NN31085.94-02

3 i g e

g e n e r a t i e r i o o l w a t e r -

z u i v e r i n g s i n r i c h t i n g e n

rwzi
2000

A 94-02-03

FUNDAMENTELE ASPEKTEN VAN SLIBONTWATERING

Deel 3: Filtratie-expressie modellering

RIZA

Rijkswaterstaat
Rijksinstituut voor Integraal Zoetwaterbeheer
en Afvalwaterbehandeling

Postbus 17, 8200 AA Lelystad

stowa

Stichting Toegepast Onderzoek
Waterbeheer

Postbus 8090, 3503 RB Utrecht

LUW 94.02/3

jeneratie rioolwaterzuiveringsinrichtingen RWZI 2000

...g- en secretariaat: postbus 17, 8200 AA Lelystad 03200 - 70411

FUNDAMENTELE ASPEKTEN VAN SLIBONTWATERING

Deel 3: Filtratie-expressie modellering

BIBLIOTHEEK STARINGGEBOUW

14 MAART 1995

CENTRALE LANDBOUWCATALOGUS
0000 0783 2971

auteur(s):

TU-Eindhoven, Laboratorium voor Scheidingstechnologie:

ir. A.J.M. Herwijn
drs. E.J. La Heij
ing. P.M.H. Janssen
dr.ir. W.J. Coumans
prof.dr.ir. P.J.A.M. Kerkhof

RWZI 2000 94-02

Het onderzoek "Toekomstige generatie rioolwaterzuiveringsinrichtingen RWZI 2000" is een samenwerkingsverband van de STOWA en Rijkswaterstaat (RIZA).

VOORWOORD

De problematiek rond de nuttige afzet van zuiveringsslib heeft binnen het RWZI 2000 onderzoek-programma ruim aandacht gekregen. Naast kwaliteitsverbetering van zuiveringsslib kan de omvang van het probleem worden verkleind door het volume van de hoeveelheid slib, dat vrij komt te beperken. Enerzijds door een verminderde produktie van slib bij het zuiveren van rioolwater, anderzijds door het drogestofgehalte van het gevormde zuiveringsslib te verhogen o.a door een verbeterde ontwatering. Aangezien destijds met de toenmalige, veelal op empirisch onderzoek gebaseerde inzichten en kennis geen substantiële verhoging van het drogestofgehalte was te verwachten, is in 1990 een fundamenteel onderzoek gestart naar slib/waterscheiding.

Het onderzoek is uitgevoerd in het Laboratorium voor Scheidingstechnologie van de TU-Eindhoven door een projektgroep, bestaande uit ir. A.J.M. Herwijn, drs. E.J. La Heij en ing. P.M.H. Janssen onder begeleiding van dr.ir. W.J. Coumans en prof.dr.ir. P.J.A.M. Kerkhof. Een belangrijke bijdrage aan het onderzoek is geleverd door tien afstudeerders van de faculteit Scheikundige Technologie.
Bij de uitvoering van het onderzoek werd het projectteam begeleid door een commissie bestaande uit ir. H.A. Meijer (Zuiveringsschap Hollandse Eilanden en Waarden), prof.ir. J.H.J.M. van der Graaf (TU-Delft/Witteveen & Bos), ing. R. Kampf (Hoogheemraadschap Uitwaterende Sluizen), ir. R.E.M. van Oers (Hoogheemraadschap West-Brabant), prof.dr.ir. W.H. Rulkens (LU-Wageningen), ing. G.B.J. Rijs (RIZA) en ir. P.C. Stamperius (STOWA).

Het voorliggende rapport geeft een overzicht van de verkregen onderzoeksresultaten en vormt een onderdeel van het uit acht deelrapportages bestaande eindrapport, t.w.:

- deel 1: Samenvattend verslag
- deel 2: Flocculatiemechanismen
- deel 3: Filtratie-expressie modellering
- deel 4: Filtratie-expressie experimenten
- deel 5: Slib-water binding
- deel 6: Karakterisering van slibben
- deel 7: Ontwikkeling nieuw CST-apparaat
- deel 8: Congresbijdragen

Lelystad, juli 1994

Voor de Stuurgroep RWZI 2000

prof. dr. J. de Jong
(voorzitter)

DANKWOORD

Onze dank gaat uit naar de studenten die in de projectgroep hun afstudeerwerk hebben verricht en een grote bijdrage hebben geleverd aan het onderzoek: Albert van Veldhuizen, Lotte Boon, Paul Dohmen, Frank Pijpers, Juul IJzermans, Diederic van Dijke, Oscar Meijer, Marga Verduin, Annemiek van der Zande en Moshe van Berlo.

Gerben Mooiweer wordt bedankt voor zijn bijdrage aan het ontwikkelen van rekenprogramma's.

Leo Pel van de faculteit Bouwkunde en Klaas Kopinga van de faculteit Technische Natuurkunde bedanken wij voor het deskundige advies en het beschikbaar stellen van de NMR-apparatuur.

Paul Buijs, Wies van Diemen en Prof. Stein van de vakgroep Thermodynamica en Colloïdchemie worden bedankt voor het beschikbaar stellen van de het ESA-meetinstrument.

Jan Denissen van TNO-keramiek wordt bedankt voor het fabriceren van keramiek voor het gemodificeerde CST-apparaat.

De technici, bedankt voor jullie ondersteuning bij het ontwerpen en bouwen van meetopstellingen.

Anniek van Bemmelen en May Rijvers bedanken wij voor het verzorgen van het eindrapport.

Namens de projectgroep.

Prof.dr.ir. P.J.A.M. Kerkhof

INHOUDSOPGAVE

1 INLEIDING 1

2 THEORIE 2

2.1 Algemeen 2
2.2 De compressiedruk 3
2.3 Microbalansen 4
2.3.1 Continuïteitsvergelijkingen` 4
2.3.2 Impulsbalansen 6
2.4 Sedimentatie-effecten 7
2.5 Empirische vergelijkingen 8
2.5.1 De Darcy-Shirato vergelijking 8
2.6 De parabolische differentiaalvergelijking 9
2.7 De verschuivende reandvoorwaarde 10
2.8 Omschrijven van de verschuivende randvoorwaarde 12
2.9 Constitutieve vergelijkingen 12
2.9.1 Elastisch materiaalgedrag 12
2.9.2 Visco-elastisch materiaalgedrag 13
2.10 Combinatie van het standaard vastestofmodel met de parabolische differentiaalvergelijking 19

3 EXPERIMENTEEL 21

4 RESULTATEN EN DISCUSSIE 25

4.1 Cp-cel 25
4.2 Filtratie- en expressiecurve 27
4.3 Vergelijking tussen experiment en model 28
4.3.1 Elastisch materiaalgedrag 28
4.3.2 Visco-elastisch materiaalgedrag 30
4.4 Conclusies 33

5 SYMBOLENLIJST 35

6 LITERATUURLIJST 37

APPENDIX A IMMOBILISATIE VAN DE VERSCHUIVENDE RANDVOORWAARDE 38

APPENDIX B TRANSFORMATIE NAAR VASTESTOFCOÖRDINAAT 40

APPENDIX C INITIALISATIE 42

APPENDIX D PROGRAMMALISTINGS 46

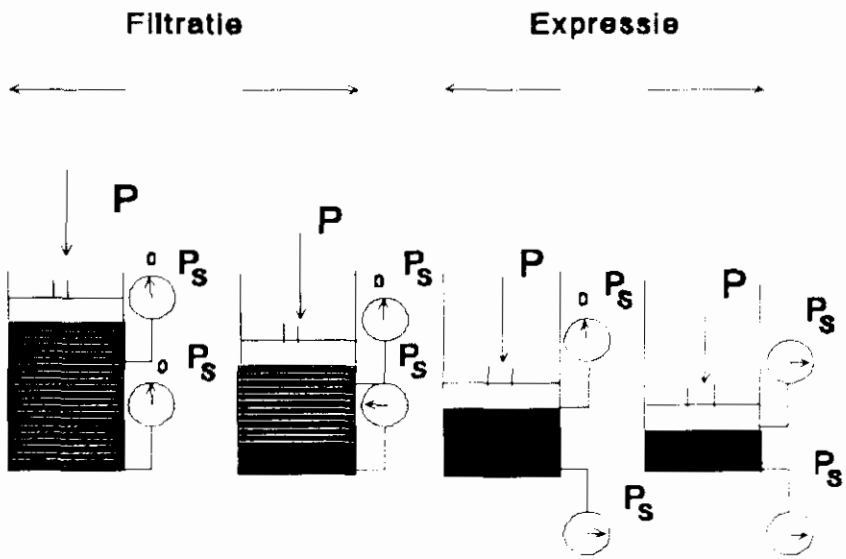
1 INLEIDING

In dit deel, dat dient ter ondersteuning van hoofdstuk 3 in deel I, worden de modellering van het ontwateringsgedrag van slib en de verificatie uitgebreid besproken. In het volgende hoofdstuk wordt de theorie besproken, in hoofdstuk 3 worden de opstellingen die nodig zijn voor modellering en verificatie, besproken en worden enkele typische metingen getoond. In hoofdstuk 4 wordt de verificatie van het model aan experimenten behandeld. Verder zijn een aantal appendices toegevoegd, met onder andere uitdraaien van computerprogramma's.
Dit deel is een samenstelling van de afstudeerverslagen van Marga Verduin en Oscar Meijer.

2 THEORIE

2.1 Algemeen

Om zuiveringsslib te ontwateren wordt vaak gebruik gemaakt van mechanische middelen. Een voorbeeld hiervan is het uitpersen door middel van kamerfilter- of zeefbandpersen. Hierbij wordt, door gebruik te maken van poreuze filtermedia, het water uit het slib geperst. Het uitpersen van slib vindt plaats in twee fasen, de filtratie- en de expressiefase. Een schematische voorstelling van de filtratie en expressie van slib is weergegeven in figuur 1. De drukmeters in deze figuur geven de compressieve druk op de deeltjes (P_s) aan.



