tweedimensionale afbeelding over te gaan. Bij de ontwatering door twee stelsels evenwijdige open leidingen, die onderling loodrecht op elkaar staan en eventueel met in elk stelsel een constante afstand (respectievelijk  $L_1$  en  $L_2$ ), is een dergelijke vereenvoudiging niet nodig, daar een betere oplossing bekend is.

Indien bij een homogeen pakket de laagdikte  $D$  variabel is, dan is het bedoelde probleem alleen op de volgende manier oplosbaar, als gesteld mag worden, dat de radiale weerstand gelijk nul en de stroomrichting horizontaal is. Voert men namelijk een nieuwe onafhankelijke variabele in door  $h^2$  (waarbij  $h$  gemeten wordt vanaf de ondoorlatende laag) te vervangen door  $\zeta$ , dan ontstaat opnieuw als toestandsvergelijking de differentiaalvergelijking van Poisson ( $\partial^2 \zeta / \partial x^2 + \partial^2 \zeta / \partial y^2 = -2N/k$ ). Uit een gegeven functie voor  $h$  langs de rand van het beschouwde gebied volgt onmiddellijk, dat dan ook  $\zeta = h^2$  langs de rand gegeven is. De flux kan bij deze transformatie als invariant worden beschouwd.

Indien de radiale weerstand  $w = 0$ , dan moet als voorwaarde gesteld worden, dat  $D$  constant is. Wordt vervolgens voor  $N$  een constante waarde aangenomen onafhankelijk van  $x$  en  $y$ , dan kan de oplossing van dit probleem in wiskundig opzicht gelijk gesteld worden aan dat van de warmtegeleiding in een rechthoekige staaf met constante warmteproductie per volume-eenheid en met een warmte-uitstraling evenredig met het verschil tussen de oppervlaktetemperatuur en een gegeven temperatuur in de omgeving (zie bijvoorbeeld CARSLAW and JAEGER, 1959, pag. 170).

Op de plaats waar twee open leidingen elkaar loodrecht snijden, kan uit overwegingen van de symmetrie worden afgeleid, dat er twee verticale stroomvlakken zijn, welke hoeken van 45 graden maken met de assen van de open leidingen. Dit leidt tot de conclusie, dat het gebruik van radiale weerstanden, waarvan de nauwkeurigheid in een loodrechte doorsnede op een enkele open leiding aan een grondige beschouwing werd onderworpen (zie behalve hoofdstuk II.1 ook hoofdstuk II.2), in dit geval feitelijk opnieuw op zijn toelaatbaarheid zou moeten worden onderzocht. Indien de twee open leidingen hetzelfde peil hebben, zal men dicht bij het snijpunt van de assen lage waarden voor  $q_0$  vinden en kan het genoemde effect niet van grote betekenis zijn. Heeft men echter met peilverschillen te doen, dan moeten vooral de bodemoppervlakken van de open leidingen, waar deze elkaar met een verschillend peil mogelijk heel dicht naderen (een afstand nul is in de praktijk uitgesloten) van grote invloed

zijn. Onderzoek met drie-dimensionale modellen zou voor dit probleem een oplossing kunnen geven.

Afgezien van deze moeilijkheid en voor het geval dat alle drainerende leidingen hetzelfde peil hebben, wordt de afleiding van de oplossing in het kort hier weergegeven. De gevraagde oplossing  $h(x, y)$  wordt gelijk gesteld aan de som van twee deeloplossingen  $h'(x, y)$  en  $h''(x, y)$ , waarbij  $h'(x, y)$  van zeer eenvoudige vorm is, maar voldoet aan de gegeven  $N = 0$ , terwijl  $h''(x, y)$  een iets ingewikkelder vorm moet hebben, maar slechts behoeft te voldoen aan  $N = 0$ .

$$h'(x, y) = NL_1w + \frac{NL_1^2}{8kD} \left(1 - \frac{4x^2}{L_1^2}\right) \quad (84)$$

$$h''(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n \cosh \frac{2\pi y}{\lambda_n} \cos \frac{2\pi x}{\lambda_n} \quad (85)$$

De waarden van  $a_n$  en  $\lambda_n$  moeten met behulp van de volgende twee randvoorwaarden opgelost worden:

$$h'' \left( \pm \frac{L_1}{2}, y \right) \pm 2kDw \left( \frac{\partial h''}{\partial x} \right)_{\pm \frac{L_1}{2}, y} = 0 \quad (86)$$

$$h'' \left( x, \pm \frac{L_2}{2} \right) \pm 2kDw \left( \frac{\partial h''}{\partial y} \right)_{x, \pm \frac{L_2}{2}} = -NL_1w - \frac{NL_1^2}{8kD} \left(1 - \frac{4x^2}{L_1^2}\right) \quad (87)$$

Uit (85) en (86) volgt:

$$\cotg \frac{\pi L_1}{\lambda_n} = \frac{4kDw}{L_1} \frac{\pi L_1}{\lambda_n} \quad (88)$$

Vergelijking (88) heeft oneindig veel wortels voor  $\lambda_n$ . Door grafisch uitzetten ziet men onmiddellijk in, dat er in elk interval  $[L_1/n; L_1/(n-1)]$  een wortel voor  $\lambda_n$  moet zijn. Een tabel met de voor de praktijk belangrijke waarden van  $\lambda_n$  kan men vinden in het bekende handboek van Carslaw en Jaeger over de warmtegeleiding in vaste stoffen. (CARSLAW and JAEGER, 1959, pag. 492).

Uit (85), (87) en (88) moeten nu de coëfficiënten  $a_n$  opgelost worden. Volgens de bekende methode der Fourieranalyse vindt men:

$$a_n = \frac{-N\lambda_n^4 \sin \frac{\pi L_1}{\lambda_n}}{4\pi^3 kD \left( \lambda_n \cosh \frac{\pi L_2}{\lambda_n} + 4\pi kDw \sinh \frac{\pi L_2}{\lambda_n} \right) \left( L_1 + \frac{\lambda_n}{2\pi} \sin \frac{2\pi L_1}{\lambda_n} \right)} \quad (89)$$

De voorgaande afleiding geldt alleen voor gebieden met een rechthoekige rand. Bij afwijkende randvorm kan men een speciaal probleem oplossen door een model,

een numerische of een grafische methode. Maakt men gebruik van een electrolytisch model, dan heeft dit het voordeel, dat de derde dimensie niet verwaarloosd behoeft te worden. Bij de relaxatie-methode verdient dit daarentegen wel aanbeveling: de horizontale stroming beschouwt men als in een horizontaal plat vlak te gebeuren; voor de radiale stroming neemt men een verticaal oppervlak aan met een hoogte evenredig aan  $w$ , wat dus eventueel een gebogen oppervlak kan zijn, maar in ieder geval met verticale beschrijvende lijnen. Waar horizontaal en verticaal oppervlak elkaar snijden, moet in een vlak loodrecht op de snijlijn voldaan worden aan (67), waarbij voor  $L_{i-1}$  en  $L_i$  de afstanden tot de dichtstbijzijnde roosterpunten moeten worden genomen. Ook bij meer dan 2 lagen kunnen modelonderzoek en relaxatiemethode gebruikt worden.

#### *g. Algemene beschouwing van de stationaire symmetrische drainage*

Bij de in dit hoofdstuk uitgevoerde berekeningen van stationaire toestanden werden vrijwel steeds twee voorwaarden aangenomen. De eerste voorwaarde was dat de laagdikten ( $D_1$  eventueel vermeerderd met  $\Psi_0$ ) bij benadering als constant aangenomen zouden mogen worden. Dit maakt het mogelijk uit twee of meer willekeurig voor het zelfde gebied gegeven, onafhankelijke oplossingen door samenstelling van lineaire combinaties tot nieuwe bijzondere oplossingen te komen. Als tweede voorwaarde werd aangenomen:  $D/L_i < 0.5$ . Alleen dan is het toegestaan met radiale weerstanden te werken. Indien de vorm van de grondwaterspiegel sterk van een horizontaal oppervlak afwijkt, is de invoering van radiale weerstanden in principe nog wel mogelijk. De weerstanden zijn dan echter niet als constant te beschouwen en de afgeleide formules niet meer met dezelfde nauwkeurigheid geldig. Bij praktische toepassingen kan het gebruik van radiale weerstanden belangrijk zijn, daar hiermede in eerste benadering de invloed van een open leiding, voor zover deze afhankelijk is van de afmetingen en van de bodemgesteldheid en onafhankelijk van het feit of deze leiding draineert of dat water uit deze leiding wegzijgt, kan worden uitgedrukt door een enkele karakteristieke grootheid.

Beschouwt men het peil van de open leidingen als constant, dan is er onafhankelijk van deze voorwaarden, een eenduidig verband tsssen het niveau van het hoogste punt van het freatisch oppervlak en de overtollige neerslag. Indien de weerstanden constant zijn, is dit verband lineair:

$$\Delta h = NW \quad (90)$$

De grootheid  $W$  zou kunnen worden genoemd de 'totale weerstand' van het (symmetrische) drainage-systeem. Volgens de formules (33) en (83) kan  $W$  gelijk gesteld worden aan de som van drie termen, welke respectievelijk als verticale, horizontale en radiale weerstand kunnen worden beschouwd.

Bij van  $x$  afhankelijke laagdikten met  $D_0 = 0$  zijn de formules (57) en (63) afgeleid en daaruit volgen respectievelijk:

$$\Delta h = \sqrt{N} \times \text{constante} \quad (91)$$

$$\Delta h = \sqrt[3]{N} \times \text{constante} \quad (92)$$

De eenduidigheid in het verband tussen  $h$  en  $N$  geldt ook als het peil van de open leidingen alleen afhankelijk is van de afvoer  $q_0$ , bijvoorbeeld volgens formule (93), waarin  $\alpha$  een empirische constante voorstelt.

$$B_h = \sqrt{\alpha NL} \quad (93)$$

Naast de formules (90), (91) en (92) zou men de volgende formule kunnen plaatsen. Hierbij wordt voor het eerst rekening gehouden met de variabele  $B_h$ , waardoor  $w$  niet constant hoeft te zijn, zelfs al zou de grondwaterspiegel onder alle omstandigheden vrijwel horizontaal zijn.

$$h(0) = B_h + \Delta h = \sqrt{\alpha NL} + NLw + \frac{NL}{8 \left\{ \sum_{i=2}^n k_i D_i + k_1 \left( D_0 + \frac{B_h - h(0)}{2} \right) \right\}} + \frac{Nh(0)}{k_1} \quad (94)$$

Figuur 20 geeft een voorbeeld van het verband tussen  $h(0)$  en  $N$ , zoals dit volgens formule (94) zou moeten zijn. De gebruikte waarden van  $w$  zijn uitkomsten van de formules (41) en (53), waaraan bovendien nog een kleine correctie is toegevoegd met behulp van figuur 28 (zie hoofdstuk II.2). Veldmetingen ter bepaling van dit verband

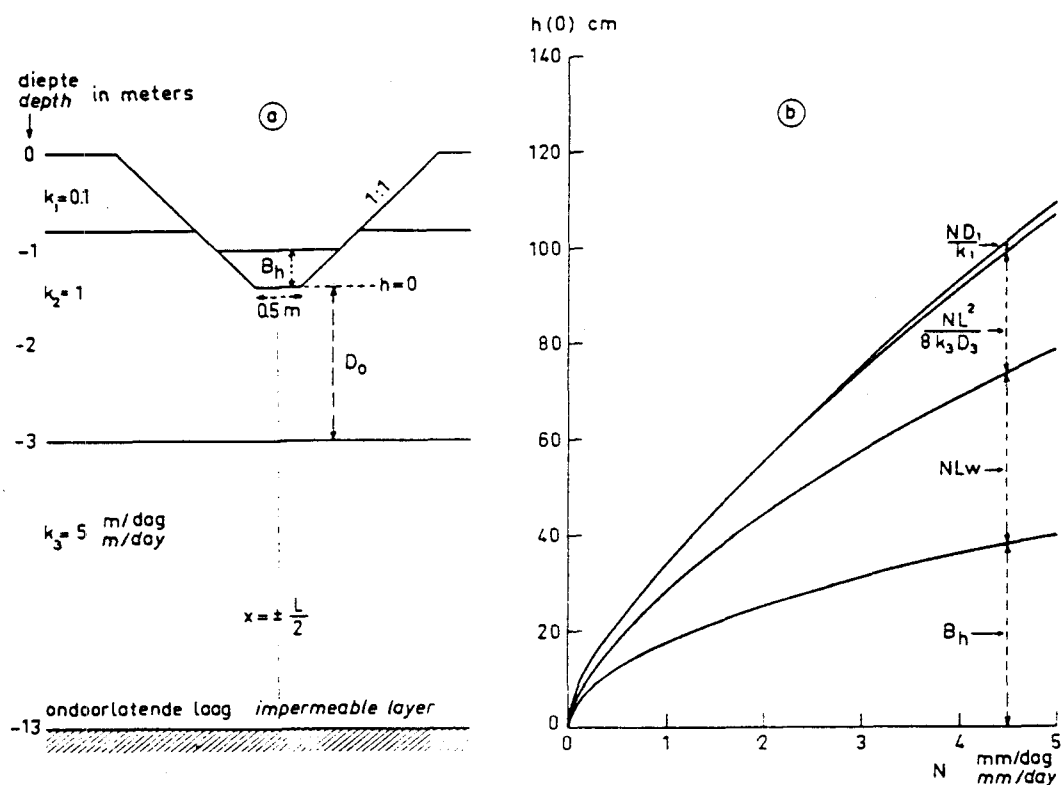


FIG. 20. Toepassing van formule (94) op toestand a met  $L = 150$  m geeft een verband tussen  $h(0)$  en  $N$  als afgebeeld in de grafische voorstelling b  
*Application of (94) on situation a with  $L = 150$  m, leads to the relation between  $h(0)$  and  $N$  as represented in graph b*

zijn niet bekend en vermoedelijk niet uitgevoerd, daar in de praktijk bij hoge grondwaterstanden de toestand meestal duidelijk niet-stationair is. Behalve de overtollige neerslag, het peil in de open leidingen en de grondwaterstanden in meerdere buizen met filters op verschillende diepte zou ook de afvoer gemeten moeten worden. Een volledig resultaat kan slechts worden verkregen door een gelegenheid af te wachten waarop deze metingen in de winter aan het einde van een lange periode met hoge  $N$  en hoge  $h$  uitgevoerd kunnen worden. In het onderhavige theoretische voorbeeld zijn de afmetingen van de sloot en de dikten en doorlatendheden van de verschillende lagen in grootte-orde gelijk aan wat in de Nederlandse praktijk veel voorkomt.

Uit figuur 20 volgt dan, dat de bovenste kromme met goede benadering voorgesteld kan worden door  $h = 108 N^{0,72}$ . Deze uitkomst voor de exponent komt in grootte-orde overeen met de exponenten van de formules (90), (91) en (92). Een variabele exponent is echter voor verdere toepassingen minder gewenst. Een vrijwel even goede benadering kan men in het algemeen verkrijgen met een empirische formule van de volgende vorm [zie ook de formules (64) en (66)]:

$$q_0 = NL = \frac{h(0)^2}{\gamma_2} + \frac{h(0)}{\gamma_1} \quad (95)$$

In dit hoofdstuk werd de stroming in de zone met onderdruk steeds buiten beschouwing gelaten, omdat in de meeste gevallen de invloed relatief gering is of zonder grote moeite (invoering van de  $\Psi_0$ -laag, zie pag. 5) in de berekening kan worden opgenomen. Het is echter duidelijk, dat er ook gevallen zijn, waarbij de verzadigingsgraad een bijzondere invloed op de stroming heeft. Dit vindt men vooral bij een dunne goed doorlatende laag aan het oppervlak, waaronder op geringe diepte een eveneens dunne slecht doorlatende laag ligt. Tijdens een vrij korte periode met sterke neerslag zal de bovenste laag eerder de verzadiging bereiken dan de er onder liggende laag en daardoor naar verhouding meer bijdragen tot de afvoer dan later, wanneer het gehele pakket de verzadigde toestand kan bereiken. Onder deze omstandigheden zou men dus twee stromingscomponenten onafhankelijk van elkaar moeten beschouwen en wel een horizontale stroming door de ondiepe goed doorlatende laag, waarop zowel de doorlatendheid als een eventuele convexe ligging van deze laag van invloed zijn en daarnaast de stroming door diepere lagen, waarop vooral van invloed is de verzadigingsgraad van de slecht doorlatende laag. Bij onderzoek in het veld zou zowel de grondwaterstand  $h_1$  in de bovenste goed doorlatende laag als  $h_3$  in de tweede goed doorlatende laag gemeten moeten worden. Tussen  $h_1$  en  $h_3$  bestaat dan geen eenduidig verband. De verticale stromingsintensiteit in de tussengelegen slecht doorlatende laag kan uit  $h_1$  en  $h_3$  niet worden afgeleid, tenzij de doorlatendheid van deze laag op dezelfde tijd gemeten wordt, ofwel het vochtgehalte  $M$  en de functie  $k(M)$  bekend zijn.

Bij een slecht doorlatende bovenlaag ( $k = 0,01$  tot  $0,03$  m/dag van  $0,5$  tot  $1$  m diepte), komt het in Nederland veel voor, dat greppels (bodemdiepte ongeveer  $0,5$  m onder het gemiddelde maaiveld) gelegen zijn op vrij korte afstand van elkaar ( $10$  tot  $20$  m) tussen diepere sloten (bodemdiepte  $1,0$  tot  $1,5$  m), welke op grotere afstand van elkaar zijn gelegen ( $50$  tot  $100$  m). Op bouwland worden deze greppels vaak ver-

vangen door drainbuizen ten einde een vlakker maaiveld te krijgen; de drainage-toestand verandert hierdoor slechts weinig.

Een dergelijk voorkomen van ongelijkwaardige drainage-leidingen op vrij korte afstand van elkaar is een veel voorkomend verschijnsel. Het is gewoonte deze leidingen ter onderscheiding aan te duiden als primaire en secundaire leidingen (zie fig. 21). Bij hoge grondwaterstanden draineren de secundaire leidingen ook en vaak zelfs meer dan de primaire leidingen. Bij lage grondwaterstanden staan de secundaire leidingen droog. Het is duidelijk, dat men onder deze omstandigheden verschillende drainage-formules zal willen gebruiken afhankelijk van het al of niet afvoeren van water door de secundaire leidingen. Bij lage grondwaterstanden behoeft men alleen rekening te houden met de primaire leidingen en kan meestal zonder meer een van (33) of een analoge formule gebruik maken. Bij hoge grondwaterstanden kan men met de asymmetrische toestand rekening houden op de manier, zoals in hoofdstuk II.1d beschreven is. Een iets minder goede benadering krijgt men door in dit geval eenvoudig met dezelfde formule te werken als tevoren, maar hierin een kleinere waarde voor  $L$  en een grotere waarde voor  $w$  te substitueren. Of men tweemaal een formule als (33) toepast, dan wel gebruik maakt van een asymmetrisch dradenschema met constante waarden voor  $h_0$ ,  $i$ , in beide gevallen wordt het grafisch verband tussen  $h$  en  $N$  samengesteld uit rechte lijnstukken (ERNST, 1956).

Het inzicht in de relatief eenvoudige symmetrische toestanden moet van belang worden genoemd, daar de niet-stationaire berekeningen, welke in volgende paragrafen

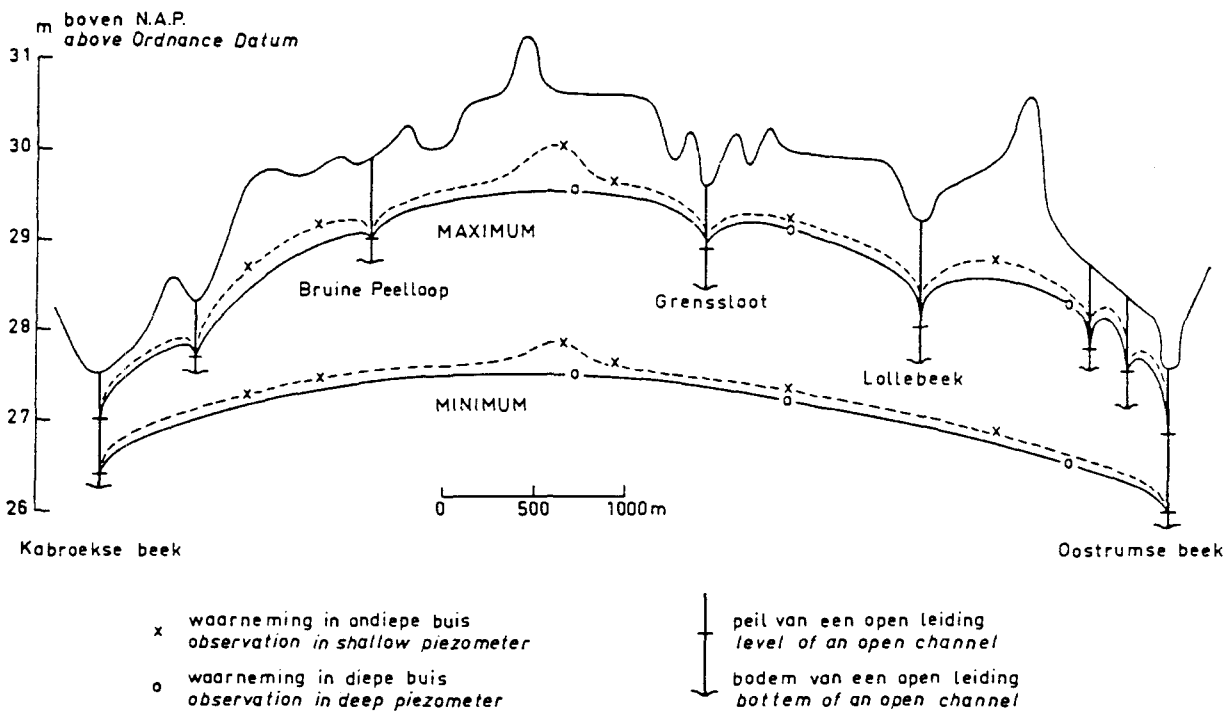


FIG. 21. Maximum en minimum grondwaterstanden tussen de Kabroekse beek en de Oostrumse beek (provincie Limburg) over de jaren 1953-1956  
Maximum and minimum elevation of the water table between two small rivers (Kabroekse beek and Oostrumse beek) over the years 1953-1956



zullen worden beschouwd, voornamelijk tot symmetrische toestanden beperkt zullen blijven. Hoewel een eenduidig verband tussen  $\Delta h$  en  $N$  in vele gevallen aanvaard mag worden, zal het zeer moeilijk zijn dit eenduidige verband voor te stellen door een enkele functie met algemene geldigheid. Afhankelijk van de geologische en topografische toestand zijn in voorafgaande hoofdstukken verschillende formules van eenvoudige vorm afgeleid. Zowel de exponentiële vorm:  $N = \alpha h^\epsilon$  met  $\epsilon$  gelegen tussen 1 en 3, als een kwadratische formule:  $N = h^2/\gamma_2 + h/\gamma_1$ , als een grafische voorstelling opgebouwd uit rechte lijnstukken kunnen als goede benaderingen aanvaard worden.

Indien men bij de berekeningen van niet-stationaire grondwaterstromingen het principe van het superponeren wil handhaven, zal men zich moeten beperken tot toestanden waarbij lineaire functies bruikbaar zijn. Uit de beschouwingen in hoofdstuk III.4 zal bovendien worden afgeleid, dat in principe noch tussen de invoer  $N(t)$  en  $h$ , noch tussen de uitvoer  $q_0(t)$  en  $h$  een eenduidig verband kan bestaan. Of het mogelijk is de oplossing van niet-stationaire toestanden te benaderen door voor elk ogenblik te veronderstellen dat de toestand quasi-stationair is, kan niet zonder nader onderzoek worden uitgemaakt; naarmate snellere veranderingen in de te onderzoeken toestand voorkomen, kan men verwachten dat met dergelijke veronderstellingen slechtere resultaten bereikt worden.

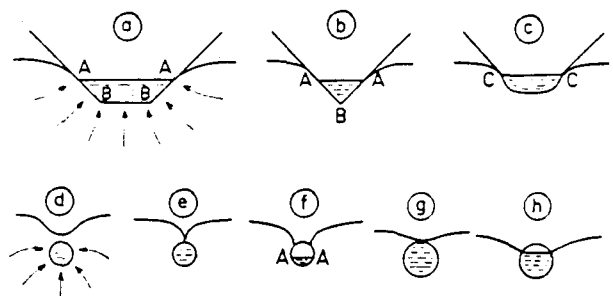
## II.2. DE INVLOED VAN DE VORM VAN DE GRONDWATERSPIEGEL OP DE VLAKKE STROMING IN DE OMGEVING VAN OPEN LEIDINGEN

Er zijn drie redenen, waarom het zin heeft te streven naar een nauwkeurige bepaling van de stroming in de naaste omgeving van drainerende open leidingen. \*)

1. Door de sterke concentratie van stroomlijnen (zie fig. 22) komen op korte afstand relatief grote verschillen in stijghoogte voor. In de praktijk blijkt de radiale

FIG. 22. Enige voorbeelden van stroomlijnen en vorm van de grondwaterspiegel in de naaste omgeving van open leidingen. In deze figuur is aangenomen dat de buizen poreus zijn met eenzelfde doorlatendheid in de wand van de buis als in de grond

*Some examples of the shape of the phreatic surface and the streamlines in the proximity of open conduits. In this figure, it has been assumed that the draitubes are porous and that the wall of the tubes has the same permeability as the soil. The points A and B are singular points in the mathematical solution of the flow pattern (see fig. 25, 26 and (96), (97)). The points C are not singular, owing to the bends in the talus*



\*) Bij open leidingen, waaruit het water ten gevolge van een verhoogd peil wegzijgt, treden vrijwel dezelfde verschijnselen op; meestal is het effect zwakker, hoewel hierop ook uitzonderingen bekend zijn (bij kleine infiltrerende hoeveelheden grote stijghoogteverschillen door grote radiale weerstanden).

weerstand vaak zeer belangrijk te zijn. In het vorige hoofdstuk zijn de formules voor de radiale weerstand afgeleid onder aanneming van een bij benadering horizontaal freatisch oppervlak.

2. Langs de natte omtrek van de open leidingen komen de grootste snelheden voor. In dit gebied zal de stroming dus in de eerste plaats onderzocht moeten worden op afwijkingen van de wet van Darcy.

3. Naarmate de potentiaalgradiënten groter zijn, is de kans groter op verstoringen van de taluds door de zuiging van de grondwaterstroming.

Bij het zoeken van een wiskundige oplossing ontstaat in vele gevallen een bijzondere moeilijkheid door de onbekende vorm van het freatisch oppervlak en door het kweloppervlak. Onder het kweloppervlak verstaat men dat gedeelte van het talud, dat boven de open waterspiegel is gelegen en waardoor water uittreedt. Afwezigheid van een kweloppervlak in het talud van een drainerende leiding is mogelijk bij een overhangend talud (HAMEL, 1934), wat in de praktijk bij open leidingen vermoedelijk zeer zelden voorkomt, echter bij drainbuizen geen uitzondering behoeft te zijn (zie fig. 22f en 22h, resp. met en zonder kweloppervlak).

Verder kan een kweloppervlak bij drainerende open leidingen ontbreken, als een voldoende sterke wateronttrekking door de plantewortels of een directe verdamping uit het talud de radiale stroming versterkt. Een voorbeeld hiervan werd gevonden bij een sloot van het grondwaterstands- en herontginningsproefveld in het Geestmerambacht waar, door een verlaagd peil, ook in de zomer een relatief sterke afvoer voorkomt (zie fig. 23a). Uit metingen, welke hier niet behandeld zullen worden, werd afgeleid, dat de grond hier met een groot aantal lagen van verschillende doorlatendheid is opgebouwd. Uit de verschillen in grondwaterstand volgens buizen met peilfilters op 0,8 en 2,8 meter diepte onder maaiveld en uit bepalingen van de radiale weerstand ( $w = 4$  tot  $8$  dagen/meter) werd als gemiddelde doorlatendheid afgeleid  $0,05$  m/dag. Daar ter hoogte van de grondwaterspiegel een uit korrelige klei bestaande laag voorkomt, werd de  $\Psi_0$ -laag verwaarloosd. De onderzochte stroming loopt voornamelijk door een laag bestaande uit zeer fijn zand met dunne sliblaagjes, om welke reden werd aangenomen, dat de horizontale en de verticale doorlatendheid zich verhouden als ongeveer 2:1.

Uit de grondwaterstandswaarnemingen over juli 1960 volgt voor  $v_1$  op 0,5 en 3 m afstand van de rand van de waterspiegel in de sloot respectievelijk 4 en 1 mm/dag, welke waarden bij aanhoudend droog weer in de zomer wel aannemelijk zijn. De grootte van het kweloppervlak volgens de waarnemingen in november 1960 (zie fig. 23b met 1,5 mm/dag als overtollige neerslag) komt met voldoende nauwkeurigheid overeen met hetgeen uit fig. 28 kan worden afgeleid.

Voor twee drainage-toestanden zijn exacte twee-dimensionale oplossingen bekend met op de juiste manier gebogen freatische oppervlakken (ROSSBACH, 1941; VAN DEEMTER, 1950). De oplossingen van Rossbach veronderstellen een toestroming vanuit het oneindige met constante stroomsterkte; Van Deemter geeft gelijksoortige op-

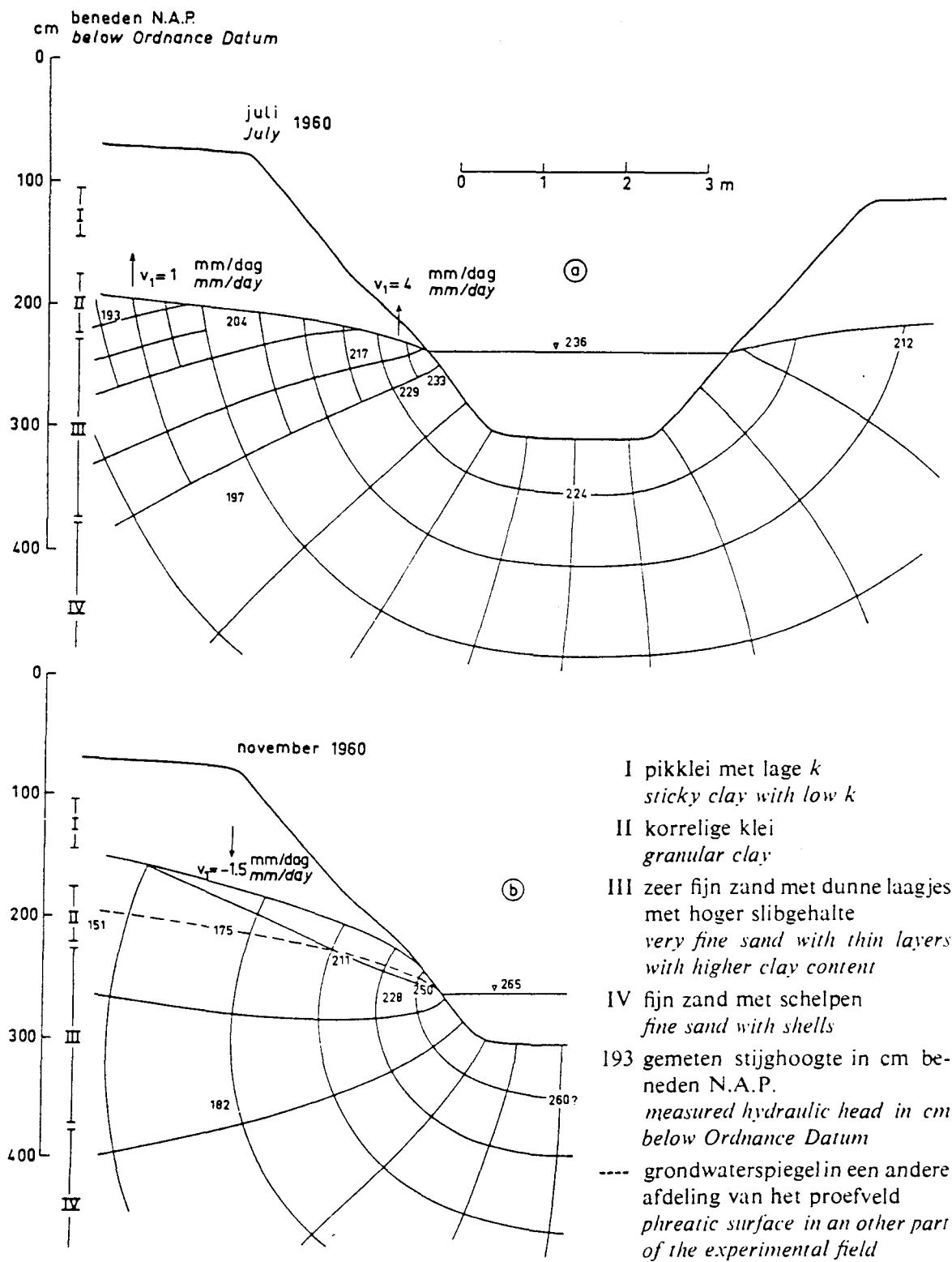


FIG. 23. Vorm van het freatisch oppervlak met stroomlijnen en equipotentiaallijnen in de nabijheid van een drainerende sloot in het ontwaterings- en herontginningsproefveld in het Geestmerambacht (provincie Noord-Holland)  
*Shape of the phreatic surface with streamlines and equipotential lines in the proximity of a draining ditch in the experimental field for drainage and reclamation in Geestmerambacht*

lossingen voor het symmetrische drainage-probleem. Om deze afleidingen mogelijk te maken, moesten echter de volgende twee voorwaarden aangenomen worden:

1. een constante doorlatendheid tot oneindig grote diepte,
- 2a. een puntvormig drainage-centrum (lijn loodrecht op het vlak van afbeelding) met potentiaal  $-\infty$ , ofwel in plaats van deze voorwaarde:
- 2b. een sloot met kweloppervlakken in de verticale taluds en een waterspiegel samen-vallend met de bodem.

Een bezwaar van de oplossingen van Rossbach en Van Deemter is, dat de omstan-digheden in de praktijk van deze voorwaarden sterk kunnen afwijken (zie fig. 22). Om met deze afwijkingen rekening te houden zou men dus moeten omzien naar andere methodes, waarmee bijzondere oplossingen van de differentiaalvergelijking van Laplace gegeven kunnen worden. Een grafische methode, waarbij gebruik wordt gemaakt van lijnen met constante stroomrichting en lijnen met constante snelheid, blijkt bij wat moeilijker problemen zeer tijdrovend te zijn (BREITENÖDER, 1942) en werd daarom niet toegepast. Dachler beveelt voor dergelijke problemen modelonder-zoek aan, of de vierkantjes-methode met toepassing van bijzondere oplossingen in de singuliere punten (DACHLER, 1936).

In gevallen als hierboven aangeduid zou men ook gebruik kunnen maken van de differentie-methode, welke als relaxatie-methode bekend is en onder andere door Southwell en medewerkers werd toegepast op een groot aantal verschillende pro-blemen (zie bijv. SOUTHWELL, 1946). Bij deze methode begint men in het algemeen met een ruwe schatting van de gevraagde functie door in het gegeven gebied het ver-loop van de stroomlijnen en (of) de equipotentiaalijnen te schetsen. Vervolgens worden de geschatte functiewaarden gecorrigeerd aan de hand van de differentie-vergelijking. Om het resultaat van deze numerieke bewerking te controleren tracht men aan de gevonden stroomlijnen een aantal equipotentiaalijnen (of omgekeerd) zodanig toe te voegen, dat een bevredigend orthogonaal stelsel ontstaat.

Bij de vierkantjesmethode gaat men van dezelfde ruwe schatting uit als bij de relaxatie-methode, maar tracht deze eerste benadering uitsluitend op het gevoel te ver-beteren na een beschouwing van de vorm van het netwerk. De soms langdurige nume-rieke bewerking, die bij de relaxatie-methode het grootste deel van het werk uitmaakt, wordt hierbij dus overgeslagen. De naam vierkantjesmethode is niet geheel be-vredigend, daar in sommige punten slechts bij een zeer fijne indeling een redelijke benadering van vierkantjes verkregen kan worden. In Engelstalige landen duidt men deze methode zowel aan met 'sketching of squares' als met 'flow net construc-tion'.

Indien men over enige ervaring beschikt, heeft de vierkantjesmethode bij de op-lossing van grondwaterstromingen in een homogeen pakket het voordeel belangrijk minder tijd te kosten dan de relaxatie-methode. Om deze reden werd zowel in dit hoofdstuk als in de hoofdstukken III.2 en III.3 van de vierkantjesmethode gebruik gemaakt.

Over de nauwkeurigheid, welke met deze probeer-methode in de praktijk bereikt

kan worden, was tot nu toe weinig bekend. Om hiervan een betere indruk te krijgen werd het principe uiteengezet aan vier proefpersonen, die met de methode onbekend waren. Vervolgens hebben deze personen zelfstandig verschillende vierkantjesfiguren gemaakt van grondwaterstromingen, waarvan een exacte oplossing bekend was. Hieruit is gebleken, dat een ruime ervaring in de tekentechniek en een zeker inzicht in de natuurkundige grondslagen van het probleem wel gewenst zijn. Na een aanlooperperiode van enkele dagen, afhankelijk van de gekozen, vrij eenvoudige, problemen en van de zorg en de tijdsduur welke per figuur besteed werden, bleven voor de praktijk toelaatbare fouten in de geconstrueerde figuren over, variërend tussen 3 en 10% van de te bepalen grootte (bijv. van de radiale weerstand van een open leiding in een homogeen profiel, of van  $k/N$  in een geval van symmetrische drainage eveneens in homogene grond bij gegeven  $\Delta h$  ter controle van formule (33)). De auteur heeft deze zelfde figuren uitgevoerd, echter in een veel sneller tempo (tijdsduur per figuur 20 minuten tot 2 uur) en daarbij fouten overgehouden variërend van 2 tot 7%.

Figuur 24 geeft een voorbeeld van twee grondwaterstromingen, welke met de vierkantjesmethode bepaald zijn. In figuur 24a is een horizontale grondwaterspiegel aangenomen en na uittellen van stroomlijnen en equipotentiaallijnen volgt  $kw = 0,52$ . Formule (41) geeft als uitkomst  $kw = 0,53$ . De uitkomst van de vierkantjesmethode is in dit geval dus geheel bevredigend. Figuur 24b werd gebruikt om een indruk te krijgen van de invloed, die een gebogen vorm van het freatisch oppervlak en de stroming door de verzadigde zone met onderdruk op de grootte van de radiale weerstand kunnen hebben. Uit figuur 24b met  $\Psi_0/B = 0,17$  (bijvoorbeeld  $B = 1,9$  m;  $\Psi_0 = 0,32$  m) werd afgeleid  $kw = 0,43$ . Dergelijke verschillen kunnen ongetwijfeld bij praktische toepassingen van belang zijn. De laagdikte, welke in de figuren 24a en

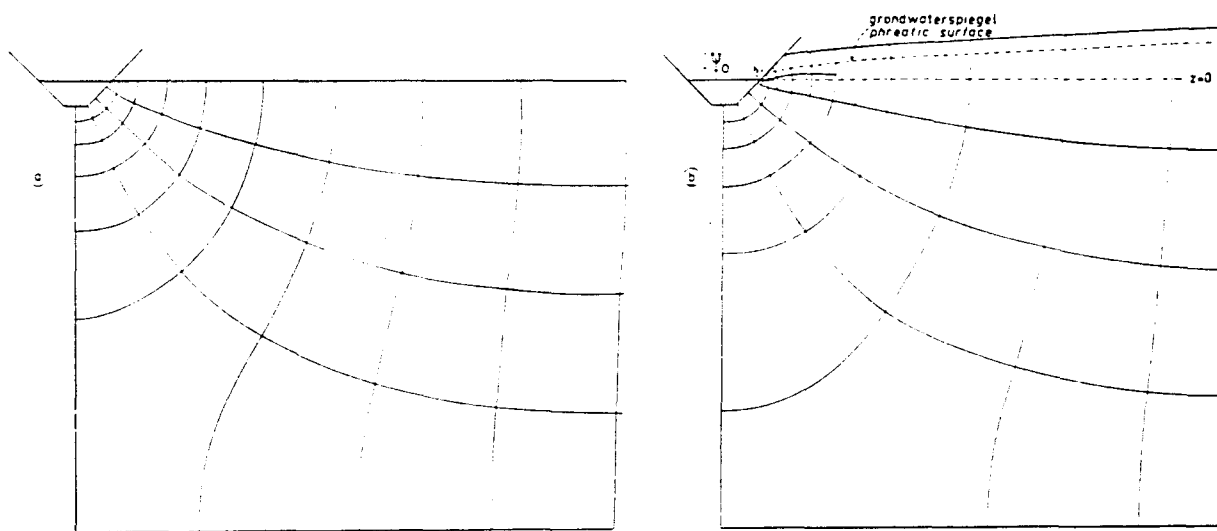


FIG. 24. Voorbeeld van de invloed van de vorm van het freatisch oppervlak en van de dikte van de verzadigde laag met onderdruk op de grootte van de radiale weerstand

*Example of the influence of the shape of the phreatic surface and the thickness of the saturated zone with sub-atmospheric pressure on the magnitude of the radial resistance*

- |                      |             |
|----------------------|-------------|
| a: $\Psi_0 = 0$      | $kw = 0,52$ |
| b: $\Psi_0/B = 0,17$ | $kw = 0,43$ |

24b volledig werd afgebeeld is van minder belang evenals een eventuele variatie in doorlatendheid met de diepte, om welke reden bij de beschouwingen op deze en volgende pagina's (zie fig. 25, 26 en 27) alleen de stroming in een homogeen doorlatende, kleine omgeving van de open leidingen werd betrokken. Uit het kleine verschil in de radiale weerstanden, volgens de figuren 27a en b in vergelijking met de figuren 24a en b, kan afgeleid worden dat de waarde van  $q_0/kB$  (zie ook fig. 28d) van meer invloed is dan de waarde van  $\Psi_0/B$ .

Voor de bestudering van de stroming, welke in de omgeving van een hoekpunt van de bodem door een open leiding gedraineerd wordt (zie de punten B in fig. 22), mag men met zeer goede benadering aannemen dat de grondwaterspiegel horizontaal is. Ook bij deze randvoorwaarden wordt de oplossing van de differentiaalvergelijking van Laplace nog vrij ingewikkeld wegens het voorkomen van elliptische integralen. Voor de naaste omgeving van een dergelijk hoekpunt kan men nog verder vereenvoudigen en een redelijke benadering verkrijgen met de volgende complexe functie (DACHLER, 1936, pag. 83), waarin  $C$  een positieve reële constante voorstelt:

$$\omega = -iC(-\zeta)^{\frac{\pi}{\beta}} \quad (96)$$

Dat voor  $\zeta = 0$  een oneindig grote snelheid zou moeten bestaan, volgt uit (96) als  $\beta > \pi$ . Dit kan ook uit figuur 25 worden afgeleid door een steeds fijnere verdeling van het netwerk in de omgeving van het hoekpunt toe te passen. Door Hamel werd echter aangetoond, dat wegens (5) geen oneindig grote snelheden mogelijk zijn (HAMEL, 1934).

Voor het singuliere punt aan de onderzijde van het kweloppervlak is een overeenkomstige behandeling mogelijk. Figuur 26a geeft een voorbeeld van een dergelijke stroming, zoals deze in de praktijk kan voorkomen (zie de punten A in fig. 22). Past men een zodanige draaiing toe dat het talud verticaal wordt en neemt men vervolgens als randvoorwaarden op de negatieve  $z$ -as:  $\varphi = \text{constante}$  en op de positieve  $z$ -as:  $\varphi = \text{constante} + kz \sin \alpha$ , dan vindt men door conforme afbeelding met behulp van complexe functies via een oneindig lange evenwijdige strook in het hodograafvlak als oplossing:

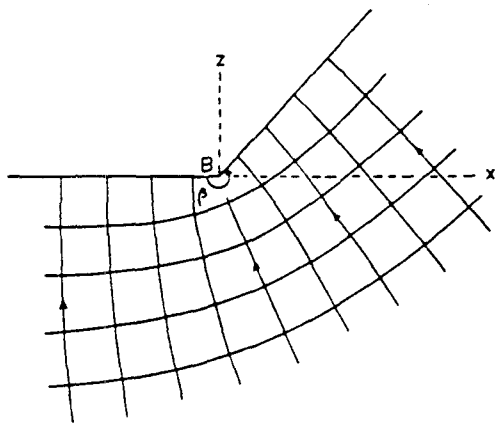


FIG. 25. Stroming in de omgeving van een hoekpunt in de bodem van een open leiding. Afbeelding volgens formule (96) in het complexe vlak  
*Flow in the vicinity of an angular point in the bottom of an open conduit. Representation according (96) in the complex plane*

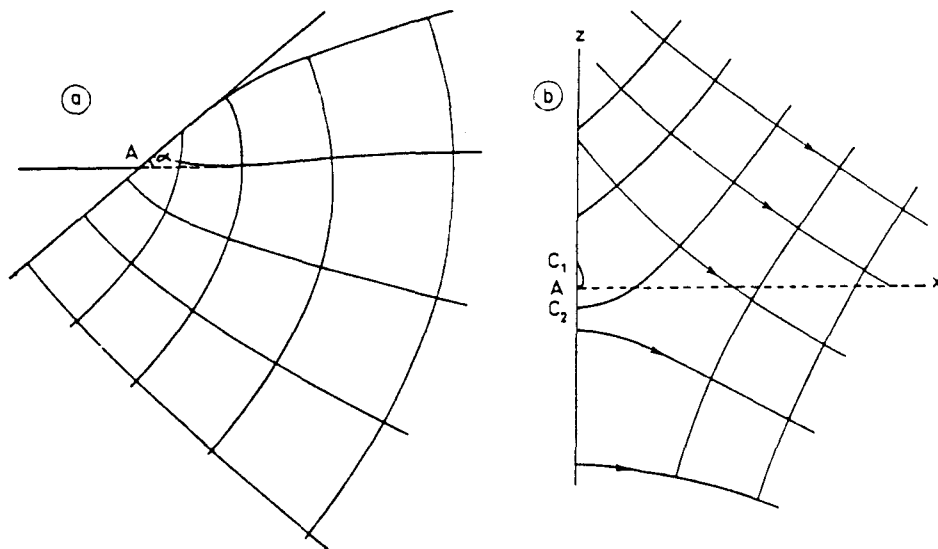


FIG. 26. Strooming in de omgeving van het kweloppervlak. a. Stroomlijnen en aequipotentiallijnen verkregen met de vierkantjesmethode; b. Formule (97) afgebeeld in het complexe vlak. Na een draaiing over  $90^\circ - \alpha$  wordt de oriëntatie gelijk aan die in a. Het gebied dat met a overeenkomt blijft ver binnen de punten  $C_1$  en  $C_2$ .

*Flow in the vicinity of the surface of seepage. a. Streamlines and equipotential lines obtained by sketching of squares; b. (97) represented in the complex plane. After rotation over  $90^\circ - \alpha$  the orientation is the same as in a. The area, that agrees with a, stays far inside the points  $C_1$  and  $C_2$ .*

$$\omega = - \frac{k\zeta \sin \alpha}{\pi} \ln \frac{i\zeta}{C} \quad (97)$$

Vermenigvuldiging van  $\zeta$  met het complexe getal  $\exp(3\pi/2 + \alpha)i$  om de juiste oriëntatie te bereiken, heeft in het algemeen weinig zin, maar is zonder principiële moeilijkheden uitvoerbaar. Afgezien van dit verschil in oriëntatie schijnen de figuren 26a en 26b toch nog zeer verschillend te zijn. De oorzaak hiervan is, dat slechts een zeer klein deel van figuur 26b bruikbaar is. Formule (97) geeft voor  $|\zeta/C| < 0.1$  reeds een redelijke overeenkomst, voor  $|\zeta/C| < 0.01$  is de overeenkomst met de strooming naar de omgeving van het snijpunt van open waterspiegel en talud zeer goed.

Uit de vergelijkingen (5), (96) en (97) is af te leiden, dat onder praktisch voorkomende omstandigheden en in een verticale doorsnede gezien, de afmetingen van het gebied waarin afwijkingen van de wet van Darcy voorkomen, zeer klein zijn: bij grof zand ongeveer gelijk aan de korreldiameter. De stabiliteit van de taluds komt veel eerder in gevaar. Een afschuiving van kleine grondmassa's treedt namelijk op als de resultante van het onder-water-gewicht en van de stromingsdruk — grad  $\rho gh$  een hoek maakt met het talud, welke kleiner is dan de hoek van inwendige wrijving  $\gamma$ . Dit laatste volgt uit de wet van Coulomb, welke experimenteel is afgeleid voor de afschuiving van grondmassa's:

$$p_t = p_n \operatorname{tg} \gamma + c \quad (98)$$

met  $p_t =$  tangentiële spanning,  
 $p_n =$  normale spanning,

indien tenminste de cohesie  $c$  klein is, hetgeen bij zandgrond altijd het geval is (KEVERLING BUISMAN, 1940, pag. 141, 154, 293). Of een bepaald punt van het talud instabiel is, kan het eenvoudigste langs grafische weg uit een stroomlijnenfiguur worden afgeleid, mits hierbij de waarde van de inwendige wrijvingshoek  $\gamma$  gegeven is. Alleen in gevallen met uitsluitend horizontale stroomlijnen kan de oplossing direct aangegeven worden (VAN ITERSON, 1916). Voor een beschouwing van de stabiliteit van grote grondmassa's, al of niet onder invloed van de stromingsdruk van het grondwater, wordt verwezen naar de handboeken over grondmechanica.

De formules (96) en (97) geven slechts inzicht in de grondwaterstroming in een relatief zeer klein gebied; alle omstandigheden op iets grotere afstand zijn verwaarloosd. Zoals reeds in het begin van dit hoofdstuk betoogd werd, kan voor het zoeken van oplossingen welke voor een homogeen doorlatend gebied van grotere afmetingen geldig moeten zijn, de vierkantjesmethode wel aanbevolen worden. Fig. 27 geeft hiervan een voorbeeld. Begonnen werd met een bepaalde vorm van de bodem en een zekere breedte voor het kweloppervlak. Dit laatste houdt in, dat de stroomsterkte hiermee is vastgelegd en dus een van de grootheden is, die uit de oplossing moet volgen. Verder werd aangenomen, dat de stroomsterkte constant is (volledig afkomstig uit het oneindige) en aan de onderzijde over een ongeveer cirkelvormige aequipotentialijn gelijkmatig verdeeld binnenkomt. Dat een dergelijke stroomlijnen-

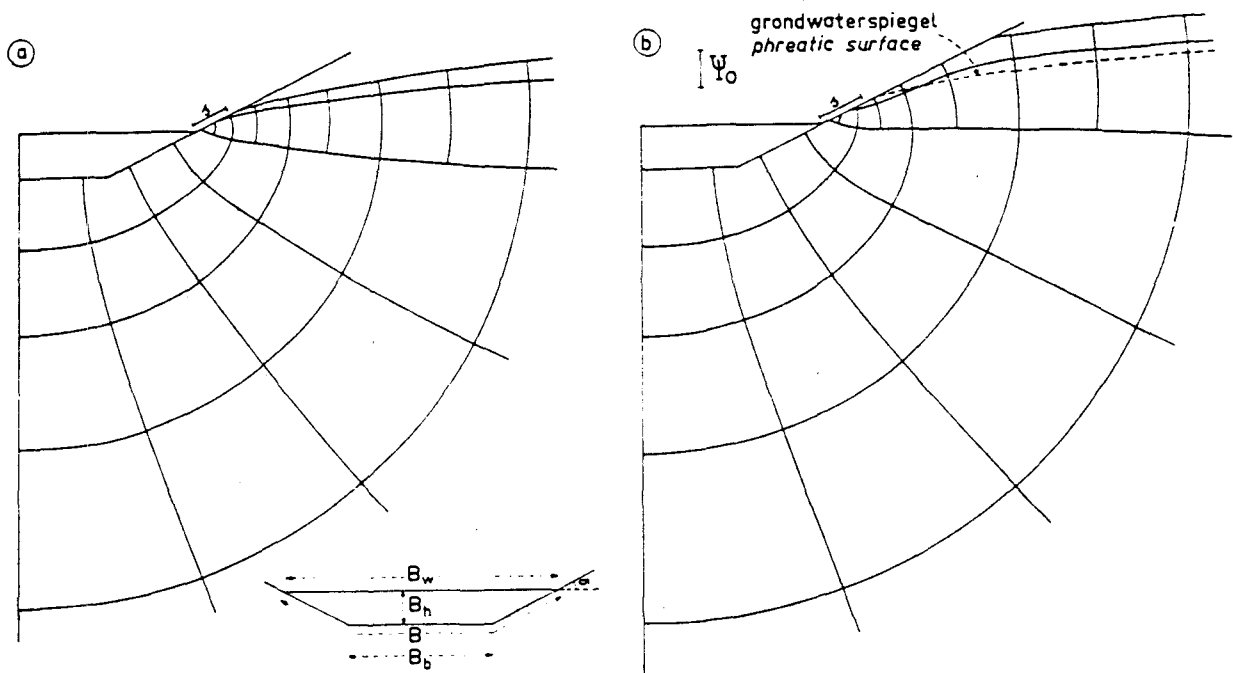


FIG. 27. Grondwaterstroming in de omgeving van een drainerende leiding; stromingsbeelden afgeleid met de vierkantjesmethode. a. De verzadigde zone met onderdruk mag worden verwaarloosd ( $\Psi_0 = 0$ ); b. De verwaarlozing is niet toegestaan  
*Groundwater flow in the surroundings of a draining channel; flow patterns derived by sketching of squares. a. The saturated zone with a sub-atmospheric pressure is neglected ( $\Psi_0 = 0$ ); b. This neglect is not allowed*



figuur slechts gegevens oplevert voor een enkel geval, waarbij aan alle variabelen bijzondere waarden zijn toegekend, is geen bezwaar, daar de afleiding van figuren van deze soort rond 1 uur per figuur kost en dus een zeker aantal herhalingen bij andere randvoorwaarden binnen de bereikbare mogelijkheden ligt. Bij grondwaterstromingsproblemen zoals in figuur 27 afgebeeld, zijn er vier onafhankelijke variabelen, namelijk  $\Psi_0$ ,  $\alpha$ ,  $B_b/B_h$  en  $s/B_h$ . Zou men voor elke onafhankelijke variabele vier geschikte waarden invoeren, dan komt men tot  $4^4 = 256$  mogelijkheden. Om tijd te sparen werd  $\Psi_0 = 0$  genomen, ook voor  $B_b/B_h$  slechts één waarde ( $B_b/B_h = 4$ ) en verder werden voor de helling  $\alpha$  van het talud vier waarden en voor de breedte  $s$  van het kweloppervlak drie waarden genomen.

De resultaten van deze twaalf vierkantjesschetsen zijn afgebeeld in fig. 28. De uitkomsten van de fig. 24 en 27, zoals geplaatst in fig. 28a, wijzen er op, dat de vorm van de open leiding (waarde van  $B_b/B_h$ ) van meer invloed is op het verband tussen  $s/B$  en  $q_0/kB$  dan de waarde van  $\Psi_0/B$ .