Figuur 1. *Schematische weergave van de filtratie en de expressie van slib.*

In de figuur is te zien dat tijdens de filtratiefase de slurry wordt samengeperst waardoor een koek ontstaat. Deze koek wordt gedurende de filtratie steeds dikker ($dL/dt > 0$, waarbij L de koekdikte voorstelt). Aan het begin van het experiment is de vloeistofdruk (P_l) overal in de slurry gelijk aan de druk die er mechanisch opgezet wordt (P), terwijl de compressieve druk op de deeltjes dan overal gelijk is aan nul. Gedurende de filtratiefase blijft aan de bovenzijde van de koek de vloeistofdruk gelijk aan P.

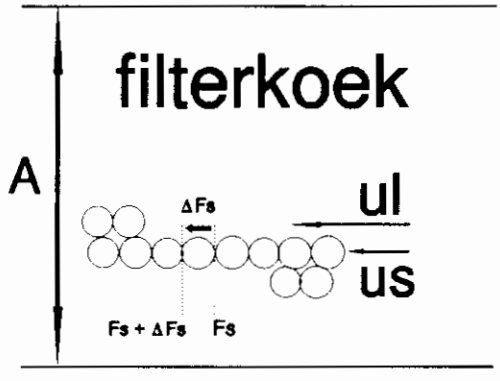
Bij het filtermedium wordt de vloeistofdruk steeds lager, terwijl de compressieve druk op de deeltjes steeds groter wordt. Overal in de koek geldt dat P_l en P_s samen gelijk zijn aan P. Wanneer de uitstroomsnelheid door het filtermedium een constante waarde bereikt, kan bij benadering gesteld worden dat de expressiefase begint. Hierbij wordt de koek uitgeperst (waarbij $dL/dt < 0$). De vloeistofdruk aan de bovenzijde van de koek wordt steeds lager tot deze net als bij het filtermedium gelijk is aan nul. De compressieve druk is dan in de hele koek gelijk aan P.

In de hierna volgende paragrafen zal een model worden afgeleid waarmee de bovengenoemde processen worden beschreven. Allereerst worden een aantal onderwerpen besproken die worden gebruikt bij het opstellen van het filtratie- en expressiegedrag van compressibele materialen.

Deze parabolische differentiaalvergelijking wordt in §2.6 opgesteld tezamen met de daarbij behorende randvoorwaarden. Bij één van deze randvoorwaarden hebben we te maken met een verschuivende randvoorwaarde. In §2.7 leiden we een vergelijking af voor de groeisnelheid van de filterkoek zodat de bewegende randvoorwaarde kan worden gelokaliseerd.

2.2 De compressiedruk.

Stel dat bij filtratie met constante filtratiesnelheid de hydraulische drukgradiënt overal in de koek gelijk is. We spreken in dat geval van een niet-samendrukbare of incompressibele filterkoek. Indien de filterkoek wel compressibel is, wordt de hydraulische drukgradiënt een functie van de plaats in de koek. Dit betekent dat de weerstand in de koek niet overal gelijk is.



Figuur 2. *Meesleepkrachten t.g.v. het snelheidsverschil tussen vloeistof en deeltjes.*

A = oppervlak (m^2)
F_s = meesleepkracht (N)
u_l = snelheid van de vloeistoffase in de koek (m/s)
u_s = snelheid van de vaste stof in de koek (m/s)

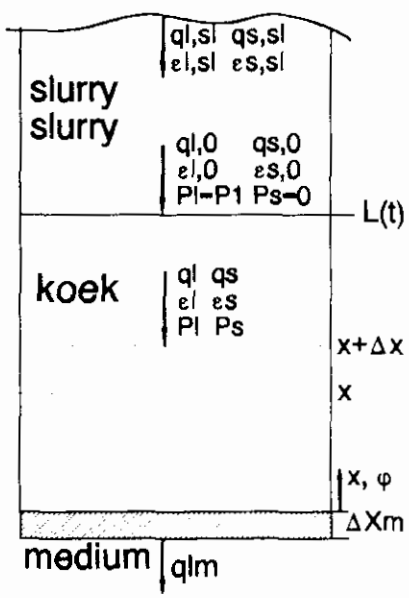
Doordat de koek wordt samengedrukt hebben de deeltjes in de koek een snelheid u_s. De vloeistof stroomt met een hogere snelheid u_l door de koek. Ten gevolge van het snelheidsverschil oefent de vloeistof op de deeltjes een 'meesleep' kracht F_s uit. Indien wordt verondersteld dat de deeltjes in de koek puntcontact hebben, zal de meesleepkracht F_s worden doorgegeven op de volgende deeltjes. In figuur 2 is de situatie weergegeven. De

cumulatieve meesleepkracht F_s gedeeld door het doorsnee oppervlak A wordt de compressiedruk P_s genoemd.

2.3 Microbalansen.

In 2.3.1 worden de continuïteitsvergelijkingen afgeleid voor de vloeistof- en vaste fase. De impulsbalans, die onder bepaalde voorwaarden overgaat in een krachtenbalans, is opgesteld in 2.3.2.

2.3.1 Continuïteitsvergelijkingen.



Figuur 3. *Opstellen continuïteitsvergelijkingen.*

L = koekdikte (m)
P_l = vloeistofdruk (Pa)
P_s = compressiedruk (Pa)
q_l = superficiële vloeistofsnelheid in de koek (m/s)
$q_{l,0}$ = superficiële vloeistofsnelheid in de koek bij het koek/slurry-oppervlak (m/s)
q_{lm} = superficiële vloeistofsnelheid in het filtermedium (m/s)
$q_{l,sl}$ = superficiële vloeistofsnelheid in de slurry (m/s)
q_s = superficiële vastestofsnelheid in de koek (m/s)
$q_{s,0}$ = superficiële vastestofsnelheid in de koek bij het koek/slurry-oppervlak (m/s)
$q_{s,sl}$ = superficiële vastestofsnelheid in de slurry (m/s)
t = tijd (s)
x = reële hoogte in de filterkoek tussen 0 en L(t) (m)

Δx_m = dikte van het filtermedium (m)
ε_l = porositeit van de vloeistoffase in de koek (-)
$\varepsilon_{l,0}$ = porositeit van de vloeistoffase in de koek bij $P_s = 0$ (-)
$\varepsilon_{l,sl}$ = porositeit van de vloeistoffase in de slurry (-)
ε_s = porositeit van de vaste fase in de koek (-)
$\varepsilon_{s,0}$ = porositeit van de vaste fase in de koek bij $P_s = 0$ (-)
$\varepsilon_{s,sl}$ = porositeit van de vaste fase in de slurry (-)
φ = dimensieloze hoogte = x/L(t) (-)

In figuur 3 is de koek met de slurryaanvoer schematisch weergegeven. De continuïteitsvergelijkingen voor de vloeistof- en vaste fase worden opgesteld over een plakje Δx. Een massabalans over de vloeistoffase levert:

$$\Delta x \frac{\partial(\varepsilon_l \rho_l A)}{\partial t} = (A \rho_l q_l)_{x+\Delta x,t} - (A \rho_l q_l)_{x,t} \tag{1}$$

Indien we delen door Δx, ρ_l en A en vervolgens Δx naar nul laten naderen gaat vergelijking (1) over in de uiteindelijke vorm van de continuïteitsvergelijking voor de vloeistoffase.

$$\left[\frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t}\right]_x = \left[\frac{\partial q_l}{\partial x}\right]_t \tag{2}$$

Op dezelfde manier is de continuïteitsvergelijking voor de vaste fase (3) af te leiden.

$$\left[\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t}\right]_x = \left[\frac{\partial q_s}{\partial x}\right]_t \tag{3}$$

Het verband tussen de porositeit van de vloeistof- en vaste fase is in formule (4) gegeven.

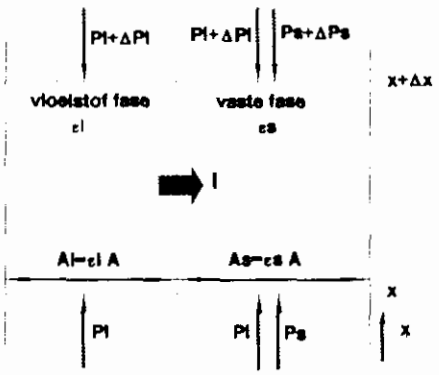
$$\varepsilon_l + \varepsilon_s = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

De continuïteitsvergelijkingen (2) en (3) kunnen in vergelijking (4) worden ingevuld. Na integratie met de randvoorwaarde (5) krijg je een verband tussen q_l en q_s (vergelijking (6)). Dit verband is geldig is op een willekeurige plaats in de koek of slurry.

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad q_s = 0 \quad \Rightarrow \quad q_l = q_{lm} \tag{5}$$

$$q_l + q_s = q_{lm} \tag{6}$$

2.3.2 Impulsbalansen.



Figuur 4. *Opstellen impulsbalans.*

I = impuls overdracht (N)
A_l = doorsnee oppervlak van de vloeistoffase (m^2)
A_s = doorsnee oppervlak van de vaste fase (m^2)

Bij lage vloeistof- en vastestofsnelheden is de interne impuls (en de impulsophoping) te verwaarlozen ten opzichte van het extern aangelegde drukverschil en de zwaartekracht-effecten. De impulsbalans gaat over in een krachtenbalans. In figuur 4 is de situatie weergegeven. De krachtenbalans voor de vloeistof- en vaste fase zijn met elkaar gekoppeld via de impulsoverdracht I. Over het plakje Δx kan een krachtenbalans voor de vloeistoffase worden opgesteld.

$$\left(\varepsilon_l A P_l\right)_x = \left(\varepsilon_l A P_l\right)_{x+\Delta x} + \varepsilon_l A \rho_l g \Delta x + I \tag{7}$$

Indien we Δx naar nul laten naderen en delen door A krijgen we vergelijking (8).

$$P_l \partial \varepsilon_l + \varepsilon_l \partial P_l + \varepsilon_l \rho_l g \partial x = -\frac{I}{A} \tag{8}$$

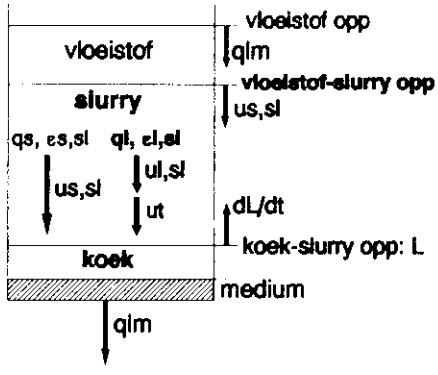
Op dezelfde manier is een krachtenbalans over de vaste fase op te stellen.

$$\partial P_s + P_l \partial \varepsilon_s + \varepsilon_s \partial P_l + \varepsilon_s \rho_s g \partial x = \frac{I}{A} \tag{9}$$

Uit het gelijkstellen van de impulstermen volgt de algemene vorm van de krachtenbalans.

$$\frac{\partial P_s}{\partial x} + \frac{\partial P_l}{\partial x} + \left(\varepsilon_l \rho_l + \varepsilon_s \rho_s\right) g = 0 \tag{10}$$

2.4 Sedimentatie-effecten.



Figuur 5. *Sedimentatie-effecten bij filtratie.*

$u_{l,sl}$ = snelheid van de vloeistoffase in de slurry (m/s)
$u_{s,sl}$ = snelheid van de vaste stof in de slurry (m/s)
u_t = slipsnelheid tussen de vloeistof- en vaste fase (m/s)

In figuur 5 is de situatie weergegeven die optreedt als er tijdens filtratie sprake is van sedimentatie. Bij filtratie waarbij sedimentatie optreedt heeft de vaste fase in de slurry een hogere snelheid dan de vloeistoffase. Voor de modellering van sedimentatie-effecten wordt aangenomen dat alle deeltjes met dezelfde snelheid bezinken. De bezinksnelheid bij batchsedimentatie noemen we $u_{s,sed}$. Indien we in het geval van batchsedimentatie ($q_{lm}=0$) een massabalans over de slurry opstellen leidt dat tot een uitdrukking voor $u_{l,sed}$.

$$u_{l,sed} = -u_{s,sed}\,\frac{\varepsilon_{s,sl}}{\varepsilon_{l,sl}} \tag{11}$$

$u_{l,sed}$ = snelheid van de vloeistoffase in de slurry bij batchsedimentatie (m/s)
$u_{s,sed}$ = snelheid van de vaste fase in de slurry bij batchsedimentatie (m/s)

De slipsnelheid u_t tussen de vloeistof- en vaste fase is gelijk aan:

$$u_t = u_{s,sed} - u_{l,sed} = \frac{u_{s,sed}}{\varepsilon_{l,sl}} \tag{12}$$

De slipsnelheid u_t is geldig bij zowel batchsedimentatie als bij filtratie waarbij sedimentatie optreedt. In het laatste geval wordt de vaste stof snelheid in de slurry $u_{s,sl}$.

$$u_{s,sl} = u_{l,sl} + u_t = u_{l,sl} + \frac{u_{s,sed}}{\varepsilon_{l,sl}} \tag{13}$$

Indien $u_{s,sl}$ als functie van het drogestofgehalte in de slurry gewenst is, dan kan met

batchsedimentatie het verband tussen $u_{s,sed}$ en het drogestofgehalte gemeten worden en in vergelijking (13) worden ingevuld.

2.5 Empirische vergelijkingen.

De Darcy-Shirato-vergelijking geeft een verband tussen de filtratiesnelheid en de hydraulische drukgradiënt in de koek. De Darcy-Shirato-vergelijking wordt behandeld in 2.5.1.

2.5.1 De Darcy-Shirato-vergelijking.

De algemene vorm van de Darcy-Shirato-vergelijking, rekening houdend met de zwaartekrachteffecten [1], is gegeven in vergelijking (14).

$$q_{ls} = q_l - q_s \frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_s} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{14}$$

q_{ls} = superficiële verschilsnelheid tussen vloeistof en vaste fase in de koek (m/s)
ϕ = snelheidspotentiaal (m^2/s)

De snelheidspotentiaal ϕ wordt bepaald door:

$$\phi = \frac{K}{\eta}(P_l + \rho_l g x) \tag{15}$$

K = permeabiliteit (m^2)
η = dynamische viscositeit van de vloeistoffase (Pa s)

Bij filtratie is de zwaartekracht van de vloeistoffase meestal te verwaarlozen ten opzichte van het aangelegde drukverschil. Voor de volledigheid zullen we de zwaartekrachteffecten hier toch meenemen. Combinatie van de vergelijkingen (6), (14) en (15) levert een vergelijking voor q_l, geldig op een willekeurige plaats in de koek.

$$q_l = \varepsilon_l q_{lm} + \varepsilon_s \frac{K}{\eta}\left[\frac{\partial P_l}{\partial x} + \rho_l g\right] \tag{16}$$

Met behulp van de krachtenbalans (10) kan q_l ook in termen van P_s worden uitgedrukt.

$$q_l = \varepsilon_l q_{lm} - \varepsilon_s \frac{K}{\eta}\left[\frac{\partial P_s}{\partial x} + (\rho_s - \rho_l)\varepsilon_s g\right] \tag{17}$$

2.6 De parabolische differentiaalvergelijking.

De parabolische differentiaalvergelijking wordt verkregen door vergelijking (17) in te vullen in de continuïteitsvergelijking van de vloeistoffase.

$$\left[\frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t}\right]_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[\varepsilon_l q_{lm} - \varepsilon_s \frac{K}{\eta}\left[\frac{\partial P_s}{\partial x} + (\rho_s - \rho_l)\varepsilon_s g\right]\right]_t \tag{18}$$

De bijbehorende randvoorwaarden zijn:

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad q_l = q_{lm} \;,\; P_s = P_s|_{x=0} \tag{19}$$

$$x = L \quad \rightarrow \quad \varepsilon_s = \varepsilon_{s,0} \;,\; P_s = 0 \tag{20}$$

Tijdens de expressiefase geldt bij het medium dat de compressieve druk op de deeltjes niet verandert. Dit betekent dat de porositeit gelijk blijft aan de porositeit die daar tijdens de filtratiefase is bereikt. Aan de bovenkant van de filterkoek bevindt zich een zuiger, waardoor hier geldt dat de afgeleide van de porositeit naar de plaatscoördinaat gelijk is aan nul.

De randvoorwaarden bij expressie zijn dus:

$$t>0 \qquad x=0 \qquad \varepsilon=\varepsilon_{f,m} \tag{21}$$

$$t>0 \qquad x=H(t) \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}=0 \tag{22}$$

Waarbij geldt:

$\varepsilon_{f,m}$ = porositeit bij het medium aan het einde van de filtratiefase [-]

Voor de oplossing van de differentiaalvergelijking voor de filtratiefase maken we gebruik van dimensieloze coördinaten (zie appendix A). Na de invoering van dimensieloze coördinaten en omschrijven naar de voidratio wordt de parabolische differentiaalvergelijking:

$$\begin{aligned}\frac{L^2}{(1+e)^2}\left[\frac{\partial e}{\partial \tau}\right]_\varphi &= \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{-K}{(1+e)\eta}\left[\frac{\partial P_s}{\partial e}\right]_\tau\left[\frac{\partial e}{\partial \varphi}\right]_\tau\right] \\ &+ \frac{L}{(1+e)^2}\left[q_{l_\infty} + \varphi\frac{dL}{dt} + \left[2-\frac{\delta}{\beta}\right]\frac{K}{(1+e)\eta}(\rho_s-\rho_l)g\right]\left[\frac{\partial e}{\partial \varphi}\right]_\tau\end{aligned} \tag{23}$$

Daar de totale koekhoogte niet en de hoogte van de vaste stof wel constant is tijdens de expressie schrijven we vergelijking (18) in vastestofcoördinaten. De afleiding naar vastestof-coördinaten is uiteengezet in appendix B. Voor de vastestofcoördinaat y geldt:

$$y = \int_0^x (1-\varepsilon)dx \tag{24}$$

Met gebruik van de vastestofcoördinaat en de porositeit omgeschreven in voidratio wordt vergelijking (17) nu:

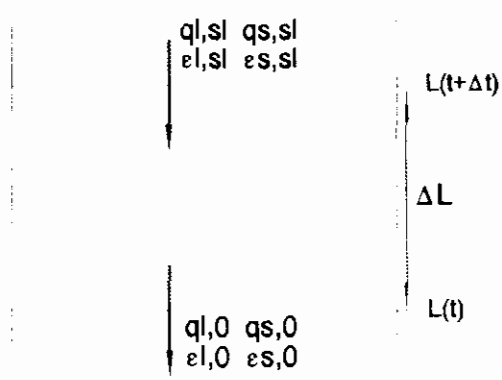
$$\left[\frac{\partial e}{\partial t}\right]_y = \frac{\partial}{\partial y}\left[q_{l,m} - \frac{K}{\eta}\frac{1}{1+e}\left[\frac{\partial P_s}{\partial e}\right]_t\left[\frac{\partial e}{\partial y}\right]_t\right] \tag{25}$$

Waarbij de term $(\partial q_{l,m}/\partial y)_t$ gelijk is aan 0, omdat $q_{l,m}$ gelijk is aan de totale uitstroomsnelheid u_t, die constant is over de gehele koek.

Nu kunnen vergelijking (23) en (25) worden opgelost mits het verband tussen de compressieve druk (P_s) en de voidratio (e) c.q. de porositeit (ε) en de tijd bekend is. Die verbanden worden beschreven door de zogenaamde constitutieve vergelijkingen.

2.7 De verschuivende randvoorwaarde.

Op plaats x = L is randvoorwaarde (20) geldig. Door de groei van de koek verschuift deze de randvoorwaarde voortdurend in de x-richting. Om de randvoorwaarde te kunnen lokaliseren moet de groeisnelheid dL/dt van de koek bekend zijn.