Onder de grootte  $w(r, q_0)$ , welke men in de figuren 28b en 28c vindt, wordt verstaan de weerstand, die een stroming met intensiteit  $q_0$  ondervindt tussen een aequipotentiaallijn gelegen op voldoende afstand van de natte omtrek  $B$  en daardoor met voldoende benadering overeenkomend met een halve cirkelboog met straal  $r$  en de open leiding. Daar de vorm van de grondwaterspiegel afhangt van de stroomsterkte  $q_0$ , is het duidelijk dat deze weerstand behalve van  $r$  ook van  $q_0$  afhangt. Door  $r$  te doen variëren boven een zekere minimale grens wordt aan  $w(r, q_0)$  een weerstand  $w'$  toegevoegd, die met goede benadering eenvoudig te berekenen is uit:

$$w' = \frac{1}{\pi k} \ln \frac{r'}{r} \quad (99)$$

Indien de open leiding gelegen is in een homogeen pakket met dikte  $D$  wordt het verband met de radiale weerstand  $w(D, q_0)$  door de volgende formule gegeven. Bij een pakket bestaande uit twee lagen kan met behulp van (53) een analoge formule worden opgesteld:

$$w(D, q_0) = w(r, q_0) + \frac{1}{\pi k} \ln \frac{D}{\pi r} \quad (100)$$

Door nu in plaats van  $w(r, q_0)$  te nemen  $kw(r, q_0) + \pi^{-1} \ln B/\pi r$  krijgt men een grootte, welke de afwijkingen geeft van formule (41) bij vervanging van  $\pi r_0$  door  $B$ , bovendien vrijwel onafhankelijk is van  $r$  en om deze redenen in figuur 28c langs de verticale as is uitgezet. Het is duidelijk, dat deze grafische voorstelling niet voor kleine waarden van  $r$  gebruikt mag worden. Voor  $r/B > 3/2$  vindt men reeds vrij zuiver cirkelvormige aequipotentiaallijnen.

Uit figuur 28d is alleen af te leiden de gemiddelde stromingsdruk op de bodem en de weerstand, die ondervonden wordt door een stroming met op grote afstand radiale symmetrie. Voor bepaling van de stromingsdruk in bijzondere punten, zoals hoekpunt van de bodem of snijpunt van open waterspiegel en talud ter beoordeling van de stabiliteit in deze punten, blijft een nadere beschouwing nodig, waarbij rekening

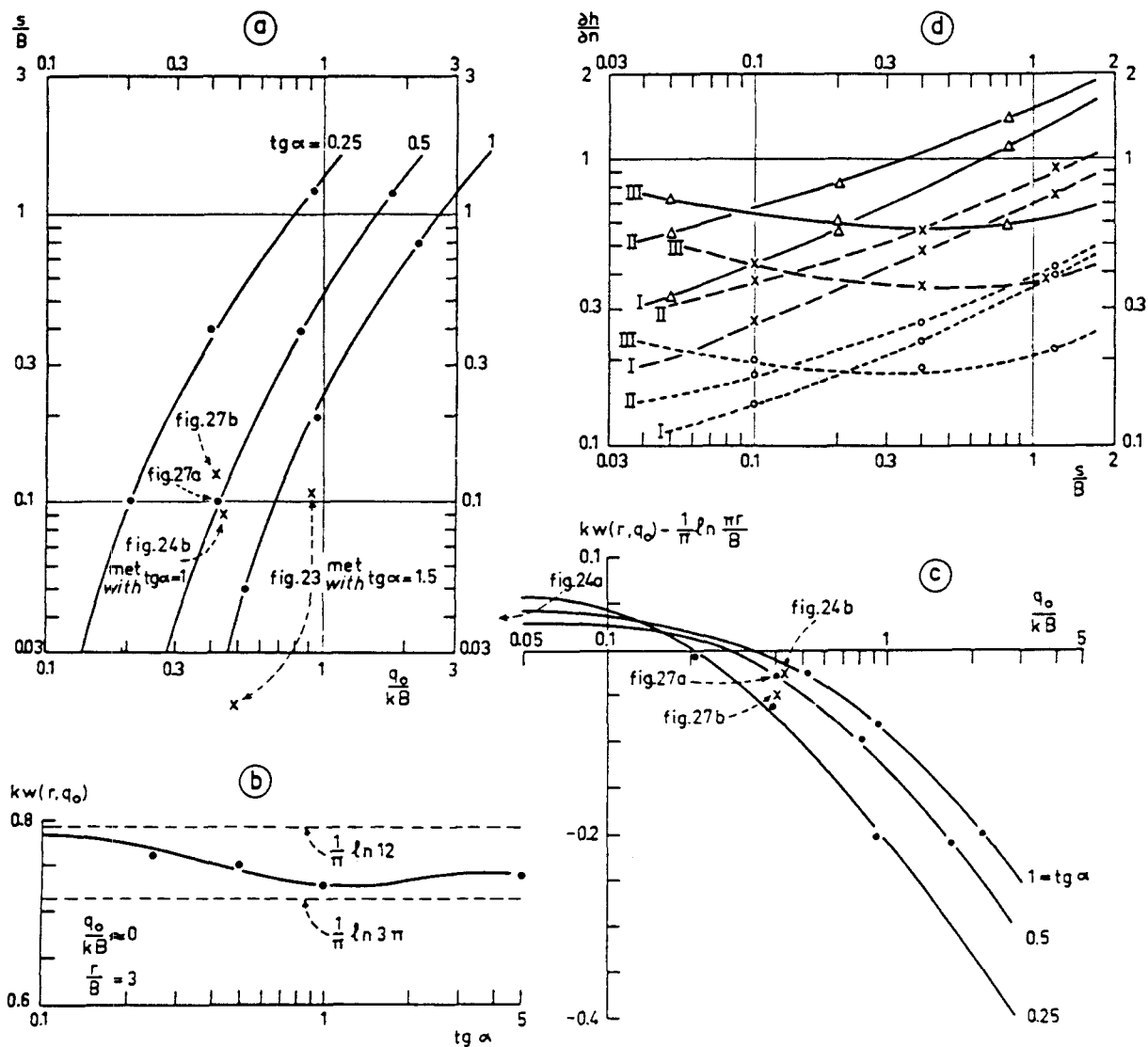


FIG. 28. Breedte van kweloppervlak, radiale weerstand en stromingsdruk bij drainerende open leidingen  
*Width of the seepage surface of draining open conduits, the radial resistance and the seepage forces on the wetted perimeter*

$w(r, q_0)$  = weerstand tussen een half cirkelvormige equipotentiaallijn met straal  $r$  en de natte omtrek  $B$  bij een radiale stroming met intensiteit  $q_0$   
*resistance between a half-circular equipotential line with radius  $r$  and the wetted perimeter  $B$  for a radial flow with intensity  $q_0$*

$\alpha$  = hoek van het talud; *angle of talus*

$\partial h / \partial n$  = gemiddelde waarde van de normale component van de stijghoogte-gradiënt in bodem of talud van de open leiding; *mean value of the normal component of the gradient of the hydraulic head in the bottom or talus of the open conduit*

I bodem; *bottom*

II talud onder water; *talus below the water level*

III kweloppervlak; *surface of seepage*

-  $\Delta$ - $\Delta$ -  $\text{tg } \alpha = 1$

--x--x--  $\text{tg } \alpha = 0,5$

...o...o...  $\text{tg } \alpha = 0,25$

moet worden gehouden met het feit, dat wegens de afnemende waarden van de doorlatendheid  $k$  bij grote snelheden geen oneindig grote snelheden kunnen voorkomen. Door de onjuiste toepassing van een constante doorlatendheidscoëfficiënt in gebiedjes met zeer grote  $v$  zijn de voorafgaande afleidingen in deze paragraaf niet geheel exact. Een scherpe hoek tussen talud en bodem komt in de praktijk bovendien weinig voor; meestal vindt men onder water een geleidelijke afname van de steilheid van het talud naar het midden van de open leiding. Bij een knik in het talud ter hoogte van de vrije waterspiegel (zie de punten  $c$  in fig. 22c) vindt men echter ook bij toepassing van een constante  $k$  geen oneindig grote snelheden. Onregelmatige afwijkingen in de vorm van het bed zijn geen zeldzaamheid en kunnen bijzondere invloed hebben op de stabiliteit. Vorm en stabiliteit van de taluds boven de open waterspiegel zijn eveneens verschillend afhankelijk van de verzadigingsgraad en van het rijden van zware vrachten dicht langs de rand van het talud.

Van de vijf toestanden van grondwaterstroming naar drainbuizen, welke in figuur 22 zijn afgebeeld, kunnen de beide eerste gevallen met de hodograafmethode worden opgelost. Voor de afleiding van deze oplossingen kan verwezen worden zowel naar de reeds genoemde publikaties van Rossbach en van Van Deemter als naar andere publikaties, waar de toepassing van de hodograafmethode op de stroming van het grondwater meer in het algemeen behandeld wordt (HAMEL, 1934; MUSKAT, 1937; BREITENÖDER, 1942).

De oplossing van de beschouwde stroming, welke uit het oneindige afkomstig is en zonder verandering in totale intensiteit naar een puntvormige put met coördinaat  $\zeta = 0$  stroomt wordt door de hodograafmethode in de volgende vorm gegeven:

$$\frac{k\zeta}{q_0} = i \left\{ - \left( \frac{kb}{q_0} + \frac{1}{\pi} \ln 2 \right) \theta + \frac{1}{\pi} \ln (\theta - 1) + \frac{kb}{q_0} \right\} \quad (101)$$

$$\frac{\omega}{q_0} = \frac{1}{2\pi} \ln (1 - \theta^2) + \frac{kb}{q_0} \quad (102)$$

$\zeta$  en  $\omega$  zijn dezelfde complexe grootheden als in hoofdstuk II.1 gebruikt (zie pag. 11);  $\theta$  is een complexe parameter, welke langs het freatisch oppervlak alleen reële, positieve waarden heeft en langs de  $z$ -as ( $z < b$ ) alleen zuiver imaginaire waarden  $ia$  heeft met  $a > 0$ ;  $b$  is de hoogte van het laagste punt van het freatisch oppervlak boven het afvoercentrum (zie fig. 29c).

Het afvoercentrum met potentiaal  $-\infty$  heeft als coördinaat  $\zeta = 0$ . Hiermee is de toestand echter nog niet volledig bepaald, daar op een kleine cirkel met  $\zeta = 0$  als middelpunt willekeurige eindige variaties in de potentiaal gedacht kunnen worden, zonder dat afbreuk wordt gedaan aan de voorwaarde  $h = -\infty$  voor  $\zeta = 0$ . Dit houdt in dat er pas een eenduidige oplossing kan zijn als voor een willekeurig punt buiten  $\zeta = 0$  de waarde van  $h$  (boven een zeker minimum) gegeven is. Door de aanwezigheid van de parameter  $b$  kan aan een dergelijke voorwaarde inderdaad nog voldaan worden. Elke reële waarde van  $b > 0,098 q_0/k$  vertegenwoordigt een bijzondere oplossing, waarvan in figuur 29 enkele voorbeelden worden gegeven.

Rondom het afvoercentrum vindt men volgens deze oplossing een opeenvolging van aequipotentiaallijnen, die met enige benadering in vorm overeenkomen met een volledige cirkel of een deel van een cirkel. De voorafgaande berekening is bedoeld voor toepassing op alzijdig doorlatende drainbuizen, welke geheel gevuld met water op

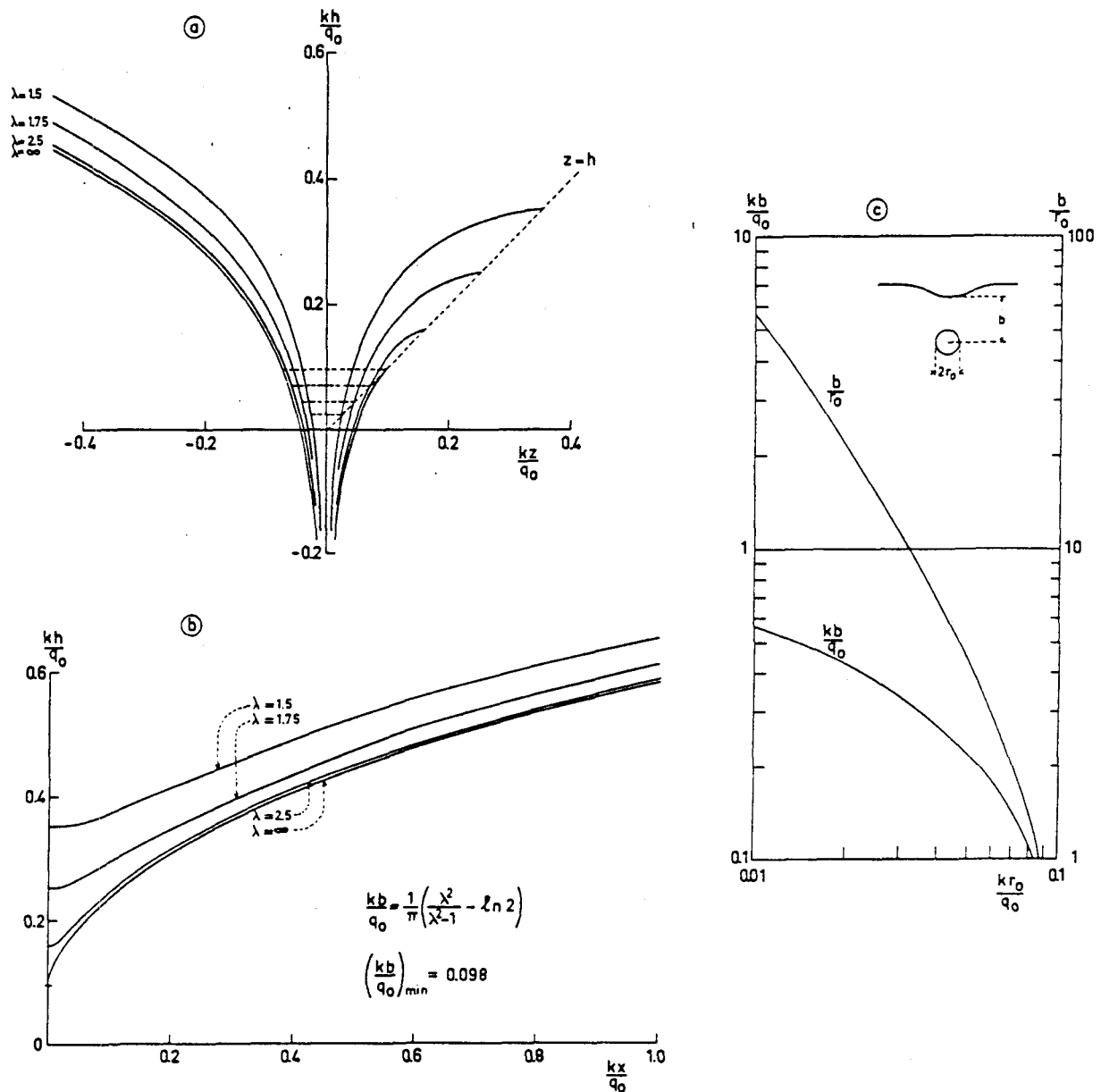


FIG. 29. Drainage door buizen in homogene grond berekend met de hodograafmethode. a. De stijghoogte ( $h$ ) op een verticale lijn door het drainagecentrum volgens de formules (101) en (102) bij verschillende waarden van  $\lambda$ ; b. Vorm van het freatisch oppervlak bij verschillende waarden van  $\lambda$ ; c. Het hoogteverschil ( $b$ ) tussen het laagste punt van het freatisch oppervlak en het drainagecentrum, als functie van  $q_0/k$  en  $r_0$

*Drainage by tubes in a homogeneous soil calculated with the hodograph method. a. The hydraulic head ( $h$ ) on a vertical line through the drainage center according (101) and (102) for different values of  $\lambda$ ; b. Shape of the phreatic surface for different values of  $\lambda$ ; c. The difference in elevation ( $b$ ) between the lowest point of the phreatic surface and the drainage center, as a function of  $q_0/k$  and  $r_0$*

hun oppervlak een constante potentiaal hebben. Is nu de diameter  $2r_0$  van een dergelijke drainbuis en de stijghoogte van het water in de drainbuis gegeven, dan kan dit eenvoudig als een horizontaal lijnstuk met lengte  $2r_0$  in figuur 29a worden ingepast, zodanig dat het rechter uiteinde voldoet aan  $h - z =$  stijghoogte van het water in de drainbuis, gemeten vanaf de bovenkant van de drainbuis. Bij aanwezigheid van een verzadigde strook boven het freatisch oppervlak met aan de bovenzijde van deze strook een onderdruk  $\rho g \Psi_0$  (bij de oplossing van de stroming naar de watervrije sloot met verticale taluds is deze uitbreiding niet mogelijk) kan men op een nieuwe stijghoogte-functie  $h'$  overgaan:  $h' = h + \Psi_0$ , zodat dan langs de bovenzijde van de verzadigde zone geldt  $h' = z$  en voor de stijghoogte op de omtrek van de drainbuis  $h'_0 = h_0 + \Psi_0$ . In figuur 29a is tevens te zien, dat het middelpunt van de drainbuis altijd iets boven  $z = 0, x = 0$  komt te liggen; meestal is dit echter een te verwaarlozen verschil.

Bij een geheel met water gevulde drainbuis van gegeven diameter en een zeer lage stroomsterkte  $q_0$  zijn de formules (101) en (102) niet van toepassing. Voor dit doel hebben enkele vierkantjesfiguren gediend, waarvan de uitkomsten in figuur 30 zijn uitgezet met enkele uitkomsten van (101) en (102) voor hogere  $q_0$ . De grootte langs de verticale as is dezelfde als in figuur 28d. De logaritme langs de verticale as wordt beide keren genomen van de lengteverhouding van twee aequipotentiaallijnen (aequipotentiaallijn op grote afstand en natte omtrek).

In de praktijk kan de doorlatendheid rondom de drainbuis belangrijk afwijken van hetgeen verondersteld is bij de voorgaande afleiding. Toch zijn de formules (101) en

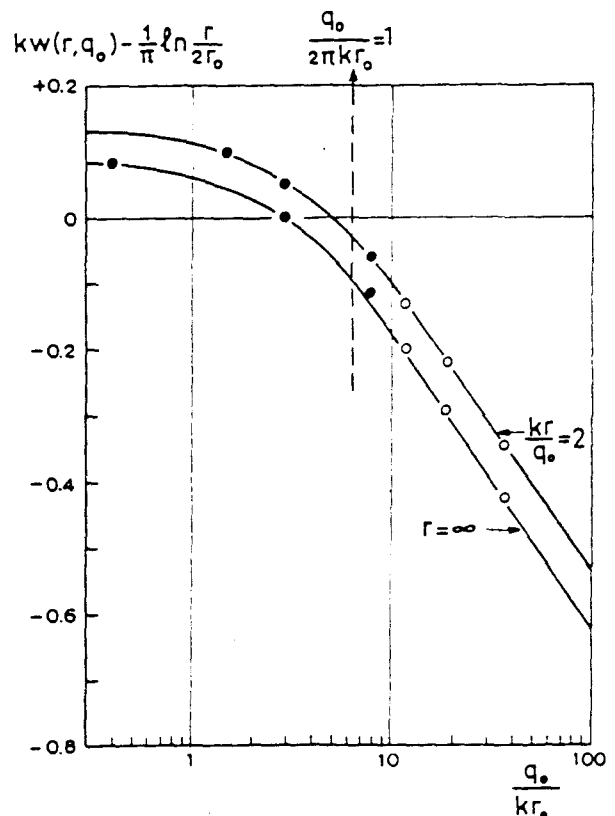


FIG. 30. De weerstand  $w(r, q_0)$  bij een geheel met water gevulde drainbuis  
The resistance  $w(r, q_0)$  in the case of a full drain tube

- volgens vierkantjesfiguren;  
after sketching of squares
- volgens de formules (101) en (102);  
according (101) and (102)

(102) niet uitsluitend van theoretische waarde. De hodograafmethode is de enige weg waarlangs oplossingen in de vorm  $h(x, z)$  met gebogen freatisch oppervlak zijn gevonden. Het is van belang hiervan gebruik te maken om enig inzicht te krijgen in de vorm van de equipotentiaallijnen en om de weerstand te kunnen berekenen, die door een radiale stroming naar een reeks drainbuizen wordt ondervonden. Dit laatste kan vooral van belang zijn bij de oplossing van samengestelde stromingen (zie hoofdstuk II.1).

### II.3. DE STROMING NAAR DE STOOTVOEGEN TUSSEN DRAINBUIZEN

Bij de ontwatering door evenwijdige reeksen van gebakken buizen, die zelf ondoorlatend zijn en alleen water door de stootvoegen kunnen doorlaten, is het niet verwonderlijk dat er geen exacte twee-dimensionale oplossing gevonden is. Immers de concentratie van stroomlijnen rondom de stootvoegen houdt in, dat er een belangrijke snelheidscomponent is evenwijdig aan de as van de reeks buizen. De toestand wordt hierdoor zo gecompliceerd, dat gezien de moeilijkheden die overwonnen moesten worden om een exacte twee-dimensionale oplossing te bereiken, het zeer moeilijk zal zijn langs mathematische weg een drie-dimensionale oplossing met gebogen freatisch oppervlak te vinden.

Het ligt hier dus voor de hand om te streven naar een oplossing, die alleen in de omgeving van de stootvoegen met meer of minder nauwkeurigheid geldig is. Veronderstellen we eenvoudigheidshalve, dat er symmetrie is bij rotatie om de as van de buizen, dan is het mogelijk in een vlak door deze as de stromingstoestand af te beelden (zie figuur 31a). Daar deze stroming in het oneindige zijn oorsprong vindt, is er een gelijke stroomsterkte door elke cylindermantel met lengte  $L_d$ . Verder wordt bij de volgende beschouwingen steeds aangenomen, dat de grond volkomen tegen de drainbuizen aansluit, maar dat er geen gronddeeltjes in de stootvoegen dringen. De weerstand in een schone stootvoeg wordt eerst van praktische betekenis als de spleetwijdte  $a \leq 0,1$  mm. Oplossingen van dit probleem werden gegeven door Kozeny en door Kirkham (KOZENY, 1933; KIRKHAM, 1950). De oplossing van Kozeny bevat enkele onduidelijke benaderingen en wijkt onder sommige omstandigheden met een factor 1,5 af van het gemiddelde van de extreme waarden, waartussen Kirkham de exacte oplossing insluit (extreme waarden gelijk aan het gemiddelde  $\pm 10\%$ ). Kirkham bereikt deze benaderingen door het sommeren van 45 termen uit een oneindige reeks met quotiënten van Besselfuncties, hetgeen een vrij aanzienlijke hoeveelheid rekenwerk met zich meebrengt.

Een eenvoudige oplossing, waarvan de uitkomst ligt tussen de grenzen door Kirkham gegeven, kan op de volgende manier worden gevonden. De stroming aangegeven in figuur 31a kan vervangen worden door een combinatie van de stromingen in de figuren 31b en c. Deze vervanging is ook dan exact als er buiten het vlak van afbeelding een zekere begrenzing is door een willekeurig gevormd freatisch oppervlak, mits deze begrenzing voor de figuren 31a, b en c dezelfde is. Zouden we deze begrenzing in figuur 31b vervangen door een cylindermantel met beschrijvende evenwijdig

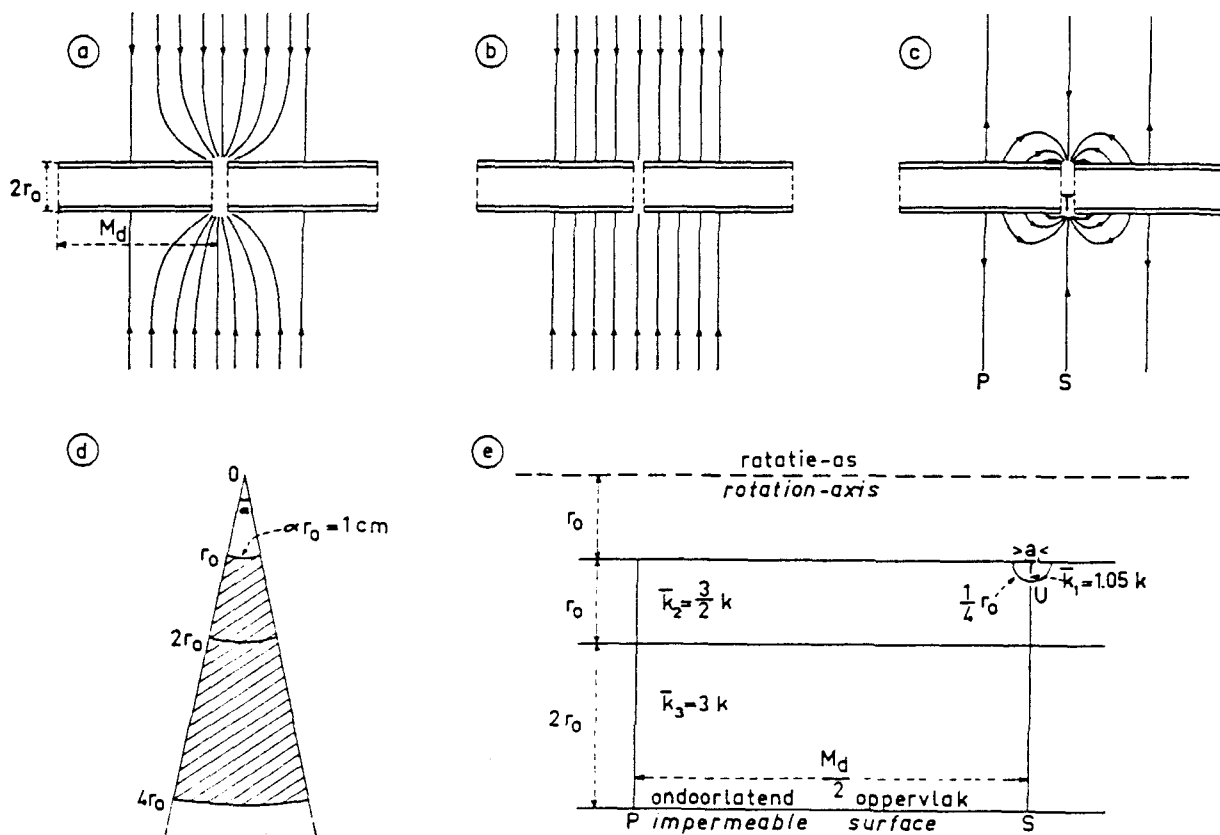


FIG. 31. Stroming van grondwater naar de stootvoegen tussen drainbuizen (vergelijk met fig. 7)  
*Flow of the groundwater to the gaps between draitubes (compare with fig. 7)*

aan de as van de reeks drainbuizen, dan is hiermee een probleem ontstaan dat in principe reeds in de hoofdstukken II.1 en II.2 behandeld is. Ligt dit oppervlak op een afstand groter dan  $1/3$  van de buislangte verwijderd van het buisoppervlak dan is de invloed ervan in figuur 31c reeds te verwaarlozen. Het is echter duidelijk, dat als het freatisch oppervlak dicht bij het buisoppervlak ligt (bij lage stroomsterkten en niet geheel gevulde drainbuis is snijding van deze oppervlakken zelfs mogelijk), de stroming, die in figuur 31b uit het beschouwde gebied wordt gevoerd en in figuur 31c weer wordt ingevoerd, niet met constante flux over het buisoppervlak verdeeld is. Bij de hierna volgende oplossing wordt echter, evenals dit door Kozeny en Kirkham is gedaan, rotatie-symmetrie verondersteld. Eventueel zou men door spiegeling ten opzichte van een plat vlak en optelling van de oorspronkelijke en de gespiegelde stroming een betere benadering kunnen krijgen.

Indien men uit figuur 31c een wigvormig gebied beschouwt met op de afstand  $r_0$  van de as een dikte  $\alpha r_0$  gelijk aan een eenheid (bijvoorbeeld 1 cm), dan kan men de hierin optredende stroming ook vervangen door de stroming in een vlakke plaat met dezelfde dikte (1 cm), mits een variabele doorlatendheid verondersteld wordt en wel gelijk  $kr/r_0$ .

Evenals in hoofdstuk II.1a wordt het beschouwde gebied in drie delen gesplitst en vervolgens in elk van deze delen een constante doorlatendheid aangenomen gelijk

aan het 'gemiddelde' van de juiste variabele doorlatendheid. Het gaat nu om de berekening van een zeker stijghoogteverschil bijvoorbeeld vanaf het gemiddelde van PS tot T. Hiervoor kan men zowel in figuur 31c als in figuur 31e een splitsing in 4 componenten aanbrengen:

1. een rechtlijnige stroming van boven naar beneden;
2. een rechtlijnige stroming van links naar rechts;
3. een stroming vanuit SU naar een kwartcirkel met straal  $r_0/4$ ;
4. een stroming vanuit deze kwartcirkel naar de spleet met breedte  $a$ .

Optelling van deze 4 componenten levert als stijghoogte-verschil op:

$$\Delta h' = \frac{AL_d}{k} \left( -\frac{r_0}{L_d} + \frac{L_d}{90r_0} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1,05\pi} \ln \frac{r_0}{a} \right) \quad (103)$$

waarbij  $A$  = de stroomsterkte, welke per oppervlakte-eenheid van de drainbuis wordt ingevoerd. Uit deze laatste definitie volgt, dat de toestroming  $q_0$  per eenheid van lengte langs de as van de buis kan worden voorgesteld door:

$$q_0 = 2\pi A r_0 \quad (104)$$

Voor de extra weerstand  $\Omega$ , die men als verschil tussen de figuren 32a en 32b kan zien en waarbij dus de eerste term uit (103) moet vervallen, volgt nu:

$$k\Omega = \frac{k\Delta h''}{q_0} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{90} \left( \frac{L_d}{r_0} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{L_d}{r_0} + \frac{1}{3,3} \frac{L_d}{r_0} \ln \frac{r_0}{a} \right\} \quad (105)$$

Indien de afmetingen van de drainbuizen en de wijidte van de stootvoegen gegeven zijn, dan ligt de waarde van  $k\Omega$  vast. Dit behoeft niet te verwonderen, daar  $k\Omega$  als een geometrische factor beschouwd mag worden. Voor de Nederlandse praktijk geldt:  $L_d = 30$  cm;  $r_0 = 4$  cm;  $a = 0,5$  mm en hieruit volgt als eerste benadering:

$$k\Omega \approx 2 \quad (106)$$

Voor de praktijk is de grootheid  $\Delta h$  belangrijker en hierop zijn volgens (105) van invloed  $k$  en  $q_0$ . Hoe belangrijk het effect van de weerstand  $\Omega$  kan zijn, kan men aantonen door (105) en (106) in de volgende vorm te brengen:

$$\Delta h'' \approx \frac{2q_0}{k} = \frac{2NL}{k} \quad (107)$$

Bij buizendrainage, zoals deze in Nederland wordt aangelegd, variëert  $L/k$  van 10 tot 100 dagen afhankelijk van de dikte van het doorlatende pakket en de toelaatbaar geachte maximale hoogte van de grondwaterspiegel ten opzichte van de drainbuizen bij een bepaalde afvoerintensiteit. Een stationaire afvoer van 7 mm/dag wordt veelvuldig bij praktische berekeningen verondersteld als criterium, waaraan het drainage-



systeem moet kunnen voldoen zonder te hoge grondwaterstanden te geven. Uit (107) blijkt nu, dat onder zulke omstandigheden 0,14 tot 1,4 meter water boven de drainbuizen zou staan. Uit veldwaarnemingen, die weliswaar slechts zelden gedurende zeer sterke regenval zijn gedaan, is gebleken, dat bij uitzondering de grondwaterspiegel in de drainsleuf merkbaar boven de buizen ligt en bij een afvoer van 7 mm/dag hoogstens 10 tot 20 cm.

Men zou uit deze tegenspraak de conclusie willen trekken, ofwel dat de geroerde grond in de drainsleuven niet goed tegen de drainbuizen aansluit, ofwel dat de grond beter doorlatend is en ook gedurende tientallen jaren beter doorlatend blijft dan de grond in ongestoorde ligging. Dit laatste wordt voor kleigrond bevestigd door een groot aantal waarnemingen (zie onder meer FLODKVIST, 1931), hoewel ook gevallen uit de praktijk bekend zijn, waarin vermoedelijk het omgekeerde effect oorzaak is van het slecht functioneren van de buizen.

Voor zandgrond is deze conclusie niet aannemelijk. Voor zover het zandgrond betreft met doorlaatfactoren groter dan 3 m/dag en daardoor grotere buisafstanden, is het genoemde effect in het gebied rondom de stootvoegen van weinig belang, behalve in die gevallen dat de drainbuizen in veel fijner zand gelegd zijn en het grove zand dieper ligt. In Nederland is het bij de praktische uitvoering meestal gewoonte de onbekende doorlatendheid van diepere lagen (bijvoorbeeld dieper dan  $-3$  m) te verwaarlozen, hetgeen vooral bij grote  $L$  een belangrijke extra veiligheid moet geven, die mogelijk kan opwegen tegen het verwaarlozen van de weerstand rondom de stootvoegen. Hoewel nog enkele veronderstellingen van deze soort gegeven zouden kunnen worden, is het duidelijk dat hiermee geen volledige verklaring gegeven is.

Uit modelonderzoek in zandtanks kwamen zowel Ede als Childs en Youngs tot de conclusie dat de invloed van de stootvoegen gering is (EDE, 1958; CHILDS and YOUNGS, 1958). Childs en Youngs maken hierbij enig voorbehoud; dat dergelijk voorbehoud nodig is, volgt ook uit de vergelijking (105) en uit het voorbeeld dat tot (106) en (107) leidt. Door onderzoek van buizendrainage in het veld zal uitgemaakt moeten worden of er op dit punt principiële verschillen tussen klei en (fijn) zand bestaan.

### III. NIET-STATIONAIRE GRONDWATERSTROMINGEN

#### III.1. VELDWAARNEMINGEN EN LABORATORIUMMETINGEN VAN BERGINGS-COËFFICIËNTEN

Wil men de invloed in rekening brengen, welke de toestand in de onverzadigde zone uitoefent op de niet-stationaire grondwaterstroming in de verzadigde zone, dan ligt het voor de hand de toestand als quasi-stationair te beschouwen. Om te beginnen kan aangenomen worden, dat de berging  $S$  afhangt van de grondwaterspiegeldiepte  $Z$ , de flux  $v_{00}$  door het maaiveld, de flux  $v_1$  ter hoogte van het freatisch oppervlak en de positieve of negatieve waarde van  $dM/dt$ . Deze veronderstelling is niet geldig tijdens en kort na regenbuien, daar dan in de oppervlakkige lagen het vochtgehalte veel hoger is, dan hetgeen volgt uit figuur 1 door  $\Psi = z$  te stellen, terwijl bovendien aan het begin en aan het einde van een dergelijke periode  $dM/dt$  van teken verandert.

In de praktijk is  $v_1$  vooral afhankelijk van  $h_1$ , voor zover ten minste tussen  $h_1$  en  $h_0$  een eenduidig verband bestaat. Daarentegen hangt  $v_{00}$  af van de plantengroei en de weersgesteldheid. Voor winterperiodes zonder regen kan men met goede benadering aannemen dat  $v_{00} = 0$ . Voor droge periodes van de zomer met een belangrijke onttrekking van water door de planten aan de bewortelde zone zou men om te beginnen ook kunnen veronderstellen  $v_{00} = 0$ , maar vervolgens moeten overgaan tot het berekenen van afzonderlijke correcties wegens het verschil in berging tussen de aangenomen toestand met  $v_{00} = 0$  en de werkelijke toestand. Dit verschil wordt het vochtdeficit  $S_d$  genoemd. Na de droge periode wordt de neerslag in sterke mate gebruikt om dit vochtdeficit aan te vullen.

Worden alleen periodes zonder belangrijke overtollige neerslag en met een monotone gang van het vochtgehalte in beschouwing genomen, dan mag men dus in eerste benadering aannemen dat de berging  $S$  (eventueel gecorrigeerd met het vochtdeficit  $S_d$ ) alleen afhangt van  $h_1$ . De bergingsverandering  $dS/dt$  kan gelijk gesteld worden aan  $\mu(h_1)dh_1/dt$ . Hiermee is de bergingscoëfficiënt  $\mu(h_1)$  gedefinieerd als de verandering van de vochtinhoud in een verticale kolom grond per eenheid van horizontaal oppervlak en gedeeld door een zeer kleine niveauperandering van de grondwaterspiegel, welke deze vochtinhoudsverandering veroorzaakt bij een hoogte  $h_1$  van de grondwaterspiegel.

Door invoering van een bergingscoëfficiënt bij grondwaterstromingen, die in hoofdzaak horizontaal gericht zijn en waarbij dus in eerste benadering geldt  $v_1 = \text{div } \vec{q}_{hor}$ , vindt men als toestandsvergelijking:

$$k \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (D + h) \frac{\partial h}{\partial x} \right\} + k \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (D + h) \frac{\partial h}{\partial y} \right\} = \mu(h) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (108)$$

In periodes met sterke neerslag en kort erna kan de hysteresis van het vochtgehalte

ten opzichte van de vochtspanning belangrijk zijn en men mag niet zonder meer de uitbreiding van (108) met een term  $N(t)$  als geoorloofd verklaren. Bovendien moet men in principe rekening houden met nog een ander effect, daar er een zeker tijdsverloop optreedt tussen het begin van de neerslag en het begin van de grondwaterstandsstijging. Deze naijling is vermoedelijk sterk afhankelijk van de grondwaterpiegeldiepte  $Z$ . In de bekende literatuur werden slechts weinig en onduidelijke gegevens gevonden die wijzen op zeer grote naijlingen bij grote  $Z$  (SCHEELHASE, 1911; WATERWINNING ZUID-LIMBURG, 1941). Bij kleine  $Z$  ( $< 2$  m) gebeurt het vochttransport in enkele dagen (NIELSEN, KIRKHAM and VAN WIJK, 1959), maar de grondwaterstand stijgt veel sneller (zie figuur 37 en verder bijvoorbeeld THAL LARSEN, 1932; WESSELING, 1957). Een verklaring kan gezocht worden in de hysteresis van het vochtgehalte ten opzichte van de vochtspanning. Hierbij kan de insluiting van kleine luchtbelletjes van invloed zijn (zie pag. 5). Thal Larsen en enkele andere onderzoekers hebben in de jaren rond 1930 erop gewezen, dat onder bijzondere omstandigheden (zeer fijne zandgrond) de oorzaak zou kunnen liggen in grote luchtinsluitingen, waarbij de opgesloten lucht een drukverhoging ondergaat gelijk aan het hydrostatische gewicht van de toegevoegde laag regenwater vermeerderd met het verschil in de capillaire spanningen aan de onderzijde en de bovenzijde van deze laag. Het schijnt zeer goed mogelijk, dat zowel luchtinsluitingen dicht onder het oppervlak als zekere hysteresiseffecten een belangrijke invloed hebben op het verloop van de grondwaterstand tijdens en na een regenbui. Voor de praktische toepassing bij de berekening van grondwaterstromingen in de verzadigde zone bij kleine  $Z$ , zoals op enkele uitzonderingen na in Nederland regel is, zijn de waargenomen naijlingen zo klein, dat dit effect verder verwaarloosd mag worden.

Bij een beschouwing van de in figuur 32 afgebeelde, door regenbuien van korte duur veroorzaakte grondwaterstandsschommelingen, kan men geen afhankelijkheid van de grondsoort onderscheiden, maar wel is een afhankelijkheid van de diepte van het freatisch oppervlak zichtbaar. Uit de grote pieken in de bovenste krommen en de kleinere pieken in de lagere krommen volgt, dat  $\mu$  in de gegeven omstandigheden afhankelijk is van  $Z$ . Deze waarnemingen zijn afkomstig uit een gebied met een redelijk goed doorlatende bovenlaag (fijn zand met soms lemige afzettingen) en een vrij grote afstand tussen de drainerende leidingen ( $L \approx 800$  m) met nagenoeg constant peil. De bergingscoëfficiënt kan bij elke regenbui berekend worden als verhouding van de bergingstoename minus het vochtdeficit en de grondwaterstandsstijging. Om de bergingstoename te vinden moet de neerslag verminderd worden met verdamping en drainage. Aan het einde van een droge zomerperiode kan het vochtdeficit zo groot zijn, dat de som van de af te trekken hoeveelheden niet door de neerslag overtroffen wordt en geen stijging van de grondwaterstand kan ontstaan. In een normale zomerperiode vindt men tamelijk kleine waarden voor  $\delta h$  en  $\delta S$ , zodat dan de minste nauwkeurigheid verwacht moet worden. Wordt een lineair verband tussen  $\mu$  en  $Z$  verondersteld, dan kan als eerste benadering uit figuur 32 worden afgeleid:

$$\mu = 0,08 + \frac{Z}{25 \text{ meter}}$$

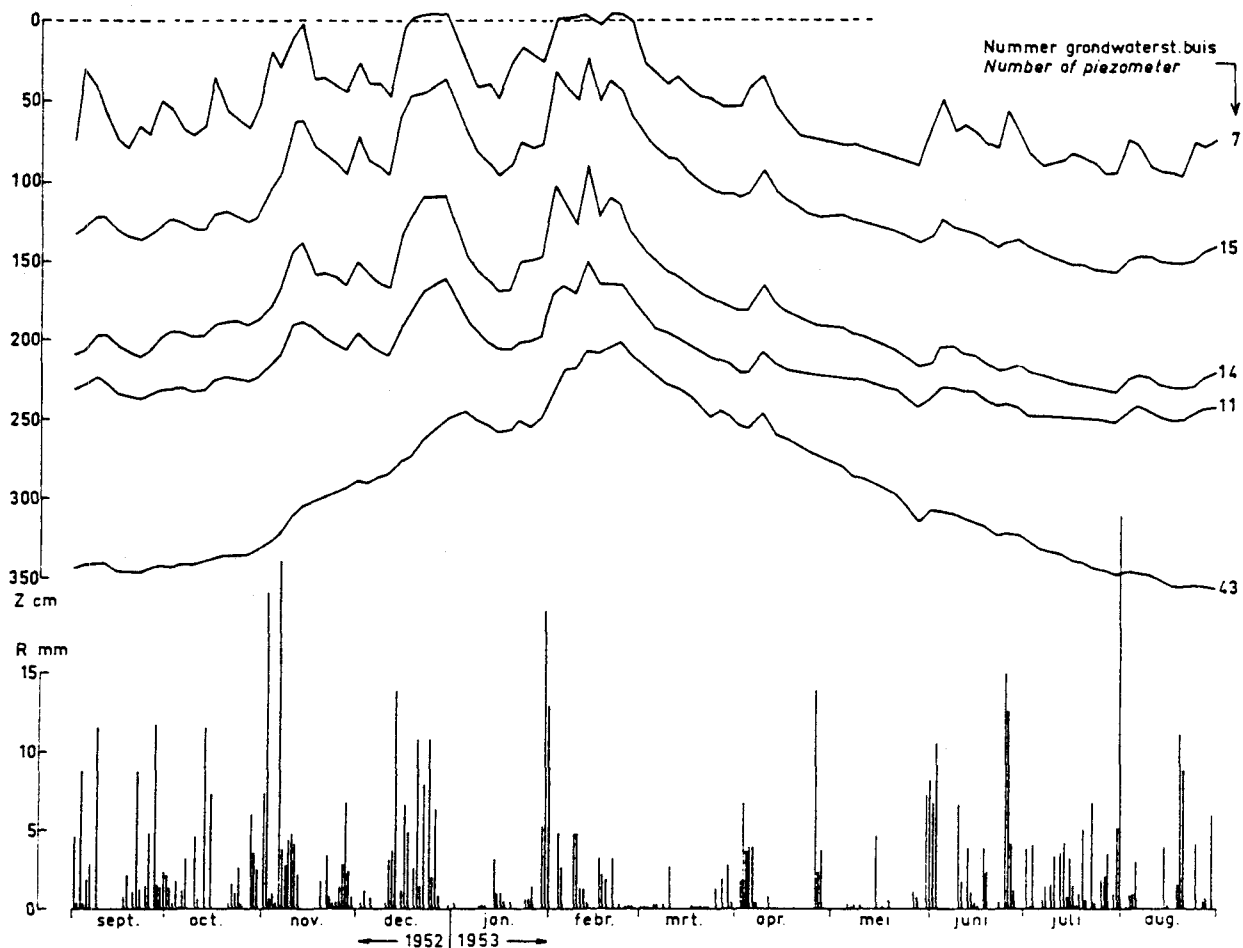


FIG. 32. Veranderingen in de grondwaterstand afhankelijk van de diepte ( $Z$ ) en van de neerslag ( $R$ ) volgens metingen in het stroomgebied van de Lollebeek (provincie Limburg)  
*Changes in the hydraulic head in relation to the depth ( $Z$ ) and to the precipitation ( $R$ ) according to measurements in the watershed of the Lollebeek*

Behalve uit de fluctuaties veroorzaakt door neerslagen van hoogstens 14 dagen duur kan men ook de bergingscoëfficiënt bepalen uit het verschil van het winter- en het zomergemiddelde. Hiervoor zal men bijvoorbeeld gebruik kunnen maken van de som van de formules (144) en (156) uit hoofdstuk III. 4a of van figuur 49, welke voor  $w = 0$  bij een constant peil in de open leidingen uit deze formules is afgeleid. Voor de periode augustus 1952 tot augustus 1953 werd op deze manier uit de jaarfluctuatie in het oostelijk deel van het stroomgebied van de Lollebeek volgens figuur 32 een bergingscoëfficiënt  $\mu = 0,19$  afgeleid. Daar in dit jaar de gemiddelde grondwaterstandsdiepte 130 cm was, zou volgens de metingen aan grondwaterstandspieken van korte duur de bergingscoëfficiënt slechts 0,13 mogen zijn. Bij overgang van uitdroging naar bevochtiging en omgekeerd ontstaan door het hysteresiseffect grote potentiaalveranderingen bij kleine vochtverplaatsingen. Dit houdt in dat aan het begin en het einde van een regenperiode in korte tijd grote grondwaterstandsveranderingen moeten voorkomen alsof  $\mu$  veel kleiner dan normaal is, overeenkomstig het verschil tussen bovengenoemde metingen.

Terwijl bij de voorgaande beschouwingen meestal werd verondersteld dat  $v_1$  in het freatisch oppervlak een eenduidig verband heeft met de hoogte  $h$  van het freatisch oppervlak en daardoor slechts geleidelijk veranderen kan, wordt hieraan bij plotselinge veranderingen van het peil van de open leidingen en bij pompproeven niet voldaan. Bij de bestuderingen van de grondwaterstandsverlaging bij pompproeven was Boulton de eerste onderzoeker, die de vertraagde levering van water uit de onverzadigde zone in rekening heeft gebracht. Voor de verticaal naar beneden gerichte flux  $v_1$ , die uit de onverzadigde zone gedraineerd wordt ten gevolge van een momentane daling  $\delta h$  van het freatisch oppervlak, kan in eerste benadering de volgende uitdrukking geldig verklaard worden (BOULTON, 1954):

$$v_1 = a\mu e^{-at} \delta h \quad (109)$$

Neemt men zowel voor  $a$  als  $\mu$  constante waarden aan onafhankelijk van  $h$ , dan volgt uit (109) na integratie van  $t = 0$  tot  $t = \infty$ , dat de totale bergingsverandering gelijk is aan  $\mu\delta h$  en  $\mu$  inderdaad de bergingscoëfficiënt voorstelt. Bij kleine  $\delta h$  kan er geen bezwaar zijn om voor  $\mu$  een constante waarde te nemen. Bij een grondwaterstandsverloop  $h(x, t)$  met  $\delta h/\delta t < 0$  volgt de integraal (110) uit (109). Deze afleiding is niet geheel exact, zowel wegens de in werkelijkheid variabele  $\mu$  als wegens de variabele  $k(M)$ , waardoor het superponeren feitelijk niet is toegestaan.

$$v_1 = \int_{-\infty}^t \frac{\partial h}{\partial \tau} a\mu e^{-a(t-\tau)} d\tau \quad (110)$$

Door Boulton zijn in het laboratorium enkele metingen gedaan in uitgezeefd zand bij een plotselinge verlaging van het freatisch oppervlak, waaruit volgde  $1/a \approx 0.01$  dag. Reeds voor 1900 werden proeven van deze soort door King in uitgezeefde zandfracties genomen, zonder hieraan een uitdrukking als (109) en een bepaling van de coëfficiënt  $a$  toe te voegen (KING, 1899). Deze metingen werden door King gedurende  $2\frac{1}{2}$  jaar voortgezet. Uit de door King gepubliceerde gegevens kan men afleiden dat voor grote  $t$  formule (109) niet voldoet. Past men daarom (109) toe op de eerste 3 tot 10 dagen dan vindt men voor de uitgezeefde zandfracties met een gemiddelde diameter variërend van 0,08 mm tot 0,5 mm als waarden van  $1/a$  respectievelijk 0.5 tot 0,02 dagen. Door toepassing op een pompproef vond Boulton voor ongeroerd zand:  $1/a = 1,5$  dag. De vertraagde levering heeft in dit laatste geval voor 90% plaats binnen een tijdsduur  $t$ , waarvoor geldt:

$$\int_0^t a e^{-a\tau} d\tau = 0,90 \quad \text{ofwel: } t = -\frac{1}{a} \ln 0,1 = 3,5 \text{ dag}$$

De gemiddelde naijling kan aan  $1/a$  gelijk gesteld worden, zoals uit de volgende afleiding blijkt:

$$\int_0^{\infty} a\tau e^{-a\tau} d\tau = \left( -\tau e^{-a\tau} - \frac{1}{a} e^{-a\tau} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a}$$

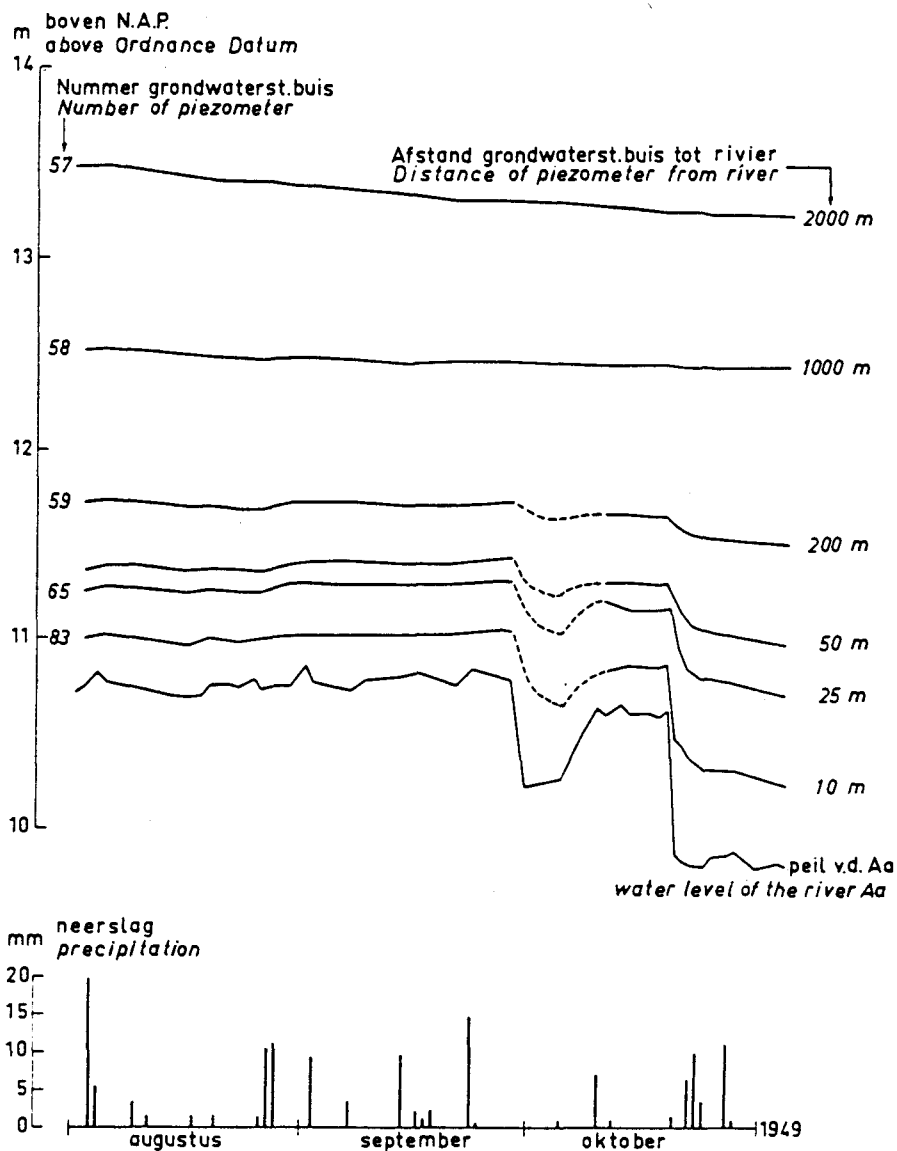


FIG. 33. Veranderingen in de grondwaterstand afhankelijk van de veranderingen in het peil van de rivier de Aa (provincie Noord-Brabant) en van de afstand tot deze rivier  
*Changes in hydraulic head in relation to the changes in the level of the river Aa and to the distance from that river*

De vertraagde levering is dus vooral belangrijk bij grondwaterstromingen, die zich in korte tijd ontwikkelen en in het algemeen direct na het begin van verstoringen van evenwichten of gedempte bewegingen. Behalve bij pompproeven is dit effect ook duidelijk merkbaar bij de voortplanting in het grondwater van een plotselinge peilverandering van het open water, zoals door het volgende voorbeeld afkomstig uit het waterschap van de Aa in de provincie Noord-Brabant wordt aangetoond. In de droge zomermaanden van het jaar 1947 was de overtollige neerslag vrijwel nul, waardoor op grote afstand van de rivier de Aa de grondwaterstand met vrij constante snelheid langzaam daalde (zie fig. 33). Op kleine afstand van de Aa was de grondwaterstands-daling nog veel kleiner (evenredig met het peilverschil met de rivier) zolang het rivier-

peil constant was. Peilveranderingen van het open water in een grootte-orde van enkele tientallen centimeters zijn in de gegeven periode enkele malen voorgekomen en hebben relatief belangrijke grondwaterstandsveranderingen veroorzaakt. Deze veranderingen werden veroorzaakt door het wegnemen van schotbalken uit een stuw. Na de grote peildaling van 19 oktober–20 oktober werden de grondwaterstanden dagelijks of om de twee dagen waargenomen, zodat deze periode voor een nadere beschouwing geschikt is.

Figuur 34, waarin uitgezet is de daling ten opzichte van de begintoestand op 19 oktober, maakt onmiddellijk duidelijk dat de absolute waarde van  $\bar{dh}/dt$  met de tijd veel sneller afneemt dan  $h_1(0, t)$ . De oorzaak van deze onevenredigheid kan men zowel in de hysteresis als in de vertraagde levering zoeken. Voor de neerslag en voor de persistente daling is in figuur 34 geen correctie ingevoerd, daar dit effect over de gekozen periode vrij zwak moet zijn geweest. Om de invloed ervan zo klein mogelijk te houden is de volgende bewerking tot een vijfdaagse periode beperkt.

Uit een oppervlaktebepaling in figuur 34 werd de volgende empirische benadering van de grondwaterstandsdaling  $\bar{h}(t)$  voor de periode 19 oktober–24 oktober 1949 gevonden als functie van  $t$  en gemiddeld over  $x = -1000$  m tot  $x = -37,5$  m en over  $x = 37,5$  m tot  $x = 1000$  m. Deze afstanden zijn zo gekozen omdat op grotere afstanden dan 1000 m geen meetbare grondwaterstandsdaling gevonden werd, dichtbij de rivier de radiale stroming moeilijk exact te berekenen is en de knik in het freatisch oppervlak op de rechteroever vermoedelijk samenhangt met een slecht doorlatende breukzone in de diepere bodemlagen, zoals in dit gebied reeds elders is gevonden (ERNST and DE RIDDER, 1960).

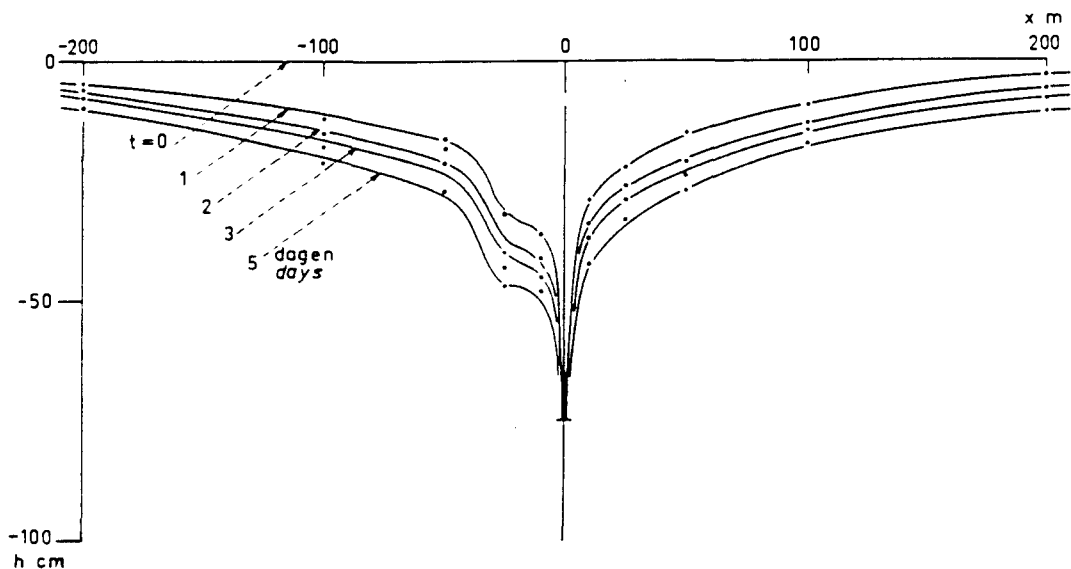


FIG. 34. De daling in het freatisch oppervlak langs de rivier de Aa, veroorzaakt door de plotselinge daling van het peil van het open water op 19 oktober 1949. De bijzondere vorm van het freatisch oppervlak in de linker helft van deze figuur is ook te zien in fig. 8  
*The drawdown of the phreatic surface on both sides of the river Aa caused by the sudden fall of the open water level on October 19, 1949. The particular shape of the phreatic surface at the left in this figure is also visible in fig. 8*

$$\bar{h}(t) = \frac{F(t)}{1925 \text{ meter}} = h^* (1 - e^{-bt}) \quad (111)$$

Uit de halfwaarde tijd 1,3 dagen volgt  $1/b = 1,85$  dagen. De formules (110) en (111) kunnen nu gebruikt worden om de gemiddelde bergingsverandering op de tijd  $t_1$  te berekenen.

$$\begin{aligned} \bar{S}(t_1) - \bar{S}(0) &= \int_0^{t_1} dt \int_0^t \frac{\partial \bar{h}}{\partial \tau} a \mu(\infty) e^{-a(t-\tau)} d\tau = \\ &= \frac{\mu(\infty) h^*}{a - b} \{a(1 - e^{-bt_1}) - b(1 - e^{-at_1})\} \end{aligned} \quad (112)$$

De bergingsverandering in het gebied buiten  $x = \pm 37,5$  m is evenredig met de stijghoogtegradiënt op deze grenzen en met een goede benadering dus ook evenredig met het stijghoogteverschil tussen de punten  $x = \pm 50$  m en  $x = \pm 25$  m.

$$\frac{\bar{S}(t_1) - \bar{S}(0)}{\bar{S}(t_2) - \bar{S}(0)} = \frac{\int_0^{t_1} \{h(50, t) + h(-50, t) - h(25, t) - h(-25, t)\} dt}{\int_0^{t_2} \{h(50, t) + h(-50, t) - h(25, t) - h(-25, t)\} dt} \quad (113)$$

Indien  $t_1 = 2$  dagen en  $t_2 = 5$  dagen, dan is volgens figuur 34 deze verhouding gelijk 0,40. Uit (112) en (113) volgt dan:  $1/a = 2$  dagen.

Voor de bepaling van de absolute waarden van de bergingscoëfficiënt moet men behalve de grootte van het oppervlak  $F$  ook weten hoe groot de gedraineerde hoeveelheid is in overeenstemming met de volgende vergelijking ( $\pm x_1$  zijn de grenzen van het beschouwde gebied langs de rivier):

$$\mu(t)F(t) = kD \int_0^t \left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{x_1} - \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{-x_1} \right\} d\tau \quad (114)$$

Uit verschillende metingen werden uitkomsten voor de  $kD$ -waarde gevonden variërend van 600 tot 1200 m<sup>2</sup>/dag. De gemiddelde waarde hiervan en de uitkomsten van figuur 34 werden in (114) gesubstitueerd, waaruit volgde:

$$\begin{array}{ll} t_1 = 2 \text{ dagen} & \mu(t_1) = 0,12 \\ t_2 = 5 \text{ dagen} & \mu(t_2) = 0,195 \end{array}$$

Daar  $\bar{h}(t)$  de gemiddelde grondwaterstands daling ( $< 0$ ) aangeeft sedert  $t = 0$ , geldt:

$$\bar{S}(t) - \bar{S}(0) = \mu(t)\bar{h}(t) \quad (115)$$

en hiermee is het mogelijk na substitutie van (111) en (112) en door gebruik te maken van reeds gevonden uitkomsten een waarde te vinden voor de bergingscoëfficiënt, zoals deze voorkomt in de formule van Boulton:  $\mu(\infty) = 0,24$ .



Of de onderzochte grondwaterstands­daling geheel vrij van het hysteresiseffect is, kan uit de beschikbare gegevens niet beoordeeld worden. De aangewezen weg om dit te onderzoeken zou zijn een grote peildaling van het open water te vervangen door twee kleinere peildalingen van ongeveer halve grootte met een week tussenruimte. Na de eerste daling van het peil van het open water zou een zekere hysteresis aanwezig kunnen zijn, na de tweede daling niet meer en het verschijnsel zou dan alleen uit de vertraagde levering verklaard kunnen worden. In het onderhavige geval zijn van 1 augustus tot 19 oktober door de lage regenval vrijwel geen grondwaterstands­stijgingen voorgekomen, daarentegen wel door de peilveranderingen van het open water tussen 27 september en 7 oktober. Afgaande op de hoge waarden, welke voor de bergings­coëfficiënt gevonden werden, zou men de conclusie willen trekken, dat in dit geval de hysteresis niet erg belangrijk geweest is. Bij de meeste toepassingen ten behoeve van het landbouwkundig onderzoek zullen vermoedelijk de functies  $\mu(Z)$  of  $\mu(Z, v_{00}, v_1)$  en de vochtspannings­hysteresis belangrijker zijn dan deze vertraagde levering.

Bij het meten van bergings­coëfficiënten in het veld kan men op de volgende bezwaren wijzen. Voor een bepaling van de bergingstoename na een regenbui moet men als aftrekposten de waarden kennen van vochtdeficiet, verdamping en afvoer. Zowel een tekort aan gegevens als een mogelijke fout in de bepaling van deze grootheden kunnen dus moeilijkheden geven. Bovendien is het in het algemeen niet mogelijk een volkomen homogeen gebied, een eenvoudige neerslagverdeling en een willekeurig gewenste grondwater­stands­diepte te verkrijgen. Bij metingen in het laboratorium kan men deze bezwaren vermijden, waar tegenover staat dat men er andere voor terug krijgt. Als een eerste bezwaar kan het feit genoemd worden, dat het moeilijk is de vereiste hoge monsters in ongestoorde toestand in het laboratorium te brengen. Een tweede bezwaar is, dat bij metingen in lange, vrij nauwe buizen de kans op lucht­insluitingen bij vochtverplaatsingen groter kan zijn dan onder veldomstandigheden.

Een eenvoudige opstelling, waarmede in het laboratorium bergings­coëfficiënten kunnen worden bepaald, is afgebeeld in figuur 35. Tot nu toe werden uitsluitend metingen gedaan in natuurlijk zand, dat los in een 8 cm wijde buis werd gegoten. Door afwisselende toevoer en onttrekking van water werd de kunstmatige pakking iets dichter gemaakt ( $\beta$  daalde van 0,42 tot 0,38). De watermantel is aangebracht om minder last van veranderingen in de kamertemperatuur te hebben. Tegen veranderingen in de atmosferische druk is in de gegeven opstelling niets te doen.

Er werden 3 soorten metingen uitgevoerd. Bij de eerste groep metingen hadden invoer en uitvoer uitsluitend plaats aan de onderkant van de met zand gevulde buis, zonder tussenvoeging van glazen capillairen als extra weerstand. Voor de invoer werd alleen kraan C geopend. De stand van de bijbehorende fles van Mariotte werd telkens met een vast bedrag verhoogd (meestal 15 cm) en aangenomen werd, dat na 24 uur de infiltratie met voldoende benadering als beëindigd zou mogen worden beschouwd. Voor drainage werd kraan C gesloten en kraan D geopend. Vervolgens werd het uiteinde van de aansluitende slang op een (meestal 15 cm) lagere hoogte vastgezet en de uitstromende hoeveelheid gemeten. Uit figuur 36 blijkt, dat er een

1930; STEGGEWENTZ, 1933; EDELMAN, 1947; WERNER and NORÉN, 1951; FERRIS, 1951) en publikaties waarin de open leidingen evenwijdig en op constante afstand verondersteld worden (WERNER, 1946; FERRIS, 1950; WERNER and SUNDQUIST, 1951; DUMM, 1954; KRAIJENHOFF VAN DE LEUR, 1958; MAASLAND, 1959). Van deze onderzoekers heeft alleen Steggewentz een niet-stationaire stroming behandeld met  $L = \infty$ , een horizontale stroming in een goed doorlatende laag en een verticale stroming in een slecht doorlatende laag. Verder werd steeds een horizontale stroming (dus zonder radiale of verticale componenten) en een constante bergingscoëfficiënt aangenomen (voor bepalingen van  $\mu$  als constante, zie bijv. PORCHET, 1923).

De belangrijkste fout bij gebruik van (116) moet worden gezocht in de verwaarlozing van de hysteresis. Een poging om dit hysteresiseffect in rekening te brengen zou op de volgende manier gedaan kunnen worden. Men neemt een constante bergingscoëfficiënt aan of een variabele bergingscoëfficiënt  $\mu(h)$  onafhankelijk van het hysteresis-effect, maar voegt aan het begin van de neerslagperiode (eventueel verdeeld over de gehele periode) een fictief bedrag  $N^*\delta t$  aan de overtollige neerslag toe en trekt ditzelfde bedrag weer af na de regenperiode als wateronttrekking aan het freatisch oppervlak. Wordt de verticale afstand in de hysteresis-lus  $\delta\Psi$  genoemd (zie figuur 2) dan volgt:  $N^*\delta t = \mu\delta\Psi$ .

Voor het in figuur 39 afgebeelde geval kan bijvoorbeeld direct afgeleid worden dat  $\delta\Psi = 30$  cm. Bij kleine neerslaghoeveelheden kan deze eenvoudige schematisering niet opgaan, in zoverre dat dan  $\delta\Psi$  en dus ook het constante bedrag in ieder geval kleiner moet zijn.

Ter vereenvoudiging van de berekeningen zou men deze kunstgreep nog iets kunnen wijzigen en wel door bij de gegeven bergingscoëfficiënt eerst de grondwaterstandsstijging op de normale manier te berekenen, maar in plaats van de overtollige neerslag te veranderen, kan men ook aan  $h(x)$  een constant bedrag toevoegen – wat vrij goed overeenkomt met het werkelijke effect – en na de regenbui ditzelfde constante bedrag af te trekken. Dit laatste heeft echter aan weerszijden van de open leidingen tot gevolg dat er grondwaterstanden zouden zijn, die lager zijn dan het peil van het open water, wat zeer duidelijk afwijkt van de werkelijkheid. Daar deze afwijking in vele gevallen snel uitdempt is het de vraag of dit bij praktische toepassingen van veel belang is. Hetzelfde effect krijgt men ook indien men  $N^*$  zeer groot en  $\delta t$  zeer klein neemt.

### III.2. TOESTANDEN WAARBIJ HET SUPERPONEREN VAN BIJZONDERE OPLOSSINGEN NIET TOELAATBAAR IS

Uit formule (108) volgt onmiddellijk, dat het superponeren van bijzondere oplossingen niet geoorloofd is als de laagdikte of de bergingscoëfficiënten van  $h$  afhankelijk zijn. Een oplossing van dergelijke niet-lineaire toestandsvergelijkingen zou voor de praktijk wel belangrijk zijn, maar vermoedelijk slechts op een beperkt gebied toepassing kunnen vinden. Bij de behandeling van stationaire stromingen is reeds gebleken, dat de formules gebaseerd op constante weerstanden zeer uitgebreid in de

praktijk toepasbaar zijn en wel in het bijzonder bij de algemeen voorkomende asymmetrische toestanden.

Door Werner werd een oplossing  $h(x, t)$  gegeven van de grondwaterstroming bij een van  $h$  afhankelijke laagdikte boven een ondoorlatende laag met een constante helling. Om tot een oplossing te kunnen komen, moest Werner echter in twee termen van de differentiaalvergelijking voor de laagdikte toch een constante  $D$  substitueren.\*) Dit houdt dus in dat de variaties in laagdikte niet te groot mogen zijn ten opzichte van de gemiddelde laagdikte (WERNER, 1953).

Een behandeling van niet-stationaire grondwaterstromingen boven een niet-horizontale basis werd reeds geruime tijd geleden gegeven door Boussinesq. Veel grotere bekendheid verwierf de bijzondere oplossing, welke door Boussinesq gegeven werd voor een vlakke grondwaterstroming met exponentiële demping zonder overtollige neerslag ( $N = 0$ ) in een homogeen pakket met een constante bergingscoëfficiënt boven een horizontale basis, waarmee het constante peil van de open leidingen ( $h_0 = 0$ ;  $D_0 = 0$ ) samenvalt (BOUSSINESQ 1903 en 1904).

Vergelijking (108) kan nu teruggebracht worden tot:

$$\frac{1}{2} k \frac{\partial^2(h^2)}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (117)$$

Genoemde oplossing kan zonder veel moeite worden afgeleid door voor  $h(x, t)$  te substitueren  $X(x)T(t)$ . Boussinesq heeft veel aandacht besteed aan het bewijs, dat alle verschillen in gelijkvormigheid tussen een willekeurige  $h(x, 0)$  en  $X(x)$  zeer snel uitdoven. Een willekeurige beginvoorwaarde kan bij deze bijzondere oplossing niet gegeven worden. In de volgende formules is de horizontale coördinaat zo gelegd, dat bij de open leidingen geldt:  $x = \pm L/2$ . Na substitutie van  $h = XT$  in (117) wordt door invoering van een parameter  $\alpha^2$  op de bekende manier de partiële differentiaalvergelijking in twee gewone differentiaalvergelijkingen overgebracht. Uit deze gewone differentiaalvergelijkingen kunnen  $x(X)$  en  $T(t)$  langs elementaire weg worden opgelost.

$$x(X) = \sqrt{\frac{3X(0)}{2\alpha^2}} \int_{\frac{X}{X(0)}}^1 \frac{\xi d\xi}{\sqrt{1-\xi^3}} \quad (118)$$

$$T(t) = \frac{1}{\frac{\alpha^2 k t}{\mu} + 1} \quad (119)$$

Wegens  $T(0) = 1$ , volgt nu onmiddellijk  $X(0) = h(0, 0)$ . Verder volgt door sub-

\*) Indien men in alle termen van deze differentiaalvergelijking een constante  $D$  substitueert, kan zonder verdere vereenvoudigingen een oplossing met Bessel-functies gevonden worden. Evenals bij de behandeling van de stationaire grondwaterstromingen wordt een niet-horizontale ondoorlatende laag bij de niet-stationaire stromingen buiten beschouwing gelaten.

stitutie van  $x = \pm L/2$  en  $X/X(0) = 0$  in (118) voor  $\alpha^2$  een zekere uitdrukking, die zowel in (118) als in (119) gesubstitueerd kan worden:

$$x(X) = 0,58 L \int_{\frac{X}{X(0)}}^1 \frac{\xi d\xi}{\sqrt{1 - \xi^3}} \quad (120)$$

$$T(t) = \frac{1}{\frac{4,45X(0)kt}{\mu L^2} + 1} \quad (121)$$

Voor  $x = 0$  kan vervolgens worden afgeleid:

$$h(0, t) = \frac{h(0, 0)}{\frac{4,45h(0, 0)kt}{\mu L^2} + 1} \quad (122)$$

De drainerende stroomsterkte voor  $x = \pm L/2$  kan worden afgeleid door differentiëren van (118) of (120):

$$\begin{aligned} q \left( \pm \frac{L}{2}, t \right) &= -k \left\{ h \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right\}_{\pm \frac{L}{2}} = \\ &= \frac{k}{0,58L} \left\{ \frac{h(0, 0)}{\frac{4,45h(0, 0)kt}{\mu L^2} + 1} \right\}^2 = 1,72 \frac{kh^2(0, t)}{L} \end{aligned} \quad (123)$$

Evenals bij de afleiding van formule (63) kan men in plaats van een constante doorlatendheid een lineaire afhankelijkheid van de verticale coördinaat veronderstellen ( $k = z/a$ ). Een afleiding gelijksoortig aan die, waaruit de formules (118) ... (123) zijn voortgekomen, leidt nu tot de volgende vergelijkingen:

$$x(X) = 0,42L \int_{\left\{ \frac{X}{X(0)} \right\}^2}^1 \sqrt{\frac{\xi}{1 - \xi^2}} d\xi \quad (124)$$

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{2,88 \frac{t}{\mu a} \left\{ \frac{X(0)}{L} \right\}^2 + 1}} \quad (125)$$

$$h(0, t) = \frac{h(0, 0)}{\sqrt{2,88 \frac{t}{\mu a} \left\{ \frac{h(0, 0)}{L} \right\}^2 + 1}} \quad (126)$$

$$q \left( \pm \frac{L}{2}, t \right) = 0,6 \frac{h^3(0, t)}{aL} \quad (127)$$

Indien  $D \neq 0$ , dan kan men door substitutie aantonen dat een oplossing van (117) in de vorm van  $h = X(x) T(t)$  in het algemeen niet mogelijk is. In het vorige hoofdstuk werd reeds opgemerkt, dat het daarom gebruikelijk is de problemen te benaderen door zo vaak als mogelijk een constante laagdikte in te voeren en een constante bergingscoëfficiënt te veronderstellen. Als  $D_{\min}/D_{\max} < 3/4$ , dan kan de veronderstelling van een constante  $D$  tot belangrijke fouten voeren. Hierbij moet echter niet worden vergeten, dat dit meestal voorkomt bij dunne watervoerende lagen, in welke gevallen de onverzadigde zone naar verhouding een vrij belangrijke bijdrage kan leveren tot het geleidend vermogen voor horizontale grondwaterstromingen. Aan dit effect is in meerdere publikaties aandacht besteed en daaruit is gebleken, dat de onverzadigde zone in transporterend vermogen gelijk staat met een verzadigde zone van 10 tot 50 cm dikte. (AVERYANOV, 1949; SWARTZENDRUBER and KIRKHAM, 1956; BOUWER and LITTLE, 1959). De diepte van het freatisch oppervlak doet hier vrijwel niets aan toe of af, daar de doorlatendheid vanaf een hoogte  $\Psi_0$  boven het freatisch oppervlak naar boven toe zeer snel afneemt. In gescheurde kleigrond, welke naast de scheuren alleen zeer kleine poriën heeft, moet  $\Psi_0$  zeer klein zijn. Verder kan hier opgemerkt worden, dat bij toenemende  $\Psi_0$  het oppervlak, waardoor het water uittreedt, vrijwel niet verandert en de radiale weerstand dus relatief belangrijker wordt. Hieruit volgt, dat de gevallen met een effectieve verhouding  $D_{\min}/D_{\max} < 3/4$  en duidelijke afwijkingen van het vrijwel lineaire verband tussen  $A$  en  $h(0) - h_0$ , wat in de praktijk verwacht mag worden bij een vrijwel constante  $D$ , zeldzamer moeten zijn, dan men zou verwachten door alleen af te gaan op de dikte van de watervoerende laag onder het freatisch oppervlak. Daar men echter afvoermetingen bij voorkeur gedaan heeft bij gescheurde kleigrond met een grotere doorlatendheid door de scheuren in de minst diepe lagen, waardoor  $h(0) - h_0$  eenzelfde grootte-orde heeft als de werkelijke of effectieve  $D$  (soms zelfs  $D_0 = 0$ ), vindt men in de meeste publikaties waarin metingen van  $h(0) - h_0$  en de afvoer  $A$  vermeld worden, een kromlijinig verband analoog aan (63) of (66) (HOOGHOUDT, 1937; VAN DER MOLEN, 1955; WESSELING, 1957; TALSMA and HASKEW, 1959).

In die gevallen dat een constante laagdikte niet meer mag worden aangenomen, tracht men bij de berekening wel een uitweg te vinden door te veronderstellen, dat het werkelijke verloop gezien mag worden als een opeenvolging van quasi-stationaire toestanden (MAILLET, 1905; VISSER, 1953). Men neemt hierbij aan, dat de vorm van de grondwaterspiegel op elk tijdstip met voldoende benadering weergegeven kan worden door een functie met een klein aantal (1 of 2) uitsluitend van  $t$  afhankelijke parameters. Een uitvoerige behandeling van deze methode volgt in hoofdstuk III.7.

Tot nu toe werd gedaan, alsof het superponeren altijd mag worden toegestaan mits de hoogteverschillen in de grondwaterspiegel klein zijn in verhouding tot de gemiddelde  $D$ . Zou men echter gebruik willen maken van de grondwaterstroming welke zich ontwikkelt vanuit een horizontale begintoestand van het freatisch opper-

vlak met een peil in de open leidingen dat een constant bedrag  $H$  hoger of lager ligt, om hieruit door superponeren andere grondwaterstromingen te willen berekenen, dan blijkt dat veel grotere onnauwkeurigheden ontstaan. Dit volgt reeds uit de relatief belangrijke verschillen in de randvorm in de omgeving van de open leiding bij verschillende waarden van  $H$ . Voor een bepaling van  $q_0$  in de begintoestand is het nodig de oplossing van de differentiaalvergelijking van Laplace te zoeken in een gebied met randvoorwaarden zoals bijvoorbeeld afgebeeld in figuur 39. In een dergelijk geval stelt men zich voor, dat bij een horizontale begintoestand met zowel  $h(x, 0) = 0$  als  $h_0 = 0$  een momentane verandering van het peil van de open leiding mogelijk is.

De voortplanting van drukveranderingen in water gaat volgens de elasticiteits-theorie zo snel, dat dit effect praktisch onder alle omstandigheden mag worden verwaarloosd. Ook bij een plotselinge peilverandering van het open water kan daarom, evenals bij voorafgaande afleidingen, een onmiddellijke aanpassing aan de nieuwe randvoorwaarden voor de begintoestand worden aangenomen.

Vervolgens moet wel rekening gehouden worden met het feit dat in het onderhavige geval de verzadigde zone met onderdruk boven het freatisch oppervlak, van veel meer invloed is op de stroomsterkte  $q_0(t)$  dan bij de stationaire toestanden, welke in de hoofdstukken II.1 en II.2 werden behandeld. De bovenkant van deze zone met onderdruk  $\rho g \Psi_0$  (positieve waarde) is een horizontaal aequipotentiaalvlak, van waaruit de stroming gedacht kan worden te beginnen of te eindigen. Indien  $\Psi_0 + H > 0$  (bij peilverhoging is  $H$  negatief), hebben het beschouwde vlak ( $z = \Psi_0$ , dus  $\Phi = \rho p + \rho g z = 0$ ) en de natte omtrek (potentiaal  $\Phi = -\rho g H$ ) geen punt gemeen en volgt hieruit dus een eindige stroomsterkte  $q_0(0)$ . Hierbij doet het er niet toe, dat volgens de potentiaal-theorie in de snijlijn van de open waterspiegel en talud en in de hoeken van de bodem oneindig grote snelheden moeten voorkomen (zie hoofdstuk II.2). In de figuren 25 en 26 is onmiddellijk te zien, dat in kleine gebiedjes rondom het kleine aantal punten, waar  $v = \infty$  kan zijn, slechts een beperkte doorvoer kan bestaan en  $q_0$  dus niet oneindig groot kan zijn. Bovendien kan hier nog aangevoerd worden, dat bij hoge potentiaalgradiënten de snelheid kleiner is dan bij gebruik van een constante  $k$  uit de wet van Darcy volgt.

Op grond van het voorgaande kan echter nog niet uitgesloten worden, dat bij  $\Psi_0 - H < 0$  zeer grote waarden voor  $q_0(0)$  behoren, daar in de begintoestand over het bovenste gedeelte van het natte talud de afstand van het open water tot de onverzadigde grond gelijk nul aangenomen wordt en de potentiaalgradiënt op deze plaats dus met een oneindig grote waarde begint. De intensiteit van de invoer daalt hier echter zo snel (zie PHILIP, 1957, pag. 331), dat na 1 dag het verschil in  $q_0$  (afgezien van het teken) voor een infiltrerende of drainerende leiding bij eenzelfde maar tegengestelde  $H$  en eenzelfde natte omtrek  $B$  niet groot meer kan zijn. Het gehele effect komt dan neer op verschillen in de vorm van de rand (freatisch oppervlak of bovenzijde verzadigde zone met  $p < 0$ ) en zal daarom wat grootte-orde betreft, vermoedelijk vergeleken kunnen worden met het verschil in figuur 24 getoond.

Uit een aantal steekproeven met de vierkantjesmethode werd afgeleid, dat bij homogene pakketten (en vermoedelijk ook bij niet al te uitgesproken heterogeniteit) met taluds 1:1 en  $\Psi_0 - H > 0$  de volgende empirische formule een goede eerste

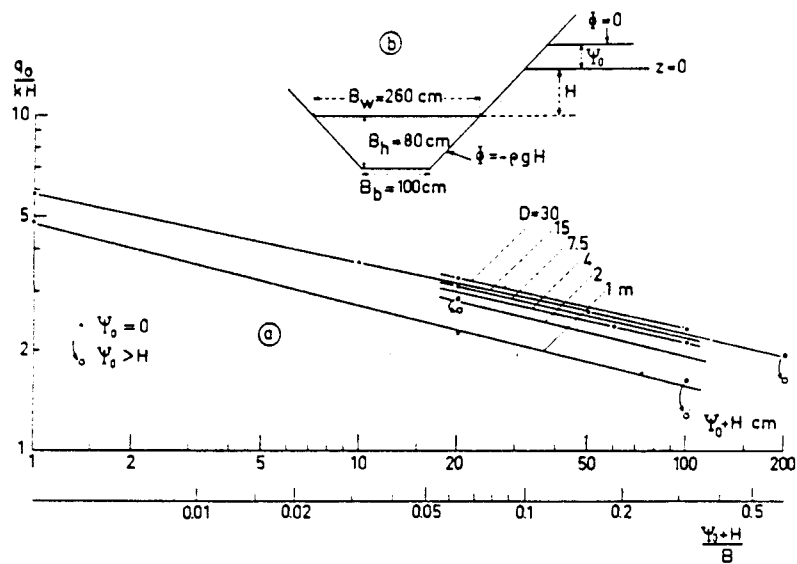


FIG. 39. De stroomsterkte  $q_0$  bij een horizontaal freatisch oppervlak gelegen op een hoogte  $H$  boven het peil van de open leiding is niet evenredig met  $H$ , maar  $q_0/kH$  neemt iets af bij toenemende  $H$ . De grafische voorstelling geldt voor open leidingen met vaste afmetingen, zoals aangegeven in de figuur en is ook bruikbaar bij omkering van de stromingsrichting ( $H < 0$ ), mits  $\Psi_0 - H > 0$

*The outflow intensity  $q_0$  in the case of a horizontal phreatic surface at an elevation  $H$  above the level of an open conduit is not proportional to  $H$ , but  $q_0/kH$  decreases slightly with increasing  $H$ . The graph is valid for open conduits with dimensions as indicated in the figure and is also usable for a reversed flow direction ( $H < 0$ ), provided  $\Psi_0 - H > 0$*

benadering vormt (zie fig. 39);  $q_0/kH$  bleek duidelijk van  $H$  afhankelijk te zijn, zodat in het onderzochte geval het superponeren niet zonder meer mag worden toegestaan, zoals trouwens te verwachten was.

$$q_0(0) = 1.5 kH \left( \frac{B}{\Psi_0 + H} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (128)$$

Door aan  $B$  een factor  $\sin \alpha$  voor de helling van het talud toe te voegen zou de algemene toepasbaarheid van formule (128) bevorderd worden. Voor praktisch gebruik zou het echter veel gemakkelijker zijn (128) te vervangen door een formule, waarin de radiale weerstand voorkomt:

$$q_0(0) = \frac{h \left( \frac{L}{2}, 0 \right) - h_0(0)}{w} \quad (129)$$

Toevallig komt deze laatste formule in het praktisch belangrijke gebied waar (128) geldig is, nog niet zo heel slecht uit. De fout in de laatste formule is namelijk kleiner dan een factor 3 in het volgende gebied:

$$\frac{1}{30} < \frac{\Psi_0 + H}{B} < 1 \quad \frac{1}{4} < k_1 w < \frac{3}{4}$$

In het homogene pakket kan de laatste voorwaarde anders geschreven worden:

$$\frac{1}{30} < \frac{\Psi_0 + H}{B} < 1 \quad 2 < \frac{D}{B} < 10$$

Wil men rekening houden met de tijdsduur van de 'plotselinge' verandering in  $h_0$ , dan kan men dit doen door een groot aantal kleine sprongen in  $h_0$  te veronderstellen en de bijbehorende oplossingen te superponeren, hoewel het superponeren door de variabele vorm van het freatisch oppervlak feitelijk niet toelaatbaar is. Bij kleine  $H$  zal in de praktijk aan de eerste ongelijkheid vrijwel altijd worden voldaan. In het veld zijn te weinig metingen gedaan, om te kunnen beoordelen in hoeverre de tweede ongelijkheid aanvaard mag worden; volgens figuur 14 is 0,5 als grootte-orde voor  $k_1 w$  wel aanvaardbaar. Door het superponeren van een groot aantal, in de tijd snel op elkaar volgende stappen met kleine  $H$  of door een integratie moet de maximale fout in de resulterende  $q_0$  belangrijk kleiner zijn dan een factor 3. Uit de continuïteit van  $h_0(t)$  mag men dan toch niet tot een verdwijnen van de fout besluiten, hetgeen duidelijk wordt door toepassing van vergelijking (130) met voor  $dh_0/d\tau$  een constante waarde over de korte tijdsduur, dat  $h_0(\tau)$  verandert en verder  $dh_0/d\tau$  gelijk nul.

$$h(x, t) = \int_{-\infty}^t \frac{dh_0}{d\tau} \eta(x, t - \tau) d\tau \quad (130)$$

Hierbij dient  $\eta$  gelijk gesteld te worden aan  $h^+/H$  en wordt onder  $h^+$  verstaan de oplossing, die voldoet aan een horizontale begintoestand  $h^+(x, 0) = 0$  met vanaf  $t = 0$  een afwijkend constant peil  $H$  in de open leidingen.

Voor een intensieve regenperiode van zeer korte duur geldt hetzelfde, zoals uit (131) afgeleid kan worden:

$$h(x, t) = \frac{1}{\mu} \int_{-\infty}^t N(\tau) \{1 - \eta(x, t - \tau)\} d\tau \quad (131)$$

Hoewel de voorgaande rekenmethode zeker niet ideaal mag worden genoemd, is dit voorlopig als een uitweg te beschouwen, die zelfs aanbevolen moet worden gezien de goede resultaten die men met het begrip radiale weerstand in andere gevallen kan bereiken. Door de radiale weerstand te verwaarlozen krijgt men immers voor  $t = 0$  een oneindig grote waarde voor  $q_0$  en voor grotere waarden van  $t$  ook min of meer te grote uitkomsten. Het onderhavige probleem is van belang bij plotselinge veranderingen in het peil van de open leidingen en bij veranderingen in grondwaterstand aan het begin en aan het einde van een regenperiode, welke veranderingen worden versterkt door de hysteresis in het verband tussen vochtgehalte en vochtspanning.



### III.3. SUPERPONEERBARE OPLOSSINGEN VAN DE VORM $h(x, z, t)$ OF $h(x, y, t)$

Zoals reeds in het begin van hoofdstuk II.1 bij de behandeling van grondwaterstromingen tussen evenwijdige open leidingen werd vastgesteld, wijkt de stroming in vele gevallen duidelijk af van de horizontale richting. Benaderingsformules als (108), (116) en (117) mogen dan feitelijk niet meer worden gebruikt. Wordt, evenals in de beide vorige hoofdstukken, afgezien van de invloed van de samendrukbaarheid van vloeistof en korrelskelet, dan houdt dit feitelijk in dat aangenomen wordt dat de snelheid waarmee de druk van de vloeistof zich door het gehele medium heen aan de randvoorwaarden tracht aan te passen, zo groot is en de dichtheidsveranderingen zo klein zijn, dat op elk ogenblik de toestand bij gegeven, van de tijd afhankelijke, randvoorwaarden als quasi-stationair mag worden beschouwd. De differentiaalvergelijking van Laplace blijft geldig, zoals in hoofdstuk I.1 reeds werd uiteengezet.

De moeilijkheid is nu in het algemeen, dat een oplossing van de differentiaalvergelijking van Laplace wordt gevraagd (met in deze differentiaalvergelijking  $x$  en  $z$  als onafhankelijke variabelen), terwijl de randvoorwaarden langs het freatisch oppervlak slechts impliciet gegeven en van de tijd afhankelijk zijn. Bij een vrijwel horizontaal freatisch oppervlak moet de gezochte functie  $h(x, z, t)$  zodanig zijn, dat langs het freatisch oppervlak wordt voldaan aan:

$$v_1 = -k \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)_{z=D} = \mu \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right)_{z=D} \quad (132)$$

In (132) werd het freatisch gelegd bij  $z = D$ , daar dit voor het volgende geval een eenvoudigere schrijfwijze mogelijk maakt. Als bijzondere oplossing in het verticale vlak van een grondwaterstroming met exponentiële demping kan namelijk de volgende uitdrukking worden gebruikt:

$$h(x, z, t) = h(0, 0, 0) \cos \frac{\pi x}{L} \cosh \frac{\pi z}{L} e^{-ft} \quad (133)$$

Door substitutie kan worden bewezen, dat (133) aan de differentiaalvergelijking van Laplace voldoet. Daar de gegeven vergelijking symmetrisch is in  $z$ , moet de  $x$ -as samenvallen met een ondoorlatende laag. Wegens de cosinus volgt uit (133), dat  $h(\pm L/2, z, t) = 0$ , zodat deze vergelijking toegepast kan worden op de symmetrische drainage in een verticaal rechthoekig gebied (zie fig. 40). Uit (133) en de differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann volgt als stroomfunctie:

$$\psi(x, z, t) = -kh(0, 0, 0) \sin \frac{\pi x}{L} \sinh \frac{\pi z}{L} e^{-ft} \quad (134)$$

Na substitutie van (133) in (132) volgt voor de coëfficiënt  $f$ :

$$f = \frac{\pi k}{\mu L} \operatorname{tgh} \frac{\pi D}{L} \quad (135)$$

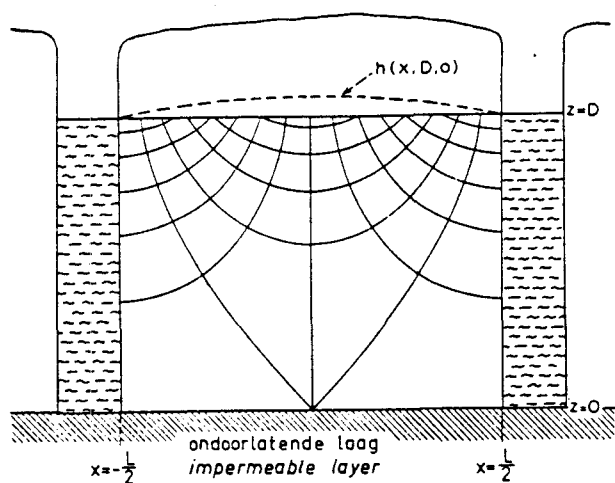


FIG. 40. Stroomlijnen en aequipotentiallijnen bij een grondwaterstroming met exponentiële demping uitgaande van een begintoestand met sinusvormige grondwaterspiegel, welke slechts zeer weinig afwijkt van  $z = D$   
*Streamlines and equipotential lines in a special case of groundwater flow with exponential damping and a sinusoidal phreatic surface, which for  $t = 0$  differs only very little from  $z = D$*

Door superponeren van een oneindige reeks van oplossingen analoog aan (133), waarbij  $L$  in elke term van de reeks vervangen wordt door  $\lambda_n = L/(2n + 1)$ , kan men een oplossing samenstellen die voldoet aan een begintoestand  $h(x, D, 0) = H$  en  $h(\pm L/2, z, 0) = 0$ . Bij deze begintoestand volgt een oneindig grote stroomsterkte  $\psi(\pm L/2, D, 0)$ , hetgeen bij infiltratie mogelijk wel, maar bij drainage in ieder geval niet goed kan zijn, zoals in het vorige hoofdstuk werd aangetoond. In de praktijk gaat het om de gemiddelde waarde van  $q_0$  over een korte periode beginnend met  $t = 0$ , hetgeen een eindige uitkomst oplevert, van welke formule men ook uitgaat. Hieruit volgt echter wel, dat deze gemiddelde uitkomst te hoog zal zijn, als ten onrechte voor  $t = 0$  een oneindig grote waarde en dus ook voor aansluitende kleine  $t$  te grote waarden genomen worden.

De oplossing van een harmonisch fluctuerende grondwaterstroming met  $N = N_0 \cos \omega t$  en met een constant peil in de open leidingen werd niet langs directe weg gevonden, maar wel door toepassing van (131):

$$h = \frac{4N_0}{\pi\mu} \sum_0^{\infty} (-1)^n \cos \frac{(2n+1)\pi x}{L} \frac{\cosh \frac{(2n+1)\pi z}{L}}{\cosh \frac{(2n+1)\pi D}{L}} \frac{f_n \cos \omega t - \omega \sin \omega t}{(2n+1)(f_n^2 - \omega^2)}$$

$$\text{met } f_n = \frac{(2n+1)\pi k}{\mu L} \operatorname{tgh} \frac{(2n+1)\pi D}{L} \quad (136)$$

Een bezwaar van deze oplossingen is, dat de radiale stromingscomponent verwaarloosd wordt. Om hiermee rekening te houden zou men een gelijksoortige ontleding als in figuur 7 kunnen toepassen. Om te beginnen zal een oplossing gezocht worden, die van de tijd afhangt volgens  $\exp(-ft)$ , zodat deze factor in alle vergelijkingen mag worden weggelaten. De afhankelijk variabelen stellen dan begintoestanden voor. De som van de verticale en horizontale stromingscomponent wordt aangeduid door een enkel accent; de radiale stromingscomponent wordt aangeduid door een dubbel accent.

Langs het vrijwel horizontaal gedachte freatische oppervlak geldt  $\psi'' = 0$  en dus:

$$\dot{\psi} = \psi' = kD \frac{dh'}{dx} \quad (137)$$

De verticale stroomsterkte in het freatische oppervlak is evenredig met  $h$ . Om hieraan te voldoen wordt in (138) een evenredigheidsfactor  $a^2kD/L^2$  opgenomen, waarbij  $a$  een dimensieloze coëfficiënt voorstelt die voorlopig nog onbekend is.

$$\frac{d\dot{\psi}}{dx} = -\frac{a^2kD}{L^2} (h' + h'') \quad (138)$$

Langs het freatisch oppervlak kan voor  $h''$  een functie van  $x$  gesubstitueerd worden, indien aangenomen mag worden, dat  $D/L < 0,3$ . Alleen dan wordt met redelijke benadering in de eerste deeloplossing een constante flux  $d\dot{\psi}/dz$  op de verticaal door het drainagecentrum gevonden, is dus ook  $d\dot{\psi}''/dz$  constant en kan van formule (18) gebruik worden gemaakt. Voor de helft van het beschouwde gebied ( $0 \leq x \leq L/2 + r_0$ ; de open leidingen bij  $\pm L/2$ ) geldt dan:

$$h'' = \frac{2\dot{\psi}_0}{\pi k} \ln \frac{1 - e^{-\frac{\pi(L-2x)}{2D}}}{1 - e^{-\frac{\pi r_0}{D}}} \quad (139)$$

Uit (137), (138) en (139) volgt nu een gewone differentiaalvergelijking van de tweede orde. Vervangt men (139) door een machtreeks of door een Fourier-reeks dan is ook bij oneindig veel termen een integratie term voor term toegestaan, als in het integratiegebied elke term continu en de reeks uniform convergent is. Wordt de functie (139), eventueel na een oneindig aantal spiegelingen ten opzichte van  $x = 0$  en  $x = L/2$ , vervangen door een reeks met uitsluitend cosinustermen geldend voor het interval  $-(L/2 - r_0) \leq x \leq L/2 - r_0$ , dan ontstaat uit (137), (138) en deze reeks de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2h'}{dx^2} = -\frac{a^2}{L^2} \left\{ h' - \frac{2\dot{\psi}_0}{\pi k} \sum_{n=1,3,\dots} b_n \cos \frac{n\pi x}{L-2r_0} \right\} \quad (140)$$

De oplossing (141) heeft behalve de coëfficiënten  $b_n$  nog twee coëfficiënten, welke nader bepaald moeten worden en wel  $A$  en  $a$ :

$$\frac{\pi kh'}{2\dot{\psi}_0} = A \cos \frac{ax}{L} + \sum_{n=1,3,\dots} \frac{b_n}{\left\{ \frac{n\pi L}{a(L-2r_0)} \right\}^2 - 1} \cos \frac{n\pi x}{L-2r_0} \quad (141)$$

Wordt de coëfficiënt  $A \neq 0$  genomen, dan volgt uit de randvoorwaarde  $h = 0$  bij  $x = \pm \frac{1}{2} (L - 2r_0)$ , dat voor  $a$  dezelfde waarden zouden gelden als bij een zuiver horizontale stroming, hetgeen niet juist kan zijn. Wordt  $A = 0$  genomen, dan moeten

de wortels voor  $a$  worden afgeleid uit de tweede randvoorwaarde  $dh'/dx = \mp \psi_0/kD$  bij  $x = \pm 0,5(L - 2r_0)$ .

$$\frac{2D}{L - 2r_0} \sum_{n=1,3,\dots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{nb_n}{\left\{ \frac{n\pi L}{a(L - 2r_0)} \right\}^2 - 1} = 1 \quad (142)$$

Uit (142) kan gemakkelijk worden afgeleid, dat het aantal reële wortels voor  $a^2$  gelijk is aan het aantal termen, dat in het linkerlid is opgenomen. Een oplossing van deze wortels kan altijd langs grafische weg verkregen worden. Uit de definitie van  $a$  volgt, dat naarmate  $a^2$  groter is, de oplossing sneller uitdempt. De wortels met de laagste waarden zijn dus het belangrijkste. Om te bepalen hoe sterk de demping is, moet van (138) gebruik gemaakt worden. Uit  $h = h_0 \exp(-ft)$  en  $d\psi/dx = \mu dh/dt$  volgt:

$$\mu f = \frac{a^2 k D}{L^2} \quad (143)$$

Toepassing van deze afleiding op hetzelfde geval als afgebeeld in figuur 41 geeft alleen voor de eerste wortel van  $f$  een goede overeenkomst met wat uit figuur 41 zal volgen. De tweede wortel geeft reeds een afwijking van 30%. De verklaring hiervan is te vinden in het feit, dat aan de opgegeven voorwaarde  $D/L < 0,3$  wel voldaan wordt bij de oplossing behorende bij de laagste wortel van  $a$ , maar dat  $D/L$  bij de verdere wortels vervangen moet worden door  $(2j - 1) D/L$  (wortels naar toenemende grootte te nummeren met de gehele positieve getallen  $j$ ) en deze grootte dan niet meer kleiner is dan 0,3. De grootte-orde van de gevonden afwijkingen komt overeen met wat gevonden wordt als de afleiding (132) ... (135) wordt vervangen door een gelijksoortige afleiding bij een zuiver horizontale stroming onafhankelijk van  $z$ .

Daar het vinden van een oplossing in de vorm  $h(x, z)e^{-ft}$  langs analytische weg niet zo eenvoudig is, kan men ook trachten door middel van vierkantjesmethode, relaxatie-methode of modelonderzoek van stationaire toestanden en met toepassing van successieve correcties tot een aanvaardbare benadering te komen. De vierkantjesmethode werd gebruikt om het in figuur 41 gegeven voorbeeld af te leiden. In deze figuren, behalve die voor  $n = 1$  en steeds de directe omgeving van de open leidingen buiten beschouwing latend, zijn de formules (133) en (134) goed toepasbaar gebleken. Met vijf van deze in redelijk korte tijd samen te stellen figuren kan men reeds een goede benadering krijgen van de stroming die van een gegeven begintoestand uitgaat, en bij  $N = 0$  uitdempt tot een horizontale toestand. Volgens het bekende principe moet men uit de 5 deeloplossingen in figuur 41 een lineaire combinatie samenstellen, welke in het algemeen in niet meer dan vijf punten met de gegeven begintoestand overeenkomt. Wordt als begintoestand de stationaire toestand bij constante  $N$  gebruikt, welke in figuur 42 is afgebeeld, dan kan men aan de hand van deze figuren gemakkelijk nagaan dat het in dit geval weinig uitmaakt voor welke waarden van  $x$

niet eenduidig zijn, maar respectievelijk 2 randvoorwaarden en 1 randvoorwaarde nog willekeurig zijn. Als eerste deeloplossing kan (144) gebruikt worden. Voor de onderste grens van de integraal kan een willekeurige tijd  $t_0$  genomen worden. Door een verandering van  $t_0$  wordt slechts een constante aan (144) toegevoegd. Als bijzondere tijden kan men dikwijls  $t_0 = -\infty$  of  $t_0 = 0$  nemen.

$$h'(x, t) = \frac{1}{\mu} \int_{t_0}^t N(\tau) d\tau \quad (144)$$

De bijbehorende randvoorwaarden zijn:

$$h_0'(t) = \frac{1}{\mu} \int_{t_0}^t N(\tau) d\tau \quad (145)$$

$$A'(t) = \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) NB_w \quad (146)$$

$$h_0'(0) = h'(x, 0) = \frac{1}{\mu} \int_{t_0}^0 N(\tau) d\tau \quad (147)$$

De overtollige neerslag  $N(t)$  is uit de tweede en derde deeloplossing geëlimineerd, zodat men bij evenwijdige open leidingen verder alleen met differentiaalvergelijking (148) te maken heeft.

$$kD \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (148)$$

Een zeer eenvoudige oplossingsmethode (GRÖBER, 1921) gaat via de substitutie van (149), in welke uitdrukking alle coëfficiënten complexe waarden mogen hebben:

$$h(x, t) = \Lambda e^{\alpha x + \gamma t} \quad (149)$$

Na substitutie kan men door deling onmiddellijk  $\Lambda \exp(\alpha x + \gamma t)$  verwijderen en men houdt dan een vergelijking met  $\alpha^2$  en  $\gamma$  over.

$$kD\alpha^2 = \mu\gamma \quad (150)$$

Vergelijking (150) heeft reële oplossingen voor  $\alpha$  bij positieve  $\gamma$ ; bij complexe  $\gamma$  wordt ook  $\alpha$  complex. Geen van deze uitkomsten heeft een praktische betekenis. Substitueert men voor  $\gamma$  een negatief getal met de bedoeling een oplossing met exponentiële demping te verkrijgen, dan wordt  $\alpha$  imaginair en men vindt voor  $h(x, t)$  een complexe oplossing. Een dergelijke oplossing kan echter even goed worden gebruikt, daar het reële deel en het imaginaire deel (met weglating van de coëfficiënt  $i$ ) ook aan (148) voldoen. Deze oplossing kan nu met twee onbepaalde coëfficiënten  $A$  en  $B$  als volgt geschreven worden:

$$h(x, t) = \left( A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} + B \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right) e^{-\frac{4\pi^2 kDt}{\mu\lambda^2}} \quad (151)$$

Indien men voor  $\gamma$  een zuiver imaginaire waarde substitueert, dan voldoet de oplossing aan een grondwaterstroming met harmonische fluctuatie; bij een periodeduur  $T$  geldt:  $\gamma = 2\pi i/T$ . Substitutie in (150) levert op:

$$kDT\alpha^2 = 2\pi\mu i \quad (152)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\pi\mu i}{kDT}} = (1 + i) \sqrt{\frac{\pi\mu}{kDT}} \quad (153)$$

Hieruit volgt voor  $h$  als reële oplossing:

$$h(x, t) = F_1 e^{\frac{x}{g}} \sin\left(\frac{x}{g} + \frac{2\pi t}{T}\right) + F_2 e^{-\frac{x}{g}} \sin\left(-\frac{x}{g} + \frac{2\pi t}{T}\right) + \\ + G_1 e^{\frac{x}{g}} \cos\left(\frac{x}{g} + \frac{2\pi t}{T}\right) + G_2 e^{-\frac{x}{g}} \cos\left(-\frac{x}{g} + \frac{2\pi t}{T}\right) \quad (154)$$

$$\text{met } g = \pm \sqrt{\frac{kDT}{\pi\mu}}$$

In de praktijk zal men bovendien vaak symmetrie veronderstellen zowel ten opzichte van het midden van elk perceel waar  $x = 0$ , als ten opzichte van de open leidingen waar  $x = \pm L/2$ . De uitdrukkingen (151) en (154) geldig in het interval  $-L/2 \leq x \leq L/2$  kunnen dan eenvoudiger worden en wel respectievelijk:

$$h(x, t) = B \cos \frac{2\pi x}{\lambda} e^{-\frac{4\pi^2 kDt}{\mu\lambda^2}} \quad (155)$$

$$h(x, t) = F \left\{ e^{\frac{x}{g}} \sin\left(\frac{x}{g} + \frac{2\pi t}{T}\right) + e^{-\frac{x}{g}} \sin\left(-\frac{x}{g} + \frac{2\pi t}{T}\right) \right\} + \\ + G \left\{ e^{\frac{x}{g}} \cos\left(\frac{x}{g} + \frac{2\pi t}{T}\right) + e^{-\frac{x}{g}} \cos\left(-\frac{x}{g} + \frac{2\pi t}{T}\right) \right\} \quad (156)$$

De functie (156) kan als tweede deeloplossing gebruikt worden in die gevallen, dat voor  $h_0''(t)$  of  $A''(t)$  een harmonische functie gegeven is. Indien het gegeven een periodieke functie met continue eerste en tweede afgeleiden is, kan men hieruit een Fourier-reeks samenstellen en wordt voor elke term van deze reeks in de deeloplossing een functie als (156) opgenomen met een periode  $T_n = T/n$  en bijpassende coëfficiënten  $F_n$  en  $G_n$ . Indien  $h_0''(t)$  of  $A''(t)$  over een kort interval gegeven zijn, dan mag

men zonder bezwaar buiten dit interval een periodieke voortzetting veronderstellen. Bij  $h_0''(t)$ , die niet periodiek zijn, kan men met behulp van vergelijking (130) trachten een oplossing te vinden.

Met behulp van de functie (155) kan de derde deeloplossing samengesteld worden in die gevallen, dat gegeven is  $h_0'''(t) = 0$  of  $A'''(t) = 0$ . De gegeven beginvoorwaarde  $h''(x, 0)$  moet door een Fourier-reeks vervangen worden:

$$h''(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{2\pi x}{\lambda_n} \quad (157)$$

Hierbij moeten de  $\gamma_n$  zodanig gekozen worden, dat voor elke term voldaan is aan  $h_0'''(t) = 0$  ofwel  $A'''(t) = 0$ .

Indien gegeven  $h_0''(t) = Ce^{-ft}$ , dan geeft (155) onmiddellijk een oplossing, die hieraan voldoet, mits de positieve waarde van  $\lambda$ , die volgt uit  $f = 4\pi^2 k D / \mu \lambda^2$ , niet gelijk is aan een van de wortels  $\lambda_n$ , die voldoen aan  $h_0(t) = 0$ .

Indien daarentegen  $f = 4\pi^2 k D / \mu \lambda_n^2$ , dan is een oplossing, die voldoet aan  $h_0(t) = Ce^{-ft}$ , te vinden door differentiatie van (155) naar  $\lambda$ , waaruit na vervanging van  $B_n \Delta \lambda_n$  door  $-\frac{1}{2} \lambda_n B_n^*$  de volgende oplossing ontstaat:

$$h''(x, t) = B_n^* \left( \frac{\pi x}{\lambda_n} \sin \frac{2\pi x}{\lambda_n} + \frac{4\pi^2 k D t}{\mu \lambda_n^2} \cos \frac{2\pi x}{\lambda_n} \right) e^{-\frac{4\pi^2 k D t}{\mu \lambda_n^2}} \quad (158)$$

Deze bijzondere oplossing is echter ook te gebruiken met  $f \neq 4\pi^2 k D / \mu \lambda_n^2$  namelijk in die gevallen, dat voldaan moet worden aan een randvoorwaarde van de volgende vorm:  $h_0(t) = Cte^{-ft}$ . Aan (158) moet dan echter behalve een oplossing met exponentiële damping om de gewenste begintoestand te verkrijgen nog een vierde deeloplossing toegevoegd worden. De eerste term van (158) is immers oorzaak, dat nog niet volledig voldaan is aan de voorwaarde  $h_0(t) = Cte^{-ft}$ . Als vierde deeloplossing moet gebruikt worden:

$$h''''(x, t) = b_n \cos \frac{2\pi x}{\lambda_n} e^{-\frac{4\pi^2 k D t}{\mu \lambda_n^2}} \quad (159)$$

In symmetrische gevallen mag (162) toegepast worden, zodat de coëfficiënten kunnen worden afgeleid uit:

$$\begin{aligned} B_n^* \left( \frac{\pi L}{2\lambda_n} \sin \frac{\pi L}{\lambda_n} + \frac{2\pi k D w}{\lambda_n} \left( \sin \frac{\pi L}{\lambda_n} + \frac{\pi L}{\lambda_n} \cos \frac{\pi L}{\lambda_n} \right) \right) &= \\ &= b_n \left( \cos \frac{\pi L}{\lambda_n} - \frac{4\pi k D w}{\lambda_n} \sin \frac{\pi L}{\lambda_n} \right) \end{aligned} \quad (160)$$

Een differentiatie van vergelijking (156) naar  $g$  of naar  $\sqrt{T}$  heeft vermoedelijk weinig praktische betekenis.