Figuur 6. *Bepalen verschuivende randvoorwaarde.*

In figuur 6 is het koek/slurry-oppervlak weergegeven op de tijdstippen t en t+Δt. In deze tijdstap groeit de koek met ΔL. Gedurende het tijdstapje Δt wordt een massabalans over het plakje ΔL opgesteld. De ingaande min de uitgaande vloeistofstroom is gelijk aan de verandering van de hoeveelheid vloeistof in het plakje.

$$q_{l,sl}\rho_l\Delta t - q_{l,0}\rho_l\Delta t = \varepsilon_{l,0}\rho_l\Delta L - \varepsilon_{l,sl}\rho_l\Delta L \tag{26}$$

Indien we Δx en ΔL naar nul laten naderen en vergelijking (26) omschrijven krijgen we een term voor dL/dt.

$$\frac{dL}{dt} = \frac{q_{l,sl} - q_{l,0}}{\varepsilon_{l,0} - \varepsilon_{l,sl}} \tag{27}$$

Invullen van $u_{s,sl}$ (13) in een massabalans over de slurry (28), levert een uitdrukking voor $q_{l,sl}$ (29).

$$q_{l,sl} + q_{s,sl} = u_{l,sl}\varepsilon_{l,sl} + u_{s,sl}\varepsilon_{s,sl} = q_{lm} \tag{28}$$

$$q_{l,sl} = \varepsilon_{l,sl}q_{lm} - \varepsilon_{s,sl}u_{s,sed} \tag{29}$$

De term $q_{l,0}$ is af te leiden uit de integratie van de continuïteitsvergelijking voor de vloeistoffase tussen de grenzen (30) en (31).

$$x = 0 \rightarrow q_l = q_{lm} \tag{30}$$

$$x = L \rightarrow q_l = q_{l,0} \tag{31}$$

$$q_{l,0} = q_{lm} + \int_0^L \left[\frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t}\right]_x \partial x \tag{32}$$

De verschuivende randvoorwaarde volgt uit het invullen van de gevonden termen voor $q_{l,sl}$ (29) en $q_{l,0}$ (32) in vergelijking (27).

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\varepsilon_{s,sl}(q_{lm} + u_{s,sed}) + \int_0^L \left[\frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t}\right]_x \partial x}{\varepsilon_{l,sl} - \varepsilon_{l,0}} \tag{33}$$

In plaats van $q_{l,0}$ af te leiden uit de integratie van de continuïteitsvergelijking kan $q_{l,0}$ ook berekend worden uit de Darcy-Shirato-vergelijking (vergelijking 17).

$$q_{l,0} = \varepsilon_{l,0}q_{lm} - \varepsilon_{s,0}\left[\frac{K}{\eta}\left[\frac{\partial P_s}{\partial x} + (\rho_s - \rho_l)\varepsilon_s g\right]\right]_{x=L} \tag{34}$$

Het invullen van vergelijking (29) en (34) in vergelijking (27) leidt tot een andere vorm van de verschuivende randvoorwaarde.

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\varepsilon_{s,0}}{(\varepsilon_{l,0} - \varepsilon_{l,sl})} \left\{ \frac{K}{\eta} \left\{ \frac{\partial P_s}{\partial x} + (\rho_s - \rho_l)\varepsilon_s g \right\} \right\}_{x=L} - \frac{\varepsilon_{s,sl}}{(\varepsilon_{l,0} - \varepsilon_{l,sl})} u_{s,sed} - q_{bm} \qquad (35)$$

2.8 Omschrijven van de verschuivende randvoorwaarde.

De verschuivende randvoorwaarde in reële coördinaten is afgeleid in 2.7, vergelijking (33). Het is voldoende om deze vergelijking alleen naar de dimensieloze coördinaat om te schrijven.

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\varepsilon_{s,sl}(q_{bm} + u_{s,sed}) - L\int_0^1 \left[\frac{\partial \varepsilon_l}{\partial \tau}\right]_\varphi \partial\varphi}{\varepsilon_{l,sl} - \varepsilon_{l,0} + \int_0^1 \varphi \, \partial\varepsilon_l} \qquad (36)$$

2.9 Constitutieve vergelijkingen

2.9.1. Elastisch materiaalgedrag

Vergelijking (25) kan bijvoorbeeld worden opgelost door de rechtse term als functie van de voidratio te schrijven. Daarvoor moet de relatie tussen de compressieve druk en de voidratio ($\partial P_s/\partial e$) bekend zijn. Wanneer het materiaalgedrag van de vaste stof als elastisch beschouwd kan worden, mogen onderstaande constitutieve vergelijkingen gebruikt worden. Constitutieve vergelijkingen beschrijven de relaties tussen de koekstructuur (porositeit en permeabiliteit) en de compressieve druk die op de slibkoekdeeltjes wordt uitgeoefend. Onderstaande vergelijkingen zijn afkomstig uit het model van Tiller[2]. In deze vergelijkingen is P_a een constante die wordt gebruikt om de compressieve druk dimensieloos te maken. De constanten α, β, δ en n zijn de zogenaamde compressie-coëfficiënten, waarbij voor δ geldt dat deze gelijk is aan de som van β en n.

$$\varepsilon_{s\infty} = \varepsilon_{s,0} \left(1 + \frac{P_s}{P_a}\right)^{-\alpha} \qquad (37)$$

$$\varepsilon_{s\infty} = \varepsilon_{s0} \left(1 + \frac{P_s}{P_a}\right)^{\beta} \qquad (38)$$

$$K_\infty = K_0 \left(1 + \frac{P_s}{P_a}\right)^{-\delta} \qquad (39)$$

$$\alpha_\infty = \alpha_0 \left[1 + \frac{P_s}{P_a} \right]^n \tag{40}$$

Waarbij geldt:

α	=	specifieke filtratieweerstand	[m^{-2}]
ε_{s0}	=	porositeit van de vaste stof	[-]

ε_0, ε_{s0}, K_0 en α_0 zijn dus respectievelijk de porositeit van de vloeistof, de porositeit van de vaste stof, de permeabiliteit en de specifieke filtratieweerstand in onbelaste toestand. De parameters zijn materiaalspecifiek. De index ∞ geeft aan dat deze parameters zijn gemeten in een evenwichtssituatie.
Met deze relaties kan de afgeleide van de compressieve druk naar de voidratio uit de parabolische differentiaalvergelijking worden bepaald.

Voor de compressieve druk kan dan namelijk geschreven worden:

$$P_s = \left[\left(\frac{1+e_0}{1+e} \right)^{\frac{1}{\beta}} - 1 \right] P_a \tag{41}$$

Voor de afgeleide van de compressieve druk naar de voidratio geldt dus:

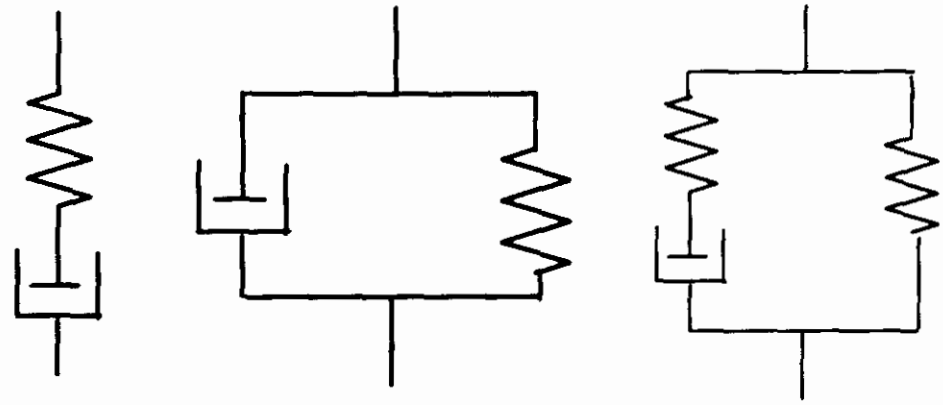
$$\frac{\partial P_s}{\partial e} = -\frac{P_a}{\beta} \frac{1}{(1+e)} \left(\frac{1+e_0}{1+e} \right)^{\frac{1}{\beta}} \tag{42}$$

Door combinatie van vergelijking (37) en (38) hebben we een verband tussen de permeabiliteit en de porositeit.

2.9.2. Visco-elastisch materiaalgedrag

In deze paragraaf is het materiaalgedrag van de vaste stof als visco-elastisch beschouwd. In de visco-elastische materiaalmodellen wordt zuiver elastisch gedrag voorgesteld door een veer en zuiver visceus gedrag door een demper. Door een combinatie van de veer en de demper kan visco-elastisch gedrag voorgesteld worden. Er zijn verschillende visco-elastische materiaalmodellen bekeken: Maxwell-model, Kelvin-Voigt-model en het vastestofmodel. De schematische weergave van deze modellen is te zien in figuur 7.

Om vergelijking (25) op te lossen kan, net als bij het elastische model, ook hier de partiële afgeleide van de compressieve spanning naar de voidratio worden bepaald. Een andere oplosmethode is om de linkse term van vergelijking (25) $(\partial e/\partial t)_y$ te schrijven als functie van de compressieve druk. Hierdoor ontstaat een parabolische differentiaalvergelijking in termen van de compressieve druk. Beide oplosmethoden zijn bekeken.



Maxwell **Kelvin-Voigt** **Standaard vaste stof**

Figuur 7. *Schematische weergave van de verschillende visco-elastische materiaalmodellen.*

Met de modellen is het mogelijk om bij constante x de partiële afgeleide van de rek (en hiermee die van de voidratio) naar de tijd te bepalen. Ook is het mogelijk om een relatie af te leiden tussen een opgelegde trekspanning (σ) en de daardoor ontstane rek (ϵ).