Aan het begin van deze paragraaf werden bij de tweede randvoorwaarde drie mogelijkheden onderscheiden. Voor een eenduidige oplossing van het probleem is het nodig, dat ofwel het peil van de open leidingen  $h_0(t)$ , ofwel de afvoer uit de open leidingen per lengte-eenheid van deze open leidingen  $A(t)$ , ofwel een zekere betrekking tussen  $h_0(t)$  en  $A(t)$  gegeven is. Voor de verdere bewerking is het zeer verleidelijk om in het gebied waar de radiale stromingscomponent belangrijk wordt, dezelfde weg te volgen als bij de stationaire grondwaterstromingen, namelijk door te veronderstellen dat  $h(x, t)$  ook op kleine afstand van de open leidingen de stijghoogteverdeling van de horizontale stromingscomponent aangeeft en dat bij de open leiding moet gelden:

$$-kD \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{x \uparrow \pm \frac{L}{2}} + kD \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{x \downarrow \pm \frac{L}{2}} = \frac{h \left( \pm \frac{L}{2}, t \right) - h_0(t)}{w} \quad (161)$$

Bij de behandeling van symmetrische toestanden kan het linkerlid van (161) vereenvoudigd worden en in die vorm zal deze formule bij de hierna volgende gevallen a), b) en c) worden gebruikt.

a) Bij een gegeven  $h_0(t)$  krijgt de tweede randvoorwaarde zijn eenvoudigste vorm, daar deze voorwaarde nu uit slechts formule (162) bestaat.

$$h \left( \pm \frac{L}{2}, t \right) - h_0(t) = \mp 2 kDw \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{\pm \frac{L}{2}} \quad (162)$$

b) Indien inplaats van het peil van de open leiding de afvoer  $A(t)$  uit de open leiding is gegeven en  $h_0(t)$  dus niet meer vrij gekozen mag worden, dan is voor de oplossing van het probleem nodig, dat naast formule (162), die geldig blijft, de volgende voorwaarde wordt gebruikt:

$$\mp 2 kD \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{\pm \frac{L}{2}} = A(t) + B_w \frac{dh_0}{dt} \quad (163)$$

Indien  $A(t) = 0$ , dan is er geen stroming in de open leiding. Deze toestand komt vermoedelijk in de praktijk weinig voor, maar kan bij het oplossen van vraagstukken wel belangrijk zijn. Genoemde veronderstelling houdt in, dat er alleen tijdens en kort na een regenbui een belangrijke drainage door de open leidingen kan ontstaan. De stijging van het peil van het open water en de stijging van het freatisch oppervlak verhouden zich immers bij een momentane toevoer van neerslag als 1:1. Het evenwicht wordt echter snel benaderd wegens de relatief kleine berging in de open leiding. Randvoorwaarde (163) gaat dan over in:

$$\mp 2 kD \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{\pm \frac{L}{2}} = B_w \frac{dh_0}{dt} \quad (164)$$



c) De afvoer uit de open leidingen kan ook afhankelijk zijn van het peil in deze leidingen en bijvoorbeeld gegeven worden door de bekende empirische formule  $Q = CB_h^\gamma$  met voor de exponent  $\gamma$  een waarde gelegen tussen 1,5 en 2,5 (LINSLEY, KOHLER and PAULHUS, 1949). Voor de berekening van niet-stationaire grondwaterstromingen is het nodig deze betrekking in het te gebruiken interval bij benadering te vervangen door een lineaire betrekking:

$$A(t) = \frac{h_0(t)}{\Omega} \quad (165)$$

De tweede randvoorwaarde bestaat nu uit (162) en (166):

$$\begin{aligned} &= 2 kD \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{\pm \frac{L}{2}} = B_w \frac{dh_0}{dt} + \frac{h_0(t)}{\Omega} \end{aligned} \quad (166)$$

Bij toepassing op de tweede en derde deeloplossing gaat (166) respectievelijk over in:

$$\begin{aligned} &= 2 kD \left( \frac{\partial h''}{\partial x} \right)_{\pm \frac{L}{2}} = B_w \frac{dh_0''}{dt} + \frac{h_0' + h_0''}{\Omega} - A'(t) \end{aligned} \quad (167)$$

$$\begin{aligned} &= 2 kD \left( \frac{\partial h'''}{\partial x} \right)_{\pm \frac{L}{2}} = B_w \frac{dh_0'''}{dt} + \frac{h_0'''}{\Omega} \end{aligned} \quad (168)$$

In het geval b) veroorzaakt een gegeven  $N(t)$  geen moeilijkheden, als men dit gegeven eerst combineert met een aangenomen  $h_0 = 0$  en vervolgens de hieruit gevonden afvoer  $\mp 2 kD \partial h / \partial x$  met  $x = \pm L/2$  toevoegt aan de gegeven  $A(t)$ . Men kan echter eenvoudiger te werk gaan door formule (144) te gebruiken en daaruit volgt als tweede randvoorwaarde voor de tweede deeloplossing:

$$A''(t) = A(t) + \frac{1-\mu}{\mu} B_w N(t) \quad (169)$$

Formule (163) wordt nu vervangen door:

$$\begin{aligned} &= 2 kD \left( \frac{\partial h''}{\partial x} \right)_{\pm \frac{L}{2}} = B_w \frac{dh_0''}{dt} + A(t) + \frac{1-\mu}{\mu} B_w N(t) \end{aligned} \quad (170)$$

De werkelijke toevoer of onttrekking  $\pm B_w N(t)$  aan de open leiding door directe neerslag of door verdamping aan het vrije oppervlak is evenredig aan de tweede term van (169) maar wegens  $\mu \approx 0,05$  tot  $0,25$  wel belangrijk kleiner.

In het geval c) kan men eveneens de laatste weg volgen. Volgens (145) geldt echter  $h_0''(t) \neq 0$ , zodat de randvoorwaarde (167) bij de tweede deeloplossing overgaat in:

$$\mp 2 k D \left( \frac{\partial h''}{\partial x} \right)_{\pm \frac{L}{2}} = B_w \frac{dh_0''}{dt} + \frac{h_0''}{\Omega} + \frac{1}{\mu \Omega} \int_{t_0}^t N(\tau) d\tau + \frac{1-\mu}{\mu} B_w N(t) \quad (171)$$

De formules, waarin  $B_w$  voorkomt, zullen vooral belangrijk zijn, indien  $B_w$  niet zeer klein is ten opzichte van  $L$  en in grootte-orde gelijk aan  $D$ . Dit houdt in, dat de radiale weerstand relatief klein zal zijn en dat het aanbeveling verdient om voor deze gevallen onder  $L$  niet te verstaan de afstand tussen de open leidingen gerekend van hart tot hart, zoals tot nu toe werd gedaan, maar van rand tot rand (zie fig. 16 en fig. 44). De formules ondergaan hierdoor meestal geen verandering. Uitzonderingen hierop vindt men in (176) en (226)...(231), waar voor  $L$  de kleine waarde als in fig. 44 genomen moet worden. Deze wijziging in de betekenis van  $L$  heeft bovendien tot gevolg dat de veronderstelling, dat de grondwaterberging uit de horizontale stromingscomponent afgeleid kan worden, bij een sommering van  $-L/2$  tot  $L/2$  minder grote fouten met zich brengt.

Substitutie van de harmonische functie (156) in (162) met een gegeven harmonische  $h_0(t)$  legt aan  $T$  geen enkele beperking op. Steeds is de oplossing van de onbekende coëfficiënten  $F$  en  $G$  mogelijk door de coëfficiënten van  $\sin 2\pi t/T$  en  $\cos 2\pi t/T$  gelijk nul te stellen.

Om bij een harmonische fluctuatie met randvoorwaarde b) een harmonische oplossing te bereiken is het toegestaan, dat een van de beide functies  $N(t)$  en  $A(t)$  gelijk nul genomen wordt. In het geval c) moet voor  $N(t)$  een harmonische functie ongelijk nul genomen worden. De randvoorwaarden bij de open leidingen worden nu uitgedrukt door twee vergelijkingen respectievelijk (162) met (170) en (162) met (167) of (171). Men heeft echter nog twee vrijheidsgraden in de coëfficiënten  $a_0$  en  $b_0$ , die men verkrijgt door substitutie van:

$$h_0(t) = a_0 \sin \frac{2\pi t}{T} + b_0 \cos \frac{2\pi t}{T} \quad (172)$$

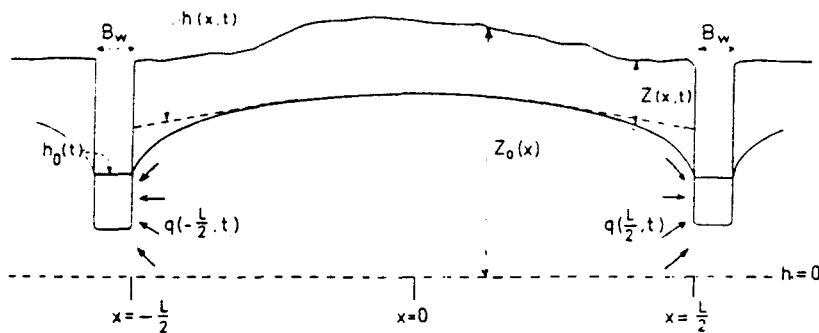


FIG. 44. Verklaring van de gebruikte symbolen bij de berekening van niet-stationaire symmetrische stromingen, waarbij de breedte  $B_w$  van de open leidingen van invloed is  
*Explanation of the symbols used in the calculation of symmetric non-steady state flow of groundwater in cases where the width  $B_w$  of the open conduits is of influence*

Door de coëfficiënten van sinus en cosinus aan nul gelijk te stellen verkrijgt men nu vier lineaire, niet-homogene vergelijkingen met als onbekenden  $F$ ,  $G$ ,  $a_0$  en  $b_0$ , waarvan de oplossing altijd mogelijk is.

Substitutie in de randvoorwaarden van een oplossing met exponentiële demping leidt steeds tot een vergelijking, waaruit een oneindig aantal oplossingen  $\lambda_n$  afgeleid kunnen worden. Periodieke functies voor  $h_0(t)$ ,  $N(t)$  of  $A(t)$  als gegeven zijn nu uitgesloten. De eenvoudigste oplossingen verkrijgt men, als voor  $h_0(t)$  en  $N(t)$  of  $A(t)$  en  $N(t)$  constante waarden gegeven zijn. Bij de randvoorwaarden a) en c) kan men de constante  $N$  altijd door een stationaire deeloplossing elimineren. Problemen met bijzondere functies, die wel een zekere demping echter niet volgens een  $e$ -macht geven, zijn in het algemeen evengoed als oplosbaar te beschouwen maar minder eenvoudig.

a) In het geval, dat voor  $h_0(t)$  een constante  $\neq 0$  geldt, vermindert men zowel  $h(x, t)$  als  $h_0(t)$  met dit bedrag en gaat daarmee over op een stelsel vergelijkingen met  $h_0 = 0$ . Door substitutie van (155) in (162) volgt dan:

$$\frac{4\pi k D w}{\lambda_n} = \cotg \frac{\pi L}{\lambda_n} \quad (173)$$

Indien  $w = 0$  en men nummert de wortels met gehele positieve getallen te beginnen met 1, dan geldt:

$$\lambda_n = \frac{2L}{2n-1} \quad (174)$$

b) In het geval dat voor  $A$  en  $N$  constante waarden gelden en  $N(L - B_w) = A$ , waarbij  $L$  genomen wordt als in figuur 44, dan wordt voor  $t \rightarrow \infty$  geen evenwichtstoestand benaderd. Wel vindt men een asymptotische nadering tot een deeloplossing

$$h'(x, t) = h'(x, 0) + (N - N')t\mu \quad (175)$$

waarbij

$$N' = \frac{\mu A + (1 - \mu)NB_w}{\mu L + B_w} \quad (176)$$

en  $h'(x, 0)$  de stationaire toestand is bij de door (176) gegeven overtollige neerslag  $N'$ . De uitdrukking (175) voldoet aan de differentiaalvergelijking en aan de gegeven  $N$  onafhankelijk van de waarde van  $N'$ . Dat door de keuze van (176) de afvoer inderdaad gelijk aan  $A$  is, kan gemakkelijk worden aangetoond door de afvoeren die corresponderen met de twee termen in het rechterlid van (175), te vermeerderen met dat gedeelte van de overtollige neerslag, dat direct terecht komt in de open leiding en gelijk is aan  $NB_w$ .

Voor de tweede deeloplossing moet dus naast  $N'' = 0$  ook  $A'' = 0$  gelden en bijgevolg moet formule (164) gebruikt worden. Verder moet  $h_0''(t)$  dezelfde  $e$ -macht hebben als  $h''(x, t)$ . Na substitutie van (155) in (162) en (164) en eliminering van de coëfficiënt van  $h_0''(t)$  vindt men als vergelijking voor  $\lambda_n$ :

$$\frac{4\pi k D w}{\lambda_n} - \frac{\mu \lambda_n}{\pi B_w} = \cotg \frac{\pi L}{\lambda_n} \quad (177)$$

Indien  $w = 0$ , dan geldt:

$$\cotg \frac{\pi L}{\lambda_n} = - \frac{\mu \lambda_n}{\pi B_w} \quad (178)$$

c) Substitutie van (155) en van  $h_0(t) = h_0(0) \exp\left(-\frac{4\pi^2 k D t}{\mu \lambda_n^2}\right)$  in (162) en (168) geeft:

$$B \cos \frac{\pi L}{\lambda_n} - h_0(0) = \mp 4\pi B \frac{k D w}{\lambda_n} \sin \frac{\pi L}{\lambda_n} \quad (179)$$

$$\mp 4\pi B \frac{k D}{\lambda_n} \sin \frac{\pi L}{\lambda_n} = - \frac{4\pi^2 k D}{\mu \lambda_n^2} B_w h_0(0) \mp \frac{h_0(0)}{\Omega} \quad (180)$$

$h_0(0)$  en  $B$  kunnen uit (179) en (180) worden geëlimineerd. Dit levert op:

$$\cotg \frac{\pi D}{\lambda_n} = \frac{\frac{4k D w}{L} \left(1 + \frac{w}{\Omega}\right) \frac{\pi L}{\lambda_n} - \left(\frac{4k D w}{L}\right)^2 \frac{B_w}{\mu L} \left(\frac{\pi L}{\lambda_n}\right)^3}{\frac{w}{\Omega} - \frac{4k D w B_w}{\mu L^2} \left(\frac{\pi L}{\lambda_n}\right)^2} \quad (181)$$

Indien  $w = 0$ , dan geldt:

$$\tg \frac{\pi L}{\lambda_n} = \frac{\mu \lambda_n^2 - 4\pi^2 k D \Omega B_w}{4\pi \mu k D \Omega \lambda_n} \quad (182)$$

Uit elk van de vergelijkingen (173), (177), (178), (181) en (182) kunnen langs grafische weg de wortels van  $\lambda$  in het gewenste aantal gevonden worden. Bij (173) en (178) kan men van de figuren 45a en b gebruik maken door in de bundel rechten door de oorsprong of door in de bundel hyperbolen met de assen als asymptoten de juiste lijn te interpoleren en vervolgens de snijpunten van deze lijn met de cotangens-kromme te bepalen. De wortels van deze vergelijkingen kan men echter ook vinden in tabellen in het reeds genoemde handboek van Carslaw en Jaeger (CARSLAW and JAEGER, 1959). Bij (177), (181) en (182) is de grafische oplossing iets minder eenvoudig, doordat in de algebraïsche vergelijking meer dan één nader te bepalen coëfficiënt voorkomt. In figuur 45c is een bijzonder geval van (181) afgebeeld. Daar hierbij verondersteld is dat  $4k D w = L$ , zijn in (183) slechts 2 constanten overgebleven:

$$z = \cotg y \quad z = y \frac{27 - y^2}{16 - y^2} \quad (183)$$

Uit de vergelijkingen (173), (177), (178), (181) en (182) kan men onmiddellijk afleiden, dat in elk van deze gevallen voor zeer grote waarden van  $n$  (nummering met

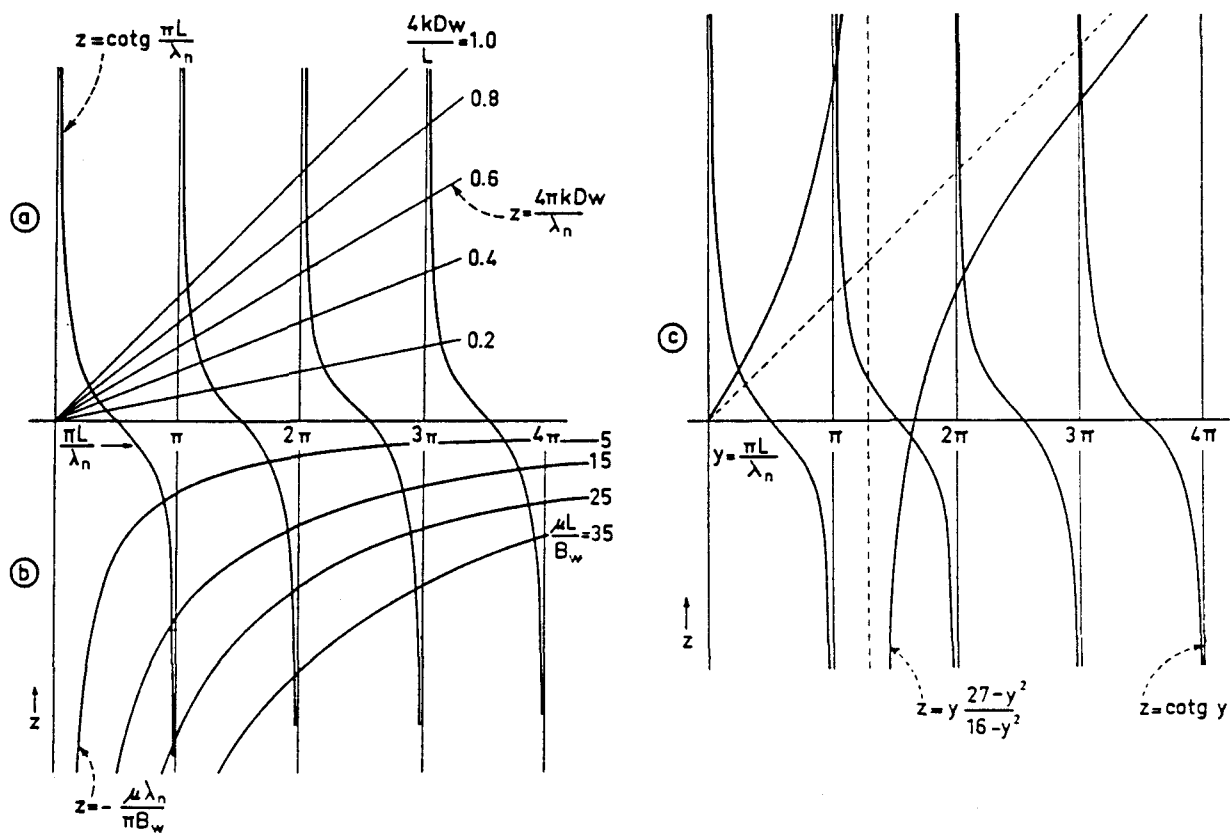


FIG. 45. Grafische oplossingen van de coëfficiënten  $\lambda_n$  bij symmetrische grondwaterstromingen met enkelvoudig exponentiële demping. a. Oplossing van vergelijking (173); b. Oplossing van vergelijking (178); c. Oplossing van vergelijking (183) als bijzonder geval van (181)  
*Graphical solution of the coefficients  $\lambda_n$  for symmetric groundwater flow with simple exponential damping. a. Solution of (173); b. Solution of (178); c. Solution of (183) as a special case of (181)*

gehele positieve getallen) de wortels van  $\lambda_n$  bij benadering gelijk gesteld mogen worden aan  $L/n$ . Bij deze beschouwing is voor  $D$  de werkelijke waarde ingevoerd. Evenals bij de stationaire symmetrische drainage in hoofdstuk II.1 behandeld (zie pag. 15 en fig. 13) en bij de niet-stationaire toestanden in hoofdstuk III.3 (zie pag. 85 en 86) heeft men bij kleine  $\lambda_n/D$  een zodanige afwijking van de horizontale stroming en tegelijk een zo lage stromingsintensiteit in de diepere lagen, dat men beter doet voor grote  $n$  niet de werkelijke  $D$  te substitueren maar een lagere waarde  $\approx 0.2 \lambda_n$ . Het is duidelijk dat dit op de vergelijkingen (174) en (178) geen invloed heeft. Bij de andere vergelijkingen nadert  $\lambda_n$  bij toenemende  $n$  iets langzamer tot nul, dan op grond van een berekening met constante  $D$  verwacht zou worden.

Door de gevonden waarden voor  $\lambda_n$  in (155) te substitueren en  $t = 0$  te nemen kan men een Fourier-reeks samenstellen, waarmee het mogelijk moet zijn wegens de voorlopig nog willekeurige coëfficiënten  $B_n$  aan praktisch elke gegeven begintoestand te voldoen. De bijbehorende oplossing (184) met samengesteld exponentiële demping kan op elk van de gevallen a), b) en c) toegepast worden.

$$h(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{2\pi x}{\lambda_n} e^{-\frac{4\pi^2 k D t}{\mu \lambda_n^2}} \quad (184)$$

Fig. 46 geeft een schematisch voorbeeld van de verschillen in de waarden van  $\lambda_n$  veroorzaakt door de randvoorwaarden behorende bij de gevallen a en b; men vindt in deze figuur de grondvorm van de eerste 5 termen van (184) met  $\lambda_n$ -waarden volgens (173) en (177).

De berekening van de coëfficiënten  $B_n$  voor het geval a) komt eveneens voor in de theorie der warmtegeleiding in vaste stoffen (GRÖBER, 1921; CARSLAW and JAEGER, 1959). Substitutie van  $t = 0$  in (184) met vervolgens vermenigvuldiging van beide leden met  $\cos 2\pi x/\lambda_m$  en integratie leidt tot de volgende vergelijking:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} h(x, 0) \cos \frac{2\pi x}{\lambda_m} dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left( \sum B_n \cos \frac{2\pi x}{\lambda_n} \right) \cos \frac{2\pi x}{\lambda_m} dx \quad (185)$$

Voor alle termen in het tweede lid met  $n \neq m$  geldt formule (186):

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos \frac{2\pi x}{\lambda_n} \cos \frac{2\pi x}{\lambda_m} dx = \frac{2}{\left(\frac{2\pi}{\lambda_n}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_m}\right)^2} \left( \frac{2\pi}{\lambda_n} \sin \frac{\pi L}{\lambda_n} \cos \frac{\pi L}{\lambda_m} - \frac{2\pi}{\lambda_m} \cos \frac{\pi L}{\lambda_n} \sin \frac{\pi L}{\lambda_m} \right)$$

Substitueert men (173) in (186), dan volgt onmiddellijk dat (186) gelijk nul wordt. Alleen in het geval dat  $m = n$ , blijft de volgende integraal over:

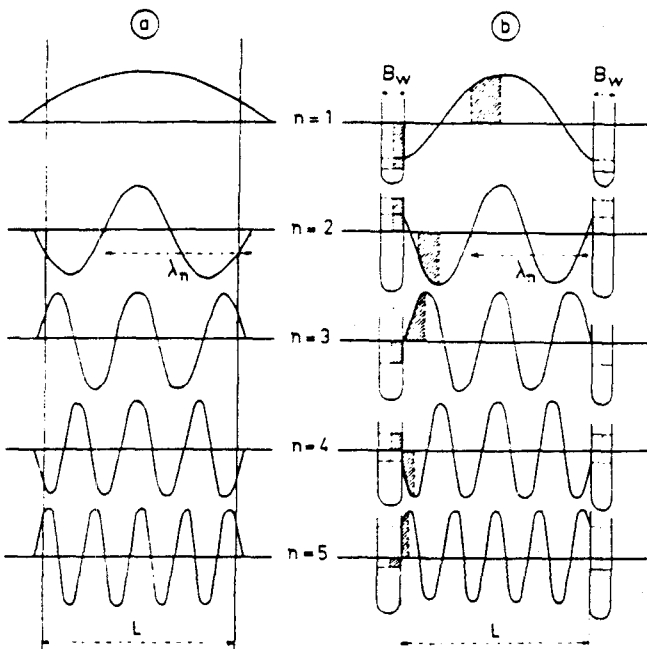


FIG. 46. Voorbeeld van de eerste vijf enkelvoudig harmonische vormen van het freatisch oppervlak, bij symmetrische grondwaterstromingen met enkelvoudigexponentiële demping. a. Wegens randvoorwaarde (162) volgen de wortels van  $\lambda$  uit formule (173); b. Wegens randvoorwaarde (164) volgen de wortels van  $\lambda$  uit formule (178)  
*Example of the first five single harmonic shapes of the phreatic surface for symmetric groundwater flow with single exponential damping. a. With boundary condition (162), the roots of  $\lambda$  follow from (173); b. With boundary condition (164), the roots of  $\lambda$  follow from (178)*

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda_n} dx = \frac{L}{2} + \frac{\lambda_n}{4\pi} \sin \frac{2\pi L}{\lambda_n} \quad (187)$$

$$B_n = \frac{\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} h(x, 0) \cos \frac{2\pi x}{\lambda_n} dx}{\frac{L}{2} + \frac{\lambda_n}{4\pi} \sin \frac{2\pi L}{\lambda_n}} \quad (188)$$

Indien de begintoestand gelijk is aan de stationaire toestand bij een overtollige neerslag  $N$ , dan geldt:

$$h(x, 0) = NLw + \frac{NL^2}{8kD} \left(1 - \frac{4x^2}{L}\right) \quad (189)$$

Substitutie van (189) in (188) en uitvoering van de integratie geeft:

$$B_n = \frac{N\lambda_n^3 \sin \frac{\pi L}{\lambda_n}}{4\pi^3 kD \left(\frac{L}{2} + \frac{\lambda_n}{4\pi} \sin \frac{2\pi L}{\lambda_n}\right)} \quad (190)$$

Indien  $h(x, 0)$  een constante waarde  $H$  heeft, dan volgt:

$$B_n = \frac{H\lambda_n \sin \frac{\pi L}{\lambda_n}}{\pi \left(\frac{L}{2} + \frac{\lambda_n}{4\pi} \sin \frac{2\pi L}{\lambda_n}\right)} \quad (191)$$

Uitgaande van dezelfde veronderstelling is voor de gevallen b) en c) een exacte afleiding van de coëfficiënten  $B_n$  wel mogelijk, zoals aangetoond door Van der Held, maar minder eenvoudig (VAN DER HELD, 1935). Hierop zal in hoofdstuk III.4c teruggekomen worden. Voor praktische toepassingen is een zeer nauwkeurige berekening van deze coëfficiënten minder belangrijk en kan men langs de volgende weg tot een bevredigende uitkomst komen. Men gaat ter vervanging van de gegeven begintoestand meestal niet verder dan een reeks bestaande uit 5 tot 10 termen. Als men bijvoorbeeld vergelijking (184) terugbrengt tot een reeks van vijf termen en alle verdere  $B_n$  gelijk nul neemt, dan kan men  $B_1, \dots, B_5$  berekenen door de verkorte functie in de punten  $\pm x = 1/18 L; 3/18 L; 5/18 L; 7/18 L$  en  $9/18 L$  aan de gegeven beginvoorwaarde gelijk te stellen. Door de symmetrie in  $x$  heeft men dan in 10 punten dekking met de gegeven functie en daarmee een redelijke benadering verkregen. Formeel moet dit

een zekere achteruitgang in nauwkeurigheid geven en wel vooral naarmate de  $B_n$ -reeks langzamer tot nul nadert.

Een langzaam convergerende  $B_n$ -reeks (zie form. 191) vindt men bijvoorbeeld bij een horizontale begintoestand met afwijkend peil in de open leidingen. Bij de beschouwingen in hoofdstuk III.2 van deze begintoestand is reeds gebleken, dat dan alleen formule (128) een goede nauwkeurigheid levert, terwijl de toepassing van radiale weerstanden bij de berekening van dergelijke toestanden slechts een benadering is. Dit houdt in, dat de onderhavige rekenmethode bij langzaam convergerende  $B_n$ -reeksen minder betrouwbaar is, hoeveel termen men uit de oneindige reeks ook zou opnemen.

Zoals in deze paragraaf reeds op pag. 99 werd opgemerkt, is het in principe bij grote  $n$  beter de waarden van  $\lambda_n$  te berekenen bij gewijzigde waarden van  $D$  en  $\omega$ . Dit heeft tot gevolg, dat de voorgaande afleidingen van  $B_n$  onbruikbaar worden. De gegeven begintoestand wordt dan door een andere reeks benaderd, waarbij echter evenals tevoren als onvolkomenheid aangevoerd kan worden, dat indien voor grote  $n$  niet geldt dat  $B_n$  veel kleiner is dan  $\lambda_n$  (bijv.  $B_n/\lambda_n < 0,1$ ) de afleidingen uit hoofdstuk II.1 voor de radiale weerstanden niet meer gebruikt mogen worden wegens de relatief grote hoogteverschillen in de  $n^e$  term van de reeks voor de begintoestand.

Naast deze fout, die alleen in extreme gevallen belangrijk kan zijn, moet er bovendien op gewezen worden, dat onder  $h(x, t)$  de stijghoogteverdeling van de horizontale stromingscomponent wordt verstaan en dus de bergingsveranderingen in het algemeen niet door  $\mu \partial h / \partial t$  voorgesteld mogen worden. Een exactere voorstelling krijgt men door dit te vervangen door  $\mu (\partial h_n / \partial t + \partial h_r / \partial t)$ , waarbij  $h_n$  en  $h_r$  respectievelijk betrekking hebben op de horizontale en de radiale stromingscomponent. Op de vraag in hoeverre de verwaarlozing van  $\mu \partial h_r / \partial t$  mag worden aanvaard kan nog geen nauwkeurig antwoord worden gegeven.\*) Om een indruk te krijgen van de verschillen die ontstaan bij gebruik van verschillende reeds behandelde mathematische oplossingsmethodes, werd een steekproef genomen voor de bijzondere toestand, die in hoofdstuk III.3 bewerkt is met de vierkantjesmethode. De in hoofdstuk III.7 te behandelen rekenmethode met veronderstelling van quasi-stationaire toestanden werd eveneens op dit geval toegepast. De onderhavige oplossingsmethode bleek met de vierkantjesmethode, die als redelijk nauwkeurig beschouwd mag worden, de beste overeenkomst te geven (zie hoofdstuk III.7, pag. 143 en 145 en fig. 50). Dat de onderhavige rekenmethode ondanks de genoemde onvolkomenheid in dergelijke gevallen een goede benadering oplevert, had men ook reeds tevoren kunnen vermoeden op grond van het feit dat de fouten in de bergingsveranderingen dicht bij de open leidingen worden gemaakt en dus relatief snel uitdempen.

De verwaarlozing van de bergingsvariaties samenhangend met  $h_r$  heeft tot gevolg, dat bij harmonische fluctuaties van het peil van de open leidingen de benadering slechter wordt, naarmate  $T$  kleiner wordt. Bij zeer kleine  $T$  is de fluctuatie van  $h(x, t)$  op vrij korte afstand van de open leiding al zo sterk gedempt, dat de stroming grotendeels op een afstand  $< D$  van de open leiding gebeurt. Uit formule (154) en de aldaar

\*) In hoofdstuk III. 6, pag. 134 en 135 is in het kort aangegeven, hoe van formule (11) of formule (18) gebruik gemaakt kan worden om een betere benadering te verkrijgen.



in de exponenten voorkomende coëfficiënt  $g$  kan men afleiden \*), dat op een afstand  $r$  vanuit het hart van de open leiding een demping tot minder dan 30% het geval zal zijn, als  $r - r_0 > g$  en dus de periodeduur beneden de volgende grens ligt:  $kT \sqrt{rr_0} < < \pi\mu(r - r_0)^2$ . De straal  $r$ , waarbinnen het belangrijkste deel van de radiale stroming gebeurt, is in de praktijk altijd veel groter dan  $r_0$ . Verder is de waarde van  $\mu$  hierbij niet van overheersende invloed. Deze ongelijkheid kan daarom met een zeer ruwe benadering en gebruik makend van formules als (41) vervangen worden door  $T < rw$ .

Uit het voorgaande volgt, dat in de praktijk zeker toestanden voorkomen, waar deze grens bij 30 dagen ligt ( $r \approx 3$  m;  $w \approx 10$  dagen/meter) en toepassing van de onderhavige rekenmethode bij  $T < 30$  dagen slechts onder voorbehoud kan worden toegestaan. Vergelijkt men dit echter met drainagetoestanden op niet al te slecht doorlatende grond, waar de drainage door sloten op 100 m afstand gebeurt en  $W \approx \approx 100$  dagen, dan volgt hieruit dat  $w \leq 1$  dag/meter en genoemde grens bij 3 dagen ligt. Fluctuaties met een periodeduur van 3 dagen of korter zullen bij praktische toepassingen vermoedelijk alleen in de hogere harmonischen kunnen voorkomen. Verder is het duidelijk dat, indien dergelijke snelle fluctuaties niet in  $h_0(t)$  maar in  $N(t)$  voorkomen, de voorgestelde rekenmethode dezelfde afwijkingen in het gebied met radiale stroming veroorzaakt. Uit (144) volgt dan voor het middengebied een goede benadering, terwijl de overgang naar het constant gedachte peil van het open water niet nauwkeurig kan worden aangegeven.

Onder de laatstgenoemde problemen kan men in het bijzonder de reeds eerder genoemde grondwaterstroming rekenen, die zich ontwikkelt vanuit een horizontale begintoestand met afwijkend peil in de open leidingen. Ook in dat geval hebben voor kleine  $t$  de belangrijkste veranderingen plaats in de naaste omgeving van deze open leidingen. De invloed van  $L$  is dan nog te verwaarlozen, zodat het in het begin weinig zin heeft om een oplossing uit termen gelijk aan vergelijking (155) samen te stellen. In hoofdstuk III.7 zal hierop worden teruggekomen en door veronderstelling van quasi-stationaire toestanden een eenvoudige benaderingsformule worden afgeleid, welke voor dit geval aan (184) gelijkwaardig is en toegepast kan worden, zolang als de invloed van een peilverandering in een bepaalde open leiding zich nog niet in belangrijke mate bij de naaste open leidingen heeft doen gevoelen.

De behandeling van de niet-stationaire stromingsproblemen is in deze paragraaf tot nu toe beperkt gebleven tot toestanden, welke symmetrisch in  $x$  verondersteld werden. Ook bij afwezigheid van een dergelijke symmetrie kan dezelfde oplossingsmethode worden toegepast. Aan de hand van de notatie in fig. 47 is het duidelijk, dat de volgende vergelijkingen geldig zijn. Voor elke open leiding (aantal =  $n - 1$ ) wordt het peil  $h_0, i(t)$  als gegeven aangenomen.

\*) Door metingen in een spleetmodel (zie hoofdstuk IV.1 werd het gebied  $1 < r/r_0 < 20$  en  $5 < kT/r_0 < 100$  nader onderzocht en bleek inderdaad ten aanzien van naijling en demping een redelijk goede overeenstemming te ontstaan, indien men (154) vervangt door

$$h = F \exp\left(-r \sqrt{\frac{\pi\mu}{kDT}}\right) \sin\left(-r \sqrt{\frac{\pi\mu}{kDT}} + \frac{2\pi t}{T}\right)$$

en vervolgens de laagdikte  $D$  vervangt door  $\sqrt{rr_0}$ .

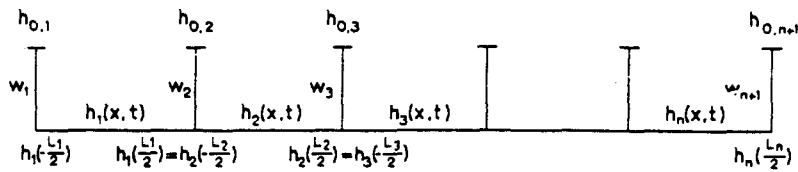


FIG. 47. Dradenschema en symbolen gebruikt bij de berekening van niet-stationaire asymmetrische grondwaterstromingen in een pakket met 1 of 2 lagen  
*Wire-scheme and symbols used in the calculation of non-steady, asymmetric groundwater flow in aquifers with 1 or 2 layers*

$$\begin{aligned}
 h_1 \left( -\frac{L_1}{2}, t \right) - h_{0,1}(t) &= kDw_1 \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} \right)_{-\frac{L_1}{2}} \\
 h_2 \left( -\frac{L_2}{2}, t \right) - h_{0,2}(t) &= kDw_2 \left\{ \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} \right)_{-\frac{L_2}{2}} - \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} \right)_{\frac{L_1}{2}} \right\} \\
 &\qquad\qquad\qquad h_1 \left( \frac{L_1}{2}, t \right) = h_2 \left( -\frac{L_2}{2}, t \right) \\
 h_i \left( -\frac{L_i}{2}, t \right) - h_{0,i}(t) &= kDw_i \left\{ \left( \frac{\partial h_i}{\partial x} \right)_{-\frac{L_i}{2}} - \left( \frac{\partial h_{i-1}}{\partial x} \right)_{\frac{L_{i-1}}{2}} \right\} \\
 &\qquad\qquad\qquad h_{i-1} \left( \frac{L_{i-1}}{2}, t \right) = h_i \left( -\frac{L_i}{2}, t \right) \\
 h_n \left( \frac{L_n}{2}, t \right) - h_{0,n+1}(t) &= -kDw_{n+1} \left( \frac{\partial h_n}{\partial x} \right)_{\frac{L_n}{2}} \\
 (n+1) \text{ verg. (192)} &\qquad\qquad\qquad (n-1) \text{ verg. (193)}
 \end{aligned}$$

Indien de afvoer  $A_{0,i}(t)$  uit elke open leiding gegeven is, moet men hieraan nog de volgende reeks formules toevoegen, met  $i = 1, \dots, n$ :

$$\frac{h_i \left( -\frac{L_i}{2}, t \right) - h_{0,i}(t)}{w_i} = A_{0,i}(t) + B_{w,i} \frac{dh_{0,i}}{dt} \quad (194)$$

Indien daarentegen de afvoer uit de open leidingen van het peil van deze leidingen afhankelijk is volgens  $A_{0,i}(t) = h_{0,i}(t)/\Omega_i$ , dan moeten de formules (194) vervangen worden door (195), waarin  $A_{0,i}(t)$  is opgenomen als de gegeven fictieve afvoer, eventueel afkomstig uit een eerste deeloplossing:

$$\frac{h_i \left( -\frac{L_i}{2}, t \right) - h_{0,i}(t)}{w_i} = B_{w,i} \frac{dh_{0,i}}{dt} + \frac{h_{0,i}(t)}{\Omega_i} - A_{0,i}(t) \quad (195)$$

Substitueert men in deze formules voor  $h_i(x, t)$  en  $h_{0, i}(t)$  een harmonische functie van de vorm (154) dan verkrijgt men door zowel de coëfficiënten van  $\sin 2\pi t/T$  als die van  $\cos 2\pi t/T$  gelijk nul te stellen een stelsel bestaande uit  $4n$  of  $6n + 2$  niet-homogene vergelijkingen van de eerste-graad met een aantal onbekenden gelijk aan het aantal vergelijkingen.

Zoekt men een oplossing met exponentiële demping samengesteld uit formules als (151), dan heeft men  $2n$  of  $3n + 1$  vergelijkingen, die homogeen zijn in de  $2n$  of  $3n + 1$  onbekende coëfficiënten  $A_i$  en  $B_i$  (niet te verwarren met de afvoer  $A_{0, i}$  en de waterspiegelbreedte  $B_{w, i}$ ). De onbekende  $\lambda$  moet nu zo gekozen worden dat een oplossing van het homogene stelsel mogelijk wordt.

In principe is deze bewerking dus gelijk aan die van het symmetrische probleem. De oplossing van de wortels  $\lambda_n$  wordt in dit geval echter aanzienlijk moeilijker. Eventueel zou men de volgende probeermethode kunnen toepassen. Substitueer een willekeurige  $\lambda$ ; stel een van de onbekende coëfficiënten gelijk aan 1; los de andere onbekenden op uit  $(2n - 1)$  inhomogene lineaire vergelijkingen; substitueer de uitkomsten in de laatste vergelijking, waaruit een zekere fout behorende bij deze  $\lambda$  blijkt; na een groot aantal herhalingen kan men door grafisch uitzetten meerdere wortels van  $\lambda$  met voldoende benadering vinden.

Evenals bij de symmetrische toestanden is de bijzondere oplossing behorend bij  $\lambda_1$  voor de praktische toepassing veruit de belangrijkste. Een bezwaar van deze oplossingsmethode is wel dat, als men na veel moeite meerdere waarden van  $\lambda$  gevonden heeft, het nog zeer de vraag is of dit aantal wel voldoende is om uit de bijbehorende oplossingen een lineaire combinatie samen te stellen, die voor  $t = 0$  met voldoende benadering overeenkomt met de gegeven begintoestand. Om deze reden zal in hoofdstuk III.7 voor de samengestelde problemen een oplossingsmethode worden behandeld, waarbij men door uit te gaan van minder nauwkeurige veronderstellingen sneller tot een uitkomst geraakt.

### *b. Het gelaagde pakket*

Indien de grond is opgebouwd uit afwisselend goed en slecht doorlatende lagen, kan men van hetzelfde principe gebruik maken als bij de stationaire stromingen (zie hoofdstuk II, 1e) en zo de differentiaalvergelijking (116) vervangen door een stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen (196)... (199). In de goed doorlatende lagen wordt de stroming weer horizontaal verondersteld met voorlopig voorbijzien van de afwijkingen in de bovenste goed doorlatende laag (en eventueel in de tweede goed doorlatende laag), in de nabijheid van de open leidingen en op plaatsen waar de horizontale stromingsintensiteit zeer laag is. In de slecht doorlatende lagen wordt de stroming verticaal verondersteld, eveneens met verwaarlozing van dezelfde soort afwijkingen als in de goed doorlatende lagen.

Indien de bovenste laag goed doorlatend is, geldt de volgende vergelijking:

$$k_1 D_1 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{h_1 - h_3}{c_2} - N(t) \quad (196)$$

Indien de bovenste laag slecht doorlatend is, moet (196) vervangen worden door:

$$\mu \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{h_1 - h_2}{c_1} - N(t) = 0 \quad (197)$$

Voor een diepere goed doorlatende laag met index  $i$ :

$$k_i D_i \frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} = \frac{h_i - h_{i-2}}{c_{i-1}} + \frac{h_i - h_{i+2}}{c_{i+1}} \quad (198)$$

Voor de diepste goed doorlatende laag met index  $n$ :

$$k_n D_n \frac{\partial^2 h_n}{\partial x^2} = \frac{h_n - h_{n-2}}{c_{n-1}} \quad (199)$$

In deze vergelijkingen heeft  $h_i$  betrekking op de stijghoogte in de goed doorlatende lagen. In elke van deze lagen wordt  $h_i$  alleen afhankelijk verondersteld van  $x$  en onafhankelijk van  $z$ . In een slecht doorlatende laag met index  $i$  kan men nu voor elke  $x$  de stijghoogte als een lineaire functie interpoleren tussen de stijghoogten  $h_{i-1}$  en  $h_{i+1}$  bij dezelfde  $x$ .

De stijghoogte  $h_1$  in (197) heeft betrekking op het freatisch oppervlak gelegen in een slecht doorlatende laag. De verticale weerstand  $c_1$  kan dus slechts bij benadering constant zijn, namelijk indien de variaties in  $h_1$  klein zijn ten opzichte van de gemiddelde dikte van deze laag.

Voor de stroming in de eerste goed doorlatende laag kunnen dezelfde randvoorwaarden van de tweede soort gebruikt worden als in de vorige paragraaf: bij symmetrische toestanden dus de betrekkingen (162) ... (171). Onder alle omstandigheden geldt voor elke diepere goed doorlatende laag verticaal beneden een open leiding:

$$-k_i D_i \left( \frac{\partial h_i}{\partial x} \right)_{x \uparrow = \frac{L}{2}} = -k_i D_i \left( \frac{\partial h_i}{\partial x} \right)_{x \downarrow = \frac{L}{2}} \quad (200)$$

Voor symmetrische problemen wordt dit:

$$q_i \left( \pm \frac{L}{2}, t \right) = -k_i D_i \left( \frac{\partial h_i}{\partial x} \right)_{\pm \frac{L}{2}} = 0 \quad (201)$$

Door voor alle  $h_i$  formule (144) te gebruiken wordt uit (196) of (197) de functie  $N(t)$  verwijderd. Substitueert men vervolgens:

$$h_i = \Lambda_i e^{\alpha \gamma + x t} \quad (202)$$

dan verkrijgt men na deling door de  $e$ -macht een stelsel gewone algebraïsche vergelijkingen met als onbekenden  $\Lambda_i$ ,  $\alpha^2$  en  $\gamma$ . Daar deze vergelijkingen lineair en homogeen zijn in  $\Lambda_i$ , mogen  $\alpha^2$  en  $\gamma$  niet willekeurig gekozen worden. De determinant van de coëfficiënten van de vergelijkingen in de  $\Lambda_i$  moet gelijk nul zijn.

$$\begin{array}{cccccc}
k_1 D_1 \alpha^2 - \mu \gamma - \frac{1}{c_2} & \frac{1}{c_2} & 0 & \dots & \dots & \\
\frac{1}{c_2} & k_3 D_3 \alpha^2 - \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_4} & \frac{1}{c_4} & \dots & \dots & \\
0 & \frac{1}{c_4} & k_5 D_5 \alpha^2 - \frac{1}{c_4} - \frac{1}{c_6} & \dots & \dots & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & k_n D_n \alpha^2 - \frac{1}{c_{n-1}}
\end{array} = 0 \quad (203)$$

Vergelijking (203) geldt voor die toestanden waarbij de bovenste laag goed doorlatend is. Indien de bovenste laag slecht doorlatend is, moeten alle indices in (203) met 1 verminderd worden, terwijl  $k_1 D_1$  wegvalt.

Uit het voorgaande volgt dat in alle diagonaalelementen (ofwel in alle diagonaal-elementen op 1 na)  $\alpha^2$  voorkomt. Het aantal oplossingen voor  $\alpha^2$  is dus gelijk aan het aantal goed doorlatende lagen. Na toevoeging van plus- en mintekens wordt het aantal oplossingen voor  $\alpha$  tweemaal zo groot.

Indien de functie (202) een oplossing moet geven behorende bij een harmonisch fluctuerende stroming, dan is  $\gamma$  zuiver imaginair en uit (203) volgt, dat voor  $\alpha^2$  geen reële waarden zijn toegestaan en  $\alpha$  dus complex moet zijn. Door  $\alpha_j$  te vervangen door  $(1/g_j^+) + (i/g_j)$  en de bijbehorende  $\Lambda_{i,j}$  door  $F_{i,j} + iG_{i,j}$  kan men de algemene oplossing als volgt met reële coëfficiënten schrijven. In tegenstelling met (154) vindt men nu verschillende coëfficiënten voor  $x$  in de trigonometrische functies en in de  $e$ -machten (respectievelijk  $\pm 1/g_j$  en  $\pm 1/g_j^+$ ):

$$\begin{aligned}
h_i(x, t) = & \sum_{j=1}^m \left[ A_j' \left\{ F_{i,j} \cos \left( \frac{x}{g_j} + \frac{2\pi t}{T} \right) - G_{i,j} \sin \left( \frac{x}{g_j} - \frac{2\pi t}{T} \right) \right\} - \right. \\
& \left. + A_j'' \left\{ F_{i,j} \sin \left( \frac{x}{g_j} + \frac{2\pi t}{T} \right) + G_{i,j} \cos \left( \frac{x}{g_j} + \frac{2\pi t}{T} \right) \right\} \right] e^{\frac{x}{g_j^-}} + \\
& + \left[ A_j''' \left\{ F_{i,j} \cos \left( \frac{x}{-g_j} + \frac{2\pi t}{T} \right) - G_{i,j} \sin \left( \frac{x}{-g_j} - \frac{2\pi t}{T} \right) \right\} + \right. \\
& \left. + A_j'''' \left\{ F_{i,j} \sin \left( \frac{x}{-g_j} + \frac{2\pi t}{T} \right) + G_{i,j} \cos \left( \frac{x}{-g_j} + \frac{2\pi t}{T} \right) \right\} \right] e^{-\frac{x}{g_j^+}}
\end{aligned} \quad (204)$$

$A_j' \dots A_j''''$  zijn willekeurige constanten

$m =$  aantal goed doorlatende lagen  $= n/2$  of  $(n + 1)/2$

Indien de functie (202) daarentegen de oplossing van een stroming met exponentiële demping moet leveren, moet men voor  $\gamma$  een reële waarde  $< 0$  substitueren. Tot en met  $n = 5$  kan men door uitschrijven van de determinant en door substitutie van bijzondere waarden ( $\alpha^2$  of diagonaal elementen nul maken) bewijzen, dat de bijbehorende wortels voor  $\alpha^2$  reëel moeten zijn en niet uitsluitend positief, zodat  $\alpha$  ook zuiver imaginair kan zijn. Het algemene bewijs dat dit ook voor willekeurige  $n$  geldt, werd niet gevonden. Grotere waarden dan  $n = 6$  zijn echter voor praktische toepassingen van geen belang.

Bij reële  $\gamma$  en  $\alpha^2$  behoren ook reële  $\Lambda_i$  zodat hieruit kan worden afgeleid dat voor  $n = 3$  en  $n = 4$  alleen oplossingen met exponentiële demping van de volgende algemene vorm mogelijk zijn:

$$h_i(x, t) = \left( A_{i,1} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} + A_{i,2} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} + A_{i,3} e^{\frac{x}{a}} + A_{i,4} e^{-\frac{x}{a}} \right) e^{-ft} \quad (205)$$

Voor  $n = 5$  en  $n = 6$ :

$$h_i(x, t) = h_i \left( A_{i,1} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} + A_{i,2} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} + A_{i,3} e^{\frac{x}{a_1}} + A_{i,4} e^{-\frac{x}{a_1}} + \right. \\ \left. + A_{i,5} e^{\frac{x}{a_2}} + A_{i,6} e^{-\frac{x}{a_2}} \right) e^{-ft} \quad (206)$$

Indien men voor de grondwaterstromingen met exponentiële demping in een pakket met een willekeurig oneven aantal lagen (bovenste laag goed doorlatend) over een bijzondere oplossing  $h_i(x, t)$  beschikt, dan kan men hieruit onmiddellijk de overeenkomstige oplossing  $h_i^*(x, t)$  afleiden voor hetzelfde pakket, waarbij aan de bovenkant een slecht doorlatende laag met verticale weerstand  $c_1$  is toegevoegd. Voor beide gevallen kan men immers substitueren:

$$h_i = A_i e^{xx-ft} \quad h_i^* = A_i^* e^{xx-ft} \quad (207)$$

met gelijke coëfficiënten van  $x$ .

In overeenkomstige lagen mag men de coëfficiënten  $A$  gelijk maken, dus

$$A_i = A_{i+1}^* \quad (208)$$

Volgens (196), (197) en (198) moet dan voor  $t = 0$  aan de volgende voorwaarden voldaan zijn:

$$\mu \left( \frac{\partial h_1}{\partial t} \right)_{x,0} = \frac{h_2^*(x, 0) - h_1^*(x, 0)}{c_1} = \mu \left( \frac{\partial h_1^*}{\partial t} \right)_{x,0} \quad (209)$$

Uit (207), (208) en (209) volgt:

$$-\mu f A_2^* = \frac{A_2^* - A_1^*}{c_1} = -\mu f^* A_1^* \quad (210)$$

Uit (210) kan men  $1/f^*$  en  $A_1^*/A_2^*$  oplossen:

$$\frac{A_1^*}{A_2^*} = 1 + \mu c_1 f \quad (211)$$

$$f^* = \frac{f}{1 + \mu c_1 f} \quad \text{ofwel} \quad \frac{1}{f^*} = \frac{1}{f} + \mu c_1 \quad (212)$$

Hieruit volgt, dat bij grondwaterstromingen in een pakket bestaande uit twee lagen met behulp van deze afleiding alle oplossingen, welke in de vorige paragraaf voor een homogeen profiel zijn afgeleid, na een kleine wijziging gehandhaafd kunnen worden.

Voor de rest zullen we ons in deze paragraaf beperken tot de symmetrische grondwaterstroming in een pakket bestaande uit twee goed doorlatende lagen gescheiden door een slecht doorlatende laag. Hierbij wordt dus verondersteld, dat de open leidingen evenwijdig liggen op een afstand  $L$  en dat verder gegeven zijn:  $k_1 D_1$ ;  $c_2$ ;  $k_3 D_3$ ;  $w$ ;  $N(t)$ ;  $h_1(x, 0)$  en ofwel  $h_0(t)$  ofwel  $A(t)$  ofwel  $A(t) = h_0(t)/\Omega$ .

Na eliminering van  $N(t)$  krijgt men de volgende differentiaalvergelijkingen:

$$k_1 D_1 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{h_1 - h_3}{c_2} \quad (213)$$

$$k_3 D_3 \frac{\partial^2 h_3}{\partial x^2} = \frac{h_3 - h_1}{c_2} \quad (214)$$

Indien  $N(t)$  en  $h_0(t)$  als harmonische functies gegeven zijn (eventueel zelfs met verschillende periode), dan kunnen de coëfficiënten van (204) op de volgende manier berekend worden. Men substitueert in (213) en (214) inplaats van (204) de volgende uitdrukkingen:

$$h_1 = \Lambda_1 e^{\alpha x + i \frac{2\pi t}{T}} \quad h_3 = \Lambda_3 e^{\alpha x + i \frac{2\pi t}{T}} \quad (215)$$

Om een oplossing van  $\Lambda_1$  en  $\Lambda_3$  mogelijk te maken, moet de determinant (203) nul zijn. In dit geval kan de determinant gemakkelijk uitgeschreven worden als een algebraïsche vergelijking van de tweede graad in  $\alpha^2$ :

$$1 - \left\{ k_3 D_3 c_2 - i(k_1 D_1 - k_3 D_3) \frac{T}{2\pi\mu} \right\} \alpha^2 - i k_1 D_1 c_2 k_3 D_3 \frac{T}{2\pi\mu} \alpha^4 = 0 \quad (216)$$

Voor  $\alpha$  worden 4 complexe waarden gevonden, welke als volgt in een reëel deel en een imaginair deel gescheiden kunnen worden:

$$\alpha_1 = \frac{1}{g_1^+} + \frac{i}{g_1} \quad \alpha_2 = -\frac{1}{g_1^-} - \frac{i}{g_1} \quad \alpha_3 = \frac{1}{g_2^+} + \frac{i}{g_2} \quad \alpha_4 = -\frac{1}{g_2^-} - \frac{i}{g_2} \quad (217)$$

Zijn  $g_1$  en  $g_1^+$  bekend, dan volgt een bijbehorende waarde  $\Lambda_{1,1}/\Lambda_{3,1}$ . Evenzo volgt bij bekende  $g_2$  en  $g_2^+$  een bepaalde waarde  $\Lambda_{1,2}/\Lambda_{3,2}$ . Daar een oplossing gevraagd wordt welke een even functie van  $x$  is, mogen de vier bijzondere oplossingen welke met (217) corresponderen, niet meer met 8 willekeurige coëfficiënten worden vermenigvuldigd en opgeteld. Wegens de symmetrie wordt (204) met  $m = 2$  als volgt geschreven:

$$\begin{aligned}
h_i(x, t) = & A_1' \left[ F_{i,1} \left\{ \cos \left( \frac{x}{g_1} + \frac{2\pi t}{T} \right) e^{\frac{x}{g_1^+}} + \cos \left( \frac{x}{-g_1} + \frac{2\pi t}{T} \right) e^{-\frac{x}{g_1^+}} \right\} + \right. \\
& \left. - G_{i,1} \left\{ \sin \left( \frac{x}{g_1} + \frac{2\pi t}{T} \right) e^{\frac{x}{g_1^+}} + \sin \left( \frac{x}{-g_1} + \frac{2\pi t}{T} \right) e^{-\frac{x}{g_1^+}} \right\} \right] + \\
& + A_1'' \left[ F_{i,1} \left\{ \sin \left( \frac{x}{g_1} + \frac{2\pi t}{T} \right) e^{\frac{x}{g_1^+}} + \sin \left( \frac{x}{-g_1} + \frac{2\pi t}{T} \right) e^{-\frac{x}{g_1^+}} \right\} + \right. \\
& \left. + G_{i,1} \left\{ \cos \left( \frac{x}{g_1} + \frac{2\pi t}{T} \right) e^{\frac{x}{g_1^+}} + \cos \left( \frac{x}{-g_1} + \frac{2\pi t}{T} \right) e^{-\frac{x}{g_1^+}} \right\} \right] + \\
& + A_2' \left[ F_{i,2} \left\{ \cos \left( \frac{x}{g_2} + \frac{2\pi t}{T} \right) e^{\frac{x}{g_2^+}} + \cos \left( \frac{x}{-g_2} + \frac{2\pi t}{T} \right) e^{-\frac{x}{g_2^+}} \right\} + \right. \\
& \left. - G_{i,2} \left\{ \sin \left( \frac{x}{g_2} + \frac{2\pi t}{T} \right) e^{\frac{x}{g_2^+}} + \sin \left( \frac{x}{-g_2} + \frac{2\pi t}{T} \right) e^{-\frac{x}{g_2^+}} \right\} \right] + \\
& + A_2'' \left[ F_{i,2} \left\{ \sin \left( \frac{x}{g_2} + \frac{2\pi t}{T} \right) e^{\frac{x}{g_2^+}} + \sin \left( \frac{x}{-g_2} + \frac{2\pi t}{T} \right) e^{-\frac{x}{g_2^+}} \right\} + \right. \\
& \left. + G_{i,2} \left\{ \cos \left( \frac{x}{g_2} + \frac{2\pi t}{T} \right) e^{\frac{x}{g_2^+}} + \cos \left( \frac{x}{-g_2} + \frac{2\pi t}{T} \right) e^{-\frac{x}{g_2^+}} \right\} \right] \quad (218)
\end{aligned}$$

met  $i = 1$  of  $3$

Door de opneming van de coëfficiënten  $A_1' \dots A_2''$  mogen voor  $F_{1,1} \dots G_{3,2}$  vaste waarden worden gekozen, mits deze slechts voldoen aan de juiste verhoudingen voor  $\Lambda_1/\Lambda_3$ . De onbekende coëfficiënten  $A_1', A_1'', A_2'', A_2'$ , kunnen nu bepaald worden door (218) te substitueren in de randvoorwaarden. In het geval a) (zie de vorige paragraaf) zijn dit de vergelijkingen (162) en (201), in het geval b) de vergelijkingen (162), (163) en (201), in het geval c) de vergelijkingen (162), (166) en (201). In de beide



laatste gevallen komen er, daar  $h_0(t)$  dan niet gegeven is, nog twee onbekende coëfficiënten  $a_0$  en  $b_0$  bij [zie formule (172)]. Door de coëfficiënten van  $\sin 2\pi t/T$  en  $\cos 2\pi t/T$  in elke vergelijking gelijk nul te stellen krijgt men dus ofwel 4, ofwel 6 lineaire inhomogene vergelijkingen, waaruit de onbekende coëfficiënten opgelost kunnen worden.

Om aan een willekeurige begintoestand te voldoen moet een oplossing samengesteld worden als een lineaire combinatie van bijzondere oplossingen van de volgende vorm, waarbij niet alleen  $A$ ,  $B$  en  $\alpha$ , maar ook  $f$  nader bepaald moet worden. Om te beginnen is alleen bekend, dat  $1/f$  een reële positieve tijd moet zijn.

$$h_1 = A e^{\alpha x - ft} \qquad h_3 = B e^{\alpha x - ft} \qquad (219)$$

De functies (219) gesubstitueerd in (213) en (214) geven twee lineaire vergelijkingen welke homogeen in  $A$  en  $B$  zijn, zodat voor de oplosbaarheid de determinant van de coëfficiënten van  $A$  en  $B$  gelijk nul verondersteld moet worden. Vergelijking (216) wordt nu vervangen door:

$$1 + \left( \frac{k_1 D_1 + k_3 D_3}{\mu f} - k_3 D_3 c_2 \right) \alpha^2 - \frac{k_1 D_1 c_2 k_3 D_3}{\mu f} \alpha^4 = 0 \qquad (220)$$

Hieruit volgt, dat  $\alpha^2$  een positieve en een negatieve wortel heeft en de vier wortels van  $\alpha$  door de volgende notatie met reële  $a_1$  en  $a_2$  voorgesteld kunnen worden:

$$\alpha_1 = \frac{1}{a_1} \qquad \alpha_2 = -\frac{1}{a_1} \qquad \alpha_3 = \frac{i}{a_2} \qquad \alpha_4 = -\frac{i}{a_2} \qquad (221)$$

Na substitutie van  $-a_1^2$  moet de verhouding  $A_1/B_1$  berekend kunnen worden en evenzo  $A_2/B_2$  uit  $+a_2^2$ , echter alleen dan als voor de onbekende coëfficiënt  $f$  een geschatte waarde wordt ingevoerd. In tegenstelling tot de harmonische oplossing zijn  $\alpha^2$  en  $\gamma$  nu reëel, zodat de verhoudingen  $A_i/B_i$  ook reëel moeten zijn.

Indien nu met deze uitkomsten, op grond van een geschatte en dus zeer waarschijnlijk onjuiste waarde van  $f$ , verder wordt gegaan en voor  $h_1(x, t)$  en  $h_3(x, t)$  worden functies even in  $x$  verondersteld, dan kunnen deze functies in de volgende vorm geschreven worden met coëfficiënten  $M_1$  en  $M_2$ , waarvan de verhouding nader bepaald moet worden.

$$h_1(x, t) = \left\{ A_1 M_1 \left( e^{\frac{x}{a_1}} + e^{-\frac{x}{a_1}} \right) + A_2 M_2 \cos \frac{x}{a_2} \right\} e^{-ft} \qquad (222)$$

$$h_3(x, t) = \left\{ B_1 M_1 \left( e^{\frac{x}{a_1}} + e^{-\frac{x}{a_1}} \right) + B_2 M_2 \cos \frac{x}{a_2} \right\} e^{-ft} \qquad (223)$$

Deze functies zouden moeten worden gesubstitueerd in de randvoorwaarden, bijvoorbeeld in (162) en (201) of in (162), (163) en (201) of in (162), (166) en (201). Daar

$f$  echter willekeurig genomen werd, kan hieruit in het algemeen geen oplossing worden afgeleid. Evenals voor  $\lambda_n$  in de vorige paragraaf kunnen voor  $f$  slechts discrete waarden (hoewel oneindig groot in aantal) toegestaan worden. De substitutie in de randvoorwaarden kan alleen dan wegens de toevallig gekozen waarde voor  $f$  tot een oplossing leiden, indien een van de gegevens losgelaten wordt. Het ligt voor de hand hiervoor de radiale weerstand  $w$  te gebruiken, daar deze grootheid alleen in de randvoorwaarden en daar slechts éénmaal voorkomt. Door de determinant van de coëfficiënten behorende bij de onbekenden  $M_1$ ,  $M_2$  en eventueel  $h_0(0)$  gelijk nul te stellen wordt de toelaatbare waarde van  $w$  gevonden. Na substitutie van (222) en (223) bijvoorbeeld in (162) en (201) met  $h_0(t) = 0$  kunnen  $w$  en  $M_1/M_2$  bepaald worden uit:

$$-2k_1 D_1 w \left( \frac{2A_1 M_1}{a_1} \sinh \frac{L}{2a_1} - \frac{A_2 M_2}{a_2} \sin \frac{L}{2a_2} \right) = 2A_1 M_1 \cosh \frac{L}{2a_1} + A_2 M_2 \cos \frac{L}{2a_2} \quad (224)$$

$$\frac{2B_1 M_1}{a_1} \sinh \frac{L}{2a_1} - \frac{B_2 M_2}{a_2} \sin \frac{L}{2a_2} = 0 \quad (225)$$

De oplossing van  $w$  zal noch in dit voorbeeld noch in de andere behandelde gevallen [zie gevallen a), b) en c) in de vorige paragraaf] enige moeilijkheden kunnen geven. Door een voldoende aantal herhalingen en door grafisch uitzetten van de uitkomsten kan men de wortels van  $f$  met de gewenste nauwkeurigheid en in het gewenste aantal vinden.

*c. Het homogeen doorlatende pakket met bergingscoëfficiënt en overtollige neerslag afhankelijk van  $x$*

In de voorafgaande hoofdstukken werd de bergingscoëfficiënt  $\mu$  steeds constant verondersteld ten einde een lineaire partiële differentiaalvergelijking te verkrijgen. Indien echter  $\mu$  onafhankelijk van  $h$  maar wel afhankelijk van  $x$  wordt verondersteld, dan blijft de differentiaalvergelijking lineair in  $h$  en het superponeren is niet minder toelaatbaar dan tevoren. In de praktijk moet een dergelijke afhankelijkheid van  $x$  inderdaad voorkomen. Hoewel vrijwel geen directe waarnemingen bekend zijn, kunnen drie oorzaken opgegeven worden: a) verschillen in grondsoort; b) verschillen in grondwaterstandsdiepte, doordat het freatisch oppervlak gemiddeld over het jaar een bolle vorm heeft en het maaiveld een vrijwel plat vlak is; c) verschillen in grondwaterstandsdiepte, doordat het maaiveld een bijzondere vorm heeft (bijvoorbeeld op elk perceel tussen de sloten een bolle of een holle vorm; de laatste vorm kan veroorzaakt worden door de inklinking ten gevolge van een lage holle grondwaterspiegel in de zomer). De kleine rivieren die in het zuiden en oosten van Nederland de zogenaamde hoge zandgronden draineren, liggen vaak in een enkele honderden tot rond duizend meter breed dal (de grote breedte is van pleistocene oorsprong), welk dal met een relatief steile rand (hoogteverschil 1 tot 2 m) overgaat in het hogere terrein. Vooral in een dergelijk geval is er reden om het gebied te verdelen in symmetrische stroken en

wel relatief smalle stroken met een lage bergingscoëfficiënt langs de rivier en een breed middengebied met een hoge bergingscoëfficiënt.

De oplossing van de niet-stationaire grondwaterbeweging kan in het laatstgenoemde geval onmiddellijk volgens eenzelfde methode als in voorafgaande paragrafen worden afgeleid. Het gebied wordt ingedeeld in een middengebied met breedte  $2G_1$  en een bergingscoëfficiënt  $\mu_1$  en randstroken met breedte  $G_2$  en een bergingscoëfficiënt  $\mu_2$ . Gevraagd wordt nu naar de oplossingen  $h_1(x, t)$  en  $h_2(x, t)$ , welke bij deze bodemgesteldheid aan willekeurig gegeven randvoorwaarden voldoen (zie figuur 48). De volgende oplossingen kunnen in principe ook worden toegepast bij de indeling in een groter aantal verschillende stroken.

De deeloplossing (144) geeft een discontinuïteit bij de overgang van  $\mu_1$  en  $\mu_2$  en mag dus alleen worden toegepast indien men er in slaagt door middel van een tweede of derde deeloplossing deze discontinuïteit te verwijderen.

Een constante  $N$  kan dikwijls geëlimineerd worden door een stationaire deeloplossing, behalve indien voor  $N$  en  $A$  constanten gegeven zijn en  $A \neq N(L + B_w)$ . De vergelijkingen (175) en (176) moeten in dat geval gewijzigd worden. Als deeloplossing vervullen de volgende functies dezelfde rol:

$$h_1'(x, t) = h_1'(x, 0) - \frac{(N - N_1')t}{\mu_1} \quad \text{voor } -G_1 < x < G_1 \quad (226)$$

$$h_2'(x, t) = h_2'(x, 0) - \frac{(N - N_2')t}{\mu_2} \quad \text{voor } -\frac{L}{2} < x < -G_1 \quad (227)$$

$h_1'(x, 0)$  en  $h_2'(x, 0)$  vormen samen de stationaire oplossing bij een overtollige neerslag  $N_1'$  in de middenstroken en  $N_2'$  in de randstroken. Deze eerste deeloplossing is continu als voldaan wordt aan:

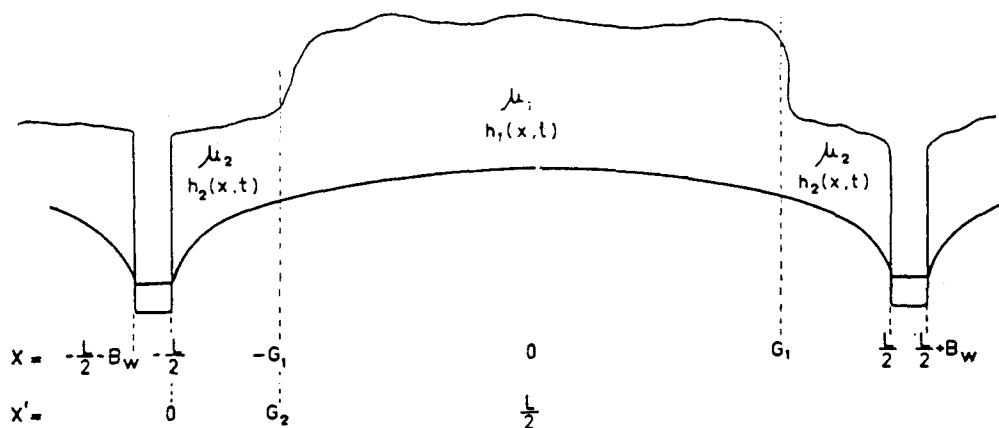


FIG. 48. Verklaring van de symbolen gebruikt bij de berekening van niet-stationaire symmetrische grondwaterstromingen, indien uit verschillen in grondwaterstandsdiepte of verschillen in grondsoort volgt dat evenwijdige stroken met bergingscoëfficiënten  $\mu_1$  en  $\mu_2$  moeten worden onderscheiden

*The notation used in the calculation of non-steady, symmetric groundwater flow when, as a consequence of differences in the depth of the phreatic surface or differences in the soil type, parallel strips with storage coefficients  $\mu_1$  and  $\mu_2$  have to be distinguished*

$$\frac{N - N_1'}{\mu_1} = \frac{N - N_2'}{\mu_2} \quad (228)$$

Vervolgens wordt als eis gesteld, dat  $N_1$  en  $N_2$  behalve aan (228) ook aan (229) voldoen:

$$NB_w + 2N_1'G_1 + 2N_2'G_2 - \frac{(N - N_2')B_w}{\mu_2} = A \quad (229)$$

Uit (228) en (229) kunnen  $N_1'$  en  $N_2'$  opgelost worden:

$$N_1' = \frac{\mu_1 A + \{(1 - \mu_1)B_w + 2(\mu_2 - \mu_1)G_2\} N}{2\mu_1 G_1 + 2\mu_2 G_2 + B_w} \quad (230)$$

$$N_2' = \frac{\mu_2 A + \{(1 - \mu_2)B_w + 2(\mu_1 - \mu_2)G_1\} N}{2\mu_1 G_1 + 2\mu_2 G_2 + B_w} \quad (231)$$

Uit de definities van  $h_1'(x, 0)$  en  $h_2'(x, 0)$  en uit (229) volgt, dat met deze eerste deeloplossing zowel  $N$  als  $A$  geëlimineerd zijn.

Bij een gegeven harmonische functie voor de overtollige neerslag ( $N_a \cos 2\pi t/T$ ) kan met behulp van de oplossingen (144) en (156) de oplossing voor dit geval als volgt geschreven worden:

$$h_1'' = \frac{N_a T}{2\pi\mu_1} \sin \frac{2\pi t}{T} + a_1 \left\{ e^{\frac{x}{g_1}} \sin \left( \frac{x}{g_1} + \frac{2\pi t}{T} \right) + e^{-\frac{x}{g_1}} \sin \left( -\frac{x}{g_1} + \frac{2\pi t}{T} \right) \right\} - \\ + b_1 \left\{ e^{\frac{x}{g_1}} \cos \left( \frac{x}{g_1} + \frac{2\pi t}{T} \right) + e^{-\frac{x}{g_1}} \cos \left( -\frac{x}{g_1} + \frac{2\pi t}{T} \right) \right\} \quad (232)$$

$$h_2'' = \frac{N_a T}{2\pi\mu_2} \sin \frac{2\pi t}{T} + e^{\frac{x}{g_2}} \left\{ a_2 \sin \left( \frac{x}{g_2} + \frac{2\pi t}{T} \right) + b_2 \cos \left( \frac{x}{g_2} - \frac{2\pi t}{T} \right) \right\} - \\ + e^{-\frac{x}{g_2}} \left\{ a_3 \sin \left( -\frac{x}{g_2} + \frac{2\pi t}{T} \right) + b_3 \cos \left( -\frac{x}{g_2} + \frac{2\pi t}{T} \right) \right\} \quad (233)$$

$$g_1 = \sqrt{\frac{kDT}{\pi\mu_1}} \quad g_2 = \sqrt{\frac{kDT}{\pi\mu_2}}$$

De oplossingen (232) en (233) kunnen in dezelfde intervallen geldig verklaard worden als (226) en (227), respectievelijk voor:

$$-G_1 < x < G_1 \quad \text{en} \quad -\frac{L}{2} < x < -G_1$$

Het peil van de open leidingen moet volgens (232) en (233) harmonisch fluctueren en mag dus in bijzondere gevallen gelijk nul gesteld worden. Onder alle omstandigheden kan hiervoor geschreven worden:

$$h_0(t) = a_0 \sin \frac{2\pi t}{T} + b_0 \cos \frac{2\pi t}{T} \quad (234)$$

Als randvoorwaarden zijn geldig:

$$h_1''(\pm G_1, t) = h_2''(-G_1, t) \quad (235)$$

$$\left(\frac{\partial h_1''}{\partial x}\right)_{-G_1} = \left(\frac{\partial h_2''}{\partial x}\right)_{-G_1} \quad (236)$$

$$h_2''\left(-\frac{L}{2}, t\right) - h_0(t) = 2kDw \left(\frac{\partial h_2''}{\partial x}\right)_{-L/2} \quad (237)$$

Indien  $h_0(t)$  niet gegeven is, maar een van de randvoorwaarden b) of c) gebruikt moet worden (zie hoofdstuk III.4a, pag. 94) dan wordt de gegeven  $h_0(t)$  in (237) vervangen door een onbekende  $h_0''(t)$  en moet nog een vierde vergelijking toegevoegd worden en wel (238) of (239):

$$2kD \left(\frac{\partial h_2''}{\partial x}\right)_{-L/2} = A''(t) + B_w \frac{dh_0''}{dt} \quad (238)$$

$$2kD \left(\frac{\partial h_2''}{\partial x}\right)_{-L/2} = B_w \frac{dh_0''}{dt} + \frac{h_0''(t)}{\Omega} \quad (239)$$

Na substitutie van de functies (232), (233) en (234) in (235), (236), (237) [en eventueel (238) of (239)] verkrijgt men door de coëfficiënten van  $\sin 2\pi t/T$  en  $\cos 2\pi t/T$  gelijk nul te stellen 6 [eventueel 8] vergelijkingen, waarin  $a_1 \dots b_3$  (en eventueel  $a_0$  en  $b_0$ ) als onbekenden voorkomen. De lineaire vergelijkingen, die op deze manier ontstaan, zijn inhomogeen, daar minstens een van de coëfficiënten  $N_a$ ,  $a_0$  en  $b_0$  gegeven en ongelijk nul moet zijn en leiden altijd tot een oplossing.

Indien in de onderscheiden gebieden ook verschillen in overtollige neerslag voorkomen, bijvoorbeeld verschillen in amplitude en in fase tengevolge van de verschillen in grondwaterstandsdiepte:

$$N_1 = N_{a,1} \cos \frac{2\pi(t + \theta_1)}{T}, \quad (240)$$

$$N_2 = N_{a,2} \cos \frac{2\pi(t + \theta_2)}{T}, \quad (241)$$

dan kan men de functies (232) en (233) onmiddellijk overeenkomstig dit gegeven wijzigen. Wijken de gegeven functies voor  $N_1$  en  $N_2$  nog sterker van elkaar af (bijvoor-

beeld verschillende periodeduur), dan zal men naar twee deeloplossingen moeten streven, respectievelijk met  $N_1'$  als gegeven en  $N_2' = 0$  en met  $N_1'' = 0$  en  $N_2''$  als gegeven.

Door Van der Held is de exacte oplossing afgeleid voor de warmtestroming met exponentiële demping in een medium, bestaande uit evenwijdige lagen van verschillende samenstelling bij een stromingsrichting loodrecht op de grensvlakken (VAN DER HELD, 1935). Deze oplossing kan ook voor de stroming van het grondwater gebruikt worden en dat zowel bij een constant peil van de open leiding, als bij een constante afvoer, als in het geval dat een lineaire betrekking tussen  $h_0$  en  $A$  gegeven is [zie de eerste paragraaf van dit hoofdstuk, randvoorwaarden 2a), 2b) en 2c)].

Voor deze gevallen met respectievelijk  $h_0(t) = 0$ ;  $A(t) = 0$  en  $A(t) = h_0(t)/\Omega$ , worden aan weerszijden van het symmetrische gebied met breedte  $L$  nog 1, 2 of 3 fictieve stroken toegevoegd. Elke strook heeft een breedte  $G_i$ . Voor de nieuwe stroken geldt:  $G_3 = 2kDw$ ;  $G_4 = B_w/\mu_0$ ;  $G_5 = kD\Omega$ .

Ter bekorting wordt de volgende notatie ingevoerd:

$$\begin{aligned} x_1 &= G_1 & x_4 &= G_1 + G_2 + 2kDw + B_w/\mu_0 \\ x_2 &= G_1 + G_2 & x_5 &= G_1 + G_2 - 2kDw + B_w/\mu_0 + kD\Omega \\ x_3 &= G_1 + G_2 + 2kDw \end{aligned}$$

In elke strook zijn  $kD$ -waarde en bergingscoëfficiënt als gegeven te beschouwen. De bergingscoëfficiënt  $\mu_0$  is willekeurig te kiezen.

a)	$0 < x < G_1$	$kD$ als gegeven	bergingscoëfficiënt $\mu_1$
	$G_1 < x < G_1 + G_2$	$kD$ „ „	„ „ $\mu_2$
	$G_1 + G_2 < x < G_1 + G_2 + 2kDw$	$kD$ „ „	$\mu_3 = 0$
b)	$0 < x < x_1$	$kD$ als gegeven	bergingscoëfficiënt $\mu_1$
	$x_1 < x < x_2$	$kD$ „ „	„ „ $\mu_2$
	$x_2 < x < x_3$	$kD$ „ „	$\mu_3 = 0$
	$x_3 < x < x_4$	$kD = \infty$	bergingscoëfficiënt $\mu_0$
c)	$0 < x < x_1$	$kD$ als gegeven	bergingscoëfficiënt $\mu_1$
	$x_1 < x < x_2$	$kD$ „ „	„ „ $\mu_2$
	$x_2 < x < x_3$	$kD$ „ „	$\mu_3 = 0$
	$x_3 < x < x_4$	$kD = \infty$	bergingscoëfficiënt $\mu_0$
	$x_4 < x < x_5$	$kD$ als gegeven	$\mu_5 = 0$

Als randvoorwaarde aan de uiterste grenzen van het gebied, dat wil zeggen voor  $x = 0$  en voor  $x_3$ ,  $x_4$  en  $x_5$ , respectievelijk in de gevallen a), b) en c), vindt men:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & q(0, t) = 0 & \text{b)} & q(0, t) = 0 & \text{c)} & q(0, t) = 0 \\ & h(x_3, t) = 0 & & q(x_4, t) = 0 & & h(x_5, t) = 0 \end{array}$$

Van der Held heeft het algemene geval behandeld met een willekeurig aantal lagen en in elke laag willekeurige waarden voor het geleidend vermogen en de soortelijke warmte. De volgende beschouwing blijft echter beperkt tot bovenstaand geval a); voor een volledige behandeling wordt verwezen naar genoemde publikatie.

In het symmetrische geval met randvoorwaarde a) en met voorlopig 3 bergingscoëfficiënten  $\mu_1, \mu_2$  en  $\mu_3 \neq 0$  wordt van de volgende uitdrukkingen gebruik gemaakt, waarbij onmiddellijk is in te zien, dat deze aan de gegeven differentiaalvergelijkingen voldoen:

$$h_1 = Ae^{-ft} \cos \left( G_1 \sqrt{\frac{\mu_2 f}{kD}} + \varphi_2 \right) \cos \left( \frac{L}{2} \sqrt{\frac{\mu_3 f}{kD}} + \varphi_3 \right) \cos \left( x \sqrt{\frac{\mu_1 f}{kD}} + \varphi_1 \right) \\ \text{met } -G_1 < x < G_1 \quad (242)$$

$$h_2 = Ae^{-ft} \cos \left( G_1 \sqrt{\frac{\mu_1 f}{kD}} + \varphi_1 \right) \cos \left( \frac{L}{2} \sqrt{\frac{\mu_3 f}{kD}} + \varphi_3 \right) \cos \left( x \sqrt{\frac{\mu_2 f}{kD}} + \varphi_2 \right) \\ \text{met } G_1 < |x| < \frac{L}{2} \quad (243)$$

$$h_3 = Ae^{-ft} \cos \left( G_1 \sqrt{\frac{\mu_1 f}{kD}} + \varphi_1 \right) \cos \left( \frac{L}{2} \sqrt{\frac{\mu_2 f}{kD}} + \varphi_2 \right) \cos \left( x \sqrt{\frac{\mu_3 f}{kD}} - \varphi_3 \right) \\ \text{met } \frac{L}{2} < |x| < x_3 \quad (244)$$

Door  $\mu_3$  tot nul te laten naderen kan men (244) vervangen door een lineaire functie en (242) en (243) door:

$$h_1 = A' e^{-ft} \cos \left( G_1 \sqrt{\frac{\mu_2 f}{kD}} + \varphi_2 \right) \cos \left( x \sqrt{\frac{\mu_1 f}{kD}} + \varphi_1 \right) \text{ met } -G_1 < x < G_1 \quad (245)$$

$$h_2 = A' e^{-ft} \cos \left( G_1 \sqrt{\frac{\mu_1 f}{kD}} + \varphi_1 \right) \cos \left( x \sqrt{\frac{\mu_2 f}{kD}} + \varphi_2 \right) \text{ met } G_1 < |x| < \frac{L}{2} \quad (246)$$

De uitdrukkingen (242), (243) en (244) voldoen aan de voorwaarden  $h_1(G_1) = h_2(G_1)$  en  $h_2(L/2) = h_3(L/2)$ . Wegens de symmetrie wordt geëist, dat  $\varphi_1 = 0$ . De overgebleven onbekende coëfficiënten  $f$  en  $\varphi_2$  moeten afgeleid worden uit de voorwaarden  $q_1(G_1) = q_2(G_1)$  en  $q_2(L/2) = q_3(L/2)$ . Dit levert op voor  $x = G_1$ :

$$\sqrt{\mu_1} \operatorname{tg} \left( G_1 \sqrt{\frac{\mu_1 f}{kD}} \right) = \sqrt{\mu_2} \operatorname{tg} \left( G_1 \sqrt{\frac{\mu_2 f}{kD}} + \varphi_2 \right) \quad (247)$$

Wegens randvoorwaarde (162) vindt men voor  $x = L/2$ :

$$\operatorname{tg} \left( \frac{L}{2} \sqrt{\frac{\mu_2 f}{kD}} + \varphi_2 \right) = \frac{1}{2w \sqrt{\mu_2 f k D}} \quad (248)$$

Indien men het rechterlid van (247) vervangt door  $\sqrt{\mu_2} \operatorname{tg} \varphi'$ , dan kan (248) worden vervangen door:

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{1 - 2w \sqrt{\mu_2 f k D} \operatorname{tg} \left( G_2 \sqrt{\frac{\mu_2 f}{k D}} \right)}{2w \sqrt{\mu_2 f k D} + \operatorname{tg} \left( G_2 \sqrt{\frac{\mu_2 f}{k D}} \right)} \quad (249)$$

$\varphi'$  kan nu onmiddellijk uit (247) en (249) worden geëlimineerd:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \operatorname{tg} \left( G_1 \sqrt{\frac{\mu_1 f}{k D}} \right) \operatorname{tg} \left( G_2 \sqrt{\frac{\mu_2 f}{k D}} \right) + \\ & + 2w \sqrt{k D f} \left\{ \sqrt{\mu_1} \operatorname{tg} \left( G_1 \sqrt{\frac{\mu_1 f}{k D}} \right) + \sqrt{\mu_2} \operatorname{tg} \left( G_2 \sqrt{\frac{\mu_2 f}{k D}} \right) \right\} - 1 = 0 \end{aligned} \quad (250)$$

Uit (250) kan men door een grafische bewerking alle gewenste wortels  $f_n$  vinden. Uit (248) volgen dan onmiddellijk de bijbehorende waarden  $\varphi_2, n$ .

Indien aan een gegeven begintoestand moet worden voldaan, vervangt men (245) en (246) door de volgende oplossing:

$$h_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-f_n t} \cos \left( G_1 \sqrt{\frac{\mu_2 f_n}{k D}} + \varphi_{2, n} \right) \cos \left( x \sqrt{\frac{\mu_1 f_n}{k D}} \right) \quad (251)$$

$$h_2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-f_n t} \cos \left( G_1 \sqrt{\frac{\mu_1 f_n}{k D}} \right) \cos \left( x \sqrt{\frac{\mu_2 f_n}{k D}} + \varphi_{2, n} \right) \quad (252)$$

Door gebruik te maken van (247) en (248) kan men bewijzen, dat de som van de volgende integralen nul moet zijn als  $m \neq n$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^{G_1} \mu_1 \cos \left( G_1 \sqrt{\frac{\mu_2 f_m}{k D}} + \varphi_{2, m} \right) \cos \left( G_1 \sqrt{\frac{\mu_2 f_n}{k D}} + \varphi_{2, n} \right) \cos \left( x \sqrt{\frac{\mu_1 f_m}{k D}} \right) \times \\ & \times \cos \left( x \sqrt{\frac{\mu_1 f_n}{k D}} \right) dx + \int_{G_1}^{\frac{L}{2}} \mu_2 \cos \left( G_1 \sqrt{\frac{\mu_1 f_m}{k D}} \right) \cos \left( G_1 \sqrt{\frac{\mu_1 f_n}{k D}} \right) \times \\ & \times \cos \left( x \sqrt{\frac{\mu_2 f_m}{k D}} + \varphi_{2, m} \right) \cos \left( x \sqrt{\frac{\mu_2 f_n}{k D}} + \varphi_{2, n} \right) dx = 0 \end{aligned} \quad (253)$$

De waarde van elke coëfficiënt  $A_n$  kan nu met behulp van (254) of (255) berekend worden, mits slechts  $f_n$  en  $\varphi_n$  bekend zijn.

$$\int_0^{G_1} \mu_1 h(x, 0) \cos \left( G_1 \sqrt{\frac{\mu_2 f_n}{k D}} + \varphi_{2, n} \right) \cos \left( x \sqrt{\frac{\mu_1 f_n}{k D}} \right) dx +$$



$$\begin{aligned}
& + \int_{G_1}^{\frac{L}{2}} \mu_2 h(x, 0) \cos\left(G_1 \sqrt{\frac{\mu_1 f_n}{kD}}\right) \cos\left(x \sqrt{\frac{\mu_2 f_n}{kD}} + \varphi_{2, n}\right) dx = \\
& = A_n \left\{ \mu_1 \cos^2\left(G_1 \sqrt{\frac{\mu_2 f_n}{kD}} + \varphi_{2, n}\right) \int_0^{G_1} \cos^2\left(x \sqrt{\frac{\mu_1 f_n}{kD}}\right) dx + \right. \\
& \quad \left. + \mu_2 \cos^2\left(G_1 \sqrt{\frac{\mu_1 f_n}{kD}}\right) \int_{G_1}^{\frac{L}{2}} \cos^2\left(x \sqrt{\frac{\mu_2 f_n}{kD}} + \varphi_{2, n}\right) dx \right\} \quad (254)
\end{aligned}$$

Vergelijking (254) kan tenslotte door (255) in een iets vereenvoudigde vorm vervangen worden:

$$\begin{aligned}
& \mu_1 \cos\left(G_1 \sqrt{\frac{\mu_2 f_n}{kD}} + \varphi_{2, n}\right) \int_0^{G_1} h(x, 0) \cos\left(x \sqrt{\frac{\mu_1 f_n}{kD}}\right) dx + \\
& + \mu_2 \cos\left(G_1 \sqrt{\frac{\mu_1 f_n}{kD}}\right) \int_{G_1}^{\frac{L}{2}} h(x, 0) \cos\left(x \sqrt{\frac{\mu_2 f_n}{kD}} + \varphi_{2, n}\right) dx = \\
& = \frac{A_n}{2} \left\{ \mu_1 G_1 \cos^2\left(G_1 \sqrt{\frac{\mu_2 f_n}{kD}} + \varphi_{2, n}\right) + \mu_2 G_2 \cos^2\left(G_1 \sqrt{\frac{\mu_1 f_n}{kD}}\right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2\omega f_n} \cos^2\left(G_1 \sqrt{\frac{\mu_1 f_n}{kD}}\right) \cos^2\left(\frac{L}{2} \sqrt{\frac{\mu_2 f_n}{kD}} + \varphi_{2, n}\right) \right\} \quad (255)
\end{aligned}$$

De afleiding van de coëfficiënten  $f_n$  kan op eenvoudiger manier gebeuren door van de twee volgende vergelijkingen uit te gaan:

$$h_1 = a_1 e^{-ft} \cos x \sqrt{\frac{\mu_1 f}{kD}} \quad \text{met } -G_1 < x < G_1 \quad (256)$$

$$h_2 = e^{-ft} \left( a_2 \sin x' \sqrt{\frac{\mu_2 f}{kD}} + a_3 \cos x' \sqrt{\frac{\mu_2 f}{kD}} \right) \quad \text{met } 0 < x' < G_2 \text{ en } x' = x + L/2 \quad (257)$$

Door substitutie in de randvoorwaarden  $h_1(\pm G_1) = h_2(G_2)$  en  $(\partial h_1 / \partial x)_{-G_1} = (\partial h_2 / \partial x')_{G_2}$  verkrijgt men twee betrekkingen, waaruit  $a_1$  geëlimineerd kan worden. Men houdt dan een vergelijking over, waarin naast  $f$  als onbekende het quotiënt  $a_2/a_3$  lineair voorkomt.

Voor de gevallen a), b) en c) beschikt men over de randvoorwaarden van de vorm (162) en volgende, waaruit eveneens een vergelijking verkregen kan worden waarin

$a_2/a_3$  lineair voorkomt. De afleiding van een vergelijking waarin alleen  $f$  als onbekende voorkomt, levert dus geen moeilijkheden op. Langs deze weg slaagt men er echter niet in een exacte afleiding van de coëfficiënten  $A_n$  te geven.

De veronderstelling, waarmee tot nu toe in deze paragraaf werd gewerkt, namelijk dat in het beschouwde gebied verschillende delen onderscheiden kunnen worden met  $\mu$  en  $N$  onafhankelijk van  $x$ , terwijl op de grenzen van deze deelgebieden zowel  $\mu$  als  $N$  discontinu veranderen, is niet geheel bevredigend. Zou men  $\mu$  continu afhankelijk van  $x$  veronderstellen, dan blijft de differentiaalvergelijking (116) lineair in  $h$  en dus het superponeren van bijzondere oplossingen toelaatbaar.

Indien voor  $\mu$  een even functie in  $x$  verondersteld wordt, wordt de oplossing aanzienlijk moeilijker en is het gewoonte om oneindige reeksen te gebruiken voor de afleiding van elke oplossing. Veronderstelt men daarentegen dat  $\mu$  een lineaire functie van  $x$  is (om een symmetrie te handhaven slechts voor één van de helften van het interval  $-L/2 < x < L/2$ ), dan verkrijgt men na substitutie van  $h = X(x)T(t)$  een oplossing, waarin Besselfuncties van de orde  $1/3$  voorkomen (КАМКЕ, 1956, pag. 400 en 440). Aan de afleiding van dit soort oplossingen werd verder geen aandacht besteed.

Wel is het mogelijk bij een constante  $\mu$  en een overtollige neerslag  $N$ , welke op willekeurige manier afhangt van  $x$  (bij voorkeur een even functie van  $x$ ) en welke harmonisch afhangt van  $t$ , uit (154) langs eenvoudige weg een oplossing af te leiden. In hoeverre dit praktische waarde heeft zal in het midden gelaten worden. Een dergelijke functie voor  $N$  kan dezelfde vorm als (156) hebben of beter nog door de volgende uitdrukking worden voorgesteld:

$$N(x, t) = (a_0 + a_2x^2) \cos \left( bx^2 + \frac{2\pi t}{T} \right) \quad (258)$$

Een oplossing kan nu als volgt geschreven worden:

$$h(x, t) = F \cos \left( \pm \frac{\xi - x}{g} + \frac{2\pi t}{T} \right) e^{\pm \frac{\xi - x}{g}} \quad (259)$$

Deze functie stelt de voortplanting van een grondwaterstandsgolf voor, welke veroorzaakt wordt door een zekere harmonische invoer in het punt  $x = \xi$ . De keuze van  $+$  of  $-$  teken gebeurt zo, dat de  $e$ -macht een negatieve exponent heeft. De invoer in het betrokken punt volgt onmiddellijk uit (259):

$$2q(\xi, t) = -2kD \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{x=\xi} = 2\sqrt{2} \frac{kDF}{g} \cos \left( \frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (260)$$

Deze uitkomst geeft echter nog geen evenredigheid met (258), wat in orde gemaakt kan worden door (259) te vervangen door (261):

$$\frac{h(x, t)}{\Delta x} = \frac{g}{2\sqrt{2}kD} (a_0 + a_2\xi^2) \cos \left( \pm \frac{\xi - x}{g} + b\xi^2 + \frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{4} \right) e^{\pm \frac{\xi - x}{g}} \quad (261)$$

Hiermee is een functie verkregen, die in het punt  $x = \xi$  een invoer geeft evenredig met (258). Daar dit voor alle  $x$  moet gelden, moet (261) nog over  $\xi$  geïntegreerd worden. Als eerste deeloplossing verkrijgt men tenslotte:

$$h'(x, t) = \int_{-\frac{L}{2}}^x \frac{g}{2\sqrt{2kD}} (a_0 + a_2 \xi^2) \cos \left( \frac{\xi - x}{g} + b \xi^2 + \frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{4} \right) e^{\frac{\xi - x}{g}} d\xi +$$

$$+ \int_x^{\frac{L}{2}} \frac{g}{2\sqrt{2kD}} (a_0 + a_2 \xi^2) \cos \left( \frac{x - \xi}{g} + b \xi^2 + \frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{4} \right) e^{\frac{x - \xi}{g}} d\xi \quad (262)$$

$$q'(x, t) = \int_{-\frac{L}{2}}^x \frac{1}{2} (a_0 + a_2 \xi^2) \cos \left( \frac{\xi - x}{g} + b \xi^2 + \frac{2\pi t}{T} \right) e^{\frac{\xi - x}{g}} d\xi +$$

$$+ \int_x^{\frac{L}{2}} \frac{1}{2} (a_0 + a_2 \xi^2) \cos \left( \frac{x - \xi}{g} + b \xi^2 + \frac{2\pi t}{T} \right) e^{\frac{x - \xi}{g}} d\xi \quad (263)$$

Door ontleding van cosinus en  $e$ -macht kunnen  $x$  en  $t$  voor de integraaltekenen gebracht worden, maar door de aanwezigheid van  $\xi^2$  zal men als voor de hand liggende uitweg meestal tot grafische integratie overgaan.

Hiermede kan de eerste deeloplossing als voltooid worden beschouwd. Door substitutie van  $x = \pm L/2$  verkrijgt men uitkomsten voor  $h_0'(t)$ ,  $h'(\pm L/2, t)$  en  $q'(\pm L/2, t)$ , die als gewoonlijk niet aan de gegeven randvoorwaarden voldoen:

$$h_0'(t) = h' \left( \pm \frac{L}{2}, t \right) \neq 2\omega q' \left( \pm \frac{L}{2}, t \right) \quad (264)$$

$$h' \left( \pm \frac{L}{2}, t \right) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{g}{2\sqrt{2kD}} (a_0 - a_2 \xi^2) \cos \left( \frac{2\xi - L}{2g} - b \xi^2 - \frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{4} \right) e^{\frac{2\xi - L}{2g}} d\xi \quad (265)$$

$$q' \left( \pm \frac{L}{2}, t \right) = \pm \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{2} (a_0 - a_2 \xi^2) \cos \left( \frac{2\xi - L}{2g} + b \xi^2 + \frac{2\pi t}{T} \right) e^{\frac{2\xi - L}{2g}} d\xi \quad (266)$$

De som van de randvoorwaarden voor de andere deeloplossingen moet dus voldoen aan:

$$N'' = 0 \quad h''(x, 0) = h(x, 0) - h'(x, 0)$$

en een van de volgende voorwaarden:

$$\begin{aligned}
\text{a) } h_0''(t) &= h_0(t) - h_0'(t) \\
\text{b) } A''(t) &= A(t) \mp q' \left( \pm \frac{L}{2}, t \right) + B_w \frac{dh_0'}{dt} \\
\text{c) } A''(t) &= B_w \frac{d(h_0' + h_0'')}{dt} + \frac{h_0' + h_0''}{\Omega} \mp q' \left( \pm \frac{L}{2}, t \right)
\end{aligned} \tag{267}$$

Daar met de eerste deeloplossing (262) de gegeven functie  $N(x, t)$  is geëlimineerd en de bergingscoëfficiënt  $\mu$  constant wordt verondersteld, kan voor de afleiding van de resterende deeloplossingen bij deze randvoorwaarden verwezen worden naar hoofdstuk III.4a.

Indien in plaats van (258) de volgende betrekking voor de overtollige neerslag met een constante  $N_0$  en een dimensieloze functie  $f(x)$  is gegeven, dan geeft de oplossing van het probleem geen nieuwe moeilijkheden.

$$\begin{aligned}
N &= 0 && \text{voor } t < 0 \\
N &= N_0 f(x) && \text{voor } 0 < t < t_1 \\
N &= 0 && \text{voor } t > t_1
\end{aligned} \tag{268}$$

In dit geval kan men een eerste deeloplossing onafhankelijk van de tijd afleiden uit de volgende gewone differentiaalvergelijking:

$$kD \frac{d^2 h'}{dx^2} = N_0 f(x) \tag{269}$$

Indien voor  $f(x)$  een veelterm van de  $n^e$  graad in  $x$  is gegeven, dan volgt onmiddellijk voor  $h'(x)$  een veelterm van de graad  $n + 2$ . Voor de verdere deeloplossingen kan opnieuw verwezen worden zowel naar hoofdstuk III.4a, als in het geval dat er stroken met verschillende  $\mu$  zijn, naar de oplossingen uit het eerste deel van deze paragraaf.

Vervangt men tenslotte (268) door  $N = N_0 f'(x) f''(t)$ , dan volgt een oplossing uit:

$$h(x, t) = \int_{-\infty}^t \frac{df''}{d\tau} h'(x, t - \tau) d\tau \tag{270}$$

waarbij  $h(x, t)$  de vorige oplossing is met  $N = N_0 f'(x)$  en  $t_1 = \infty$ .

*d. Het homogene pakket met veranderingen in  $h(x, t)$  en  $N(t)$  door veranderingen in  $h_0(t)$*

Elke verandering in het peil van de open leidingen heeft een zekere verandering in de grondwaterstand tot gevolg en daarmee verandert ook de vochtverdeling in de onverzadigde zone. De potentiële verdamping, die sterk afhankelijk is van het jaargetijde en weinig toevallige variaties vertoont, is in het zomer-halfjaar groter dan de gemiddelde neerslag. Dit heeft tot gevolg, dat in de zomer en wel in het bijzonder in droge perioden de verdamping door de planten in belangrijke mate plaats vindt door

onttrekking van water aan de voorraad in de bewortelde zone en door toestroming uit de een weinig dieper gelegen onverzadigde zone. In eerste benadering pleegt men de beschikbare voorraad gelijk te stellen aan  $M(\Psi_1) - M(\Psi_2)$ , waarbij  $\Psi_1 = Z - Z_r$  ( $Z_r =$  gemiddelde diepte van beworteling; voor gras ongeveer 10 cm; voor graan ongeveer 50 cm) en  $\Psi_2 = 10^{4,2}$  cm (het zogenaamde verwelkingspunt). Naarmate de grondwaterstandsdiepte  $Z$  groter is, is het vochtgehalte in de bovenste meter grond minder afhankelijk van  $Z$  en dan is ook de hoeveelheid vocht welke voor de plant in de grond als voorraad beschikbaar is, hiervan slechts weinig afhankelijk. De hoeveelheid water, die door de planten aan de vochtvoorraad in de bodem onttrokken wordt, is dus van vijf factoren in het bijzonder afhankelijk: van de grondwaterstandsdiepte  $Z$ , van het verband tussen  $M$  en  $\Psi$ , van het verband tussen  $k$  en  $M$ , van de beworteling en van de verdeling van de neerslag. Bij de berekening van de niet-stationaire grondwaterstromingen in de verzadigde zone zal men het totale effect van deze ingewikkelde betrekkingen moeten voorstellen als een verandering in waterverbruik evenredig met de verandering in grondwaterstand:

$$E^+ - E = N - N^+ = \nu(h^+ - h) \quad (271)$$

$E^+$ ,  $N^+$  en  $h^+$  hebben betrekking op de oorspronkelijke toestand;  $E$ ,  $N$  en  $h$  hebben betrekking op de nieuwe toestand;  $\nu$  is een empirische constante waarin opgenomen de gemiddelde invloed van 4 van de 5 genoemde factoren, voor bepaalde droge perioden van de zomer.

Het onderhavige probleem kan alleen dan op dezelfde manier als de voorafgaande problemen opgelost worden, indien opnieuw aangenomen wordt dat de bergingscoëfficiënt constant is en niet verandert bij overgang van de oorspronkelijke naar de nieuwe toestand, wat echter in het algemeen niet zo is. Bij de voorafgaande problemen zou men nog kunnen veronderstellen, dat de aangenomen constante waarde van  $\mu$  gelijk is aan het optredende gemiddelde. Bij de volgende oplossingsmethode is men echter gebonden aan eenzelfde waarde voor oorspronkelijke en nieuwe toestand, hetgeen mogelijk een belangrijke systematische fout kan veroorzaken. Immers indien bijvoorbeeld een daling van het peil in de open leidingen tot gevolg heeft dat de gemiddelde grondwaterstand lager komt te liggen, wordt tegelijkertijd de gemiddelde bergingscoëfficiënt groter. In het geval dat het gaat om de drainage door open leidingen op een afstand van enkele honderden tot duizenden meters, is de grotere bergingscoëfficiënt oorzaak van een kleinere jaarfluctuatie van de grondwaterstand. De zomergrondwaterstand ligt dus dicht bij het jaargemiddelde dan verwacht wordt op grond van een onveranderde bergingscoëfficiënt.

Het is duidelijk, dat het van verschillende omstandigheden moet afhangen of de fout, die door aanneming van een constante  $\mu$  ontstaat van praktisch belang is. Vermoedelijk zal dit alleen het geval zijn bij grotere afstanden tussen de drainerende leidingen:  $L \geq 500$  m en  $W \geq 1000$  dagen. Bij kleinere afstanden tussen de drainerende leidingen ( $W \leq 300$  dagen) ontstaat een vrij snelle benadering van het evenwicht, zodat hierbij het verloop van de grondwaterstand in veel mindere mate van  $\mu$  de invloed zal ondervinden en grotendeels door het nieuwe peil van de open leidingen

Het onderhavige probleem is moeilijk en momenteel niet bevredigend opgelost. In eerste benadering zou men de najling van de grondwaterstandsstijging ten opzichte van de oorzakelijke regenval alleen afhankelijk van de grondwaterstandsdiepte kunnen nemen en onafhankelijk van de vochtverdeling in de onverzadigde zone. Is er een bijzondere maaiveldsvorm waardoor de grondwaterstandsdiepte en de najling als alleen afhankelijk van  $x$  beschouwd mogen worden, dan levert het probleem verder geen moeilijkheden op, daar  $N(t)$  onafhankelijk van de stroming in de verzadigde zone vervangen kan worden door een bekende functie van  $x$  en  $t$  (zie hoofdstuk III.4c).

Voor de najlingen in vochtverandering in de onverzadigde zone veroorzaakt door transport in de verzadigde zone kan de formule van Boulton worden gebruikt [zie formule (110)]. Hierbij wordt eveneens verondersteld, dat het superponeren in de onverzadigde zone toelaatbaar is. Het is echter zeker niet toegestaan als  $dM/dt$  van teken verandert wegens de hysteresis. Het verschijnsel van vertraagde levering is, zoals reeds eerder opgemerkt, vooral belangrijk bij snelle verschijnselen, welke bijvoorbeeld ontstaan bij pompproeven en plotselinge veranderingen in het peil van open water. Alleen in het laatste geval behoren de grondwaterstromingen tot het in deze publikatie behandelde gebied. In voorafgaande beschouwingen werd al aangetoond, dat bij dit soort grondwaterstromingen in de verzadigde zone aan weerszijden onmiddellijk naast de open leiding het superponeren ook maar een grove benadering is. Om ten slotte toch een berekening van het effect mogelijk te maken, wordt daarom verder aangenomen dat het superponeren wel is toegestaan, dat formules met fluctuaties in  $h$  en dus in vochtgehalte alleen geldig zijn over een zo korte periode dat daarin  $dM/dt$  niet van teken verandert, ofwel dat zodanig gesuperponeerd wordt, dat dit over een langere periode niet voorkomt en dat neerslag en wateronttrekking door de plant een gelijke intensiteit hebben ( $N = 0$ ).

In plaats van (148) geldt nu de volgende differentiaalvergelijking:

$$kD \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = a\mu \int_{-\infty}^t \frac{\partial h}{\partial \tau} e^{-a(t-\tau)} d\tau \quad (283)$$

Bij harmonisch fluctuerende toestanden, die even zijn in  $x$ , kan als oplossing gebruikt worden:

$$h(x, t) = AF \left\{ e^{\frac{x}{g_1}} \sin \left( \frac{x}{g_2} + \frac{2\pi t}{T} \right) + e^{-\frac{x}{g_1}} \sin \left( -\frac{x}{g_2} + \frac{2\pi t}{T} \right) \right\} + \\ + AG \left\{ e^{\frac{x}{g_1}} \cos \left( \frac{x}{g_2} + \frac{2\pi t}{T} \right) + e^{-\frac{x}{g_1}} \cos \left( -\frac{x}{g_2} + \frac{2\pi t}{T} \right) \right\} \quad (284)$$

Door substitutie van (284) in (283) volgt:

$$\frac{kD}{a\mu} \left( \frac{1}{g_1^2} - \frac{1}{g_2^2} \right) = \frac{1}{1 + \left( \frac{aT}{2\pi} \right)^2} \quad (285)$$

$$\frac{kD}{a\mu} \frac{2}{g_1 g_2} = \frac{\frac{aT}{2\pi}}{1 + \left(\frac{aT}{2\pi}\right)^2} \quad (286)$$

waaruit blijkt, dat  $g_1 \sqrt{\mu a/kD}$  en  $g_2 \sqrt{\mu a/kD}$  als functies van  $aT$  opgevat kunnen worden. Van de 4 stellen wortels, die uit (285) en (286) volgen, zijn er slechts 2 reëel. Daar deze reële oplossingen elkaars tegengestelde zijn, heeft slechts 1 stel wortels praktische betekenis.

Indien als randvoorwaarde is gegeven:  $h(\pm L/2, t) = A \cos 2\pi t/T$ , dan moet formeel een oplossing worden gezocht voor  $F$  en  $G$  als functies van  $L/g_1$  en  $L/g_2$ . In het geval, dat bij een radiale weerstand  $w \neq 0$  voor het peil van de open leiding gegeven is:  $h_0 = A \cos 2\pi t/T$ , wordt de afleiding weinig anders. De coëfficiënten  $F$  en  $G$  zijn nu functies van  $L/g_1$ ,  $L/g_2$ ,  $kDw/g_1$  en  $kDw/g_2$ . Bij oplossingen van deze soort kan men echter nooit een tijdstip aanwijzen, waarop uitsluitend afnemende vochtgehalten of uitsluitend toenemende vochtgehalten voorkomen.

Indien daarom een andere periodieke randvoorwaarde gekozen wordt, ten einde wel te kunnen voldoen aan de beperking tot monotone veranderingen in vochtgehalte met voor alle  $x$  ofwel een toenemend, ofwel een afnemend vochtgehalte, bijvoorbeeld:

$$h_0(t) \text{ ofwel } h\left(\pm \frac{L}{2}, t\right) = \begin{cases} +A & \text{voor } -\frac{1}{4}T_0 < t < \frac{1}{4}T_0 \\ -A & \frac{1}{4}T_0 < t < \frac{3}{4}T_0, \text{ enzovoort,} \end{cases} \quad (287)$$

dan kan deze randvoorwaarde door een Fourier-reeks vervangen worden. Neemt men  $n$  termen van deze reeks als voldoende, dan moeten ook  $n$  coëfficiënten  $F$  en  $G$  worden bepaald.

De volgende randvoorwaarde geeft meer moeilijkheden:

$$h_0(t) = \begin{cases} A & \text{voor } -T_0 < t < T_0 \\ 0 & |t| > T_0 \end{cases} \quad (288)$$

Deze randvoorwaarde kan door een Fourier-integraal vervangen worden, de zogenaamde discontinue factor van Dirichlet (COURANT und HILBERT, 1931, Bd. 1, pg. 69):

$$h_0(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} A \frac{\sin u \cos \frac{ut}{T_0}}{u} du \quad (289)$$

Om nu de gevraagde oplossing te vinden moet in de laatste integraal  $A \cos ut/T_0$  vervangen worden door de reeds gevonden oplossing voor  $h(x, t)$  in het harmonische geval, nu echter met  $2\pi/T$  vervangen door  $u/T_0$ . Daar  $F$ ,  $G$ ,  $g_1$  en  $g_2$  functies van  $T$  en dus ook van  $u$  zijn, wordt het rekenwerk zo omvangrijk – voor elke combinatie

$(x, t)$  is een grafische integratie nodig – dat deze laatste oplossing voor praktische toepassing minder geschikt is. Een beperking van het werk is mogelijk door alleen bij de belangrijkste waarde van  $t$ , gelegen tussen  $-T_0$  en  $-T_0 + 3$  dagen, de berekeningen uit te voeren.

### III.6. SUPERPONEERBARE OPLOSSINGEN

#### VAN DE VORM $h(x, t)$ EN $h(z, t)$ BIJ EEN PAKKET BESTAANDE UIT TWEE LAGEN VAN VERSCHILLENDE SAMENDRUKBAARHEID

Een verandering in de belasting van een pakket grond heeft in het algemeen tot gevolg, dat de laagdikte van dit pakket verandert en daarmee ook de waterberging  $\rho S$ . Daar bij een relatief klein aanrakingsoppervlak tussen de korrels de totale belasting per oppervlakte-eenheid steeds gelijk is aan de som van de waterdruk  $p_w$  en de druk  $p_k$ , welke door het korrelskelet wordt overgebracht, kan een verandering in belasting ook invloed hebben op de druk van het water en moet dus ook met de dichtheid van het water rekening worden gehouden. Omgekeerd kan een verandering in de grondwaterstand ook een verandering in korrelspanning tot gevolg hebben.

In voorgaande hoofdstukken werd de samendrukbaarheid van vloeistof en korrelskelet verwaarloosd en werd een onmiddellijke aanpassing van de drukverdeling in het grondwater aan de randvoorwaarden verondersteld. In een samendrukbaar pakket is voor een dergelijke aanpassing een zekere tijd nodig wegens de bergingsveranderingen die bij elke niet-stationaire stroming in principe moeten voorkomen. Wel zal verondersteld worden dat de dichtheid van de vloeistof en de laagdikte van het pakket zich onmiddellijk aan de plaatselijke veranderingen in waterspanning en korrelspanning aanpassen en dat een verandering in belasting in of op de bovenste grondlaag zich onmiddellijk in verticale richting naar beneden voortplant. Van deze drie benaderingen kunnen er twee zeer goed genoemd worden. Uit de beschouwingen in hoofdstuk I.1 is echter reeds gebleken, dat een onmiddellijke aanpassing van de laagdikte aan de korrelspanning [zie formule (10)] onder omstandigheden slechts een ruwe benadering behoeft te zijn.

Om zekere bergingsveranderingen in rekening te brengen zullen niet de formules (9) of (10) gebruikt worden, maar zal zowel voor de samendrukbaarheid van het water als voor het korrelskelet de wet van Hooke gebruikt worden.\*)

$$\frac{\delta p_w}{E_w} = \frac{\delta \rho}{\rho} \qquad \frac{\delta p_k}{E_k} = - \frac{\delta D}{D} \qquad (290)$$

Wegens de te verwaarlozen samendrukbaarheid van de afzonderlijke korrels geldt:

$$(1 - \beta)D = \text{constant} \quad \text{ofwel} \quad (1 - \beta) \delta D - D \delta \beta = 0 \qquad (291)$$

\*) Bij aanwezigheid van vrij gas en aangenomen, dat er een vaste verhouding is tussen de hoeveelheid gas (vrij en opgelost) en de hoeveelheid vloeistof, kan dezelfde rekenmethode gevolgd worden door  $E_w$  te vervangen door een andere compressiemodulus.