Om de in de vorige paragraaf afgeleide parabolische differentiaalvergelijking op te lossen is het noodzakelijk dat we de relatie tussen de opgelegde compressieve druk (P_s) en de voidratio (e) kennen. De afgeleide relatie tussen de trekspanning en de rek moet daartoe worden omgeschreven naar termen van voidratio en compressieve druk. In de onderstaande vergelijkingen geeft de index 1 aan dat het hierbij om de vloeistof gaat en de index 0 geeft aan dat het om de onbelaste situatie gaat. De rek van het materiaal kan als volgt worden gedefinieerd:

$$\epsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{V - V_0}{V_0} \tag{43}$$

Waarbij:

V	= volume	[m^3]
l	= koekdikte	[m]

Voor de porositeit (ε) en de voidratio (e) kan geschreven worden:

$$\varepsilon = \frac{V_l}{V} \qquad e = \frac{V_l}{V - V_l} \qquad \varepsilon_0 = \frac{V_{l0}}{V_0} \qquad e_0 = \frac{V_{l0}}{V_0 - V_{l0}} \tag{44}$$

Door de formules voor de voidratio en de porositeit in te vullen in vergelijking (43) kan de

rek worden geschreven als functie van de voidratio:

$$\epsilon = \frac{e(V_0 - V_{l0}) - V_{l0}}{V_0} = e - \varepsilon_0(1+e) = \frac{e - e_0}{1 + e_0} \tag{45}$$

Ook geldt:

$$\frac{d\epsilon}{de} = \frac{1}{1 + e_0} \tag{46}$$

Bij constante x geldt dan voor de afgeleide van de rek naar de tijd:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{1 + e_0}\frac{de}{dt} \tag{47}$$

De relatie tussen de trekspanning en de compressieve druk:

$$\sigma = -P_s \quad en \quad d\sigma = -dP_s \tag{48}$$

Voordat de verschillende visco-elastische modellen behandeld worden, worden eerst een aantal algemene formules besproken.
Voor de spanning over een veer geldt:

$$\sigma_{veer} = E\epsilon \tag{49}$$

Voor de spanning over een demper geldt:

$$\sigma_{demper} = \eta\frac{d\epsilon}{dt} = \tau \cdot E\frac{d\epsilon}{dt} \tag{50}$$

Waarbij:

E	= elasticiteitsmodulus	[Pa]
η	= viscositeit	[Pa s]
τ	= relaxatietijd	[s]

Het Maxwell-model

Het Maxwell-model (figuur 7) bestaat uit een in serie geschakelde veer en demper. Voor een in serie geschakeld systeem geldt dat de spanning in de veer gelijk is aan die in de demper, dit is tevens de totale spanning:

$$\sigma = \sigma_{veer} = \sigma_{demper} = E\epsilon_{veer} = \eta\left[\frac{d\epsilon}{dt}\right]_{demper} \tag{51}$$

De rek in het systeem wordt gevormd door de rek in de veer en in de demper:

$$\epsilon = \epsilon_{veer} + \epsilon_{demper} \tag{52}$$

Voor de afgeleide van de rek naar de tijd geldt dan:

$$\left[\frac{d\epsilon}{dt}\right]_{totaal} = \left[\frac{d\epsilon}{dt}\right]_{veer} + \left[\frac{d\epsilon}{dt}\right]_{demper} \tag{53}$$

Invullen van vergelijking (49) en (50) levert:

$$\left[\frac{d\epsilon}{dt}\right]_{totaal} = \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \tag{54}$$

Met behulp van vergelijking (45) en (47) kan worden geschreven:

$$\left[\frac{\partial e}{\partial t}\right]_{y} = -(1+e_0)\left[\frac{1}{E}\frac{dP_s}{dt} + \frac{P_s}{\eta}\right] \tag{55}$$

Het Kelvin-Voigt-model

Het Kelvin-Voigt-model (figuur 7) bestaat uit een veer parallel geschakeld aan een demper. Bij een parallel geschakeld systeem geldt dat de rek in de veer en in de demper gelijk is.

$$\epsilon = \epsilon_{veer} = \epsilon_{demper} \tag{56}$$

De spanning over het gehele systeem is de spanning in de veer plus die in de demper.

$$\sigma = \sigma_{veer} + \sigma_{demper} \tag{57}$$

Door invullen van vergelijking (49) en (50) wordt dit:

$$\sigma = E\epsilon + \eta\frac{d\epsilon}{dt} \tag{58}$$

Omschrijven met τ levert:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} - \frac{E\epsilon}{\eta} = \frac{\sigma}{\eta} - \frac{\epsilon}{\tau} \tag{59}$$

Met behulp van vergelijking (45) en (47) kan hiervoor worden geschreven:

$$\left[\frac{\partial e}{\partial t}\right]_{y} = -(1+e_0)\left[\frac{P_s}{\eta} + \frac{e-e_0}{(1+e_0)\tau}\right] \tag{60}$$

Het standaard vastestofmodel

Het standaard vastestofmodel (figuur 7) bestaat uit een veer (V_2) met parallel daaraan een in serie geschakelde demper en veer (V_1). Voor V_1 en V_2 worden de elasiticiteitmoduli weergegeven door respectievelijk E_1 en E_2. In onderstaande formules geven steeds de indexen 1 en

2 aan dat het over één van beide veren gaat, terwijl geen index aangeeft dat het om de totale spanning en/of rek gaat. We gaan ervan uit dat de parameters E_1, E_2 en η afhankelijk zijn van de voidratio, want wanneer de koek droger wordt zal het materiaal zich elastischer gedragen. Bij onderstaande vergelijkingen is er voor het gemak van uitgegaan dat alleen de elasticiteitsmodulus E_2 afhankelijk is van de voidratio. Voor E_1 en η zouden ook dergelijke relaties opgesteld kunnen worden. Voor E_2 is de volgende relatie gebruikt (hierbij geeft $E_{2,0}$ de waarde aan voor E_2 op tijdstip t=0):

$$E_2 = E_{2,0} \left[\frac{e}{e_0} \right]^{-\lambda_2} \tag{61}$$

Hieruit volgt dat:

$$\frac{\partial E_2}{\partial e} = -\frac{\lambda_2}{e} E_2 \tag{62}$$

Met vergelijking (46) geldt dan:

$$\frac{\partial E_2}{\partial t} = (1+e_0) \frac{\partial E_2}{\partial e} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \tag{63}$$

Voor de totale spanning in het systeem geldt:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \tag{64}$$

Voor de rek in het hele systeem geldt:

$$\epsilon = \epsilon_2 = \epsilon_1 + \epsilon_d \tag{65}$$

Voor de rek in V_1 geldt:

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma - E_2 \epsilon}{E_1} \tag{66}$$

Voor de afgeleide van de rek naar de tijd geldt:

$$\left[\frac{d\epsilon}{dt} \right]_1 = \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} - \frac{E_2}{E_1} \frac{d\epsilon}{dt} - \frac{\epsilon}{E_1} \frac{\partial E_2}{\partial t} \tag{67}$$

Voor de demper geldt:

$$\left[\frac{d\epsilon}{dt} \right]_{demper} = \frac{\sigma - E_2 \epsilon}{\eta} \tag{68}$$

Voor het totale systeem geldt:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \left[\frac{d\epsilon}{dt}\right]_1 + \left[\frac{d\epsilon}{dt}\right]_{demper} \tag{69}$$

De relaxatietijd τ wordt gedefinieerd als:

$$\tau = \frac{\eta}{E_1} \tag{70}$$

Invullen van (67) en (68) in (69) levert:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\tau} - \frac{E_2\epsilon}{\tau}}{E_1 + E_2 + \epsilon\ (1+e_0)\frac{dE_2}{de}} \tag{71}$$

Met behulp van vergelijking (45) en (47) kan worden afgeleid:

$$\left[\frac{\partial e}{\partial t}\right]_\epsilon = -(1+e_0)\left[\frac{\frac{dP_s}{dt} + \frac{P_s}{\tau} + \frac{E_2(e-e_0)}{\tau(1+e_0)}}{E_1 + E_2 + (e-e_0)\frac{dE_2}{de}}\right] \tag{72}$$

Indien ook E_1 en η onafhankelijk zijn van de rek wordt vergelijking (71) gelijk aan:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = -\frac{E_2\,\epsilon}{\Psi} - \frac{\eta\frac{\partial p_s}{\partial t}}{\left(\Psi\left(E_1 + \epsilon\frac{\partial E_1}{\partial \epsilon}\right)\right)} - \frac{p_s}{\Psi}$$

$$\Psi = \left(\eta + \frac{E_2}{\left(\frac{1}{\tau} + \frac{\epsilon}{\eta}\frac{\partial E_1}{\partial \epsilon}\right)} + \frac{\epsilon\frac{\partial E_2}{\partial \epsilon}}{\left(\frac{1}{\tau} + \frac{\epsilon}{\eta_s}\frac{\partial E_1}{\partial \epsilon}\right)}\right) \tag{73}$$

Voor E_1 en η worden de volgende machtsfuncties aangenomen:

$$E_1 = E_0 \left[\frac{e_o - e}{e_\infty} \right]^x \tag{73a}$$

$$\eta = \eta_0 \left[\frac{e_0}{e.e_\infty} \right]^r \tag{73b}$$

2.10 Combinatie van het standaard vastestofmodel met de parabolische differentiaalvergelijking

De parabolische differentiaalvergelijking en de differentiaalvergelijking van het standaard vastestofmodel moeten tegelijkertijd worden opgelost. Er is voor een oplosmethode gekozen waarbij de differentiaalvergelijking van het standaard vastestofmodel in de parabolische differentiaalvergelijking wordt gesubstitueerd. Vervolgens wordt deze gecombineerde vergelijking met de NAG-routine D03PGF opgelost.