Daar  $S$  identiek is aan  $\beta D$ , kan na substitutie van (290) en (291) worden afgeleid, dat voor de bergingsverandering geldt:

$$\frac{\delta(\varphi S)}{\varphi D} = \frac{\delta(\varphi \beta D)}{\varphi D} = \frac{\beta}{E_w} \delta p_w - \frac{1}{E_k} \delta p_k \quad (292)$$

De bepaling van de waarde van  $\delta p_w$  moet gezien worden als een grondwaterstromingsprobleem met als gegeven voorwaarde, dat de som van  $\delta p_w$  en  $\delta p_k$  gelijk moet zijn aan de verandering in de belasting door een verandering in de waterberging in hoger gelegen lagen  $\delta(\varphi S)'$ . Andere veranderingen zoals in de grondmassa boven het gegeven pakket of in de atmosferische druk worden buiten beschouwing gelaten.

$$\delta p_w + \delta p_k = \delta(\varphi g S)' \quad (293)$$

Bij een constante atmosferische druk geldt  $\delta p_w = \delta(\varphi g h)$ . Met behulp van deze betrekking, van (292) en van (293) kunnen zowel  $\delta p_w$  als  $\delta p_k$  geëlimineerd worden. Het volgend resultaat geeft het verband, dat bestaan moet tussen de grondwaterstandsveranderingen in een bepaalde laag en de bergingsveranderingen in deze laag en in het erboven gelegen pakket:

$$\frac{\delta(\varphi S)}{\varphi D} = \left( \frac{\beta}{E_w} - \frac{1}{E_k} \right) \delta(\varphi g h) - \frac{1}{E_k} \delta(\varphi g S)' \quad (294)$$

Van deze betrekking werd in verschillende publikaties gebruik gemaakt om aan te tonen hoe belangrijk de samendrukbaarheid zowel van het water als van het korrelskelet kan zijn bij pompproeven en bij de voortplanting in de grond van peilveranderingen van het open water (THEIS, 1935; JACOB, 1940, 1946; BOSCH, 1951; WESSELING, 1959). Steeds werd aangenomen, dat de goed doorlatende laag aan boven- en onderkant door een ondoorlatende of slecht doorlatende laag is afgedekt, maar verder werd alleen de samendrukbaarheid van de goed doorlatende laag in rekening gebracht. Hierbij wordt dan aangevoerd, dat dunne kleilagen die in het grove pakket aanwezig zijn, bij een grondwaterstandsverlaging vrijwel onmiddellijk een deel van hun poriënwater zullen afstaan en daardoor belangrijk bijdragen tot de laagdiktevermindering van het watervoerend pakket. Deze mogelijkheid kan in het algemeen niet uitgesloten worden. Het moet echter even belangrijk geacht worden tevens rekening te houden met de samendrukbaarheid van de soms zeer dikke afdekkende lagen, welke uit klei of veen bestaan. Volgens Keverling Buisman ligt de waarde van de samendrukingscoëfficiënt  $C$  bij een eerste samenpersing van klei of veen tussen 3 en 20, bij zand tussen 50 en 400 (KEVERLING BUISMAN, 1940, pag. 84). Bovendien blijkt uit formule (9), dat naarmate  $p_0$  kleiner is, naar verhouding bij dezelfde verandering in belasting een grotere verandering in laagdikte optreedt.

Bij een grondwaterstandsverlaging tot een nog niet eerder bereikt minimum, bijvoorbeeld door het verlagen van het polderpeil, het graven van nieuwe sloten of door de bemaling van een bouwput, kan dus een belangrijke maaiveldsdaling optreden. Brinkhorst maakt melding van een geval waarbij enkele meters dikke klei- en veenlagen aan de oppervlakte in korte tijd enkele centimeters ingeklonken zijn per meter grondwaterstandsvaling en hieruit kan afgeleid worden dat  $E_w/E_k \approx 10^3$  (BRINK-

HORST, 1936). Bij de reeds tientallen jaren in gebruik zijnde wateronttrekkingen aan diepe lagen in de Verenigde Staten vindt men een bodemdaling, welke per meter grondwaterstands daling in grootte-orde aan het vorige geval gelijk is (TOLMAN and POLAND, 1940); in het door Tolman en Poland beschreven geval moet de grote daling voor een belangrijk deel verklaard worden door de lange duur [zie formule (10)] en door de grote dikte van het samendrukbare pakket (200 tot 300 m). Bij periodieke grondwaterstandsveranderingen (bijvoorbeeld door eb en vloed of door verdampingsverschillen tussen zomer en winter) is de samendrukkingsconstante enkele malen groter en moeten dus naar verhouding kleinere fluctuaties in maaiveldshoogte en grondwaterberging worden verwacht. De langzame uitdrijving van het grondwater kan met dezelfde vergelijkingen als in hoofdstuk III.4 berekend worden, namelijk door de gegeven begintoestand te vervangen door een Fourier-reeks en voor elke term van de Fourier-reeks de erbij behorende oplossing met exponentiële demping in te voeren. Uit de door Keveling Buisman opgegeven waarden voor de samendrukkingscoëfficiënt  $C$  (de invloed van het poriëngehalte en het volumegewicht als functie van de diepte is van veel minder belang) kan men afleiden, dat bij zeer dikke, goed samendrukbare lagen aan het oppervlak (bijvoorbeeld 5 tot 10 meter dikke pakketten veen of klei) die slecht ontwaterd zijn geweest, een maaiveldsdaling ontstaat welke zelfs groter kan zijn dan 0,1 maal de grondwaterstands daling. Voor dergelijke gevallen zal een oplossing aangegeven worden, welke enigszins afwijkt van die in hoofdstuk III.4, daar de daling van elke grondlaag op de stroming van invloed moet zijn. In dit hoofdstuk zal na de afleiding van deze dempende oplossing nog een harmonische oplossing worden afgeleid, welke in het bijzonder kan worden toegepast bij de voortplanting in het grondwater van een harmonische peilverandering (zie het voorbeeld met eb en vloed behandeld op pag. 137 en 138), maar in het algemeen ook bij elke willekeurige peilverandering van het open water.

Voor het berekenen van de niet-stationaire grondwaterstroming in een samendrukbare pakket bestaande uit twee verschillende lagen kan worden uitgegaan van formule (294). Bij constante atmosferische druk en constante belasting door de grondmassa's kan deze vergelijking worden toegepast op twee toestanden, die alleen verschillen in stijghoogteverdeling en in waterberging. Wordt  $\rho$  als een constante beschouwd, dan is het linkerlid van deze vergelijking te vervangen door  $\delta S_n / D_n$ . Voor een dunne laag aangeduid door een index  $n$ , met de erboven gelegen lagen genummerd  $1 \dots n - 1$ , geldt dan:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_n}{D_n} &= \left( \frac{1}{E_n} + \frac{\beta_n}{E_w} \right) \rho g \delta h_n' - \frac{1}{E_n} \sum_{i=1}^{n-1} \rho g \delta S_i = \\ &= \left( \frac{1}{E_n} + \frac{\beta_n}{E_w} \right) \left( \rho g \delta h_n - \sum_{i=n+1}^N \rho g \delta S_i \right) - \frac{1}{E_n} \sum_{i=1}^{n-1} \rho g \delta S_i \end{aligned} \quad (295)$$

waarin:

$S_i$ ;  $S_n$  = hoeveelheid water in de lagen met indices  $i$  en  $n$  gemeten als berging in cm  
 $E_n$  = elasticiteitsmodulus van het korrelskelet in de laag met index  $n$

$E_w$  = elasticiteitsmodulus van water

$\delta h'$  = verandering in de stijghoogte van het water in een bepaalde laag gerekend ten opzichte van de hoogte van deze laag. Door dikteveranderingen van onderliggende lagen is de hoogte van elke laag ook aan veranderingen onderhevig.

$\delta h$  = absolute verandering in stijghoogte

Indien  $E_n$  en  $E_w$  van dezelfde grootte-orde zijn, is in (295) de term met  $\delta h_n$  zoveel groter dan de termen met  $\sum \rho g \delta S_i$ , dat deze vergelijking kan worden vervangen door (296). De invoering van de coëfficiënt  $\xi$  heeft als doel de omschrijving korter en overzichtelijker te maken.

$$\frac{\delta S_n}{D_n} = \left( \frac{1}{E_n} + \frac{\beta_n}{E_w} \right) \rho g \delta h_n = \frac{\rho g \delta h_n}{\xi E_n} \quad (296)$$

Indien daarentegen  $E_n \ll E_w$ , dan is  $\xi \approx 1$  en krijgt men in plaats van (296):

$$\frac{\delta S_n}{D_n} = \frac{\rho g}{E_n} \left( \delta h_n - \sum_{i=1}^{n-1} \delta S_i - \sum_{i=n+1}^N \delta S_i \right) \quad (297)$$

Voor de verticale stroming in een zeer dunne  $n^e$  laag van het slecht doorlatende pakket kan de volgende uitdrukking worden gebruikt:

$$\frac{\delta S_n}{D_n} = \frac{(v_{z, n} - v_{z, n-1}) \delta t}{D_n} = - \frac{\partial v_z}{\partial z} \delta t \quad (298)$$

De indeling in lagen van zeer kleine, maar eindige dikte mag nu vervallen; de indices 1 en 2 hebben voortaan betrekking respectievelijk op de bovengelegen slecht doorlatende laag en de diepere goed doorlatende laag. De tweede laag wordt verondersteld uit minder fijn materiaal te bestaan, zodat de bergingsverandering in deze laag mag worden verwaarloosd als het om de hoogte van het bovenliggende pakket gaat. Substitutie van (297) en van de wet van Darcy voor  $v_z$  in (298) levert:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( k_1 \frac{\partial h_1}{\partial z} \right) = \frac{\rho g}{E_1} \left\{ \frac{\partial h_1}{\partial t} - v_z(-D_1, t) \right\} \quad (299)$$

Bij toepassing van deze vergelijking op stromingen in niet zeer sterk samendrukbare grond mag men  $k_1$  en  $E_1$  als constanten beschouwen en na verwaarlozing van de term met  $v_z$  keert men in principe terug tot dezelfde differentiaalvergelijking, als in bovengenoemde publikaties werd gebruikt. Bij zeer sterk samendrukbare grond kunnen echter zo grote veranderingen in  $\beta$  optreden, dat  $k_1$  en  $E_1$  niet meer als constanten mogen worden beschouwd. Bovendien zou in rekening gebracht moeten worden dat naarmate  $|d D_n^{-1} \partial S_n / \partial t|$  groter is ten opzichte van  $|k_1 \text{ grad } h|$ , het gevaar toeneemt, dat het gebruik van de wet van Darcy (met voor  $k$  de waarde behorend bij de aanwezige  $\beta$  in een stationaire toestand) tot minder juiste uitkomsten leidt. Bij laboratoriumproeven op zeer dunne monsters, waarbij de term met  $v_z$  verdwijnt omdat het midden van het monster vrijwel niet van plaats verandert en er geen belangrijke ver-

andering in de belasting door drainage van hoger gelegen lagen optreedt, heeft men gevonden dat bij grote variaties in  $\beta$  het produkt  $kE$  vrij goed constant blijft en een goede benadering bereikt wordt als  $kE/\rho g$  buiten de differentiaalquotiënten gebracht wordt (TERZAGHI and PECK, 1956, pag. 76 en 233-242). Hoewel enig voorbehoud gemaakt moet worden, vereenvoudigen we vergelijking (299) op dezelfde manier:

$$\frac{k_1 E_1}{\rho g} \frac{\partial^2 h_1}{\partial z^2} = \frac{\partial h_1}{\partial t} - v_z(-D_1, t) \quad (300)$$

Gezien de niet zeer grote nauwkeurigheid, welke bij vergelijking (300) verwacht mag worden, kan het geen groot bezwaar zijn onder  $z$  niet de coördinaat voor de geometrische plaatsbepaling te verstaan, maar de coördinaat voor de materiële plaatsbepaling. In hoeverre deze benadering geoorloofd is, hangt af van de verhouding tussen de laagdikte  $D_1$  en de grootte van de grondwaterstandsverandering  $\delta h$ : indien  $D_1 \approx 10$  m en  $\delta h < 1$  m, dan is het duidelijk dat een onbekende laagdikteverandering evenredig met  $\delta h$  wel ten opzichte van  $D_1$  maar niet ten opzichte van  $\delta h$  mag worden verwaarloosd. Met deze laatste benadering is het voordeel, dat de randvoorwaarden bij de vaste coördinaten  $z = 0$  en  $z = -D_1$  opgesteld kunnen worden, slechts te bereiken indien tenslotte nog de veronderstelling wordt toegevoegd dat het freatisch oppervlak is gelegen in een relatief dunne oppervlakkige laag boven de laag met dikte  $D_1$ .

Om een oplossing met exponentiële demping te vinden wordt een functie van de volgende vorm geprobeerd:

$$h_1(z, t) = e^{-ft} \left\{ A_1 \sin \frac{z}{a} + A_2 \cos \frac{z}{a} - \frac{1}{f} v_z(-D_1, 0) \right\} \quad (301)$$

Evenals in voorgaande hoofdstukken moet hier een zekere geschatte waarde van  $f$  ingevoerd worden om de verdere bewerking numeriek mogelijk te maken. Het is duidelijk dat om dezelfde reden als tevoren, voor  $f$  slechts discrete waarden mogelijk zullen zijn. Door (301) in (300) te substitueren blijkt, dat er tussen  $a$  en  $f$  het volgende verband moet bestaan:

$$a = \pm \sqrt{\frac{k_1 E_1}{\rho g f}} \quad (302)$$

Differentiëren van (301) naar  $z$  levert op:

$$v_z(-D_1, t) = -\frac{k_1}{a} e^{-ft} \left( A_1 \cos \frac{D_1}{a} + A_2 \sin \frac{D_1}{a} \right) \quad (303)$$

Substitutie van (303) in (301) doet formule (304) ontstaan:

$$h_1(z, t) = e^{-ft} \left\{ A_1 \left( \sin \frac{z}{a} + \frac{k_1}{af} \cos \frac{D_1}{a} \right) + A_2 \left( \cos \frac{z}{a} + \frac{k_1}{af} \sin \frac{D_1}{a} \right) \right\} \quad (304)$$

Van de randvoorwaarde aan de bovenzijde van de slecht doorlatende laag ( $z = 0$ ) kan gebruik worden gemaakt om de verhouding tussen de coëfficiënten  $A_1$  en  $A_2$

te bepalen. Men kan bijvoorbeeld veronderstellen dat het freatisch oppervlak een voorgeschreven constante hoogte heeft:  $h_1(0, t) = 0$ , ofwel:

$$\frac{A_1 k_1}{af} \cos \frac{D_1}{a} + A_2 \left( 1 + \frac{k_1}{af} \sin \frac{D_1}{a} \right) = 0 \quad (305)$$

Een andere mogelijkheid is, dat er bij  $N = 0$  geen horizontale uitwisseling in een dunne oppervlakkige laag kan plaats vinden en de daling van het freatisch oppervlak dus bepaald wordt door de wegzijging in de slecht doorlatende laag:

$$\mu \left( \frac{\partial h_1}{\partial t} \right)_{0, t} = v_z(0, t) = -k_1 \left( \frac{\partial h_1}{\partial z} \right)_{0, t} \quad (306)$$

ofwel:

$$-\mu f e^{-ft} \left\{ \frac{A_1 k_1}{af} \cos \frac{D_1}{a} + A_2 \left( 1 + \frac{k_1}{af} \sin \frac{D_1}{a} \right) \right\} = -\frac{A_1 k_1}{a} e^{-ft} \quad (307)$$

ofwel:

$$A_1 \left( \cos \frac{D_1}{a} - \frac{1}{\mu} \right) + A_2 \left( \frac{af}{k_1} + \sin \frac{D_1}{a} \right) = 0 \quad (308)$$

Verwisseling van de positieve en de negatieve  $a$  doet  $A_1$ ,  $A_2$  van teken veranderen. De uitkomst voor  $h_1(z, t)$  verandert hierdoor dus niet. Na vaststelling van de waarde van  $A_1/A_2$  - hetzij volgens (305), hetzij volgens (308) - moet gebruik worden gemaakt van de gemeenschappelijke randvoorwaarde voor de eerste en de tweede laag en van de differentiaalvergelijking voor de tweede laag.

$$h_1(-D_1, x, t) = h_2(x, t) \quad (309)$$

$$k_2 D_2 \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} = \frac{\rho g D_2}{z_2 E_2} \frac{\partial h_2}{\partial t} + v_z(-D_1, x, t) \quad (310)$$

In de vergelijkingen die voorafgaan aan (309) en (310) is een afhankelijkheid van  $x$  buiten beschouwing gelaten. Aan de constanten  $A_1$  en  $A_2$  mag men echter eenzelfde, alleen van  $x$  afhankelijke factor toevoegen. Door substitutie kan gemakkelijk worden bewezen, dat voor deze factor  $\cos 2\pi x/\lambda$ , met een nog nader te bepalen parameter  $\lambda$ , genomen mag worden.

$$h_2(x, t) = \cos \frac{2\pi x}{\lambda} h_1(-D_1, t) = \cos \frac{2\pi x}{\lambda} e^{-ft} \left\{ A_1 \left( -\sin \frac{D_1}{a} + \frac{k_1}{af} \cos \frac{D_1}{a} \right) + A_2 \left( \cos \frac{D_1}{a} + \frac{k_1}{af} \sin \frac{D_1}{a} \right) \right\} \quad (311)$$

$$v_z(-D, x, t) = -\frac{k_1}{a} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \left( A_1 \cos \frac{D_1}{a} - A_2 \sin \frac{D_1}{a} \right) \quad (312)$$

Substitutie van (311) en (312) in (310) levert op:

$$\left\{ \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 k_2 D_2 - \frac{\rho g D_2}{\xi_2 E_2} f \right\} \left\{ A_1 \left( -\sin \frac{D_1}{a} + \frac{k_1}{af} \cos \frac{D_1}{a} \right) + A_2 \left( \cos \frac{D_1}{a} + \frac{k_1}{af} \sin \frac{D_1}{a} \right) \right\} =$$

$$= \frac{k_1}{a} \left( A_1 \cos \frac{D_1}{a} + A_2 \sin \frac{D_1}{a} \right) \quad (313)$$

Hiermee is een tweede vergelijking verkregen, die homogeen en lineair in  $A_1$  en  $A_2$  is. Een oplossing is mogelijk, daar  $\lambda^2$  nog een laatste vrijheidsgraad vormt.

Uitgaande van een willekeurige en mogelijk wel redelijk goed geschatte waarde van  $f$  moet dus achteraf de bijbehorende afstand tussen de open leidingen uit de gevonden waarde van  $\lambda^2$  worden afgeleid. Indien  $w = 0$ , dan volgt onmiddellijk uit (311) dat de gevonden oplossing overeenkomt met een symmetrische toestand, waarbij de open leidingen een peil  $h_0 = 0$  hebben en  $L = \lambda/2$ .

Deze berekeningen zijn echter bedoeld voor toepassing op gevallen, waarbij  $D_1$  vrij groot is en daarom moet  $w \neq 0$  genomen worden. Evenals in hoofdstuk III.5 zou men zekere bergingsveranderingen samenhangend met de radiale stroming kunnen verwaarlozen en bijgevolg vergelijking (173) kunnen gebruiken om  $L$  te bepalen bij de gevonden  $\lambda$ .

Indien  $\lambda \gg D_1$  dan is de bergingsverandering  $q_0, r(t)$ , die uit de radiale stromingscomponent verklaard moet worden, klein ten opzichte van de totale bergingsverandering  $q_0(t)$ . Met de volgende ruwe benadering waarbij de toestand in de omgeving van de open leiding als quasi-stationair beschouwd wordt en  $h_0 = 0$ , kan men de grootteorde van  $q_0, r$  berekenen en tevens een nog iets betere benadering van  $L$  verkrijgen. Een gelijksoortige berekening zou ook in hoofdstuk III.4 kunnen worden toegepast om aan te tonen, in hoeverre de gebruikelijke verwaarlozing van  $q_0, r$  toelaatbaar is.

In de omgeving van de open leiding geldt in eerste benadering voor de radiale stromingscomponent:

$$h_r = h_2 \left( \frac{L}{2}, 0 \right) \left\{ 1 - \frac{\ln \frac{r}{D_1}}{\ln \frac{r_0}{D_1}} \right\} e^{-ft} \quad (314)$$

en hieruit volgt:

$$q_{0,r} = - \int_{r_0}^{D_1} \frac{\pi r \rho g}{E_1} \frac{\partial h_r}{\partial t} dr =$$

$$= \frac{\pi f D_1^2 e^{-ft}}{\ln \frac{D_1}{r_0}} \times \frac{\rho g h_2 \left( \frac{L}{2}, 0 \right)}{E_1} \times \int_{\frac{r_0}{D_1}}^1 \frac{r}{D_1} \left\{ \ln \frac{r}{D_1} - \ln \frac{r_0}{D_1} \right\} d \left( \frac{r}{D_1} \right) \quad (315)$$

De bekende randvoorwaarde (162) wordt nu vervangen door (316), daar de hoeveelheid, welke door de radiale weerstand loopt, van  $r = D$  tot  $r = r_0$  toeneemt van  $2 q_2 (L/2)$  tot  $2 q_2 (L/2) + q_{0,r}$

$$\frac{h_2\left(\frac{L}{2}, t\right) - h_0(t)}{w} \approx 2q_2\left(\frac{L}{2}, t\right) + \frac{1}{2}q_{0,r}(t) \quad (316)$$

en hieruit volgt na substitutie van  $h_0 = 0$  en van de formules (311) en (315) een uitdrukking, waaruit de waarde van  $L$  volgt behorende bij de reeds gevonden  $\lambda$ :

$$\frac{4\pi k_2 D_2 w}{\lambda} \operatorname{tg} \frac{\pi L}{\lambda} + \frac{\pi \rho g D_1^2 f w}{4E_1} \frac{\left(\frac{r_0}{D_1}\right)^2 - 1 + \ln\left(\frac{D_1}{r_0}\right)^2}{\ln\left(\frac{D_1}{r_0}\right)^2} = 1 \quad (317)$$

Terwijl bij  $w = 0$  verondersteld mag worden, dat  $h_0(t) = 0$  en  $h_2(\pm L/2, t) = 0$ , waaruit volgt dat de samendrukking van het pakket voor  $x = \pm L/2$  niet verandert, moet bij  $w \neq 0$  onder de open leidingen een zekere zetting optreden. Deze zettingen kunnen berekend worden met behulp van de oplossingen voor  $h_1(\pm L/2, z, t)$ ,  $h_2(\pm L/2, t)$  en  $h_r(r, t)$ . De voorwaarde dat het peil van de open leidingen bij een sterk samendrukbaar pakket en veranderlijke grondwaterstromingen toch constant is, kan aannemelijk worden gemaakt door te veronderstellen, dat dit peil wordt veroorzaakt door een kunstwerk dat in de zandige ondergrond is gefundeerd. Indien daarentegen een daling van het peil van de open leidingen optreedt gelijk aan de maaiveldsdaling ter plaatse of daarmee evenredig, dan moet voor  $h_0(t)$  in (316) een functie van  $t$  gesubstitueerd worden. Daar  $h_1(\pm L/2, z, t)$  en  $h_r(r, t)$  evenredig zijn met  $h_2(\pm L/2, t)$  geeft dit verder geen bijzondere moeilijkheden en kan ook in dit geval  $L$  afgeleid worden uit een formule gelijkwaardig aan (317).

De afleiding van de oplossing van een grondwaterstroming met harmonische fluctuatie gaat in principe langs dezelfde weg als die bij een grondwaterstroming met exponentiële demping. Uitgaande van:

$$\frac{k_1 E_1}{\rho g} \frac{\partial^2 h_1}{\partial z^2} = \frac{\partial h_1}{\partial t} + k_1 \left( \frac{\partial h_1}{\partial z} \right)_{-D_1} \quad (318)$$

kan men onmiddellijk inzien, dat (319) een bijzondere oplossing van (318) is.

$$h_1(z, t) = A e^{-\frac{z}{a}} \cos\left(-\frac{z}{a} + \frac{2\pi t}{T} + u\right) - \int_{t_0}^t k_1 \left( \frac{\partial h_1}{\partial z} \right)_{-D_1} dt \quad (319)$$

Na substitutie vindt men de volgende twee wortels voor de coëfficiënt van  $z$ :

$$a' = \sqrt{\frac{k_1 E_1 T}{\pi \rho g}} \quad a'' = - \sqrt{\frac{k_1 E_1 T}{\pi \rho g}} \quad (320)$$

Voor de integraal van (319) vindt men de volgende uitkomst door (319) onder het integraalteken te substitueren.

$$-\int_{t_0}^t k_1 \left( \frac{\partial h_1}{\partial z} \right)_{-D_1} dt = \frac{A' k_1}{a'} e^{\frac{D_1}{a'} t} \int_{t_0}^t \left\{ \cos \left( \frac{D_1}{a'} + \frac{2\pi t}{T} + u' \right) + \right. \\ \left. - \sin \left( \frac{D_1}{a'} + \frac{2\pi t}{T} + u' \right) \right\} dt \quad (321)$$

De waarde van  $t_0$  mag vrij worden gekozen, zodat bij substitutie in (319) de constante term kan worden weggelaten.

$$h_1'(z, t) = A' e^{-\frac{z}{a'}} \cos \left( -\frac{z}{a'} + \frac{2\pi t}{T} + u' \right) + \\ + \frac{A' k_1 T}{2\pi a'} e^{\frac{D_1}{a'} t} \left\{ \sin \left( \frac{D_1}{a'} + \frac{2\pi t}{T} + u' \right) + \cos \left( \frac{D_1}{a'} + \frac{2\pi t}{T} + u' \right) \right\} \quad (322)$$

Daar er behalve de wortel  $a'$  nog een wortel  $a''$  is, zijn hiermee 2 onafhankelijke oplossingen  $h_1'$  en  $h_1''$  met 4 parameters  $A'$  en  $A'' = \gamma A'$ ,  $u'$  en  $u''$  verkregen.

Substitueert men  $h_1' + h_1''$  in de randvoorwaarde voor  $z = 0$  [zie vergelijking (306)] en stelt men de coëfficiënten van  $\sin(2\pi t/T + u')$  en  $\cos(2\pi t/T + u')$  gelijk nul, dan ontstaan 2 vergelijkingen, waarin  $\gamma \sin(u'' - u')$  en  $\gamma \cos(u'' - u')$  lineair, maar niet homogeen voorkomen. Hieruit kunnen  $\gamma$  en  $u'' - u'$  worden opgelost, zodat nog slechts 2 vrijheidsgraden over zijn in de coëfficiënten  $A'$  en  $u'$ .

Evenals bij de afleiding van een oplossing met exponentiële demping wordt in dit geval voor de vastlegging van deze laatste vrijheidsgraden gebruik gemaakt van de gemeenschappelijke randvoorwaarde voor de eerste en de tweede laag en van de differentiaalvergelijking voor de tweede laag [zie (309) en (310)].

De verkregen oplossing voor  $h_1(z, t)$  mag men wegens (309) na differentiatie en substitutie van  $z = -D_1$  in het rechterlid van (310) substitueren. Dit rechterlid kan in vereenvoudigde vorm met bekende coëfficiënten  $g_1$  en  $g_2$  als volgt worden geschreven:

$$\text{Rechterlid van (310)} = A' \left\{ g_1 \sin \left( \frac{2\pi t}{T} + u' \right) + g_2 \cos \left( \frac{2\pi t}{T} + u' \right) \right\} \quad (323)$$

Substitutie in het linkerlid is eerst mogelijk als bekend is hoe de overgebleven parameters  $A'$  en  $u'$  van  $x$  afhangen. Indien voor  $A'$  en  $u'$  respectievelijk een exponentiële functie ( $A' = A_0 e^{-nx}$ ) en een lineaire functie ( $u' = -sx$ ) aangenomen worden, dan blijkt deze substitutie tot een oplossing te leiden. Eerst wordt  $h_2(x, t)$  nog in de volgende vereenvoudigde vorm geschreven met bekende coëfficiënten  $g_3$  en  $g_4$ .

$$h_2(x, t) = h_1(-D_1, z, t) = A_0 e^{-nx} \left\{ g_3 \sin \left( \frac{2\pi t}{T} - sx \right) + g_4 \cos \left( \frac{2\pi t}{T} - sx \right) \right\} \quad (324)$$

Substitutie van (324) in het linkerlid van (310) en gelijkstelling aan (323) met  $A'$  en  $u'$  op de gegeven manier afhankelijk van  $x$  levert ten slotte op:



$$k_2 D_2 \left\{ (g_3 n^2 - g_3 s^2 - 2g_4 ns) \sin \left( \frac{2\pi t}{T} - sx \right) + (g_4 n^2 - g_4 s^2 + 2g_3 ns) \times \right. \\ \left. \times \cos \left( \frac{2\pi t}{T} - sx \right) \right\} = g_1 \sin \left( \frac{2\pi t}{T} - sx \right) + g_2 \cos \left( \frac{2\pi t}{T} - sx \right) \quad (325)$$

De coëfficiënt van de sinus en de coëfficiënt van de cosinus in (325) moeten gelijk aan nul gesteld worden, waarmee de 2 volgende vergelijkingen worden verkregen:

$$k_2 D_2 \{g_3 (n^2 - s^2) - 2g_4 ns\} - g_1 = 0 \quad (326)$$

$$k_2 D_2 \{g_4 (n^2 - s^2) + 2g_3 ns\} - g_2 = 0 \quad (327)$$

De determinant van deze vergelijkingen moet ongelijk nul zijn, daar er anders geen oplossing kan zijn voor  $n^2 - s^2$  en  $ns$ . Door grafische uitzetting ziet men nu onmiddellijk in, hoewel er 4 stellen wortels ( $n, s$ ) zijn, dat er slechts twee reële stellen zijn, waarvoor geldt:

$$n_1 = -n_2 \quad s_1 = -s_2 \quad (328)$$

Bij de voortplanting van een harmonische golfbeweging vanuit het punt  $x = 0$  moet men  $h_2(0, t)$  als gegeven aannemen. Indien bij de voortplanting van de golfbeweging in de positieve richting ( $x > 0$ ) alle andere factoren (open water met constant of fluctuerend peil of fluctuerende invoer) die op de golfvoortplanting van invloed zijn, op grote afstand werkzaam zijn, dan moet  $h_2$  voor grote  $x$  tot nul naderen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h_2 = 0 \quad (329)$$

Hieruit volgt, dat voor positieve  $x$  alleen de negatieve wortel van  $n$  gebruikt mag worden. Voor negatieve  $x$  geldt het omgekeerde en voldoet alleen de positieve wortel.

Uit veldmetingen zal men in de eerste plaats de demping en de voortplantingssnelheid kunnen afleiden. De afstand, waarover de amplitude tot de helft teruggaat, moet volgens formule (324) gelijk worden gesteld aan  $x = n^{-1} \ln 2 = 0.7/n$ . De voortplantingssnelheid van de golf wordt voorgesteld door  $2\pi/sT$ .

Een toepassing van de afgeleide vergelijkingen met het doel uit gemeten waarden van  $n$  en  $s$  zekere geologische of hydrologische constanten (bijv.  $E_1$  en  $E_2$ ) af te leiden, is tot nu toe slechts in twee gevallen gebeurd.

In de Tielerwaard (provincie Gelderland) heeft men uit geologisch onderzoek van diepe boringen, uit pompproeven, uit metingen van de afvoer uit drie kleine polders langs de rivier de Waal en uit de gemiddelden van metingen van de grondwaterstand in diepe buizen de volgende uitkomsten verkregen:

$$\begin{array}{ll} k_1 = 0,001 \text{ tot } 0,01 \text{ m/dag} & D_1 = 7 \text{ m} \\ k_2 = 50 \text{ m/dag} & D_2 = 40 \text{ m} \end{array}$$

Wegens de fluctuaties van het peil van de rivier door eb en vloed ( $T = 0,5$  dag) ontstaat in het diepe grove pakket een golfvoortplanting. Demping en naijling variëren volgens waarnemingen in vier raaien met diepe buizen slechts zeer weinig:

$$n = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}; s = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}.$$

Op het eiland Schouwen (provincie Zeeland) werd in de Prunjepolder een gelijk-

soortig onderzoek gedaan, waarbij in grootte-orde dezelfde uitkomsten werden gevonden, behalve in een raai met een meer zandige bovenlaag ( $k_1 = 0,01$  tot  $0,1$  m/dag), welke raai verder buiten beschouwing blijft. Voor alle overige gevallen geldt, dat ondanks een niet nauwkeurig bekende waarde van  $a'$ , van te voren reeds vermoed kon worden dat  $k_1 T / 2\pi a' \ll 1$  en  $\rho g D_2 / \zeta_2 E_2 \ll 1$ , terwijl  $D_1 / a'$  voldoende groot is om het verdwijnen van de tweede deeloplossing behorende bij (322) tot gevolg te hebben. De verdere berekening wordt hierdoor aanzienlijk vereenvoudigd en leidt tot het volgende resultaat:

$$\frac{k_1 T}{2\pi a'} = \frac{k_2 D_2 T}{2\pi} (n^2 - s^2) \quad (330)$$

$$\frac{\rho g D_2}{\zeta_2 E_2} = \frac{k_2 D_2 T}{2\pi} \{-2ns - (n^2 - s^2)\} \quad (331)$$

Door de grote waarde van  $D_1 / a'$  wordt de golfbeweging in de bovenlaag snel gedempt; voor  $k_1$  moet men daarom de gemiddelde waarde nemen over 1 of 2 meter dikte van beneden af te beginnen. Daar het hier om een overgang van grof zand naar zware klei te doen kan zijn en er verder ook aanwijzingen waren, hier echter niet nader te beschouwen, dat de gemiddelde waarde over het gehele afdekkende pakket zowel in de Tielerwaard als in de Prunjepolder in grootte-orde gelijk is aan  $0,01$  m/dag werd deze waarde voor  $k_1$  aangehouden. Deze onzekerheid heeft alleen invloed op de uitkomst van  $E_1$ .

In grootte-orde zijn de op deze manier verkregen uitkomsten geheel bevredigend:

$$E_1 = 120 \text{ tot } 300 \text{ kg/cm}^2$$

$$\zeta_2 E_2 = 6 \cdot 10^3 \text{ tot } 4 \cdot 10^4 \text{ kg/cm}^2$$

Afgaande op de uitkomst, welke door Brinkhorst werd verkregen ( $E_k / E_w \approx 0,001$ ) bij een gelijksoortig uit klei en veen bestaand pakket maar bij een samenpersing van veel langere duur, moet men hier wegens de korte periodeduur van de fluctuatie hogere uitkomsten voor  $E_1$  verwachten, hetgeen inderdaad het geval blijkt te zijn. Om uit bovenstaande uitkomst  $\zeta_2$  te verwijderen moet men formule (296) gebruik maken. Daaruit volgde voor alle raaien van de Tielerwaard:  $E_2 = 0,7 \cdot 10^4$  kg/cm<sup>2</sup>; voor de vier raaien in de Prunjepolder respectievelijk  $10^4$ ;  $10^4$ ;  $3 \cdot 10^4$  en  $20 \cdot 10^4$  kg/cm<sup>2</sup>.

Vergelijkt men dit ten slotte met de rekenmethodes volgens Bosch en Wesseling, dan wordt door de samendrukbaarheid van de bovenlaag te verwaarlozen een uitkomst voor het product  $k_2 D_2 c_1$  verkregen (WESSELING, 1960), welke slechts 0,2 tot 0,3 maal de waarde is, welke verkregen werd uit gemiddelde grondwaterstanden over zeer lange perioden. Dit verschil ondersteunt de bewering, in het begin van dit hoofdstuk gedaan, dat een verwaarlozing van de samendrukbaarheid van de bovenlaag onder de gegeven omstandigheden niet toelaatbaar is.

### III.7. DE BEREKENING VAN NIET-STATIONAIRE GRONDWATERSTROMINGEN BIJ AANNEMING VAN QUASI-STATIONAIRE TOESTANDEN

Bij de in dit hoofdstuk te behandelen rekenmethode gaat men van de veronderstelling uit, dat als de van de tijd onafhankelijke eigenschappen van de grond bekend zijn en bij de symmetrische drainage verder alleen gemeten worden: de hoogte van de grondwaterspiegel  $h_1(x_1, t)$  in een zeker punt  $x_1$  en het peil  $h_0(t)$  van de evenwijdige open leidingen, de toestand hieruit volledig kan worden afgeleid.\*) Men bedoelt hiermee, dat onder de praktisch voorkomende omstandigheden op elk tijdstip de vorm van de grondwaterspiegel met voldoende benadering gelijk mag worden gesteld aan een stationaire toestand van een bijzondere soort en wel bij voorkeur een eenvoudige vorm zoals bijvoorbeeld voor de stationaire symmetrische drainage in een homogeen pakket kan worden afgeleid.

Hoewel deze methode voor de praktijk zeer belangrijk kan zijn en misschien wel meer in gebruik is dan momenteel bekend, zijn nog slechts weinig toepassingen in de literatuur te vinden. Op het feit dat de uitdrukking 'quasi-stationair' niet geheel bevredigend is, werd reeds door Maillet gewezen (MAILLET, 1905, pag. 3). Deze onderzoeker maakt voorbehoud ten aanzien van de toepasbaarheid van deze vereenvoudigde rekenmethode en onderscheidt perioden met een 'régime propre ou non influencé', tijdens welke perioden  $N = 0$  en de toepassing zou zijn toegestaan en perioden met een 'régime influencé', waarbij  $N \neq 0$  en geen quasi-stationaire toestanden zouden mogen worden aangenomen (MAILLET, 1905, hoofdstuk 2 en pag. 107). Bij de volgende uitwerkingen zullen echter ook gevallen met  $N \neq 0$  behandeld worden.

Indien nu wordt aangenomen dat de vorm van de grondwaterspiegel bekend is en dat de bergingscoëfficiënt  $\mu$  constant is of een gegeven functie van  $h$  en  $x$ , dan volgt hieruit dat de berging  $\int S dx$  in principe berekend moet kunnen worden en dat dit bij een eenvoudige  $h(x)$  en  $\mu(h, x)$  geen moeilijkheden behoeft op te leveren. De bekende vorm van de grondwaterspiegel houdt tevens in, dat de stroomsterkte  $q_0$  naar de open leidingen hieruit kan worden afgeleid. Zowel  $\bar{S}$  als  $q_0$  worden dus beschouwd als eenduidige functies van  $h_1$  en  $h_0$ .\*\*\*) Meestal wordt stilzwijgend verondersteld dat de grondwaterstand midden op het perceel halverwege tussen de open leidingen gemeten wordt, hoewel een afwijkende ligging van de grondwaterstandsbuis geen bezwaar is, daar men immers veronderstelt de vorm van de grondwaterspiegel te kennen en zekere verschuivingen of evenredige vergrotingen door de gemeten waarden van  $h_1$  en  $h_0$  zijn vastgelegd. Substitueert men de functies  $\bar{S}(h_1, h_0)$  en  $q_0(h_1, h_0)$  in de continuïteitsvergelijking:

$$N = \frac{q_0}{L} + \frac{d\bar{S}}{dt} \quad (332)$$

\*) In deze paragraaf wordt  $h_1(x_1, t)$  ter bevordering van de overzichtelijkheid geschreven als  $h_1(t)$  of  $h_1$ ; daar de grondwaterstand betrekking heeft op het vaste gekozen punt  $x_1$  wordt de index direct aan de letter  $h$  gehangen (afwijking van de tot nu toe gebruikte notatie).

\*\*) Een iets afwijkende bewerking wordt door Porchet toegepast door invoering van  $h$  als functie van  $x$  en  $q_0$  en van  $V = \int S dx$  als functie van  $q_0$ . Porchet past dit toe op de drainage door buizen en veronderstelt daarbij dat de grondwaterspiegel is opgebouwd uit parabolen met horizontale assen, wat in dit geval tot minder juiste uitkomsten moet leiden (PORCHET, 1923).

vergelijkingen  $N$  en  $A$  weg. Voor het geval, dat  $\Omega$  gegeven is, verkrijgt men uit (338) en (340):

$$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{1}{\mu\alpha W} \left\{ 1 + \frac{\mu(1-\alpha)L}{B_w} \right\} h_1 + \frac{1}{\mu\alpha W} \left\{ 1 + \frac{\mu(1-\alpha)}{B_w} \left( L + \frac{W}{\Omega} \right) \right\} h_0 \quad (343)$$

$$\frac{dh_0}{dt} = \frac{L}{B_w W} h_1 - \left( \frac{L}{B_w W} + \frac{1}{B_w \Omega} \right) h_0 \quad (344)$$

Ten einde uit (343) en (344) een oplossing met exponentiële demping te vinden substitueert men:

$$h_1 = F_1 e^{-ft} \quad (345)$$

$$h_0 = F_0 e^{-ft} \quad (346)$$

Men verkrijgt twee homogene lineaire vergelijkingen in  $F_0$  en  $F_1$ , welke slechts een oplossing kunnen hebben indien de determinant nul is.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} + f & a_{1,2} \\ a_{0,1} & a_{0,2} + f \end{vmatrix} = 0 \quad (347)$$

Uit (347) volgen twee wortels voor  $f$ . Bij elke wortel wordt een bepaalde verhouding  $F_1/F_0$  gevonden. Duiden we deze verhoudingen aan door  $F_{1,1}/F_{0,1}$  en  $F_{1,2}/F_{0,2}$ , dan kan de oplossing als volgt worden geschreven:

$$h_1'' = C_1 \frac{F_{1,1}}{F_{0,1}} e^{-f_1 t} + C_2 \frac{F_{1,2}}{F_{0,2}} e^{-f_2 t} \quad (348)$$

$$h_0'' = C_1 e^{-f_1 t} + C_2 e^{-f_2 t} \quad (349)$$

Na substitutie van de gegeven beginvoorwaarden  $h_1''(0)$  en  $h_0''(0)$  kunnen de nog onbekende coëfficiënten  $C_1$  en  $C_2$  worden berekend. Bij kleine  $B_w$  wordt voor een van de wortels van  $f$  een zeer grote waarde gevonden. Indien  $B_w = 0$ , dan volgt uit (334) en (335) dat de verhouding  $h_1/h_0$  niet meer vrij mag worden gekozen; de oplossing van het probleem moet dan uit (338) met een gegeven beginvoorwaarde  $h_1(0)$  worden afgeleid.

Bij de randvoorwaarden  $h_0 = 0$  en  $N(t) = N_a \sin 2\pi t/T$  vindt men een zeer eenvoudige bijzondere oplossing, welke in de praktijk vooral op de jaarlijkse fluctuaties zal kunnen worden toegepast. Vergelijking (338) gaat over in:

$$N(t) = \frac{h_1}{W} + \alpha\mu \frac{dh_1}{dt} \quad (350)$$

De harmonische deeloplossing van (350) kan als volgt worden geschreven:

$$h_1' = h_a \sin \frac{2\pi(t - \theta)}{T} \quad (351)$$

Door substitutie kan men onmiddellijk afleiden, dat voor amplitude en naijling de volgende uitdrukkingen gelden:

$$h_a = \frac{N_a T}{\sqrt{\left(\frac{W}{T}\right)^2 + (2\pi\alpha\mu)^2}} \quad (352)$$

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi\theta}{T} = \frac{2\pi\alpha\mu W}{T} \quad (353)$$

De tweede deeloplossing  $h_1''$  moet samen met de eerste deeloplossing op  $t = 0$  aan de gegeven begintoestand  $h_1(0)$  voldoen.

$$h_1''(t) = \left\{ h_1(0) + h_a \sin \frac{2\pi\theta}{T} \right\} e^{-\frac{t}{\alpha\mu W}} \quad (354)$$

In figuur 49 zijn de formules (352) en (353) vergeleken met uitkomsten van de vergelijkingen (144) en (156) voor het geval dat  $w = 0$ . Uit deze figuur volgt onmiddellijk, dat de overeenkomst redelijk goed is voor  $T/\mu W > 3$ . Neemt men voor de bergingscoëfficiënt een vrij grote waarde aan, bijvoorbeeld  $\mu = 0,25$  en verder  $T = 365$  dagen, dan volgt hieruit  $W < 500$  dagen. Ziet men af van de vrij sterk afwijkende kromme voor  $q_0, a$ , dan zou men zelfs grotere  $W$  tot ongeveer 2000 dagen kunnen toestaan. Beperkt men zich tot het gebied  $0,25 \leq \pm x/L \leq 0,3$  dan is voor amplitude en naijling de overeenkomst zelfs voor alle waarden van  $T/\mu W$  zeer goed te noemen.

De slechte resultaten, die men volgens het voorafgaande kan verkrijgen bij het veronderstellen van quasi-stationaire toestanden, behoeven nog niet tot de conclusie te leiden dat deze methode in de praktijk nauwelijks bruikbaar zou zijn. Verondersteld werd dat  $w = 0$ , terwijl uit de bekende praktijkgevallen is gebleken, dat er meestal weinig reden is om de radiale weerstand te verwaarlozen, behalve indien  $D$  relatief klein is. In dit laatste geval echter wordt dit dikwijls door een kleine  $L$  zodanig gecompenseerd dat een relatief kleine waarde van  $W$  ontstaat, hetgeen volgens figuur 49 gunstig is.

Het volgende voorbeeld ondersteunt het vermoeden, dat als het peil in de open leidingen constant is (of weinig variabel) en de radiale weerstand in grootte-orde vergelijkbaar met de horizontale weerstand, de voorgestelde rekenmethode ook voor  $q_0$  bruikbare uitkomsten kan geven. Bij een grondwaterstroming in een homogeen pakket met  $D/L = 0,136$  en  $B/L = 0,0288$ , mag de radiale weerstand niet worden verwaarloosd, daar  $8kDw/L = 0,5$ . Als begintoestand wordt een horizontale grondwaterpiegel aangenomen: voor  $t > 0$  geldt een constant slootpeil  $h_0 = 0$  en een constante overtollige neerslag  $N_0 > 0$ . Door op elk ogenblik de toestand als quasi-stationair te beschouwen volgt nu onmiddellijk als oplossing:

$$h_1(t) = N_0 W (1 - e^{-\frac{t}{\alpha\mu W}}) \quad (355)$$

De uitkomsten die in figuur 50 zijn uitgezet, tezamen met uitkomsten van formules

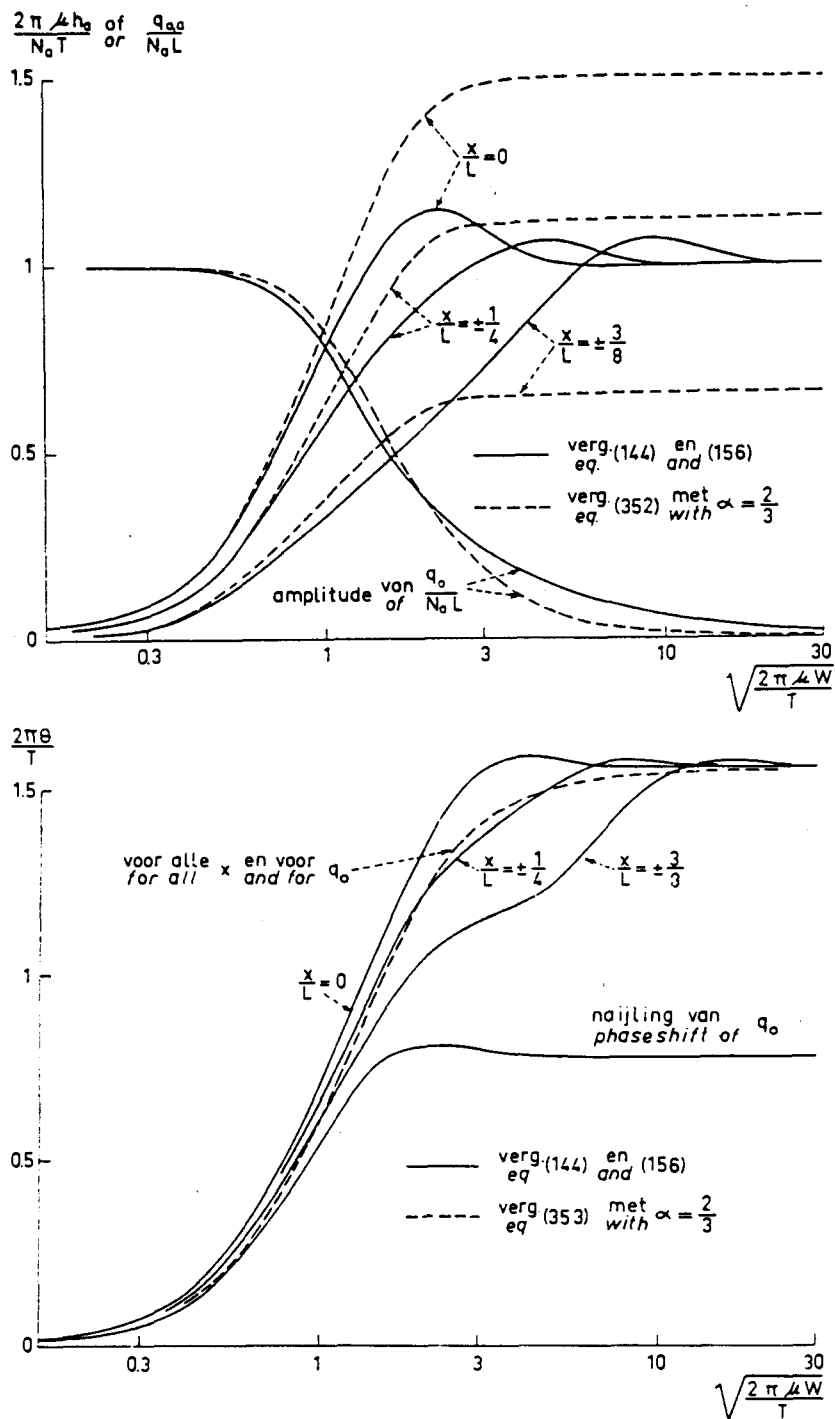


FIG. 49. Vergelijking van de uitkomsten voor amplitude en nauwlijng van de grondwaterstand, in het geval dat  $h_0$  constant is en  $N = N_0 + N_a \sin 2\pi t/T$  verkregen door aanneming van quasi-stationaire toestanden (gebroken lijnen) en door toepassing van formules uit hoofdstuk III. 4a (vol getrokken lijnen)

*Comparison of the results for amplitude and phase-shift of the groundwater level in the case that  $h_0$  is constant and  $N = N_0 + N_a \sin 2\pi t/T$ , obtained by assumption of quasi-steady states (broken line) and by application of the formulae of chapter III. 4a (full-drawn curves)*

uit de hoofdstukken III.3 en III.4 en met uitkomsten van de vierkantjesmethode (zie fig. 41 en 42), tonen aan dat in dit geval de quasi-stationaire veronderstellingen tot een redelijk goede uitkomst leiden. Hierbij is aangenomen, dat de vierkantjesmethode en de berekening volgens hoofdstuk III.4a de beste benadering van de ideale uitkomst geven en er wordt afgezien van het feit, dat de aangenomen constante waarden voor de bergingscoëfficiënt en de looptijd in de onverzadigde zone wel oorzaak kunnen zijn van minder juiste uitkomsten.

Quasi-stationaire toestanden te veronderstellen bij zo kleine laagdikte dat het geleidend vermogen voor horizontale stromingen niet constant is, is vermoedelijk wel

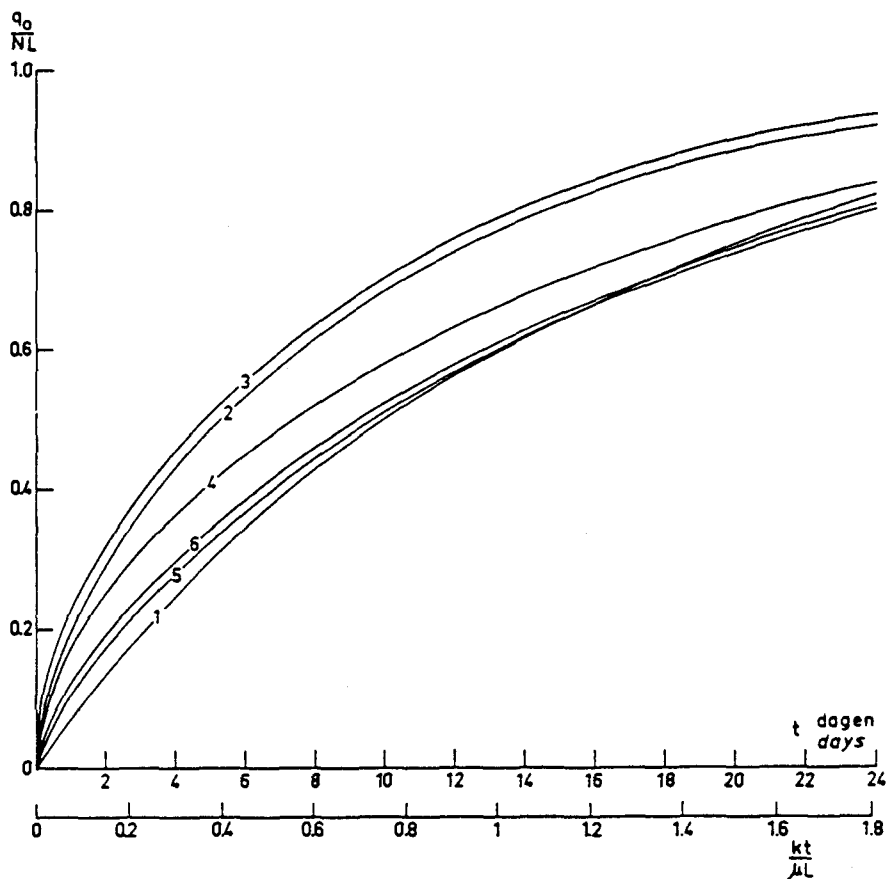


FIG. 50. Vergelijking van de uitkomsten voor de stroomsterkte  $q_0$  volgens verschillende rekenmethodes, in het geval dat na een lange periode met  $N = 0$ , de overtollige neerslag plotseling een andere constante waarde aanneemt en waarbij  $D/L = 0,136$  en  $B/L = 0,0288$ . De tijdschaal in dagen werd verkregen door substitutie van:  $\mu = 0,15$ ;  $k = 1,25$  m/dag;  $L = 110$  m. Voor de afleiding van de krommen zijn de volgende vergelijkingen gebruikt: 1. Formule (335) en (355); 2. Formule (133) en (134); 3. Formule (184) met  $w = 0$  en werkelijke  $D$ ; 4. Formule (184) met  $w = 0$  en  $d$  volgens (65); 5. Formule (184) en (173) met  $w \neq 0$ ; 6. Afgeleid met vierkantjesmethode (fig. 41)

*Comparison of the results for the outflow intensity  $q_0$  according to different calculation-methods in the case that after a long period with  $N = 0$ , the precipitation surplus suddenly attains an other constant value and  $D/L = 0.136$ ;  $B/L = 0.0288$ . The time-scale in days was obtained by substitution of:  $\mu = 0.15$ ;  $k = 1.25$  m/day;  $L = 110$  m. For the derivation of the curves the following equations were used: 1. (335) and (355); 2. (133) and (134); 3. (184) with  $w = 0$  and real  $D$ ; 4. (184) with  $w = 0$  and  $d$  according (65); 5. (184) and (173) with  $w \neq 0$ ; 6. Derived by trial sketching of squares (see fig. 41)*

toelaatbaar, als  $h_0 = 0$  en beter naar mate  $dk/dz$  een relatief hoge waarde heeft, waarbij de reductiecoëfficiënt  $\alpha$  evenals in het vorige geval weinig van 1 afwijkt (zie ter oriëntatie de verschillen in de stationaire toestanden afgebeeld in fig. 17).

Is het peil in de open leidingen niet constant, dan moeten slechtere uitkomsten verwacht worden, naarmate  $|dh_0/dt|$  groter is. In het bijzonder is dit het geval als de verandering van het peil zo snel gaat, dat men veronderstelt dat dit momentaan gebeurt. De vormen van de grondwaterspiegel behorende bij stationaire symmetrische toestanden zijn dan niet meer bruikbaar. Een afwijkende behandeling voor dit geval zal in dit hoofdstuk op pag. 151 en volgende worden uiteengezet.