Verwaarlozen we de sedimentatie-effecten dan gaat de parabolische differentiaalvergelijking in dimensieloze coördinaten over in vergelijking (74).

$$\frac{L^2}{(1+e)^2}\left[\frac{\partial e}{\partial t}\right]_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{-K}{(1+e)\eta}\left[\frac{\partial P_s}{\partial \varphi}\right]_t\right] + \frac{L}{(1+e)^2}\left[q_{lm} + \varphi\frac{dL}{dt}\right]\left[\frac{\partial e}{\partial \varphi}\right]_t \tag{74}$$

Beide differentiaalvergelijkingen worden gecombineerd door de term $(\partial e/\partial t)_\varphi$ uit vergelijking (72) of (73) expliciet te schrijven en in vergelijking (74) in te vullen. Combinatie van beide vergelijkingen leidt tot de differentiaalvergelijking die met behulp van de NAG-routine D03PGF wordt opgelost.

$$\begin{aligned}\frac{L^2}{\left\{(E_1+E_2)(1+e_0)-\epsilon(1+e)^2\frac{\partial E_2}{\partial e}\right\}}\left[\frac{\partial P_s}{\partial t}\right]_\varphi &= \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{-K}{(1+e)\eta}\left[\frac{\partial P_s}{\partial \varphi}\right]_t\right] \\ + \frac{L}{(1+e)^2}\left[q_{lm}+\varphi\frac{dL}{dt}\right]\left[\frac{\partial e}{\partial \varphi}\right]_t &- \frac{L^2(P_s+E_2\epsilon)}{\left\{(E_1+E_2)\tau_r(1+e_0)-\epsilon\tau_r(1+e)^2\frac{\partial E_2}{\partial e}\right\}}\end{aligned} \tag{75}$$

In deze vergelijking zijn ϵ, E_2, $\partial E_2/\partial e$ en K functies van de voidratio:

$$\epsilon = \frac{e_0 - e}{1 + e} \tag{76}$$

$$E_2 = \left[\frac{e_0}{e} \right]^{\alpha} E_{2,0} \tag{77}$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial e} = -\frac{\alpha}{e} \left[\frac{e_0}{e} \right]^{\alpha} E_{2,0} \tag{78}$$

$$K = K_0 \left[\frac{1 + e_0}{1 + e} \right]^{-\frac{\delta}{\beta}} \tag{79}$$

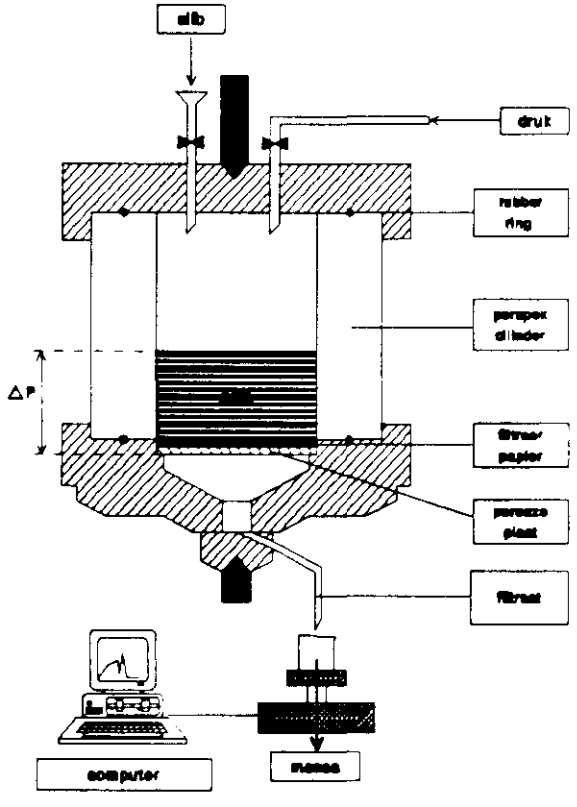
Bij iedere aanroep van de NAG-routine D03PGF wordt een compressiedrukprofiel over de koek uitgerekend. Uit dit profiel wordt, met behulp van de differentiaalvergelijking van het standaard vastestofmodel, de voidratio als functie van de plaats in de koek berekend. De voidratio rekenen we iteratief uit. Hierbij worden E_2 en $\partial E_2/\partial e$ in eerste instantie met de vorige waarden van de voidratio geschat. Na berekening van de nieuwe voidratio worden de waarden van E_2 en $\partial E_2/\partial e$ opnieuw bepaald en kan de voidratio opnieuw berekend worden. Deze procedure wordt herhaald totdat het verschil tussen vorige en nieuw berekende voidratio kleiner is dan 0,01 %.

De differentiaal in vastestofcoördinaten is gelijk aan:

$$\left[\frac{1 + e_0}{E_1 + E_2 + (e - e_0)\frac{dE_2}{de}} \right] \frac{\partial P_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{K}{\eta} \frac{1}{1 + e} \frac{\partial P_s}{\partial y} \right] - \frac{P_s(1 + e_0) + E_2(e - e_0)}{\tau(E_1 + E_2 + (e - e_0)\frac{dE_2}{de})} \tag{80}$$

3 EXPERIMENTEEL

De experimenten zijn uitgevoerd met de filtercel die is weergegeven in figuur 8. De filtercel bestaat uit een perspex cilinder die zich op een poreuze bodemplaat bevindt. Op deze poreuze plaat wordt een filtreerpapiertje gelegd. Bij de experimenten wordt het slib eerst geflocculeerd en vervolgens in de cel gebracht. Hierna wordt een gasdruk aangebracht boven het slib en begint de filtratie. Het uitgeperste filtraat wordt opgevangen op een balans die is verbonden met een computer. Deze computer registreert het gewicht van het filtraat als functie van de tijd. Het gewicht van het filtraat kan middels de dichtheid van water omgezet worden in een volume als functie van de tijd. De afgeleide naar de tijd van het filtraatvolume geeft het volumedebiet.



Figuur 8. *Schematische weergave van een filtercel*

Als het volumedebiet een constante waarde heeft bereikt, kan bij benadering worden gesteld dat de filtratiefase geëindigd is. Daarna wordt een massieve zuiger op het slib geplaatst en wordt weer dezelfde gasdruk aangebracht. De fase van het uitpersen die nu volgt is de expressiefase. Wederom wordt met behulp van een computer een volume-versus-tijdgrafiek geregistreerd.

Door de slibkoek aan het eind van het experiment te drogen in een droogstoof kan de eindporositeit of eindvoidratio bepaald worden met behulp van formule (81):

$$m = 1 + \frac{\rho}{\rho_s}\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \qquad of \qquad m = 1 + \frac{\rho}{\rho_s}e \tag{81}$$

Waarbij:

m = de verhouding van het gewicht van de natte koek tot het gewicht van de droge koek [-]

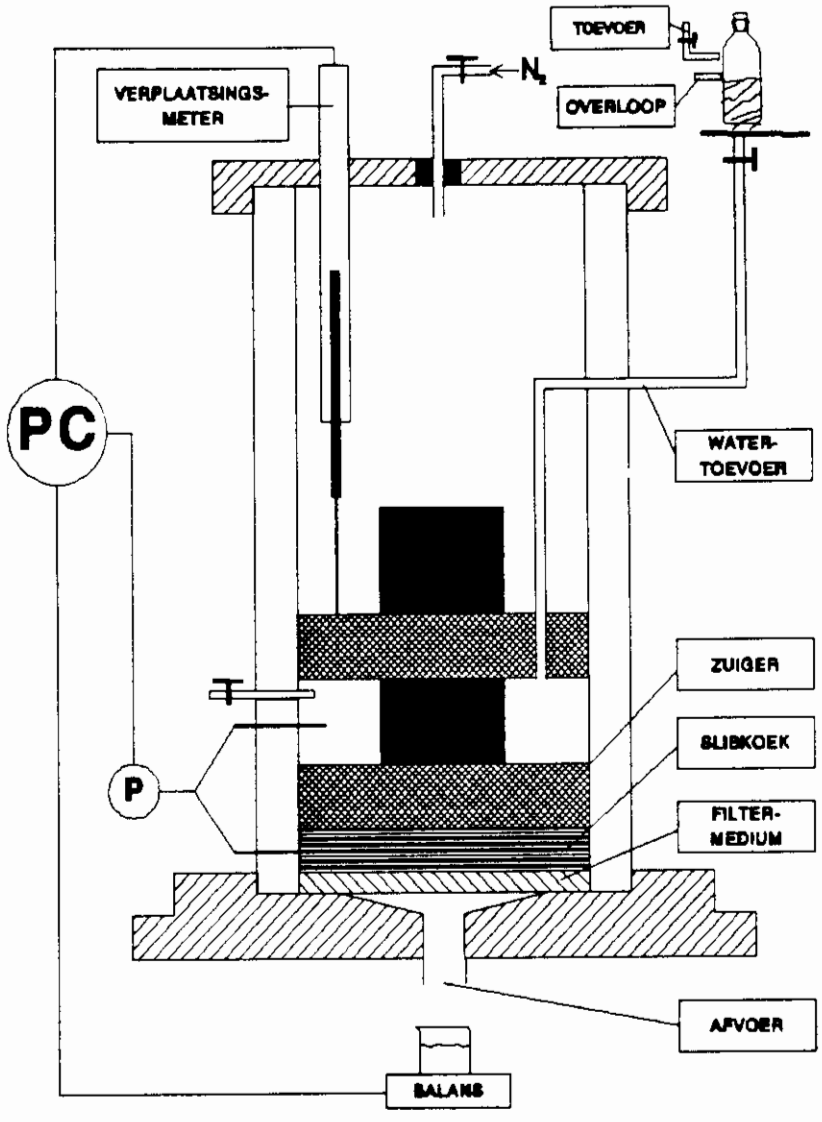
ρ = dichtheid van de vloeistof [kg m^{-3}]

ρ_s = dichtheid van de vaste stof [kg m^{-3}]

Wanneer we voor het gewicht van de droge koek het totale gewicht van de droge koek (drogestof slib en drogestof toegevoegde flocculant) nemen krijgen we de **ongecorrigeerde** voidratio of porositeit. Wanneer we voor het gewicht van de drogestof alleen het gewicht van de droge stofdeeltjes van het slib nemen, verkrijgen we de **gecorrigeerde** voidratio. In dit verslag is steeds (tenzij anders wordt vermeld) met de gecorrigeerde voidratio gewerkt. Verder moet nog worden gecorrigeerd voor intra-cellulair en gebonden water. Deze waterfractie is verantwoordelijk voor de waterstroming en mag daarom niet worden meegenomen in de porositeit tijdens dynamische modellering. De voidratio by 65-70 gew% drogestof is daarom ongeveer 0.