Invoering van variabele waarden voor de laagdikte en de bergingscoëfficiënt heeft tot gevolg, dat de lineariteit verdwijnt, welke in de differentiaalvergelijkingen (338), (339) en (340) aanwezig is. Hoewel het twijfelachtig is of er meer reden is om met de vochtspanningshysteresis rekening te houden dan wel met het gemiddelde verband tussen bergingscoëfficiënt en diepte van het freatisch oppervlak onder maaiveld, zal bij de volgende beschouwing aangenomen worden, dat  $\mu$  uitsluitend afhankelijk is van  $Z$  en wel als voorbeeld:

$$\mu = \frac{Z}{a} = \frac{Z_0 - h}{a} \quad (356)$$

Een dergelijke betrekking zal moeten worden gesubstitueerd in de algemene formule (357). Verondersteld wordt hierbij dat het vergelijkingsniveau ten opzichte waarvan  $h$  gemeten wordt, lager ligt dan de laagste  $h$ ; alleen positieve  $h_1$  en  $h_0$  kunnen dus voorkomen.

$$\bar{S}L = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \int_0^{h(x)} \mu(h, x) dh \quad (357)$$

Indien formule (356) in (357) gesubstitueerd wordt en voor  $h(x)$  een parabool wordt genomen, dan volgt voor  $\bar{S}$  een kwadratische vorm in  $h_1$  en  $h_0$ , waarin 5 coëfficiënten voorkomen, daar alleen de bekende term ontbreekt.

Vervolgens kan formule (335) met behulp van (66) en (63) respectievelijk worden vervangen door:

$$q_0 = \frac{4k_1}{L} \left\{ \left( h_1 + \frac{k_2}{k_1} d \right)^2 - \left( h_0 + \frac{k_2}{k_1} d \right)^2 \right\} \quad (358)$$

$$q_0 = \frac{4}{3aL} \{ (h_1 + D_0)^3 - (h_0 + D_0)^3 \} \quad (359)$$

Wil men nu deze vergelijkingen toepassen met ofwel de randvoorwaarde b) ofwel de randvoorwaarde c) als gegeven (zie pag. 140, dan moet men (357) en (358)



of (359) substitueren in (332) en (333) of (334). Onder de eenvoudigste omstandigheden, indien namelijk voor  $N$  en  $A$  constante waarden zijn gegeven, voor  $S$  een lineaire functie van  $h_1$  en  $h_0$ , en voor  $q_0$  de kwadratische formule geldt, kan men het stelsel simultane differentiaalvergelijkingen dat hieruit voortkomt, door substitutie van  $h_1 + h_0 + 2k_2d/k_1 = a_1x$  en  $h_1 - h_0 = a_2y$  terugbrengen tot de volgende grondvorm:

$$\frac{dx}{dt} = b_1 + xy \quad (360)$$

$$\frac{dy}{dt} = b_2 - xy \quad (361)$$

Zelfs voor dit geval zijn geen eenvoudige oplossingen bekend. Om deze reden wordt nog als benadering ingevoerd, dat  $B_w = 0$  (bij de randvoorwaarde  $a$ ) heeft dit geen betekenis), waaruit volgt  $q_0 = A$ , zodat ook in de gevallen b) en c) slechts 1 differentiaalvergelijking overblijft:

$$N(t) = \frac{q_0(h_1, h_0)}{L} + \frac{d\bar{S}(h_1, h_0)}{dt} \quad (362)$$

Vervolgens kan worden nagegaan, welke oplossingen van (362) mogelijk zijn bij de volgende bijzondere randvoorwaarden:

$$a1) \quad h_0 = 0 \quad (363)$$

$$a2) \quad \frac{h_1}{h_0} = \text{constant} \quad (364)$$

$$b) \quad q_0(h_1, h_0) = \text{constant} \quad (365)$$

$$c) \quad q_0(h_1, h_0) = \frac{h_0}{\Omega} \quad (366)$$

Het is duidelijk dat door in (365) of (366) voor  $q_0$  een functie van de tweede- of de derde graad in  $h_1$  en  $h_0$  te substitueren, een eliminering van  $h_1$  of  $h_0$  uit de differentiaalvergelijking (362) wel mogelijk is, maar hierdoor wortelvormen zullen ontstaan. Uit de uiteenzettingen in voorgaande hoofdstukken werd afgeleid, dat niet zonder meer aangegeven kan worden, welke exponent als hoogste moet worden ingevoerd om een goede benadering te verkrijgen. Volgens hoofdstuk II.1g zijn hierbij de volgende feiten van invloed (voor b en c zie bijv. fig. 20):

a) De variabele laagdikte. De laagdikte gemiddeld over  $x$  kan met goede benadering worden gelijk gesteld aan  $D_0 + 0,5(h_0 + h_1)$ , maar de horizontale weerstand hangt ook nog af van  $k(z)$ .

b) De variabele radiale weerstand. De waarde van deze weerstand wordt bepaald door de vorm van het freatisch oppervlak in de directe omgeving van de open leiding en de breedte van het kweloppervlak. Dit hangt samen met de onder a en c genoemde effecten.

c) Het variabele peil in de primaire leidingen. Immers in (367) komt  $h_0$  niet voor,

terwijl van  $h_0$  toch invloed moet uitgaan. In de praktijk zijn de variaties in  $h_0$  vaak klein en bovendien gecorreleerd met  $h_1$  volgens een zekere betrekking, welke in eerste benadering mag worden voorgesteld door  $A/Bh^2 = \text{constant}$ .

d) Bij lage grondwaterstanden (zomerperiode) is er alleen drainage door de primaire leidingen, bij hoge grondwaterstanden (winterperiode) ook drainage door de secundaire leidingen.

Uit veldmetingen is gebleken, dat tussen  $q_0$  en  $h_1$  dikwijls een kromlijinig verband bestaat, dat met goede benadering door een kwadratische formule kan worden voorgesteld (voor een oplossing van (332) en (367) bij een constante bergingscoëfficiënt zie VISSER, 1953):

$$q_0 = \frac{h_1^2}{\gamma_2} + \frac{h_1}{\gamma_1} \quad (367)$$

De betekenis van de coëfficiënten  $\gamma_1$  en  $\gamma_2$  kan, alleen als het onder a genoemde effect van overwegende invloed is, uit een vergelijking met (358) na invoering van  $h_0 = 0$  worden afgeleid. Dit is echter alleen van belang als  $k_1 \gg k_2$  en in gevallen dat  $k_1$  en  $k_2$  van dezelfde grootte-orde zijn als de afsluitende laag op geringe diepte gevonden wordt, zodanig dat zowel  $k_2d/k_1$  als  $\gamma_2/\gamma_1$  klein zijn ten opzichte van  $h_1$ . In het Nederlandse polderlandschap zijn met deze voorwaarde een kleine  $L$  en een kleine  $W$  verbonden, zodat evenwichtstoestanden zich relatief snel instellen.

Door welke functie men de waarnemingen ook vervangt, hetzij door (335), (367) of een andere vorm, de spreiding in de waarnemingen zal in sommige gevallen verklaard kunnen worden doordat in het peil van het open water toevallige variaties mogelijk zijn (bijvoorbeeld door begroeiing onder water of door wijziging van een stuwpeil), maar meestal zal de verklaring moeten worden gezocht in het feit dat tijdens en direct na een regenbui de grondwaterspiegel een andere vorm heeft dan geruime tijd na een regenbui en dat dus eenzelfde grondwaterstand kan voorkomen als piek bij een zwakke regenbui en ook geruime tijd na een sterke regenbui.

Zou men het verband tussen  $N$  (bij een vochtdeficit = 0) en  $q_0$  willen beschouwen, dan zou men bovendien nog rekening moeten houden met de relatief snelle stijging van de grondwaterstand door de hysteresis van het vochtgehalte ten opzichte van de vochtspanning. Indien mag worden aangenomen dat deze hysteresis een invloed heeft zoals op pag. 76 is weergegeven, dan kan dit voor het verband tussen  $q_0$  en  $h_1$  alleen bijzondere gevolgen hebben als de grondwaterstandsdiepte  $Z$  afhankelijk is van  $x$ , in welk geval voor een oplossing verwezen kan worden naar hoofdstuk III.4c.

Terugkerend tot formule (362) lijkt de nog verdergaande vereenvoudiging door het gebruik van (367) niet onredelijk, gezien de ruwe benaderingen welke de aanneming van quasi-stationaire toestanden met zich brengt. Uit (362), (363), (366) en (367) komt men steeds tot differentiaalvergelijkingen van de volgende vorm:

$$N(t) = \frac{h_1^2}{\gamma_2} + \frac{h_1}{\gamma_1} + (a_0 + a_1h_1 + a_2h_1^2 + a_3h_1) \frac{dh_1}{dt} \quad (368)$$

Vergelijking (368) is bij een constante  $N$  elementair integreerbaar. Hiervoor kan verwezen worden naar de bekende leerboeken over differentiaal-vergelijkingen.

voelen en de daling van het freatisch oppervlak, die aanvankelijk alleen door de drainage veroorzaakt werd, steeds meer versterkt worden. De gemiddelde periode waarover dit verschijnsel van belang is, mag dus wel iets korter worden genomen, dan hierboven is opgegeven. Om de uitwerking van de volgende vergelijkingen zo eenvoudig mogelijk te houden kan men  $T_z$  gelijk stellen aan  $\frac{1}{4}$  jaar.

Evenals in hoofdstuk III.4d wordt de toename in overtollige neerslag evenredig gesteld aan de daling in grondwaterstand:

$$\overline{\delta N} = \frac{1}{v} (\bar{h} - \bar{h}' - \bar{h}'') \quad (390)$$

Hierbij moet gemiddeld worden zowel over  $T_z$  als over  $x$ . Gedurende de winter (duur  $T_w$ ) is er geen verandering in overtollige neerslag. Er moet dus bovendien worden verondersteld, dat aan het eind van de zomerperiode de uitputting van de bewortelde zone voor beide gevallen gelijk is.

Een tweede grootheid, die nog onbekend is, is de nieuwe bergingscoëfficiënt  $\mu'$ . Indien voor het verband tussen grondwaterstandsdiepte  $Z$  en de bergingscoëfficiënt wordt aangenomen dat  $\mu = Z/a$ , dan moet gemiddeld worden over  $x$  en over  $T = 365$  dagen en volgt voor het verschil tussen de oude en de nieuwe bergingscoëfficiënt:

$$\mu' - \mu = \frac{1}{a} (\tilde{h} - \tilde{h}' - \tilde{h}'') \quad (391)$$

De nieuwe bergingscoëfficiënt heeft wel een belangrijke invloed op  $h'$ , echter zeer weinig invloed op  $h''$ . De berekening van  $h''(t)$  behoeft dus onder de gestelde omstandigheden weinig moeite te geven. Bij een tweede uitvoering van de berekening ter opvoering van de nauwkeurigheid kan men  $\mu$  in (392) en (393) door  $\mu'$  vervangen.

Voor de demping in de perioden  $T_w$  en  $T_z$  geldt respectievelijk:

$$h_1''(T_z + T_w) = h_1''(T_z) e^{-\frac{T_w}{\alpha \mu W}} \quad (392)$$

$$W \overline{\delta N} - h_1''(T_z) = \{W \overline{\delta N} - h_1''(0)\} e^{-\frac{T_z}{\alpha \mu W}} \quad (393)$$

Daar de beweging periodiek moet zijn en dus  $h_1''(0) = h_1''(T)$ , zijn  $h_1''(0)$  en  $h_1''(T_z)$  eenvoudig te berekenen. Uit (392) en (393) blijkt ook dat voor deze berekening de waarden van  $W$ ,  $\overline{\delta N}$  en  $T_z$  van veel grotere invloed zijn dan de waarde van  $\mu$ , die slechts binnen betrekkelijk nauwe grenzen kan variëren. Het gemiddelde van  $h_1''$  over de zomerperiode wordt nu gelijkgesteld aan  $\zeta W \overline{\delta N}$ , met voor  $\zeta$  een waarde gelegen tussen 0,3 en 0,9 volgens de waarden van  $h_1''(0)$  en  $h_1''(T_z)$ , welke uit (392) en (393) zijn berekend. Verder is het ook zonder deze berekening duidelijk, dat het jaargemiddelde van  $h_1''$  gelijk is aan  $\overline{\delta N} W T_z / T$ .

Vervolgens moet over de zomerperiode het gemiddelde verschil van  $h_1$  en  $h_1'$  genomen worden. Als vrij grove benadering is aangenomen, dat een faseverschuiving geen rol speelt en dat de fase van de sinus van  $\approx \pi$  tot  $\approx 3\pi/2$  loopt. Hieruit volgt als gemiddeld verschil  $H - 2\pi^{-1}\alpha(h_a' - h_a)$ . Bij korte slootafstanden ligt de fase door de kleinere  $W$  iets verder en kan  $2/\pi$  eventueel door een iets grotere coëfficiënt ver-

vangen worden. Daar de grondwaterstand niet alleen over  $t$  maar ook over  $x$  gemiddeld wordt, wordt voor de vorm van de grondwaterspiegel dezelfde reductiecoëfficiënt  $\alpha$  [zie (336)] ingevoerd als in (389), (392) en (393).

Hiermee zijn de volgende formules verkregen:

$$\overline{\delta N} = \frac{1}{v} \left\{ H - \frac{2\alpha}{\pi} (h_a - h_a') - \alpha \varepsilon W \overline{\delta N} \right\} \quad (394)$$

$$\mu' - \mu = \frac{1}{a} \left( H - \alpha \frac{T_z}{T} W \overline{\delta N} \right) \quad (395)$$

$$h_a = \frac{N_a T}{\sqrt{\left(\frac{T}{W}\right)^2 - (2\pi\alpha\mu)^2}} \quad (396)$$

$$h_a' = \frac{N_a T}{\sqrt{\left(\frac{T}{W}\right)^2 - (2\pi\alpha\mu')^2}} \quad (397)$$

Er zijn vier onbekenden  $h_a$ ,  $h_a'$ ,  $\overline{\delta N}$  en  $\mu'$ , welke uit deze vier vergelijkingen opgelost kunnen worden. Hieraan moet ten slotte nog worden toegevoegd, dat in de praktijk de volgende effecten kunnen voorkomen, welke niet in de voorgestelde berekening zijn opgenomen. De verlaging van het peil van de open leidingen wordt vaak bereikt door deze leidingen breder en dieper te maken. De radiale weerstand moet hierdoor lager worden (vooral als grovere lagen worden aangesneden), hetgeen inhoudt dat twee verschillende totaalweerstand  $W$  moeten worden onderscheiden. Bovendien gaat het vaak om de verlaging van het peil van primaire (secundaire) leidingen, waarbij men gemakshalve de secundaire (tertiaire) leidingen buiten beschouwing laat. Laatstgenoemde leidingen worden nu echter drooggelegd, hetgeen een kleinere grondwaterstands daling dan de berekende waarde tot gevolg heeft.

Het volgende rekenvoorbeeld kan enige indruk geven van de grootte-orde van de effecten, die in de praktijk kunnen optreden. De waarden van de coëfficiënten  $a$  en  $v$  zijn globaal afgeleid voor een zandgrond met laag humusgehalte en slibgehalte, waar een vermindering van opbrengst door watertekort een normaal verschijnsel is. Voor de grondwaterstands diepte  $Z = 1\text{ m}$  en  $Z = 2\text{ m}$ , zijn aangenomen als bergingscoëfficiënten respectievelijk  $\mu = 0,15$  en  $\mu = 0,20$  en als gemiddelde wateronttrekking  $N(1\text{ m}) = -0,8$  mm/dag en  $N(2\text{ m}) = -0,15$  mm/dag. De absolute waarde 0,8 mm/dag is lager dan hetgeen in zogenaamd goede, niet verdrogende gronden stationair mogelijk is, maar voldoende om het gemiddelde watertekort aan te vullen. In perioden met een hoge potentiële verdamping zonder neerslag zal  $N$  veel sterker negatief kunnen zijn. De waarde 0,15 mm/dag is hoger dan wat stationair mogelijk geacht wordt. Uit deze gegevens volgt:

$$\delta\mu = \frac{\delta Z}{20 \text{ meter}} \quad \delta N = \frac{\delta Z}{1500 \text{ dagen}}$$

Als gegevens worden verder nog aangenomen voor de oorspronkelijke toestand:  $N_{\max} = 2$  mm/dag;  $N_{\min} = -0,8$  mm/dag;  $\bar{N} = 0,6$  mm/dag;  $N_a = 1,4$  mm/dag.

Bij een jaargemiddelde  $\bar{\mu} = 0,13$  met  $\alpha = 0,85$  en twee verschillende waarden voor de totale weerstand:  $W = 250$  dagen en  $W = 1000$  dagen volgt respectievelijk voor het amplitude van de grondwaterstand  $h_a = 0,32$  m en  $h_a = 0,65$  m.

De perioden  $T_z$  en  $T$  werden gelijk gesteld aan 90 en 360 dagen;  $\delta h(0)$  is de grondwaterstandsverandering midden tussen de open leidingen in het begin van de zomer, bijvoorbeeld op 15 mei;  $\delta h(T_z)$  is de grondwaterstandsverandering 3 maanden later. Verder werd aangenomen  $H = 1$  m. Het berekende effect blijkt vrijwel evenredig te zijn met  $H$ . Veel grotere waarden voor  $H$  zijn in Nederland niet bekend en door de topografische omstandigheden ook nauwelijks mogelijk. De resultaten, verkregen na substitutie van bovenstaande waarden in de afgeleide formules, zijn weergegeven in tabel 1.

TABEL 1. Uitkomsten van de formules (392)–(397) voor een bijzonder geval met aanneming van twee verschillende bergingscoëfficiënten

	$\mu'$	$h'_a$	$\bar{\delta N}$	$\delta h(0)$	$\delta h(T_z)$	$\bar{\delta h}$
$W = 250$ dagen	0,178	0,30 m	0,60 mm/dag	1,00 m	0,83 m	0,96 m
1000 dagen	0,174	0,51 m	0,52 mm/dag	0,96 m	0,60 m	0,89 m

Verwaarloost men de verandering in de bergingscoëfficiënt en neemt men een constante bergingscoëfficiënt  $\mu = 0,13$ , dan leidt een gelijksoortige berekening tot de uitkomsten weergegeven in tabel 2.

TABEL 2. Uitkomsten van de formules (392)–(397) voor hetzelfde geval als bij tabel 1, echter met aanneming van een constante bergingscoëfficiënt

	$\mu$	$h_a$	$\bar{\delta N}$	$\delta h(0)$	$\delta h(T_z)$	$\bar{\delta h}$
$W = 250$ dagen	0,13	0,32 m	0,61 mm/dag	1,00 m	0,85 m	0,97 m
1000 dagen	0,13	0,65 m	0,56 mm/dag	0,97 m	0,68 m	0,88 m

De kleine verschillen, die uit bovenstaande berekeningen zijn afgeleid, zullen in het veld slechts met de grootste moeite kunnen worden aangetoond, daar de toevallige variaties in bodem- en weersgesteldheid steeds een storende invloed hebben. Wel kan de conclusie worden getrokken, dat bij  $W = 250$  dagen de variabiliteit van de bergingscoëfficiënt vrijwel geen invloed heeft. De grootte-orde van  $\bar{\delta N}$  (0,5 tot 0,6 mm/dag) is voor praktische toepassingen zeer belangrijk, daar dit 15 tot 20% van de gemiddelde potentiële verdamping in de zomer uitmaakt. Deze grootte-orde volgt in feite echter reeds uit de veronderstelling neergelegd in (390) en uit de aangenomen waarde voor  $\nu$ .

## IV. VLOEISTOFMODELLEN

### IV.1. MODELREGELS EN NABOOTING VAN RANDVOORWAARDEN BIJ ZANDMODELLEN EN SPLEETMODELLEN

Indien langs wiskundige weg geen bevredigende oplossing van het probleem wordt gevonden, kan het onderzoek met modellen worden gedaan. In het algemeen gaat men hiertoe niet graag over, daar een modelproef geen algemene oplossing kan leveren, maar slechts de bijzondere oplossing, die bij gegeven eigenschappen van het medium (dikte en doorlatendheid van verschillende bodemlagen) en gegeven begin- en randvoorwaarden behoort.

Bij stationaire problemen zijn de wiskundige moeilijkheden in het algemeen minder groot door de eenvoudiger randvoorwaarden. Bij drie-dimensionale problemen wordt toch veel van modelonderzoek gebruik gemaakt en omdat alleen aan de differentiaalvergelijking van Laplace behoefte te worden voldaan, heeft men de grootste vrijheid in de keuze van het principe. Bij niet-stationaire grondwaterstromingsproblemen komen vier soorten modellen in aanmerking: zandmodellen, spleetmodellen, warmtemodellen en elektrische modellen. Eenvoudige, mathematisch exacte oplossingen dienen gebruikt te worden om de nauwkeurigheid van het uitgevoerde model te controleren. Daarna kan het model worden gebruikt voor problemen welke langs analytische weg niet opgelost konden worden, of voor de controle van benaderingsoplossingen.

Indien een warmtemodel of een elektrisch model wordt gebruikt, wordt meestal een constante bergingscoëfficiënt aangenomen, hoewel het mogelijk moet zijn de waarde van  $\mu$  afhankelijk van de plaats te maken. In fysische zin kunnen deze modellen slechts benaderingen zijn, daar een constante bergingscoëfficiënt de veronderstelling inhoudt, dat de toestand in de onverzadigde zone quasi-stationair is met dicht onder maaiveld een betrekkelijk laag vochtgehalte, dat slechts kleine variaties kan vertonen. Het is wel mogelijk globaal rekening te houden met de hysteresis, zoals uiteengezet in hoofdstuk III.1. In dit opzicht staan deze modellen dus niet achter bij de behandelde analytische methodes.

Bij vloeistofmodellen is in principe een betere nabooting van de stroming in de onverzadigde zone mogelijk. In het bijzonder geldt dit voor de zandmodellen, indien men hiermee de niet-stationaire stroming van het water in zandgrond wil nabootsen. Modellen van deze soort zijn sedert lang bekend. Voor zover bekend werd door Oesten voor het eerste een zandmodel gebruikt (OESTEN, 1879) en sedertdien werd dit principe voor de oplossing van verschillende grondwaterstromingsproblemen toegepast (zie de overzichten door Todd samengesteld – TODD, 1956, 1959 – en verder voor verticale vlakke stromingen onder andere PENNINK, 1915; KOZENY, 1927; voor putstromingen onder andere WYCKOFF, BOTSET and MUSKAT, 1932; BOULTON, 1951).

Het is mogelijk in een zandmodel behalve water ook andere vloeistoffen te gebruiken of de eigenschappen van het water door toevoeging van andere stoffen in be-

langrijke mate te wijzigen. Uit de literatuur zijn echter geen experimenten bekend, waarbij van deze mogelijkheid is gebruik gemaakt. Ook bij de hierna volgende beschouwingen zal aan andere vloeistoffen dan water met hoogstens geringe verontreinigingen (gedestilleerd water of leidingwater) geen aandacht worden geschonken.

Een bekende moeilijkheid bij het onderzoek met zandmodellen is het verkrijgen van een homogene en luchtvrije pakking van het zand. Volgens bovenstaande literatuur kan dit het beste gedaan worden door het zand bij kleine hoeveelheden tegelijk onder water te brengen en aan te drukken.

De grondwaterstanden in het model worden in een groot aantal glazen buisjes gemeten door visuele aflezing of langs elektrische weg, waarvoor ofwel een groot aantal waarnemers nodig is ofwel een zelfregistrerende apparatuur. Dikwijls geeft men er de voorkeur aan de stijghoogte minder sterk te verkleinen dan de verticale coördinaat in de verzadigde zone (in deze beschouwing aan te duiden door  $z''$ ; de verticale coördinaat in de onverzadigde zone wordt dan aangeduid door  $z'$ ), waardoor met een minder nauwkeurige meetmethode kan worden volstaan. De exacte vorm van het freatisch oppervlak wordt hierbij verwaarloosd, hetgeen een zekere vermindering van nauwkeurigheid tot gevolg kan hebben (zie bijv. de beschrijving op pag. 170 van de modelproef afgebeeld in fig. 57). Bij nabootsing van de grondwaterstroming in grote gebieden (bijv. de symmetrische drainage door kleine rivieren op enkele kilometers afstand) is er eveneens reden een zekere vertekening aan te brengen en wel zodanig dat de horizontale dimensies ongeveer een faktor 10 sterker verkleind worden dan de verticale dimensies. Bijvoorbeeld in een geval met  $L = 3000$  m;  $D = 30$  m en  $Z = 2$  m zal men de schalen bij voorkeur binnen de volgende grenzen kiezen:  $\{x\} \approx \approx 1/3000$  tot  $1/1000$ ;  $\{z''\} \approx 1/1000$  tot  $1/300$  en  $\{z'\} \approx 1/300$  tot  $1/30$ .

Bij het modelonderzoek in zandtanks werd tot nu toe zo goed als geen aandacht geschonken aan de modelregels voor de onverzadigde zone. Bij onderzoek, zoals bijvoorbeeld door Luthin en Worstell werd uitgevoerd (metingen van de waterbeweging in de onverzadigde zone met behulp van een tank gevuld met fijn zand;  $\Psi_0 \approx 25$  cm) is dit ook niet nodig, daar de afmetingen van de zandtank zo groot zijn ( $Z \approx 1$  m), dat de metingen beschouwd mogen worden als in een onverkleind medium te zijn gebeurd (LUTHIN and WORSTELL, 1957).

Voor een getrouwe nabootsing van de stroming in de onverzadigde zone is het nodig dat de betrekkingen  $\Psi(M)$  en  $k(\Psi)$ , welke in werkelijkheid aanwezig zijn, door de volgende lineaire transformaties overgaan in de overeenkomstige betrekkingen voor het model (de index  $m$  wordt gebruikt voor grootheden in het model, de index  $f$  voor grootheden in het veld):

$$\Psi_m = a_1 \Psi_f \qquad M_m = a_2 M_f + a_3 \qquad k_m = a_4 k_f \qquad (398)$$

In figuur 1 is reeds afgebeeld hoe sterk de functies welke het verband tussen  $\Psi$  en  $M$  voorstellen, afhankelijk van de grondsoort, uiteen kunnen lopen. Uit gegevens welke door Wesseling zijn verzameld, blijkt dat dit hoewel in mindere mate ook geldt voor het verband tussen  $\Psi$  en  $k$  (WESSELING, 1957). Een goede overeenkomst mag daarom alleen verwacht worden bij gelijksoortige gronden. In ieder geval is het nodig om over te gaan op een grond met een grotere gemiddelde korreldiameter ten einde

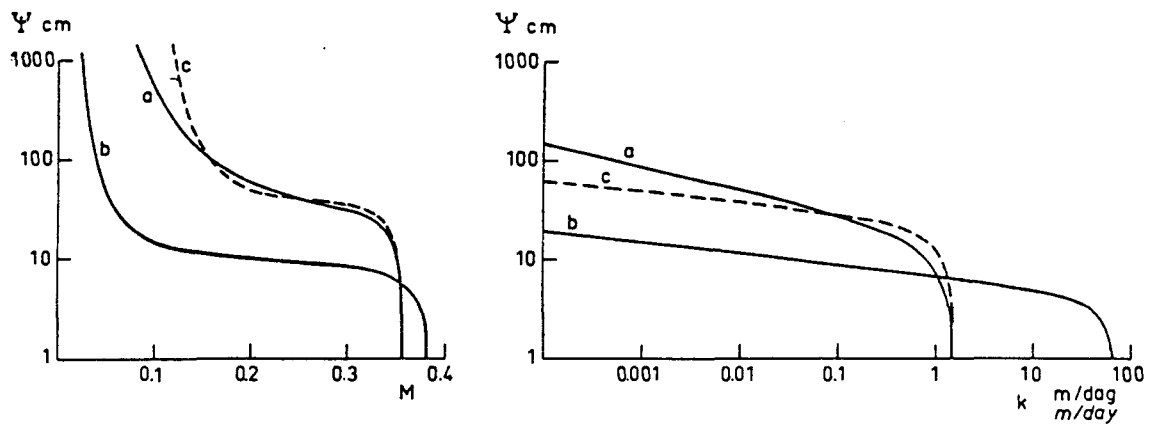


FIG. 54. De betrekkingen tussen  $\Psi$ ,  $M$  en  $k$  voor een matig fijne ongeïerde zandgrond in het veld (a) en voor een grof zandmonster in het zandmodel (b). Door lineaire transformaties [formule (398)] kan (b) niet in (a) overgebracht worden, zie onderbroken krommen (c). Voor de modelschalen van het gegeven voorbeeld, zie onderstaande formules

*The relations between  $\Psi$ ,  $M$  and  $k$  for a moderately fine undisturbed sandy soil in the field (a) and for a coarse sand in the sand model (b). By linear transformations [see (398)] (b) cannot be made equal to (a), see broken curves (c). For the model scales of the given example, see the following formulae*

$$\{\Psi\} = \frac{1}{5} \qquad \{M\} = \frac{M_m - 0,38}{M_g - 0,35} = \frac{3}{2} \qquad \{k\} = 50$$

een voldoende hoog luchtgehalte in de bovenste laag van het model te verkrijgen. Zelfs bij vervanging van een fijne zandgrond in het veld door een grove zandgrond in het model zal een volmaakte overeenkomst echter niet mogelijk zijn (zie figuur 54). Hierbij wordt dan nog afgezien van mogelijke verschillen in de vochtspannings-hysteresis, daar hiervan te weinig bekend is om enige uitspraak te kunnen doen. Wel is bekend, dat een zekere hysteresis zowel in grove als in fijne zandgrond is waargenomen.

Voor een afleiding van de betrekkingen, die bestaan tussen de verschillende modelschalen, moet men gebruik maken van de volgende vergelijkingen, voor zover men deze ten minste van belang acht voor de te onderzoeken stroming.

In de verzadigde zone:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z'^2} = 0 \qquad (399)$$

In de onverzadigde zone:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial z'} \left\{ k'(M) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z'} - 1 \right) \right\} \qquad (400)$$

Als gemeenschappelijke randvoorwaarden in het grensvlak van verzadigde en onverzadigde zone:

$$h = z' - \Psi \qquad (401)$$



$$v_1 = -k'' \frac{\partial h}{\partial z''} = k' \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z'} - 1 \right) \quad (402)$$

Als randvoorwaarde aan de bovenzijde van de onverzadigde zone:

$$N = -v_{00} \quad (403)$$

Zoals reeds opgemerkt, kunnen de schalen  $\{\Psi\}$ ,  $\{M\}$  en  $\{k'\}$  bepaald worden, als de eigenschappen van de grond in het veld en van het zand in het model (eventueel alleen de bovenste laag) bekend zijn. Ook de tijdschaal ligt dan vast, daar uit de vergelijkingen (399) ... (403) de volgende betrekking afgeleid kan worden:

$$\{t\} = \frac{\{M\}\{\Psi\}}{\{k'\}} \quad (404)$$

Verder geldt:

$$\{\Psi\} = \{z'\} = \{h\} \quad (405)$$

$$\{N\} = \{k'\} \quad (406)$$

$$\{x\} = \{z''\} \quad (407)$$

Hiermee is tevens de verhouding tussen de schalen voor de verticale afmetingen en de doorlatendheid in de verzadigde zone vastgelegd:

$$\frac{\{z''\}}{\{k''\}} = \frac{\{\Psi\}}{\{k'\}} \quad (408)$$

Indien een zekere vertekening in het model geëist wordt, zodat  $\{x\}$  en  $\{z''\}$  ongelijk worden, dan vervallen daarmee de vergelijkingen (399), (407) en (408). In plaats van (408) krijgt men nu wegens  $k'' D'' \partial^2 h_1 / \partial x^2 = v_1$  de volgende betrekking:

$$\frac{\{z''\}\{\Psi\}}{\{x\}^2} = \frac{\{k'\}}{\{k''\}} \quad (409)$$

Bij deze beschouwingen werd stilzwijgend aangenomen dat, als aan de afgeleide betrekkingen wordt voldaan met verschillende  $\{k'\}$  en  $\{k''\}$  en het model voor de onverzadigde en voor de verzadigde zone van twee verschillende grondsoorten voorzien zal moeten worden, de nauwkeurigheid van het model niet erg benadeeld zal worden door het feit dat de grens van deze twee lagen niet steeds met het freatisch oppervlak kan samenvallen.

Tenslotte moet nog voldaan worden aan een betrekking tussen de schalen voor doorlatendheid en vochtspanning in de onverzadigde zone. Daar bij goed gesorteerd zand de doorlatendheid evenredig is met het kwadraat van de diameter (DACHLER, 1936, pag. 12) en  $\Psi_0$  omgekeerd evenredig met de diameter (TERZAGHI, 1925, pag. 134), volgt hieruit dat:

$$\{k'\} \{\Psi\}^2 = 1 \quad (410)$$

Neemt men bovendien  $\{M\} \approx 1$ , dan is hiermee wegens (404) en (410) een betrekking tussen  $\{\Psi\}$  en  $\{t\}$  vastgelegd:

$$\{t\} \approx \{\Psi\}^3 \quad (411)$$

Uit (405), (406), (410) en (411) volgt, dat bij een gekozen waarde van  $\{\Psi\}$  ook  $\{z'\}$ ,  $\{h\}$ ,  $\{k'\}$ ,  $\{N\}$  en  $\{t\}$  zijn vastgelegd. Twee van de grootheden  $\{z''\}$ ,  $\{x\}$  en  $\{k''\}$  kunnen nog vrij gekozen worden, daar verder alleen aan (408) of (409) behoeft te worden voldaan.

In het algemeen zal men, om de meting van stijghoogten in het model niet te moeilijk te maken,  $\{h\}$  zo groot mogelijk kiezen, daarentegen bij grote  $L$  een zekere vertekening toelaten en voor  $\{x\}$  een zo klein mogelijke waarde nastreven. Uit de afgeleide formules blijkt echter dat, als men bij grote  $L$  een lengteschaal  $\{x\} \ll 1/300$  wil maken, men niet tot een bevredigende oplossing kan komen, daar dan volgens (409) ofwel  $\{z''\}$  zeer klein, ofwel  $\{k''\}$  zeer klein moet worden genomen.

In tabel 3 is opgegeven voor drie verschillende bodemprofielen met opklimmende afstand tussen de drainerende leidingen, welke modelschalen in verband met genoemde eisen de minste bezwaren met zich meebrengen.

TABEL 3. Drie voorbeelden van mogelijke waarden voor de modelschalen bij een zandmodel

	$L \leq 30$ m	$L \leq 200$ m	$L \leq 1000$ m
Veld	$k = 0.3$ m/dag	$k_1 = 0.3$ m/dag	$k_1 = 1$ m/dag
		$k_2 = 3$ m/dag	$k_2 = 50$ m/dag
Model	$k' = k'' = 30$ m/dag	$k_1' = 60$ m/dag	$k_1' = k_2'' = 400$ m/dag
		$k_2'' = 120$ m/dag	
	$\{\Psi\} = \{z'\} = \{z''\} =$ $= \{x\} = 1/10$	$\{\Psi\} = \{z'\} = 1.14$ $\{z''\} = \{x\} = 1/70$	$\{\Psi\} = \{z'\} = 1/20$ $\{z''\} = 1/90 \quad \{x\} = 1/300$
	$\frac{\{t\}}{\{M\}} = 1/1000$	$\frac{\{t\}}{\{M\}} = 1/2800$	$\frac{\{t\}}{\{M\}} = 1/8000$

Een vloeistofmodel, dat aanzienlijk meer van de werkelijke toestand afwijkt dan de zandmodellen, is het spleetmodel bestaande uit twee evenwijdige vlakke platen, welke zich op zo korte afstand van elkaar bevinden dat de vloeistofstroom tussen deze platen alleen in de laminaire toestand kan plaats vinden. Dit principe werd door Hele Shaw reeds voor het jaar 1900 gebruikt (HELE SHAW, 1897; HELE SHAW and HAY, 1900), zowel voor hydraulisch onderzoek als voor de afbeelding van een magnetisch veld. Later werden spleetmodellen ook uitgebreid toegepast voor het onderzoek van grondwaterstromingen (DACHLER, 1936; TODD, 1956, 1959; ZANKER, 1959).

Veel onderzoekers beschouwen het spleetmodel als gemakkelijker hanteerbaar en nauwkeuriger dan de zandmodellen, welke moeilijkheden kunnen geven door inhomogene vulling en opgesloten lucht. Om turbulente stromingen en de vervaardiging van zeer nauwe spleten te vermijden, wordt in tegenstelling tot het gebruik bij zandmodellen slechts zelden water in een spleetmodel gebruikt maar meestal een veel dikkere vloeistof. Indien alleen de vorm van het freatisch oppervlak van belang is, is het resultaat bij een verticaal spleetmodel onmiddellijk zichtbaar en kan langs fotografische weg met een nauwkeurigheid van 1/10 tot 1/4 mm worden vastgelegd. Door aan de invoerkant op enkele plaatsen een gekleurde vloeistof van dezelfde

viscositeit en dichtheid in te brengen kan men de stroomlijnen zichtbaar maken. Een belangrijk voordeel van de verticale spleetmodellen is tenslotte wel, dat men hiermee de gelijktijdige stroming van vloeistoffen met verschillend soortelijk gewicht gemakkelijk kan nabootsen (SANTING, 1951).

Een horizontaal spleetmodel kan worden gebruikt in die gevallen, dat de open leidingen niet evenwijdig zijn en een oplossing van differentiaalvergelijking (108), echter met een constante laagdikte  $D$  in plaats van  $D + h$ , als een voldoende benadering wordt beschouwd; om bergingsveranderingen te kunnen krijgen moet de bovenste plaat geperforeerd en van verticale stijgbuisjes voorzien worden; neerslag wordt door buisjes aan de onderzijde ingevoerd (SANTING, 1957).

Overeenkomstig de wet van Poiseuille kan voor de gemiddelde snelheid bij laminaire stroming tussen twee vlakke platen de volgende formule worden afgeleid:

$$\bar{v} = - \frac{\rho g a^2}{12\eta} \text{grad } h \quad (412)$$

De nabootsing van een minder goed doorlatende laag is mogelijk door op een van de platen een dunne strook te bevestigen, waarmee de plaatafstand  $a$  verkleind wordt. Ondanks de plotselinge sprongen in de spleetwijdte worden bij de gebruikelijke vrij sterk visceuze vloeistoffen geen belangrijke afwijkingen in de laminaire stroming geconstateerd (GÜNTHER, 1940).

De dikte van het model in de richting loodrecht op het vlak van afbeelding kan gelijk gesteld worden aan de bovenste spleetwijdte  $a_1$  waarin zich het freatisch oppervlak bevindt. De doorlatendheid van elke laag kan uit de volgende formule bepaald worden en is dus evenredig met de derde macht van de plaatafstand:

$$k_i = \frac{\rho g a_i^3}{12\eta a_1} \quad (413)$$

Daar men de minimale en de maximale plaatafstand met redelijke nauwkeurigheid een verhouding 1:10 kan geven, zijn verschillende doorlatendheden tot een verhouding 1:1000 gemakkelijk na te bootsen. Indien  $k_{min}/k_{max} \ll 0,001$ , mag aangenomen worden dat de stroming in de slecht doorlatende laag vrijwel loodrecht op deze laag staat of in ieder geval van te voren bekend kan zijn. Een zeer kleine effectieve spleetwijdte kan men dan maken door een strook te nemen die in dikte gelijk is aan de normale plaatafstand en hierin kleine gleufjes te frezen volgens de vermoedelijke stromingsrichting.

De tijdschaal hangt bij een gegeven doorlatendheid af van de spleetwijdte van het model en van de viscositeit en de dichtheid van de gebruikte vloeistof en kan dus binnen wijde grenzen gevarieerd worden. Indien  $a \approx 1$  mm kan een laminaire stroming en de gewenste tijdschaal alleen verkregen worden met een vrij sterk visceuze vloeistof ( $\eta \approx 0,3$  tot 3 Poise).

Indien lengte- en hoogteschaal gelijk zijn, volgt uit vergelijking (116):

$$\{t\} = \frac{\{\mu\}\{x\}}{\{k\}} \quad \{N\} = \frac{\{k\}\{h\}}{\{x\}} = \frac{\{\mu\}\{h\}}{\{t\}} \quad (414)$$

Indien lengte- en hoogteschaal verschillend zijn:

$$\{t\} = \frac{\{\mu\} \{x\}^2}{\{k\} \{z\}} \quad \{N\} = \frac{\{k\} \{h\} \{z\}}{\{x\}^2} = \frac{\{\mu\} \{h\}}{\{t\}} \quad (415)$$

Uit (414) en (415) zijn de waarden voor de modelschalen afgeleid welke vermeld staan in tabel 4. Hoewel de gegevens, waarop de tabellen 3 en 4 betrekking hebben niet geheel gelijk zijn, blijkt hieruit wel, dat in een spleetmodel een veel hogere doorlatendheid gebruikelijk is. Dit heeft veel kleinere tijdschalen tot gevolg.

TABEL 4. Voorbeeld van de schalen van een spleetmodel. Afmetingen van het model:  $L = 1$  m;  $a = 1,5$  mm. Te gebruiken vloeistof:  $\rho = 0,95$  g/cm<sup>3</sup>;  $\eta = 0,3$  Poise. Doorlatendheid van het model:  $k = 5,8$  cm/sec. Bergingscoëfficiënt in het model  $\mu_m = 0,75$ ; in het veld  $\mu_f = 0,15$ ;  $\{\mu\} = 5$ .

	Veld		Model schalen					In het veld $t = 1$ dag $N = 1$ mm/dag komen overeen met:	
	$L$	$k$	$\{x\}$	$\{z\}$	$\{h\}$	$\{t\}$	$\{N\}$	$t$	$Q = NaL$
Drainbuizen	10	0,1	0,1	0,1	0,1	$10^{-3}$	$5 \cdot 10^4$	0,864	0,869
Sloten	100	1	0,01	0,01	0,1	$10^{-3}$	$5 \cdot 10^4$	0,864	0,869
Kleine rivieren *)	1000	10	0,001	0,01	0,1	$10^{-6}$	$5 \cdot 10^3$	0,0864	0,0869
	m	m/dag						sec	cm <sup>3</sup> /sec
								in het model	

\*) Bij drainage door rivieren is  $L$  meestal veel groter dan 1000 m. Indien de diameter van de open leiding verkleind wordt volgens  $\{z\}$ , dan blijft de radiale weerstand onveranderd, terwijl de horizontale weerstanden wegens  $\{x\} < \{z\}$  wel worden verminderd. De drainageopening in het model moet dus groter worden gemaakt, dan met  $\{z\}$  overeenkomt. Hetzelfde geldt voor de verticale weerstanden, die ook naar verhouding verminderd moeten worden. Een matig goed doorlatende laag tweemaal dunner en de doorlatendheid van deze laag tweemaal groter maken, doet de horizontale weerstand onveranderd blijven en geeft een viermaal kleinere verticale weerstand. Gaat het hierbij om een bovenste fijne laag in het watervoerende pakket, dan is het mogelijk de drainageopening in het model op een zodanige manier ten opzichte van de onderkant van deze laag te leggen, dat de radiale weerstand ongeveer de juiste waarde krijgt.

De nabootsing van de stroming in de onverzadigde zone door invoer aan de bovenkant van de platen kan niet geheel bevredigend zijn, daar in het spleetmodel de hysteresis ontbreekt, en geen grote variaties in de bergingscoëfficiënt voorkomen. Om bij  $R > E$  de overtollige neerslag na te bootsen laat men de invoer langs een van de platen naar beneden lopen, zodat een film ontstaat waarvan de dikte is af te leiden uit (412). Na vervanging van  $a$  door  $2s$  en wegens  $dh/dx = 1$  kan deze dikte gelijk gesteld worden aan:

$$s = \sqrt[3]{\frac{3\eta Q}{\rho g L}} \quad (416)$$

$$Q = \text{invoer} = \bar{v}sL$$

$$L = \text{breedte van het model}$$

Voor de bergingscoëfficiënt van het model geldt:

$$\mu = \frac{a - s}{a} \quad (417)$$

waaruit volgt, dat wegens de veranderlijke  $s$  ook  $\mu$  veranderlijk moet zijn. Bij de praktische uitvoering van modelproeven varieert de bergingscoëfficiënt meestal tussen 0,75 en 0,90, maar  $\mu$  is in het veld zoveel sterker veranderlijk, dat men de bergingscoëfficiënt in het model in vergelijking hiermee als constant zou mogen beschouwen.

Uitgaande van vergelijking (412) kan men de differentiaalvergelijking voor de stroming in de onverzadigde zone wel opstellen, maar daar  $s$  variabel is, is een oplossing niet langs elementaire weg bereikbaar. Bij een plotselinge overgang van een constante invoerintensiteit  $Q_1$  naar een grotere of kleinere constante invoerintensiteit  $Q_2$  en aangenomen dat de stroming verticaal is, mag men wel bij benadering de volgende formule voor de schijnbare snelheid  $v_s$  van het front (plaats waar dikte  $s_2$  overgaat in dikte  $s_1$ ) geldig verklaren:

$$v_s = \frac{Q_1 - Q_2}{(s_1 - s_2)L} = \frac{Q_1 - Q_2}{\sqrt[3]{Q_1} - \sqrt[3]{Q_2}} \sqrt[3]{\frac{\rho g}{3\tau L^2}} \quad (418)$$

Uit enkele proeven, waarvan de resultaten in fig. 55 zijn afgebeeld, is gebleken dat formule (418) inderdaad een goede benadering vormt. De viscositeit werd bepaald uit metingen met geheel gevulde spleet. Volgens deze metingen was  $v_s$  niet geheel ongevoelig voor een verwisseling van de waarden  $Q_1$  en  $Q_2$ . Voor gevallen met  $Q_1 > Q_2$  was de meetnauwkeurigheid door de visuele bepaling echter minder goed dan bij  $Q_1 < Q_2$ . Dit wordt verklaard doordat er geen scherp front is, maar in het eerste geval een voortdurend langer wordende zone waar  $s_1$  geleidelijk in  $s_2$  overgaat, daarentegen in het tweede geval de laagdikte vlak boven het front groter is dan  $s_1$  zodat daar een vrij plotselinge overgang blijft bestaan.

Na invoering van  $\xi = Q_1/Q_2$  kan (418) overgebracht worden in (419).

$$v_s = \frac{1 - \xi}{1 - \sqrt[3]{\xi}} \sqrt[3]{\frac{\rho g Q_1^2}{3\tau L^2}} = \frac{1 - \xi}{1 - \sqrt[3]{\xi}} \bar{v}_1 = \frac{1 - \xi}{1 - \sqrt[3]{\xi}} \frac{aN_1}{s_1} = \frac{1 - \xi}{1 - \sqrt[3]{\xi}} \frac{N_1}{\mu_1} \quad (419)$$

Het is duidelijk, dat hierbij de indices 1 en 2 verwisseld mogen worden. Substitueert men in (419) de grootste  $Q$  en  $N$ , stelt men deze voor door  $Q_+$  en  $N_+$  en vervangt men  $(1 - \xi) (1 - \sqrt[3]{\xi})^{-1}$  door  $\alpha$ , waarbij nu geldt dat  $1 < \alpha < 3$ , dan kan (419) vervangen worden door:

$$v_s = \alpha \frac{N_+}{\mu_+} \quad (420)$$

Daar in het freatisch oppervlak een hoogteverschil  $\Delta h_1$  (met niet verwisselbare index) voorkomt, bereikt het front alle punten van het freatisch oppervlak niet gelijktijdig. Het maximale tijdsverschil  $\Delta t$  volgt uit:

$$\Delta t = \frac{\Delta h_1}{v_s} = \frac{\mu_+ \Delta h_1}{\alpha N_+} \quad (421)$$

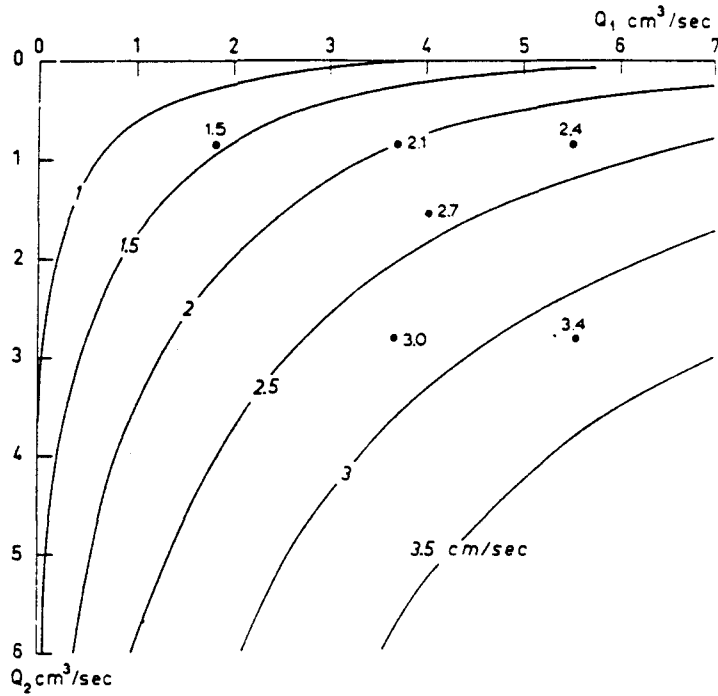


FIG. 55. Snelheid van het vochtfront in de onverzadigde zone bij een plotselinge verandering van de invoerintensiteit in een spleetmodel (lengte  $L = 112$  cm) met een minerale olie (Shell-Ondina) met  $\rho = 0.87$  g/cm<sup>3</sup> en  $\tau_i = 0.31$  Poise

*Velocity of the moisture front in the unsaturated zone of a parallel plate model (length  $L = 112$  cm) with a mineral oil (Shell-Ondina) with  $\rho = 0.87$  g/cm<sup>3</sup> and  $\tau_i = 0.31$  Poise, in the case of a sudden change in the inflow intensity*

1.5 Gemeten snelheid van het front in cm/sec; *Measured velocity of the front in cm/sec*  
 — Lijn van constante snelheid berekend met formule (318); *Line of constant velocity calculated with (318)*

Wegens  $\{N\} \{t\} = \{\mu\} \{h\}$ , is dit ook geldig voor de werkelijke grootheden. Indien  $Q_1 \approx Q_2$  dan is het gehele effect niet van veel belang wegens de kleine verschuiving in het freatisch oppervlak en wegens  $\alpha = 3$ . Bij grote verschillen in  $Q_1$  en  $Q_2$  wordt  $\alpha \approx 1$  en hangt de waarde van  $\Delta t$  er in belangrijke mate van af, of  $Q_1$  dan wel  $Q_2$  de grootste invoer is, daar dit in vele gevallen de grootte van  $\Delta h_1$  zal bepalen.

Het volgende voorbeeld geeft een indruk van de grootte-orde waarom het hier gaat. Aangenomen worden de volgende waarden:

$\mu_+ = 0,15$  met  $N_+ = 5$  mm/dag; 15 mm/dag; 50 mm/dag  
 en respectievelijk  $\Delta h = 30$  cm; 50 cm; 70 cm.

Door substitutie in (421) volgt dat voor elk van deze gevallen het maximale verschil in de looptijd  $\Delta t$  ongeveer gelijk aan 2 dagen is. Bij de metingen van Nielsen en medewerkers werd een grootste snelheid van het vochtfront in lichte zavel (silt loam) gevonden gelijk aan 1 m/dag (NIELSEN, KIRKHAM and VAN WIJK, 1959). Hoewel deze snelheid duidelijk groter is, dan wat uit een spleetmodel volgt, mag de grootte-orde van beide uitkomsten toch wel als gelijkwaardig worden beschouwd.

Door de vochtspanningshysteresis verdwijnt de invloed van de looptijd van het vochtfront in de onverzadigde zone. Een gelijktijdig begin van de stijging in alle punten van het freatisch oppervlak is blijkens het voorgaande niet mogelijk in een

spleetmodel met invoer aan de bovenkant van één van de platen. Dergelijke spleetmodellen zijn dus niet geschikt voor de afbeelding van regenbuien met een werkelijke duur van enkele dagen of minder. Volgens de overwegingen in hoofdstuk III.1 is de beste manier om met de vochtspanningshysteresis rekening te houden en daarbij toch aan de continuïteitsvoorwaarde te voldoen, dat men een te grote overtollige neerslag invoert bij onveranderde  $\mu$  en het teveel ingevoerde onmiddellijk na de regenbui weer onttrekt. Een omhoog gerichte stroming in de onverzadigde zone van het model is echter onmogelijk. Aan dit bezwaar kan men ontkomen door zowel de invoer als de uitvoer te doen gebeuren door een groot aantal kleine openingen in een van de vlakke platen op een horizontale lijn ongeveer ter hoogte van de drainage-opening, maar in ieder geval lager dan de laagste stand van het freatisch oppervlak. Deze kleine openingen moeten via buisjes van geschikte lengte en diameter verbonden worden met het reservoir, waarvan het peil de intensiteit van voeding of onttrekking beheerst. Hiermede wordt bovendien bereikt dat de overtollige neerslag gelijktijdig aan alle punten van het freatisch oppervlak wordt toegevoegd. De verdamping en dus ook de overtollige neerslag kunnen in werkelijkheid van de diepte van de grondwaterstand onder maaiveld afhankelijk zijn. In het model wil men echter in- en uitvoer, ter vergelijking met analytische oplossingen, onafhankelijk maken van vorm of hoogte van het freatisch oppervlak, hetgeen alleen bereikt kan worden door een zo grote weerstand aan de buisjes voor in- en uitvoer te geven, dat hiervoor meestal een groot stijghoogteverschil nodig is, ten opzichte waarvan het niet volkomen constant zijn van de stijghoogte in het freatisch oppervlak verwaarloosd mag worden.

Het laatstgenoemde systeem geeft nog twee voordelen. Het eerste voordeel is dat hiermee ook wateronttrekking naar boven ( $N < 0$ ) kan worden nagebootst. Verder blijkt uit formule (415) dat bij zeer grote afstand tussen de drainerende leidingen in het veld en met de daarbij dikwijls nodige vertekening in het model, de schaal  $\{k/N\}$  zo ongunstig kan zijn, dat alleen bij betrekkelijk lage waarden van  $N$  de filmdikte  $s < a$  kan zijn. Neemt  $N$  toe tot boven een zekere waarde, dan wordt  $s = a$  en er ontstaan in het spleetmodel ongewenste luchtbellens, hetgeen vermeden kan worden bij invoerbuisjes, die onder het freatisch oppervlak uitmonden.

Neemt men als eerste deeloplossing formule (144) en gebruikt men het spleetmodel alleen voor de resterende deeloplossing met  $N = 0$ , dan zouden eerstgenoemde bezwaren buiten beschouwing kunnen blijven. De variaties in  $N$  gaan dan over in variaties in het peil  $h_0$  van de open leiding. Wil men het effect hiervan bijvoorbeeld bij een sinusvormige fluctuatie ook op grotere afstand van de open leiding meten ondanks een meer of minder sterke demping, dan zal men de amplitude van  $h_0$  zo hoog mogelijk willen opvoeren. De afmetingen van de drainage-opening stellen hieraan echter een grens, tenzij men aan het constant houden van de natte omtrek van de drainage-opening geen waarde hecht en het peil  $h_0$  in het reservoir, dat aan de buitenkant tegen een van de platen bevestigd is, doet stijgen tot boven de bovenkant van de bijvoorbeeld cirkelvormige drainage-opening.

De capillaire stijghoogte van een gegeven vloeistof hangt uitsluitend af van de spleetwijdte en is onafhankelijk van de beschreven details in constructie en gebruik van het model. Wil men de verzadigde zone boven het freatisch oppervlak (de  $\Psi_0$ -

laag) in de juiste schaal afbeelden, dan moet gelden  $\{\Psi_0\} = \{z\}$ . Hieruit volgt, dat bij deze eis nog een vrijheidsgraad overblijft, daar de verticale afmetingen van het model en de plaatafstand omgekeerd evenredig veranderd mogen worden. Bij kleine werkelijke  $L$  zal een gunstige  $\{z\}$  een minder gewenste, kleine plaatafstand vereisen ( $a_1 \approx 0,2$  mm). Voor zover uit de literatuur bekend, is het in de praktijk gewoonte de gunstigste  $\{z\}$  te kiezen en aan  $\{\Psi_0\}$  als grootheid van weinig belang geen aandacht te schenken.