Bij drainage-experimenten wordt het slib in de filtratiecel gebracht, waarna er onder invloed van de zwaartekracht een hoeveelheid water uitstroomt. Hierdoor wordt een koek gevormd met een vaste hoeveelheid vaste stof. Op deze koek wordt een laag water gezet, die door de koek wordt geperst. De uitstroomsnelheid die nu gemeten wordt kan vergeleken worden met de modelberekeningen.

In de zogenaamde Compressie-Permeabiliteits-cel (CP-cel) zijn experimenten uitgevoerd om de compressieconstanten (α, β, δ en λ) te bepalen. Een schematische weergave van deze CP-cel is te zien in figuur 9. De cel bestaat net als de gewone filtercel uit een perspex cilinder die geplaatst wordt op een houder waarin de bodemplaat wordt gevormd door een poreuze plaat. In deze cel wordt een zuiger gebracht. Deze zuiger bestaat eigenlijk uit twee zuigers die middels een schroefdraad verbonden zijn. De zuiger die in contact komt met het slib is poreus, dit in tegenstelling tot de bovenste zuiger die massief is. De ruimte tussen de zuigers is tijdens de experimenten gevuld met water. Om een constante vloeistofdruk te krijgen wordt op dit water een lage gasdruk gebracht. Aan de zuiger is een verplaatsingsmeter verbonden waarmee de koekdikte kan worden bepaald. Bij de experimenten wordt het slib nadat het geflocculeerd is in de cel gebracht. Vervolgens wordt het experiment gestart door een gasdruk aan te brengen boven de massieve zuiger. Deze gasdruk is de compressieve druk (P_s). Het slib wordt nu ineen geperst, waarbij het water zowel naar boven als naar beneden kan stromen. Het water dat naar beneden wegstroomt wordt wederom opgevangen



Figuur 9. *Schematische weergave van een Compressie-Permeabiliteits-cel*

op een balans, die met een computer verbonden is. Deze computer zet het signaal om in een volume-versus-tijdgrafiek. Wanneer de koekdikte constant blijft, blijft ook de permeabiliteit constant. Door nu met behulp van het computerprogramma de constante uitstroomsnelheid te bepalen kan de permeabiliteit worden berekend met de wet van Darcy (82). Uit onderzoek blijkt dat het erg belangrijk is dat zowel de poreuze bodemplaat als de poreuze zuiger worden bedekt met filtreerpapier, dit om verstopping van de poriën te voorkomen. Dit verstopt raken van de poriën is van invloed op de permeabiliteit die berekend wordt, deze wordt dan lager.

$$K = \frac{q_l \eta L}{\Delta P_l} \tag{82}$$

Waarbij:

K = permeabiliteit [m^2]
η = viscositeit [Pa s]
q_l = uitstroomsnelheid [m/s]
L = koekdikte [m]
ΔP_1 = hydraulisch drukverschil [Pa]

Voor de permeabiliteit kan volgens het model van Shirato-Tiller ook geschreven worden:

$$K = K_0 \left(1 + \frac{P_s}{P_a}\right)^{-\delta} \quad of \quad \ln K = \ln K_0 - \delta \ln \left(1 + \frac{P_s}{P_a}\right) \tag{83}$$

De permeabiliteit wordt bepaald bij verschillende drukken, waarna ln K wordt uitgezet tegen ln $(1+P_s/P_a)$. Hierbij wordt de compressie-constante δ weergegeven door de helling van de grafiek, de permeabiliteit in onbelaste toestand (K_0) kan bepaald worden uit de asafsnede.

De eindporositeit van de koek kan bepaald worden door de koek te drogen in een droogstoof. Door de koekdikte bij elke druk te bepalen kan vervolgens de porositeit (ε) bij elke druk bepaald worden met behulp van een volumebalans. Voor de porositeit kan volgens Shirato-Tiller geschreven worden:

$$\ln (1-\varepsilon) = \ln (1-\varepsilon_0) + \beta \ln \left(1 + \frac{P_s}{P_a}\right) \tag{84}$$

Door ln $(1-\varepsilon)$ uit te zetten als functie van ln $(1+P_s/P_a)$ kunnen vervolgens de porositeit in onbelaste toestand (ε_0) en de compressieconstante β bepaald worden. Hierbij is de helling van de grafiek gelijk aan β en is de asafsnede gelijk aan ln $(1-\varepsilon_0)$.

4 RESULTATEN EN DISCUSSIE

4.1. Cp-cel

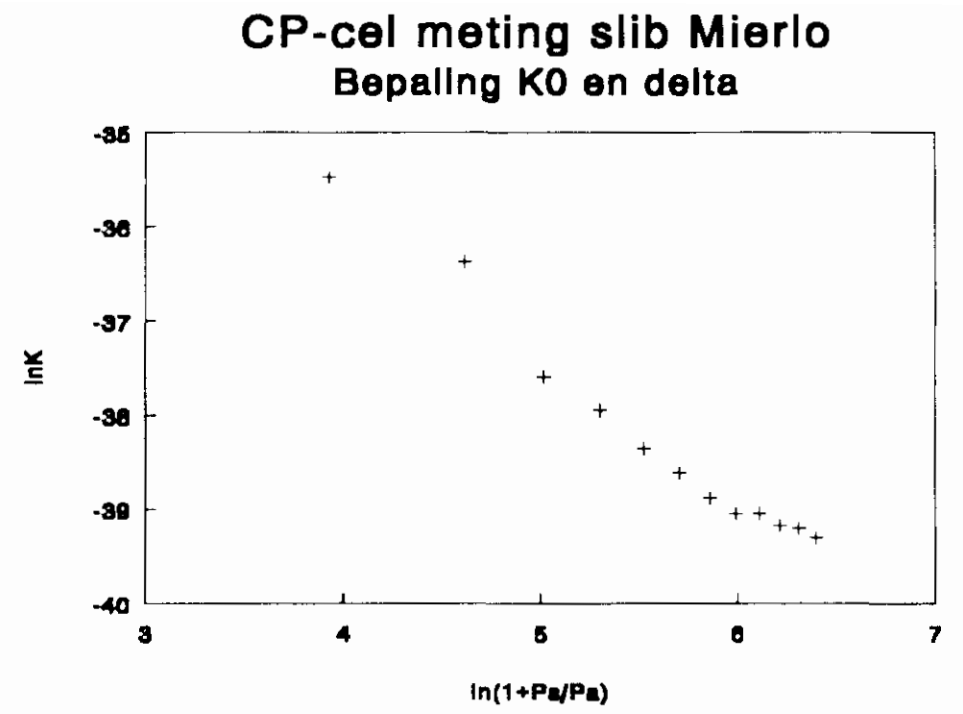
In figuur 10 en 11 zijn de resultaten weergegeven van de metingen bij slib dat geflocculeerd was met 10 gew% $FeCl_3$ en 20 gew% $Ca(OH)_2$. In figuur 10 is ln K uitgezet tegen ln $(1+P_s/P_a)$. Door de meetpunten kan een lineaire regressielijn getrokken worden. Zoals in hoofdstuk 2 besproken is, is de helling gelijk aan de compressieconstante δ en is de as-afsnede gelijk aan K_0. In figuur 11 is hetzelfde gedaan maar nu voor ln $(1-\varepsilon)$.

In tabel 1 zijn de resultaten weergeven van de eerste serie metingen bij flocculering met verschillende percentages $FeCl_3$. In de tabel zijn de compressiecoëfficiënten δ en β en K_0, e_0 en ε_0 weergegeven. Bij de bepaling van deze constanten is P_a gelijk gesteld aan 1000.

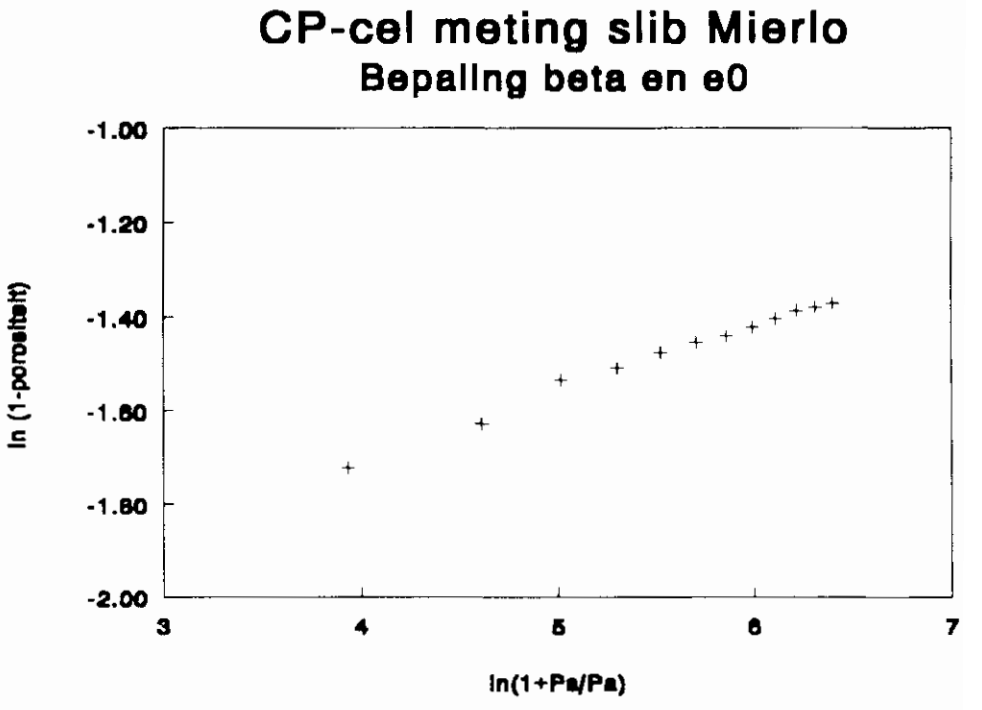
Percentage [gew%]	δ [-]	K_0 $*10^{-13}$ [m^2]	ε_0 [-]	e_0 [-]	β $*10^{-1}$ [-]
25	1,1221	0,12	0,86	6,3	0,751
20	1,6595	1,5	0,87	6,7	1,044
15	1,7120	3,6	0,89	8,5	1,102
10	1,5272	1,0	0,88	7,2	1,226
5	1,8156	1,6	0,94	16,3	2,814