Uit de resultaten in figuur 50 afgebeeld werd reeds afgeleid, dat de verschillen tussen de werkelijke niet-stationaire stroming en een berekening volgens hoofdstuk III.7 door de radiale stroming belangrijk kleiner zijn dan bij een uitsluitend horizontale stroming. In een spleetmodel met invoer aan de bovenzijde (zie fig. 56) werden stationaire en niet-stationaire toestanden gefotografeerd ten einde na te gaan of de betrekkelijk kleine verschillen in de grondwaterspiegel ook langs deze weg aangetoond zouden kunnen worden. Bij een stijgende grondwaterspiegel (zie fig. 57) werden verschillen met de stationaire vorm gevonden, die op 10 tot 20% na overeen kwamen met hetgeen volgens hoofdstuk III.4a aanwezig zou moeten zijn. Bij een dalende grondwaterspiegel (een gelijksoortige meting in omgekeerde richting) werd een slechts half zo groot verschil waargenomen. De oorzaak hiervan ligt in het hierboven aangetoonde feit [zie formule (421)], dat veranderingen in de overtollige neerslag het freatisch oppervlak in de hoogste punten aanmerkelijk eerder bereiken dan naast de drainage-openingen, waar in het bijzonder bij de begintoestand van laatstgenoemde proef de vloeistofspiegel het laagste was.

De relatief hoge waarden van  $\Delta h$ , welke ter bevordering van de afleesnauwkeurigheid in het model werden aangebracht, hadden een andere onvolkomenheid tot gevolg. Het kweloppervlak werd hierdoor namelijk zo groot (zie fig. 57) als in de praktijk slechts zelden voorkomt. Met behulp van de vierkantjesmethode en uitgaande van de gefotografeerde vorm van het vloeistofoppervlak werden de stroomlijnen en aequipotentiaallijnen in de omgeving van de drainage-opening geschetst. De uitkomsten hiervan bleken goed overeen te komen met wat in hoofdstuk II.3 reeds was gevonden (zie fig. 28a en d; een zeker verschil met de getrokken lijnen kan verklaard worden doordat bij de modelproef een verticaal talud is genomen en  $\Psi_0/r_0 = 0,3$ ). Tussen de grootste en de kleinste waarde van de radiale weerstand werd een verschil van 25% gevonden. Door de variatie in laagdikte heeft de horizontale weerstand een zelfde verhouding tussen de voorgekomen maximale en minimale waarde.

Zou men met een dergelijke model dus formules willen controleren, welke zijn afgeleid onder aanneming van constante weerstanden, dan moeten de variaties in de hoogte van de vloeistofspiegel met de tijd zoveel mogelijk worden beperkt. Daar in fotografische opnamen een afleesnauwkeurigheid van 0,2 mm in werkelijke grootte zonder moeite bereikt kan worden, zijn fluctuaties in hoogte van 3 tot 10 mm in vele gevallen nog bruikbaar. Bij een vergelijking van de vorm van het freatisch oppervlak in stationaire en niet-stationaire toestanden gaat het echter om zo kleine verschillen, dat voor de proef afgebeeld in fig. 57 de opgegeven relatief hoge waarden voor  $Q$  werden gebruikt en niet op bevredigende wijze werd voldaan aan de eis, dat de grondwaterspiegel ofwel slechts weinig van een horizontaal vlak afwijkt, ofwel bij kleine variaties in  $N$  en  $h_0$  weliswaar niet een lineaire, maar dan toch een vrijwel constante vorm heeft.



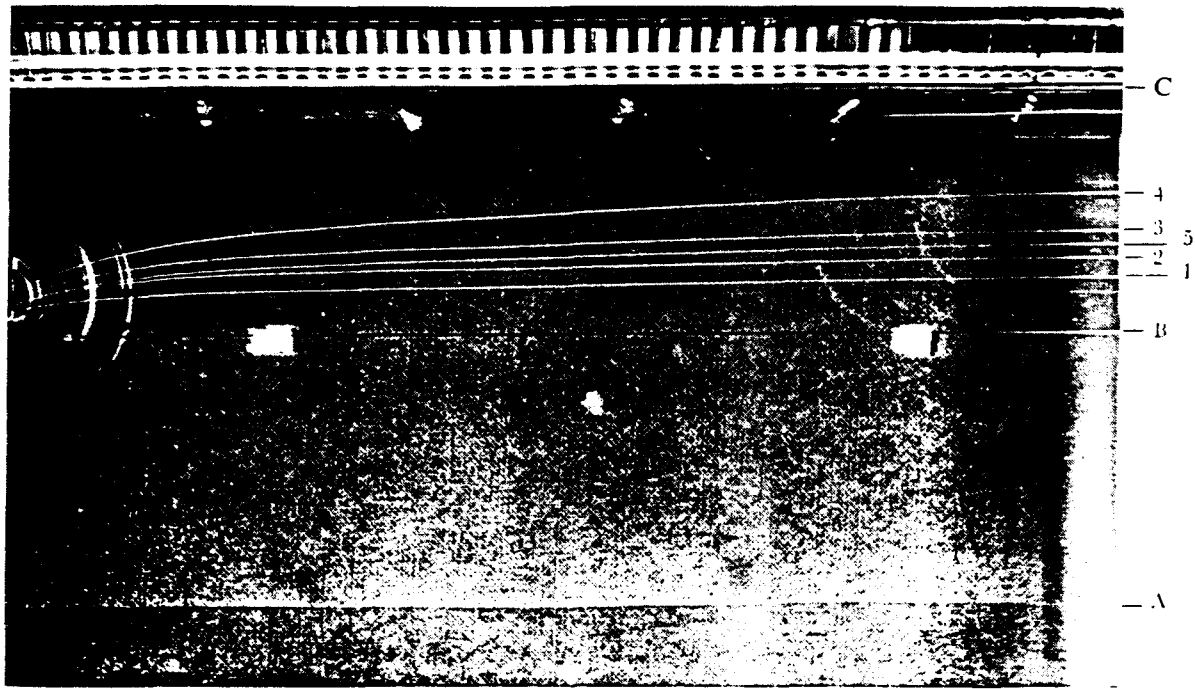


FIG. 57. Metingen in een spleetmodel (zie fig. 56) met  $L = 112$  cm en  $a = 0.15$  cm. Op een fotografische plaat zijn, met donkerveldverlichting, vijf verschillende toestanden opgenomen. Duidelijk is waar te nemen dat, overeenkomstig de theorie in hoofdstuk III.4a, het stationaire en het stijgende freatisch oppervlak niet gelijkvormig zijn. Voor een verklaring van de veel kleinere verschillen met een dalende vloeistofspiegel, zie pag. 170

*Measurements in a parallel-plate model (see fig. 56), with  $L = 112$  cm and  $a = 0.15$  cm. Five different states were taken with dark field illumination on the same photographic plate. The difference in shape of the steady- and the rising phreatic surface, in agreement with the theory in chapter III.4a, is clearly visible. An explanation of the much smaller differences with a falling phreatic surface is given on page 170*

A. Ondoorlatende laag; *impermeable boundary*

B. Basislijn; *base line*

C. Bovenkant 'Perspex' platen; *upper side 'Perspex' plates*

1.  $t = 0$ ;  $Q_1 = 0,98$  cm<sup>3</sup>/sec  $\rightarrow Q_2 = 5,13$  cm<sup>3</sup>/sec

2.  $t = 3,0$  sec

3.  $t = 8,0$  sec

4.  $t = \infty$

5. Stationaire toestand met  $Q = 2,38$  cm<sup>3</sup>/sec; *steady state with  $Q = 2.38$  cm<sup>3</sup>/sec*

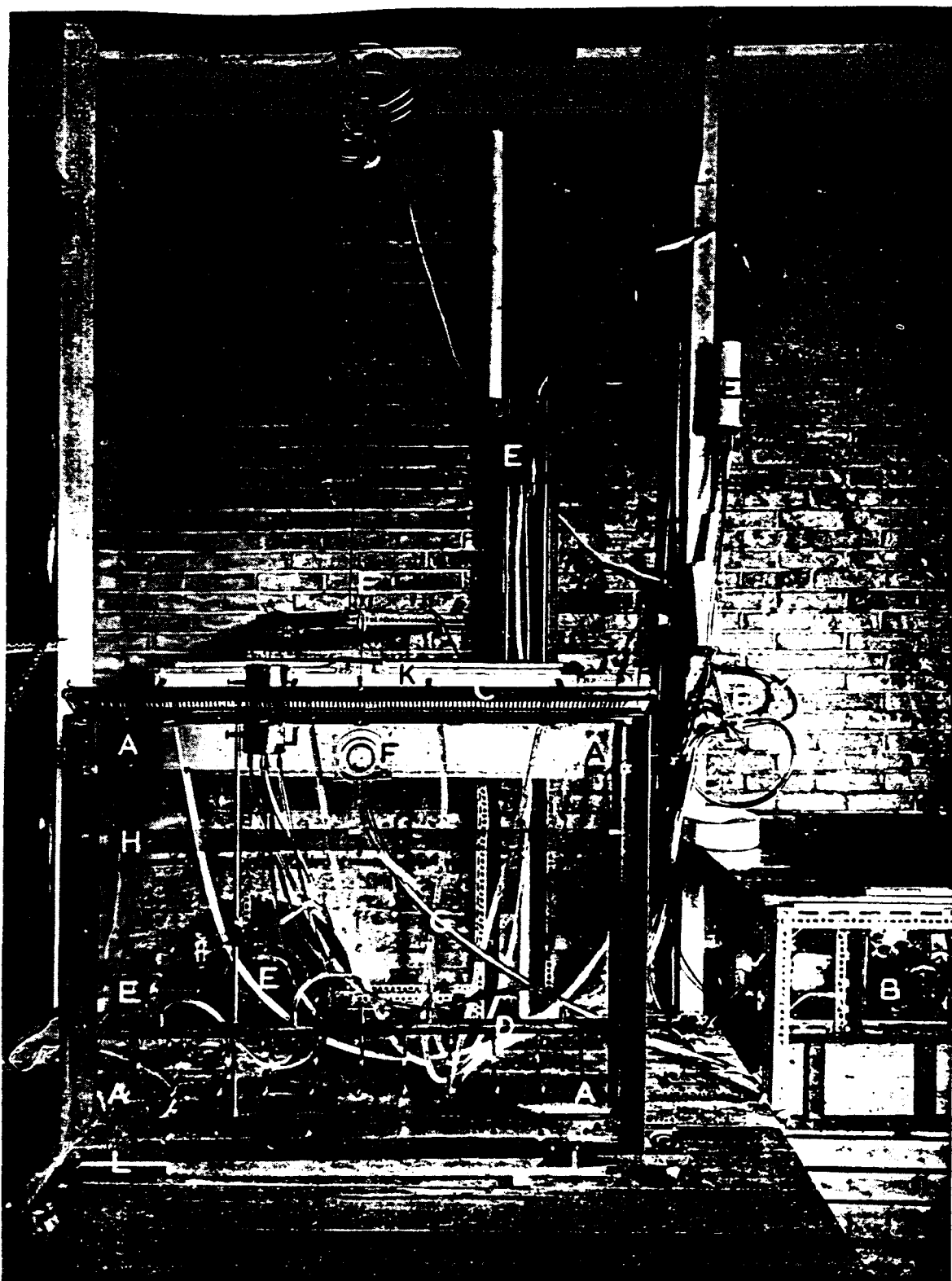


FIG. 56. Het gebruikte spleetmodel. A. 'Perspex' platen in messing raam; B. Pomp; C. Buis voor invoer aan bovenzijde; D. Buis voor invoer aan onderzijde, welke echter niet gebruikt mogen worden als een ondoorlatende laag is aangebracht; E. Regelmechanisme voor de invoerintensiteit en het peil in de uitstroomopening F; G. Slang voor afvoer; H. Ondoorlatende laag; K. Bak met lampen achter opaalglas voor doorvallend licht; L. Fluorescentiebuis voor donker veld verlichting

*The used parallel plate model. A. 'Perspex' plates in brass frame; B. Pump; C. Tube for inflow from above; D. Tubes for inflow from below, which are not to be used when an impermeable layer has been brought in; E. Regulating mechanism for the inflow-intensity and the level in the outflow-opening F; G. Tube for discharge; H. Impermeable layer; K. Illuminator with opal glass for bright field illumination; L. Fluorescent tube for dark field illumination*

# SAMENVATTING

## I. INLEIDING

I.1. De stroming van het grondwater hangt af van de eigenschappen van het medium en van zekere voorwaarden aan de grenzen van het beschouwde gebied. De stroming in de onverzadigde zone heeft alleen een bijzondere invloed op de stroming in de verzadigde zone bij niet-stationaire toestanden. Bij stationaire stromingen kan de onverzadigde zone buiten beschouwing blijven, evenals de samendrukbaarheid van de vloeistof en van het doorlatende pakket. Een verwaarlozing van de samendrukbaarheid bij niet-stationaire toestanden is vooral toegestaan in die gevallen, dat de bergingsveranderingen in de onverzadigde zone van overheersende invloed zijn. Een dergelijke verwaarlozing houdt in dat een onmiddellijke aanpassing van de drukverdeling in de vloeistof aan de randvoorwaarden wordt verondersteld.

I.2. Bij toepassingen op het gebied van de landbouw kan het van belang zijn zowel met de sterk variërende lithostratigrafische, als wel met de topografische omstandigheden rekening te houden en dit vooral bij stationaire toestanden.

## II. STATIONAIRE GRONDWATERSTROMINGEN

II.1. De wet van Darcy is in de praktijk algemeen geldig. Gecombineerd met de continuïteitsvergelijking leidt dit bij stationaire toestanden tot de differentiaalvergelijking van Laplace. Indien de vorm van de bovenrand van het beschouwde gebied (het freatisch oppervlak) niet als expliciet gegeven voorwaarde mag worden beschouwd, maar afgeleid moet worden uit de gegeven verdeling van de flux langs de grenzen van het beschouwde gebied, zijn slechts weinig exacte oplossingen bekend.

Is de invloed van de vorm van de bovenrand te verwaarlozen, dan mag men met constante weerstanden rekenen. Bij problemen die betrekking hebben op een horizontaal gelaagd pakket, kan men naast horizontale en verticale weerstanden, bij de beschouwing van een verticale doorsnede loodrecht op een open leiding gebruik maken van de radiale weerstand van deze open leiding. Deze laatste weerstand wordt gedefinieerd als het verschil tussen de weerstand ondervonden door de werkelijke stroming en de weerstand ondervonden door een fictieve stroming met in de omgeving van de open leiding een uitsluitend horizontale richting (vorm van de open leiding in een dwarsdoorsnede gedacht als een verticale lijn reikende tot de eerste slecht doorlatende of ondoorlatende laag). Het gebruik van radiale weerstanden heeft het voordeel, dat men de invloed van een open leiding, voor zover afhankelijk van zijn afmetingen en van de doorlatendheid van de grond, kan samenvatten in een enkele karakteristieke grootte. In enige eenvoudige gevallen zijn formules voor de radiale weerstand afgeleid. Bij een uit twee lagen bestaand pakket zijn enige resultaten met de relaxatiemethode verkregen en in een grafische voorstelling weergegeven (fig. 14).

Toepassing ten behoeve van de berekening van grondwaterstromingen is mogelijk zowel bij evenwijdige, aequidistante open leidingen met constant peil gelegen in pakketten bestaande uit afwisselend goed en slecht doorlatende lagen, als met behulp van een dradenschema bij een willekeurige verdeling van plaats, peil en afmetingen van de open leidingen (fig. 6 en 18).

Voor de praktijk zijn vooral belangrijk de zogenaamde drainageformules, welke in afhankelijkheid van de gelaagdheid van de grond en de intensiteit van de overtollige neerslag, bij stationaire symmetrische toestanden het verschil geven tussen de hoogte van het freatisch oppervlak halverwege de open leidingen en het peil van de open leidingen.

II.2. De vorm van de grondwaterspiegel kan van belang zijn in de naaste omgeving van de open leidingen wegens de invloed op de radiale weerstand van de open leidingen en op de stabiliteit van de taluds. De hodograafmethode geeft hier slechts in twee gevallen een eenvoudige oplossing. Voor het trapeziumvormige natte profiel werd daarom de stationaire toestroming onderzocht met behulp van de vierkantjesmethode (fig. 27 en 28).

II.3. Bij drainage door niet-poreuze buizen vindt men bij de voegen een afwijking van de vlakke stroming en een belangrijke invloed op de radiale weerstand, welke invloed door een eenvoudige formule in rekening kan worden gebracht.

### III. NIET-STATIONAIRE STROMINGEN

III.1. De stroming in de onverzadigde zone is van groot belang bij de niet-stationaire toestanden. Daar de differentiaalvergelijkingen voor deze zone echter zeer moeilijk oplosbaar zijn, is zoals gebruikelijk een empirische benadering toegepast. Aangenomen dat de toestanden in de onverzadigde zone quasi-stationair zijn, volgt hieruit dat de dimensieloze bergingscoëfficiënt, welke gedefinieerd wordt als de verhouding van bergingsverandering en grondwaterstandsverandering, voornamelijk afhankelijk zou moeten zijn van de grondwaterstandsdiepte. Uit metingen in het veld (fig. 32) en in het laboratorium (fig. 35–38) blijkt echter, dat de hysteresis van het vochtgehalte ten opzichte van de vochtspanning ook van grote invloed is. Dit houdt in, dat aan het begin en aan het einde van een regenperiode een lage bergingscoëfficiënt en relatief grote stijgingen en dalingen van de grondwaterstand kunnen optreden en tijdens de regenperiode een daarmee corresponderende hoge afvoer. Ter vereenvoudiging van de berekeningen is het gebruikelijk een constante gemiddelde waarde voor de bergingscoëfficiënt aan te nemen. Het is duidelijk, dat een betere benadering niet bereikt kan worden, door twee verschillende waarden te gebruiken respectievelijk voor perioden met  $N \leq 0$  en met  $N > 0$ . Een verbetering is wel mogelijk door invoering van een schijnbare neerslag, welke hoeveelheid weer afgetrokken moet worden aan het einde van de regenperiode. Er zijn echter gevallen waarin de veronderstelling van een quasi-stationaire toestand in de onverzadigde zone niet toelaatbaar is. Een enkel voorbeeld is gegeven van de invloed van de vertraagde levering van water uit de onverzadigde zone bij een plotselinge verlaging van het peil van het open water met behulp van een berekening uitgaande van de formule van Boulton.

III.2. Bij voornamelijk horizontale stromingen tussen evenwijdige open leidingen leidt de invoering van een bergingscoëfficiënt tot een aanmerkelijk vereenvoudigde differentiaalvergelijking, waaruit  $h(x, t)$  opgelost dient te worden. Bij een constante  $\mu$  maar een variabele  $D$  kan soms de bekende oplossing van Boussinesq of een variant op deze oplossing worden gebruikt. Bij constante  $D$  en  $\mu$  is het gebruikelijk om bijzondere oplossingen als superponeerbaar te beschouwen. Dat deze onderstelling niet helemaal juist kan zijn, blijkt bij beschouwing van de stroming, welke begint met een horizontaal freatisch oppervlak en een hoger of lager gelegen peil in een open leiding (fig. 39).

III.3. Oplossingen in de vorm  $h(x, z, t)$  kunnen zowel bij grondwaterstromingen met harmonische fluctuaties als bij grondwaterstromingen met exponentiële demping worden gegeven indien de grond homogeen doorlatend is en het beschouwde gebied in een dwarsdoorsnede rechthoekig is met drainage langs de verticale zijden. Bij ontwatering door ondiepe leidingen van kleine afmetingen wordt een soortgelijke oplossing voor gevallen met exponentiële demping afgeleid. Deze afleiding is echter slechts bij benadering juist, waardoor het nodig is nog een bijzondere voorwaarde in acht te nemen. Bij gevallen met exponentiële demping kan men ook met behulp van de vierkantjesmethode een goede benadering van de oplossing verkrijgen (fig. 41). De grafische methode wordt niet beperkt door de voorwaarde waaraan bij de analytische oplossing voldaan moet worden. Om deze reden is de grafische methode voor de praktijk van meer belang. Voor een horizontaal, rechthoekig gebied kunnen oplossingen in de vorm  $h(x, y, t)$  uit de theorie der warmtegeleiding in vaste stoffen worden overgenomen.

III.4. Bij de oplossing van niet-stationaire grondwaterstromingen worden drie soorten randvoorwaarden onderscheiden: de overtollige neerslag, de bijzondere voorwaarden te stellen aan peil of stroomsterkte in de open leidingen en de begintoestand. Indien het superponeren is toegestaan, kan men drie zodanige deeloplossingen trachten te vinden, dat hun som aan de drie gegeven randvoorwaarden voldoet. Door bovendien gebruik te maken van vereenvoudigde differentiaalvergelijkingen zijn voor een groot aantal toestanden bijzondere oplossingen afgeleid, waarbij behalve de genoemde randvoorwaarden nog de volgende eigenschappen in acht worden genomen: de radiale weerstand van de open leidingen, welke vooral van belang is bij slecht doorlatende afdekkende lagen; de gelaagdheid van het pakket, indien er een klein aantal horizontale lagen van constante dikte en sterk verschillende doorlatendheid aanwezig is; de verschillen in bergingscoëfficiënten tussen lage gronden met ondiepe grondwaterstanden langs drainerende rivieren en verder af gelegen hogere gronden met diepere grondwaterstanden (oplossing van Van Der Held); de invloed van gegeven veranderingen in het peil van de open leidingen op de grondwaterstand als het waterverbruik door de planten lineair met de grondwaterstandsverandering samenhangt.

III.5. Bij snelle dalingen van het peil van het open water, kan de naijling van de stroming in de verzadigde zone zo belangrijk zijn, dat in de eerste tijd na het begin van de daling niet met een constante bergingscoëfficiënt mag worden gerekend. Door gebruik te maken van de formule van Boulton worden bij  $N = 0$  en gegeven functies

$h_0(t)$  enkele afleidingen gegeven, waarbij echter niet steeds aan monotone veranderingen in het vochtgehalte boven de grondwaterspiegel wordt voldaan.

III.6. In een sterk samendrukbaar pakket zou behalve met de uitdrijving van een gedeelte van het poriënwater en de daarmee samenhangende veranderingen in de hoogte van elke laag ook rekening moeten worden gehouden met veranderingen in de doorlatendheid en in de compressie-modulus. Na invoering van verschillende vereenvoudigingen kan dezelfde oplossingsmethode als in hoofdstuk III.4 gebruikt worden en wel in het bijzonder als een klei- of veenlaag aanwezig is boven een laag bestaande uit grof zand. Langs deze weg werden oplossingen verkregen voor een stroming met harmonische fluctuaties en voor een stroming met exponentiële demping in een uit twee lagen bestaand pakket.

III.7. De rekenmethode waarbij verondersteld wordt dat de grondwaterstroming een quasi-stationair proces is, kan door zijn eenvoudig voor de praktijk van belang zijn. Men neemt aan, dat de werkelijke grondwaterspiegel met voldoende benadering gelijk gesteld mag worden aan een bijzondere vorm welke voorkomt bij bepaalde stationaire randvoorwaarden. Bij weinig of geen variatie in het peil van de open leidingen wordt een parabolische of elliptische vorm aangenomen (fig. 17). Bij plotselinge veranderingen in het peil van de open leidingen wordt de vorm samengesteld gedacht uit parabolen en rechte lijnstukken (fig. 52 en 53). Hierdoor gaat men van partiële op gewone differentiaalvergelijkingen over, waarvan diverse oplossingen bekend zijn, onder andere bij variabele laagdikte en variabele bergingscoëfficiënt. Bij een constant peil van de open leidingen blijkt de overeenkomst met resultaten van voorgaande hoofdstukken soms minder goed te zijn (fig. 50 met  $w = 0$ ), in andere gevallen ruim voldoende voor praktische toepassingen (fig. 51 met  $w = L/16kD$ ).

#### IV. VLOEISTOFMODELLEN

IV.1. Bij modelonderzoek heeft men weinig principiële moeilijkheden te overwinnen, indien het gaat om een oplossing van de differentiaalvergelijking van Laplace bij onafhankelijk gegeven, eventueel van de tijd afhankelijke, randvoorwaarden. Van de bekende methodes is alleen het zandmodel geschikt om een redelijke nabootsing van de toestand in de onverzadigde zone te geven. Het spleetmodel staat verder van de werkelijkheid af, maar is goed bruikbaar om een oplossing te geven van een niet-stationaire stroming waarbij de radiale component niet mag worden verwaarloosd, echter met aanneming van een constante bergingscoëfficiënt.

# SUMMARY

## GROUNDWATER FLOW IN THE SATURATED ZONE AND ITS CALCULATION WHEN PARALLEL HORIZONTAL OPEN CONDUITS ARE PRESENT

### I. INTRODUCTION

I.1. The flow of groundwater depends on the properties of the medium and on certain conditions at the boundary of the considered area. The flow in the unsaturated zone has only a special influence on the flow in the saturated zone in the case of non-steady states. For steady state flow the unsaturated zone as well as the compressibility of the aquifer can be disregarded. Neglecting the compressibility in non-steady states is particularly allowed when the changes in storage in the unsaturated zone are of predominating influence. Such a neglect implies an immediate adjustment to the boundary conditions of the pressure distribution in the fluid.

I.2. For applications in the field of agriculture, it can be of importance to take into account the prevailing, often strongly variable, lithostratigraphic and topographic conditions and this especially in steady states.

### II. STEADY STATE FLOW

II.1. Darcy's law is always valid in practice. In the case of steady states this law, in combination with the law of continuity, leads to the differential equation of Laplace. When the shape of the upper boundary (the phreatic surface) is not explicitly given, but has to be derived from the given flux distribution along the boundaries of the considered area, only a few solutions are known.

If the influence of the shape of the upper boundary is of minor importance, the assumption of constant resistances is allowed. In the case of horizontally stratified aquifers, use can be made of vertical and horizontal resistances and, in every plane perpendicular to an open conduit \*), of the radial resistance. This last resistance is defined as the difference between the resistance encountered in the proximity of the open conduit by the real flow and that encountered by an imaginary flow with an exclusively horizontal direction (cross section of the open conduit replaced by a vertical line reaching from the soil surface to the first semi-permeable or impermeable layer). The use of this radial resistance has the advantage, that one can express the influence of an open conduit, as far as depending on its size and on the permeability of the soil, by a single characteristic value. In a few simple cases formulae for the

\* As open conduits are regarded: rivers, channels, ditches, etc. and any kind of tubes that give the possibility of an exchange of water with the soil.

radial resistance were derived [(41), (47), (54)]. For an aquifer consisting of two layers, some results obtained with the relaxation method are given in a graph [fig. 14 and (53)].

Use of these constant resistances in calculations of groundwater flow is possible with the aid of a wire-scheme, for parallel equidistant open conduits with a constant level, situated in aquifers consisting of alternate layers with large, respectively small, permeability, as well as for parallel open conduits with an arbitrary distribution of place, level and size (fig. 6 and fig. 18).

For practical work, the so-called drainage formulae [(33), (58), (63), (64), (83)] are of special importance. These formulae, derived for symmetrical steady states, give the difference in elevation between the phreatic surface midway the open conduits and the level of the open conduits as a function of the intensity of the precipitation surplus and the permeability and stratification of the soil.

II.2. The shape of the phreatic surface can be of importance in the proximity of the open conduits, because of its influence on the radial resistance and on the stability of the talus. With the hodograph-method, simple solutions can only be obtained for two cases. The steady state flow to a trapezoidal wetted perimeter was examined by sketching of squares (fig. 27 and fig. 28).

II.3. In the case of drainage by means of non-porous draintubes, a deviation of the plane flow occurs near the gaps and this has an important influence on the radial resistance. This influence is accounted for by adding an extra term [(105) or (106)] to the formulae obtained in chapter II. 1.

### III. NON-STEADY STATE FLOW

III.1. For the calculation of non-steady state flow, the unsaturated zone is of great importance. Since solutions of the fundamental differential equations for this zone are very difficult to obtain, use is made of an empirical approximation. Assuming that only quasi-steady states exist in the unsaturated zone, it follows that the dimensionless storage-coefficient (which is defined as the ratio of the change in storage and the change in hydraulic head) is mainly dependent on the depth of the groundwater table below soil surface. From measurements in the field (fig. 32) and in the laboratory (fig. 35 to 38) it can be shown, however, that the hysteresis of the moisture content with regard to the moisture tension has a large influence too. This implies that often at the beginning and end of a period of heavy rain, a low storage coefficient and a relatively large rise and fall of the groundwater level will occur with, during this period, a correspondingly high run-off. For the sake of simplicity of the calculations, the assumption of a constant mean value for the storage coefficient is usual. It is obvious that a better approximation cannot be attained by the alternate use of two different values, respectively for periods with  $N \leq 0$  and  $N > 0$ . An improvement is possible by the introduction of an apparent precipitation, the amount of which will have to be subtracted at the end of the period of rain. There are cases, however, in which the assumption of a quasi-steady state in the unsaturated zone is not permissible. An example has been given with the aid of the formula of Boulton, of the in-



# LITERATUUR

- AVERYANOV, S. F. 1949. Benaderende bepaling van de rol der filtratie in de capillaire zoom (in het Russisch). *C.R. Acad. Sci. U.R.S.S.* 69: 309-312.
- BAVER, L. D. 1949. *Soil physics*. 2d. ed. Wiley, New York.
- BOSCH, H. 1951. Geo-hydrologisch onderzoek in Bergambacht. Gestencild rapport van het Hydrologisch Colloquium, 's-Gravenhage, 255A.
- BOULTON, N. S. 1951. The flow pattern near a gravity well in a uniform water bearing medium. *J. Inst. Civ. Eng.* 36: 534-550.
- 1954. Unsteady radial flow to a pumped well allowing for delayed yield from storage. *Ass. Int. Hydr. Sci. (U.G.G.I.) C.R. Ass. Gén. de Rome 1954*, 2: 472-477.
- BOUSSINESQ, J. 1877. *Essai sur la théorie des eaux courantes*. Imprimerie Nationale, Paris.
- 1903. Sur le débit en temps de sécheresse d'une source alimentée par une nappe d'eaux d'infiltration. *C.R. Acad. Sci. Paris* 136: 1511-1517.
- 1903. Sur un mode simple d'écoulement des nappes d'eaux d'infiltration à lit horizontal avec rebord vertical tout autour lorsqu'une partie de ce rebord est enlevée depuis la surface jusqu'au fond. *C.R. Acad. Sci. Paris* 137: 5-11.
- 1903. Sur la stabilité d'un certain mode d'écoulement d'une nappe d'eaux d'infiltration. *C.R. Acad. Sci. Paris* 137: 101-106.
- 1904. Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources. *J. Math. pures et appliquées* 5: 11-16, 364-371.
- BOUWER, H. and W. C. LITTLE. 1959. A unifying numerical solution for two dimensional steady flow problems in porous media with an electrical resistance network. *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.* 23: 91-96.
- BREITENÖDER, M. 1942. *Ebene Grundwasserströmungen mit freier Oberfläche*. Springer, Berlin.
- BRINKHORST, W. H. 1936. Settlement of the soil surface around the foundation pit during the construction of the locks at Vreeswijk resultant on the sinking of the groundwater. *Proc. Int. Conf. Soil Mech. Eng. Cambridge* 1: 115-119.
- BURGERS, J. M. 1926. Grondwaterstroming in de omgeving van een net van kanalen. *De Ingenieur* 41: 657-665.
- CARSLAW, H. S. 1921. *Introduction to the mathematical theory of the conduction of heat in solids*. 2d ed. Mac Millan, New York.
- and J. C. JAEGER. 1959. *Conduction of heat in solids*. 2d. ed. Clarendon, Oxford.
- CHILDS, E. C. and E. G. YOUNGS. 1958. The nature of the drain channel as a factor in the design of a land drainage system. *J. Soil Sci.* 9: 316-331.
- COURANT, R. und D. HILBERT. 1931. *Methoden der mathematischen Physik*. Band I, 2e Auflage, Springer, Berlin.
- DACHLER, R. 1936. *Grundwasserströmung*. Springer, Wien.
- DANCKWERTS, P. V. 1951. Absorption by simultaneous diffusion and chemical reaction into particles of various shapes and into falling drops. *Trans. Faraday Soc.* 47: 1014-1023.
- DARCY, H. 1856. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Dalmont, Paris.
- DEEMTER, J. J. VAN. 1950. Theoretische en numerieke behandeling van ontwaterings- en infiltratiestromingsproblemen. *Versl. Landb. Onderz.* 56 (7): 1-67.
- DISERENS, E. 1935. Les moyens permettant de déterminer la mode d'action des travaux d'assainissement, canaux et drainages. *Trans. 3d. Int. Cong. Soil Sci.*, Oxford, vol. 3: 45-69.
- DUMM, L. D. 1954. Drain spacing formula. *Agr. Eng.* 35: 726-730.
- EDE, A. N. 1958. The hydraulic comparison of land drains and the determination of effective diameters. *J. Agr. Eng. Res.* 3: 9-16.
- EDELMAN, J. H. 1947. *Over de berekening van grondwaterstromingen*. Proefschrift Delft.
- ENGELUND, F. 1951. Mathematical discussion of drainage problems. *Trans. Danish Acad. Techn. Sci., Bull.* no. 3, 64 pag.

- ERNST, L. F. 1954. Het berekenen van stationnaire grondwaterstromingen, welke in een vertikaal vlak afgebeeld kunnen worden. Gestencild rapport van het Landbouwproefstation en Bodemkundig Instituut T.N.O. Groningen, 55 pag.
- 1956. Calculation of the steady flow of groundwater in vertical cross sections. *Neth. J. Agr. Sci.* 4: 126–131.
- and N. A. DE RIDDER, 1960. High resistance to horizontal groundwater flow in coarse sediments due to faulting. *Geol. en Mijnb.* 39: 66–85.
- FERRIS, J. G. 1950. A quantitative method for determining groundwater characteristics for drainage design. *Agr. Eng.* 31: 285–291.
- 1951. Cyclic fluctuations of water level as a basis for determining aquifer transmissibility. *Ass. Int. Hydr. Sci. (U.G.G.I.) C.R. Ass. Gén. de Bruxelles* 2: 148–155.
- FLODKVIST, H. 1931. Kulturtechnische Grundwasserforschungen. *Sveriges Geologiska Undersökning* 25: 317 pag.
- FORCHHEIMER, PH. 1901. Wasserbewegung durch Boden. *Z. Ver. Deutsch. Ing.* 45: 1781–1788.
- 1930. *Hydraulik*. 3e Auflage, Teubner, Leipzig-Berlin.
- FUKUDA, H. 1957. Underdrainage into ditches in soil overlying an impervious substratum. *Trans. Amer. Geophys. Un.* 38: 730–739.
- GARDNER, W. E. 1958. Some steady state solutions of the unsaturated moisture flow equation. *Soil Sci.* 85: 228–232.
- GLEE, G. J. DE, 1930. Over grondwaterstromingen bij wateronttrekking door middel van putten. *Proefschrift Delft*.
- GRÖBER, H. 1921. *Die Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges*. Springer, Berlin.
- GÜNTHER, E. 1940. Untersuchung von Grundwasserströmungen durch analoge Strömungen zäher Flüssigkeiten. *Forsch. Ing. Wesen* 11: 76–88.
- 1940. Lösung von Grundwasseraufgaben mit Hilfe der Strömung in dünnen Schichten. *Wasserkr. u. Wasserw.* 35: 49–55.
- GUSTAFSSON, Y. 1946. Untersuchungen über die Strömungsverhältnisse in gedräntem Boden. *Acta Agric. Suecana Stockholm* 2: 1–157.
- HALLAIRE, M. 1949. Profils hydriques envisagés comme la variation du potential capillaire  $\psi$  avec la profondeur. *C. R. Acad. Sci. Paris* 229: 1361–1363.
- 1950. Profils hydriques en sols hétérogènes. *C. R. Acad. Sci. Paris* 230: 462–464.
- HAMEL, G. 1934. Über Grundwasserströmung. *Z. f. angew. Math. u. Mech.* 14: 129–157.
- HAY, R. 1890. Artesian wells in Kansas and causes of their flow. *Amer. Geol.* 5: 296–301.
- HELD, E. F. M. VAN DER. 1935. Die mathematische Behandlung der Abkühl- und Aufheizerscheinungen in aus Schichten von verschiedenen Substanzen aufgebauten Mauern. *Physica* 2: 943–951.
- HELE SHAW, H. S. 1897/1898. Experiments on the nature of the surface resistance in pipes and on ships. *Trans. Naval Arch.* 39: 145–153.
- and A. HAY. 1900. Lines of induction in a magnetic field. *Phil. Trans.* A195: 303–327.
- HOOGHOUDT, S. B. 1934. Bijdragen tot de kennis van enige natuurkundige grootheden van de grond. Deel 2. *Versl. Landb. Onderz.*, 's Gravenhage 40B: 215–345.
- 1937. Bijdragen tot de kennis van enige natuurkundige grootheden van de grond. Deel 6. *Versl. Landb. Onderzoek.* 43 (13) B: 461–676.
- 1940. Bijdragen tot de kennis van enige natuurkundige grootheden van de grond. Deel 7. *Versl. Landb. Onderz.* 46 (14) B: 515–707.
- HURWITZ, A. und R. COURANT. 1929. *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*. 3e Auflage, Springer, Berlin.
- ITERSON, F. K. TH. VAN. 1916. Enige theoretische beschouwingen over kwel. *De Ingenieur* 31: 629–633.
- JACOB, C. E. 1940. On the flow of water in an elastic artesian aquifer. *Trans. Amer. Geophys. Un.* 21: 574–586.
- 1946. Radial flow in a leaky artesian aquifer. *Trans. Amer. Geophys. Un.* 27: 198–205.
- KAMKE, E. 1956. *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*. Leipzig Akad. Verlagsges.

- KEVERLING BUISMAN, A. S. 1940. Grondmechanica. Waltman, Delft.
- KING, P. H. 1892. Fluctuations in the level and rate of movements of groundwater. *U.S. Weather Bureau, Bull.* no. 5
- 1899. Principles and conditions of the movements of ground water. *U.S. Geol. Survey, 19th Ann. Report, 1897/1898*: 61–294.
- KIRKHAM, D. 1945. Artificial drainage of land: streamline experiments. *Trans. Amer. Geophys. Un.* 26: 393–406.
- 1949. Flow of ponded water into draitubes in soil overlying an impervious layer. *Trans. Amer. Geophys. Un.* 30: 369–385.
- 1950. Potential flow into circumferential openings in drain tubes. *J. Appl. Phys.* 21: 650–660.
- 1951. Seepage into drain tubes in stratified soil. I. Drains in the surface stratum. II. Drains below the surface stratum. *Trans. Amer. Geophys. Un.* 32: 422–442.
- 1954. III. Seepage of artesian and surface water into drain tubes in stratified soil. *Trans. Amer. Geophys. Un.* 35: 775–790.
- 1958. Seepage of steady rainfall through soil into drains. *Trans. Amer. Geophys. Un.* 38, 1958, 892–908.
- KLUTE, A. 1952. A numerical method for solving the flow equation for water in unsaturated soils. *Soil Sci.* 73: 105–116.
- KOEHNE, W. 1929. Wie wirken Einsickerung, unterirdische Kondensation und Grundluftspannung auf das Grundwasser? *Wasserkr. u. Wasserw.* 24, 216–219.
- KOKKONEN, P. 1926. Beobachtungen über die Struktur des Bodenfrostes. *Acta Forest. Fenn.* 30: 56 + 17 pag.
- 1933. Die Verteilung des Wassers im Boden infolge der Einwirkung des Bodenfrostes. *Trans. 6th Comm. Int. Soc. Soil Sci. Groningen*, vol. A: 13–17.
- KOZENY, J. 1920. Die Wasserführung der Flüsse. F. Deuticke, Leipzig, 136 pag.
- 1927. Über Grundwasserbewegung. *Wasserkr. u. Wasserw.* 22: 103–104.
- 1932. Hydrologische Grundlagen des Dränversuches. *Trans. 6th Comm. Int. Soc. Soil Sci. Groningen*, vol. A: 42–67.
- 1933. Über den Wasserzudrang bei Dränfugen. *Wasserkr. u. Wasserw.* 28: 13–17.
- KRAIJENHOFF VAN DE LEUR, D. A. 1958. A study of non-steady groundwater flow with special reference to a reservoir coefficient. *De Ingenieur*, 70: B87–B94.
- KRISCHER, O. 1938. Grundgesetze der Feuchtigkeitsbewegung in Trockengütern; Kapillarwasserbewegung und Wasserdampfdiffusion. *Z. Ver. Deutsch. Ing.* 82: 373–378.
- und H. ROHNALTER, 1937. Die Wärmeübertragung durch Diffusion des Wasserdampfes in den Poren von Baustoffen unter Einwirkung eines Temperaturgefälles. *Gesundheits-Ing.* 60: 621–627.
- LABYE, Y. 1960. Note sur la formule de Hooghoudt. *Bull. techn. du Génie rural* (Min. de l'Agriculture de la République Française), no. 49–1, 18 – 3 p.
- LINDQUIST, E. 1933. On the flow of water through porous soil. Premier Congrès des grands Barrages. Stockholm. vol. 5: 81–101.
- LINSLEY, R. K., M. A. KOHLER and J. L. H. PAULHUS, 1949. Applied Hydrology. Mac Graw-Hill, New York, 14 + 689 pag.
- LUTHIN, J. N. and R. V. WORSTELL, 1957. The falling watertable in tile drainage; a laboratory study. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.* 21: 580–584.
- MAASLAND, M. 1959. Watertable fluctuations induced by intermittent recharge. *J. Geoph. Res.* 64: 549–559.
- MAILLET, E. 1905. Essais d'hydraulique souterraine et fluviale. Libr. scient., Hermann, Paris, 218 + 48 pag.
- MAZURE, J. P. 1932. Invloed van een weinig doorlaatbare afdekkende bovenlaag op de kwel onder een dijk. *De Ingenieur*, 47: B41–B43.
- MEINZER, O. E. 1928. Compressibility and elasticity of artesian aquifers. *Econ. Geol.* 23: 263–291.
- and V. C. FISHEL, 1934. Tests of permeability with low hydraulic gradients. *Trans. Amer. Geoph. Un.* 15: 405–409.
- MEYER, A. F. 1960. Effect of temperature on groundwater levels. *J. Geophys. Res.* 65: 1747–1752.

- MOLEN, W. H. VAN DER, 1955. Afvoermetingen in de Noordoostpolder. Gestencild rapport van de Noordoostpolderwerken, afdeling onderzoek, Kampen, 6 pag.
- MUSKAT, M. 1937. The flow of homogeneous fluids through porous media. Mac Graw-Hill, New York.
- NIELSEN, D. R., D. KIRKHAM and W. R. VAN WIJK. 1959. Measuring water stored temporarily above the field moisture capacity. *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.* 23: 408-412.
- OESTEN, G. 1879. Über Brunnen. *J. f. Gasbel. u. Wasservers.* 22: 407-412, 452-458.
- PECK, A. J. 1960. Change of moisture tensions with temperature and air pressure. *Soil Sci.* 89: 303-310.
- 1960. The water table as affected by atmospheric pressure. *J. Geophys. Res.* 65: 2383-2388.
- PENNINK, J. M. K. 1915. Grondwaterstroombanen; uitkomsten van een onderzoek verricht in de jaren 1904 en 1905 naar de vorm der stroombanen van grondwater zich bevindend in zuiver zand. Stadsdrukkerij, Amsterdam.
- PHILIP, J. R. 1957. The theory of infiltration. *Soil Sci.* 83: 345-357, 435-448; 84: 163-178, 257-264, 329-339.
- 1958. The theory of infiltration. *Soil Sci.* 85: 278-286, 333-337.
- PORCHET, M. 1923. Étude sur l'écoulement souterrain des eaux (thèse de doctorat). Annales de la Direction Générale des Eaux et Forêts (Ministère de l'Agriculture de la République Française) 53: 283-358.
- RICHARDS, L. A. 1931. Capillary conduction of liquids through porous materials. *Physics* 1: 318-333.
- RIEMANN, B. und H. WEBER. 1901. Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, 2 Bände, 4e Auflage, Vieweg, Braunschweig.
- ROSSBACH, H. F. 1941. Über Grundwasserströmungen mit freier Oberfläche. *Ing. Archiv.* 12: 221-246.
- ROTHER, J. 1924. Die Stragentfernung bei Dränungen. *Landw. Jb.* 59: 453-490.
- RUSSELL, W. L. 1928. The origin of artesian pressure. *Econ. Geol.* 23: 132-157.
- SANTING, G. 1951. Modèle pour l'étude des problèmes de l'écoulement simultane des eaux souterraines douces et salées. Ass. Int. Hydr. Sci. (U.G.G.I.) C.R. Ass. Gén. de Bruxelles 2: 184-193.
- 1957. A horizontal scale model based on the viscous flow analogy for studying groundwater flow in an aquifer having storage. Ass. Int. Hydr. Sci. (U.G.G.I.) C.R. Ass. Gén. de Toronto 2: 105-114.
- SCHEELHASE, F. 1911. Beitrag zur Frage der Erzeugung künstlichen Grundwassers aus Fluszwasser. *J. f. Gasbel. u. Wasservers.* 54: 665-675.
- SCHOFIELD, R. K. 1935. The pF of the water in the soil. Trans 3d Int. Congr. Soil Sci. Oxford 2: 37-48.
- SHAW, E. W. and R. V. SOUTHWELL, 1941. Problems relating to the percolation of fluids through porous materials. *Proc. Roy. Soc. London A* 178: 1-17.
- SOUTHWELL, R. V. 1946. Relaxation methods in theoretical physics. Vol. 1, Clarendon, Oxford.
- STEGGEWENTZ, J. H. 1933. De invloed van de getijbeweging van zeeën en getijrivieren op de stijghoogte van grondwater. Proefschrift Delft.
- SWARTZENDRUBER, D. 1962. Modification of Darcy's law for the flow of water in soils. *Soil Sci.* 93: 22-29.
- and D. KIRKHAM, 1956. Capillary fringe and flow of water in soil. *Soil Sci.* 81: 473-484; 82: 81-95.
- TABER, S. 1929. The mechanics of frost heaving. *J. Geol.* 37: 428-461.
- 1930. The mechanics of frost heaving. *J. Geol.* 38: 303-317.
- TALSMA, T. and H. C. HASKEW, 1959. Investigation of water table response to tile drains in comparison with theory. *J. Geophys. Res.* 64: 1933-1944.
- TERZAGHI, K. 1925. Erdbaumechanik auf Bodenphysikalischer Grundlage. Deuticke, Leipzig.
- 1943. Theoretical soil mechanics. Wiley, New York.
- and R. B. PECK, 1948. Soil mechanics in engineering practice. Wiley, New York.
- THAL LARSEN, J. H. 1932. Über den Aufstieg des phreatischen Niveaus bei erhöhter Luftspannung über den Kapillarsaum infolge Eindringens von Regenwasser an der Erdoberfläche. Trans. 6th Comm. Int. Soc. Soil Sci. Groningen vol. A: 29-31.
- THEIS, C. V. 1935. The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and direction of discharge of a well using groundwater storage. *Trans. Amer. Geophys. Un.* 16: 519-524.

- TODD, D. K. 1956. Laboratory research with groundwater models. Ass. Int. Hydr. Sci., Symposia Darcy, Dijon, tome 2: 199–206.
- 1959. Groundwater hydrology. Wiley, New York.
- TOLMAN, C. F. 1937. Groundwater. Mac Graw-Hill, New York.
- and J. F. POLAND, 1940. Ground-water, salt-water infiltration and ground-surface recession in Santa Clara Valley, California. *Trans. Am. Geophys. Un.*: 23–34.
- VEATCH, A. C. 1906. Fluctuations of the water level in wells with special reference to Long Island, New York. *U.S. Geol. Surv. Water Supply paper* 155, series O, Undergroundwaters 52, 83 pag.
- VISSER, W. C. 1953. De grondslagen van de drainage berekening. *Landbouwk. Tijdschr.* 65: 66–81.
- VREEDENBURGH, C. G. 1935. Over de stationaire waterbeweging door grond met homogeen-anisotropische doorlaatbaarheid. *De Ingenieur in Ned. Indië* 2: VI 140–VI 143.
- WATERWINNING ZUID LIMBURG. 1941. Rapport van de Waterleiding Maatschappij Zuid Limburg. Maastricht 1941 met afzonderlijke bijlagen. N.V. Waterleiding Mij voor Zuid Limburg. Maastricht.
- WEDERNIKOW, V. V. 1935. Der Einfluss des kapillaren Aufstieges auf die Sickerung aus Kanälen. *Wasserkr. u. Wasserw.* 30: 245–250.
- WERNER, P. W. 1946. Notes on the flow time effects in the great artesian aquifers of the earth. *Trans. Amer. Geophys. Un.* 27: 687–708.
- 1953. On non-artesian groundwater flow. *Geofis. Pura Appl.* 25: 37–43.
- and D. NORÉN. 1951. Progressive waves in non-artesian aquifers. *Trans. Amer. Geophys. Un.* 32: 238–244.
- and K. J. SUNDQUIST, 1951. On the groundwater recession curve for large water sheds. Ass. Int. Hydr. Sci. (U.G.G.I.) C.R. Ass. Gén. de Bruxelles 2: 202–212.
- WESSELING, J. 1957. Enige aspecten van de waterbeheersing in landbouwgronden. Proefschrift Wageningen.
- 1959. The transmission of tidal waves in elastic artesian basins. *Neth. J. Agric. Sci.* 7: 22–32.
- 1960. Enkele resultaten van de bepaling van hydrologische constanten in het Prunje gebied (Schouwen-Duiveland). *Geol. en Mijnb.* 39: 624–630.
- WIND, G. P. 1955. A field experiment concerning capillary rise of moisture in a heavy clay soil. *Neth. J. Agric. Sci.* 3: 60–69.
- WYCKOFF, R. D., H. G. BOTSET and M. MUSKAT. 1932. Flow of liquids through porous media under the action of gravity. *Physics* 3: 90–113.
- ZANKER, K. 1959. Modellversuche zur Bestimmung zweckmässiger Dränabstände unter Berücksichtigung der Bodendurchlässigkeit und der Tiefenlage einer undurchlässigen Schicht. *Wasser u. Boden* 10: 355–360.

# VERKLARING VAN DE GEBRUIKTE SYMBOLEN\*)

Symbool		Dimensie
$A$	Afvoer uit een open leiding per eenheid van lengte van de leiding . . . . .	$l^2t^{-1}$
$a$	Spleet tussen drainbuizen; spleet in een glasplatenmodel . . .	1
$B$	Natte omtrek van een open leiding in verticale doorsnede . . .	1
$B_b$	Breedte van het horizontale gedeelte van de natte omtrek . . .	1
$B_h$	Waterdiepte in een open leiding . . . . .	1
$B_w$	Breedte van de open waterspiegel . . . . .	1
$b$	Verschil in hoogte tussen het laagste punt in het freatisch oppervlak en het drainagecentrum . . . . .	1
$C$	Samendrukkingscoëfficiënt . . . . .	—
$c$	Verticale weerstand . . . . .	$t$
$D$	Dikte van een watervoerend pakket . . . . .	1
$D_i$	Dikte van een homogene laag welke bij nummering van boven af (te beginnen met 1) de index $i$ krijgt **) . . . . .	1
$D_0$	Dikte van het watervoerende pakket beneden het peil in de open leidingen . . . . .	1
$D_{1,0}$	Dikte van de eerste laag beneden het peil in de open leidingen	1
$d$	Diameter van gronddeeltjes . . . . .	1
$E$	Verdamping . . . . .	$lt^{-1}$
$E_k$	Compressie-modulus van korrelskelet . . . . .	$gl^{-1}t^{-2}$
$E_n$	Compressie-modulus van het korrelskelet in de laag met index $n$	$gl^{-1}t^{-2}$
$E_w$	Compressie-modulus van water . . . . .	$gl^{-1}t^{-2}$
$F$	Oppervlak . . . . .	$l^2$
$G_i$	Breedte van de stroken waarin het gebied tussen twee evenwijdige open leidingen kan worden verdeeld . . . . .	1
$g$	Versnelling van de vrije val . . . . .	$lt^{-2}$
$H$	Plotselinge peilverlaging in de open leidingen . . . . .	1
$h$	Stijghoogte van het grondwater ten opzichte van een vast horizontaal oppervlak (ook genoemd grondwaterstand) . . .	1
$h_a$	Amplitude van $h$ . . . . .	1
$h_0$	Peil van het open water ten opzichte van hetzelfde vergelijkingsvlak als $h$ . . . . .	1
$k$	Doorlatenheid van een poreus medium voor water bij 10°C	$lt^{-1}$

\*) De letters  $A$ ,  $a$ ,  $B$ ,  $b$ ,  $C$ ,  $c$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $g$ ,  $M$  en  $s$  worden ook gebruikt voor empirische constanten en voor de coëfficiënten, welke uit de randvoorwaarden nader bepaald moeten worden.

\*\*) De index  $i \geq 1$ , indien voorkomend bij  $k$ ,  $c$  of  $D$ , heeft betrekking op het nummer van de laag. Bij de symbolen  $h$  en  $q$  komen een of meer indices voor, die niet steeds dezelfde betekenis hebben: de indices worden namelijk gebruikt zowel om de horizontale lagen in de grond als om de stroken tussen de evenwijdige open leidingen en de stroomsterkte aan linker- of rechterkant van een open leiding te onderscheiden (zie fig. 6, 18, 47 en 51). In het eerste deel van hoofdstuk III. 7 duidt  $h_1(t)$  de stijghoogte aan in het bijzondere waarnemingspunt.

Symbool		Dimensie
$L$	Afstand tussen evenwijdige open leidingen . . . . .	l
$L_d$	Lengte van een drainbuis . . . . .	l
$M$	Vochtgehalte (volume water/volume grond) . . . . .	-
$N$	Overtollige neerslag ( $N = R - E$ ofwel $N = R - E + dS_a/dt$ )	$lt^{-1}$
$N_a$	Amplitude van $N$ . . . . .	$lt^{-1}$
$p$	Spanning ( $\text{dyn/cm}^2$ ), als druk van het grondwater gewoonlijk overdruk ten opzichte van de atmosfeer . . . . .	$gl^{-1}t^{-2}$
$p_a$	Atmosferische druk . . . . .	$gl^{-1}t^{-2}$
$Q$	Stroomsterkte (hoeveelheid per tijdseenheid) door gegeven oppervlak . . . . .	$l^3t^{-1}$
$q$	Stroomsterkte in een verticale doorsnede door een gegeven lijnstuk . . . . .	$l^2t^{-1}$
$q_0$	Totale stroomsterkte in een verticale doorsnede door de natte omtrek van een open leiding . . . . .	$l^2t^{-1}$
$q_0, a$	Amplitude $q_0$ . . . . .	$l^2t^{-1}$
$R$	Neerslag . . . . .	$lt^{-1}$
$R_0$	Hydraulische straal . . . . .	l
$r$	Straal . . . . .	l
$r_0$	Straal van een drainbuis of straal van de natte omtrek van een open leiding in een verticale doorsnede . . . . .	l
$S$	De geborgen hoeveelheid water in deze publikatie aan te duiden door <i>bergig</i> en gerekend als watervolume boven een zeker vergelijkingsniveau per eenheid van oppervlakte [ $S(Z) + S_b(Z) = S(0)$ ] . . . . .	l
$S_b$	Bergend vermogen (luchtvolume per oppervlakte-eenheid) . . . . .	l
$S_a$	Vochtdeficiet . . . . .	l
$s$	Strookbreedte van het kweloppervlak; dikte van een vloeistoffilm . . . . .	l
$T$	Duur van een periode . . . . .	t
$t$	Tijd . . . . .	t
$V$	Volume . . . . .	$l^3$
$v$	Snelheid of flux . . . . .	$lt^{-1}$
$v_z$	Verticale stroomsterkte in een slecht doorlatende laag (positief indien naar boven gericht) . . . . .	$lt^{-1}$
$v_0$	Flux door bodem en taluds van een open leiding . . . . .	$lt^{-1}$
$v_{00}$	Flux door het maaiveld . . . . .	$lt^{-1}$
$v_1$	Flux door het freatisch oppervlak . . . . .	$lt^{-1}$
$W$	Totale weerstand . . . . .	t
$w$	Radiale weerstand, ook aan te duiden als $w(D, q_0)$ ter onderscheiding van $w(r, q_0)$ *) . . . . .	$tl^{-1}$
$x$	Horizontale coördinaat . . . . .	l

\*) Zie pag. 55 en 56