Tabel 1. *Berekende compressieconstanten*

Uit de tabel blijkt dat β steeds kleiner wordt naarmate er meer $FeCl_3$ wordt toegevoegd. Dit betekent dat toevoeging van $FeCl_3$ leidt tot vermindering van de compressibiliteit van de koek. In de tweede serie experimenten treedt er een afwijking op als we kijken naar β als functie van de hoeveelheid toegevoegde flocculant. Hiervoor is geen verklaring gevonden. Bij de tweede serie metingen is geprobeerd om de permeabiliteit te koppelen aan een gemeten deeltjesgrootteverdeling. Dit blijkt niet mogelijk. Oorzaak hiervan is dat de deeltjes-grootteverdeling gemeten wordt aan deeltjes in onbelaste toestand, terwijl de permeabiliteit gemeten wordt aan deeltjes in samengeperste toestand.



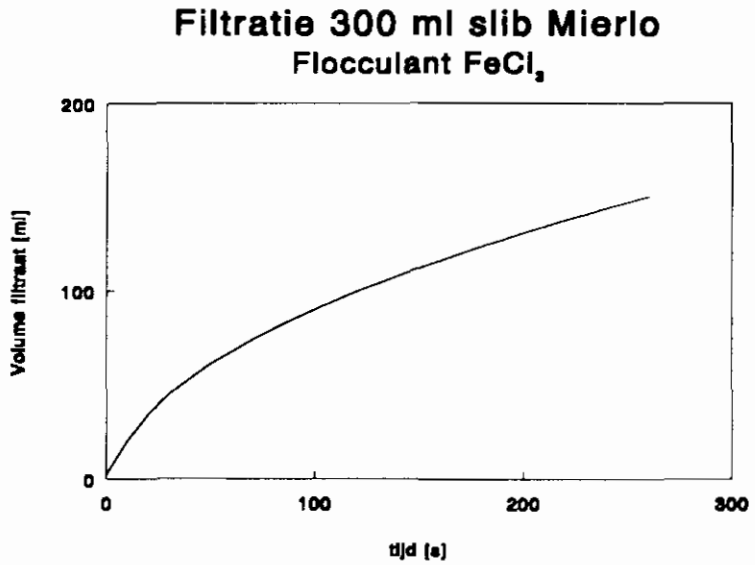
Figuur 10. *ln K versus ln* $(1+P_t/P_a)$



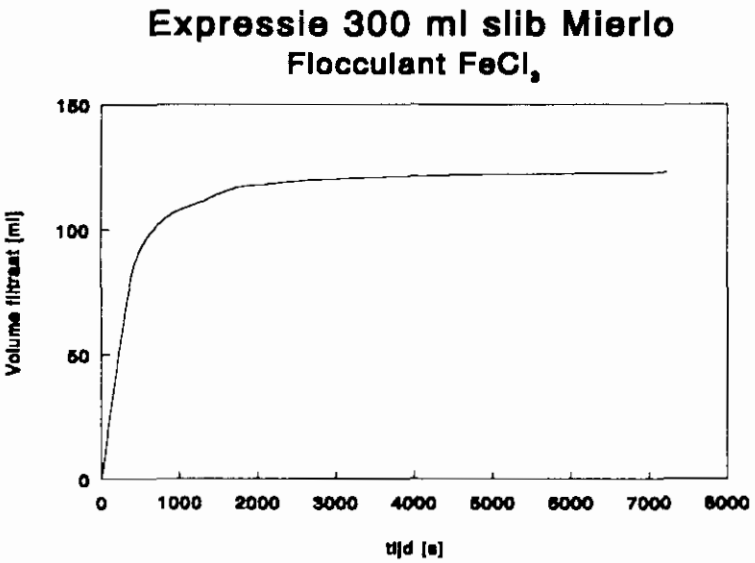
Figuur 11. *ln (1-ε) versus ln* $(1+P_t/P_a)$

4.2. Filtratie- en expressiecurve

In figuur 12 en 13 is een voorbeeld gegeven van een filtratie- en een expressie-experiment.



Figuur 12. *Filtratiecurve*

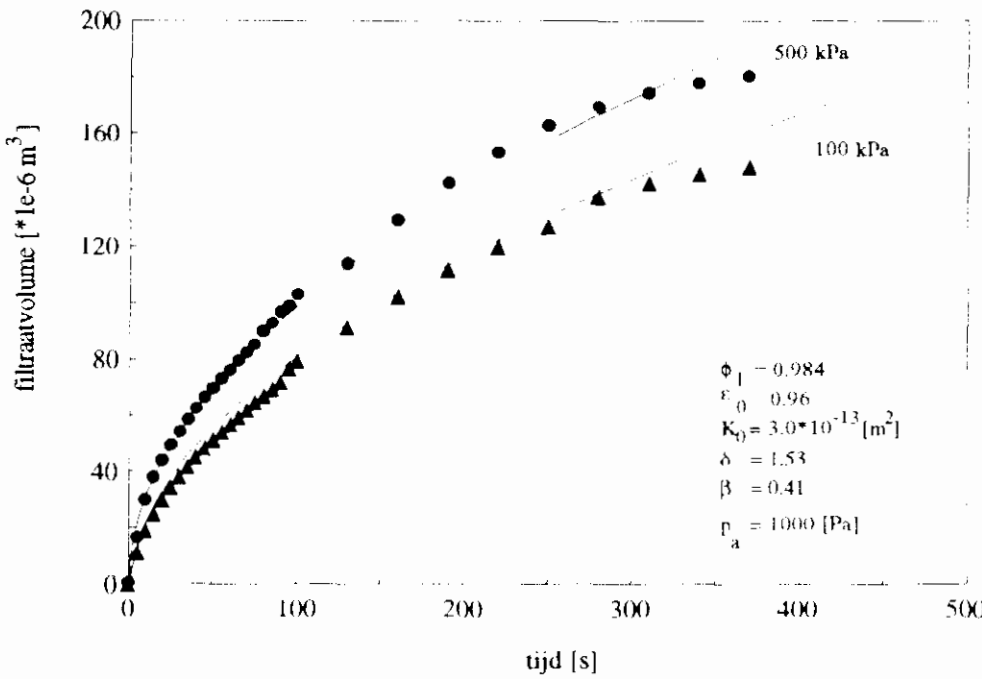


Figuur 13. *Expressiecurve*

4.3 Vergelijking tussen experiment en model

4.3.1 Elastisch materiaalgedrag

In figuur 14 is een resultaat getoond van een modelberekening en een meting van een normaal filtratie-experiment van Mierlo-slib geflocculeerd met 10 gew.% ijzerchloride en 20 gew.% kalk op drogestofbasis. Voor de modelberekeningen is aangenomen dat het materiaal zich elastisch gedraagt. De constitutieve parameters zijn getoond in figuur 14. Aan de hand van figuur 14 is te zien dat er een goede overeenkomst is tussen experiment en model.

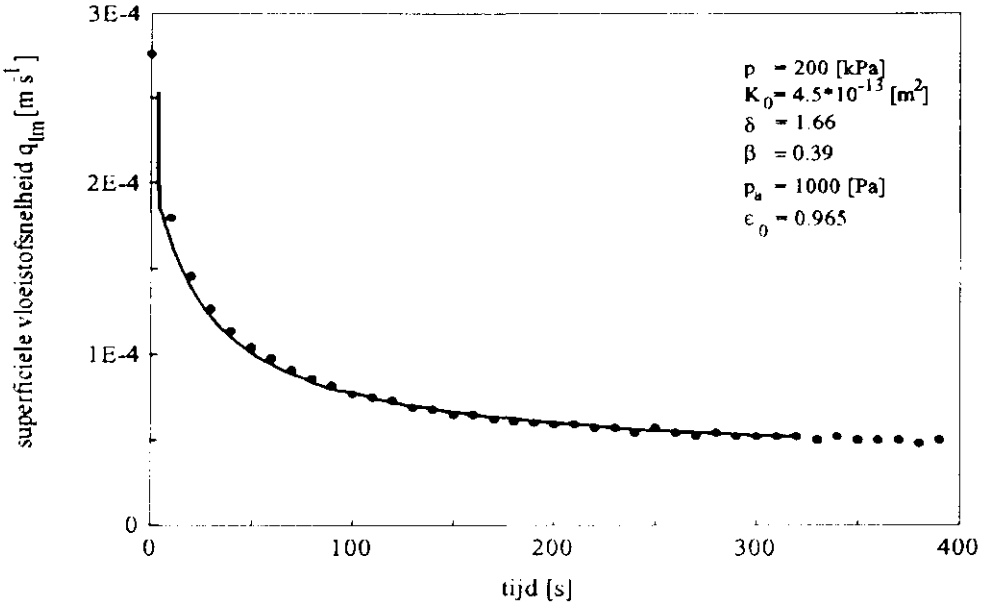


Figuur 14 *Filtraatvolume versus tijd volgens experiment (bolletjes, driehoekjes) en model (lijnen), elastisch materiaalgedrag. Mierlo-slib geflocculeerd met 10 gew.% ijzerchloride en 20 gew.% op drogestofbasis.*

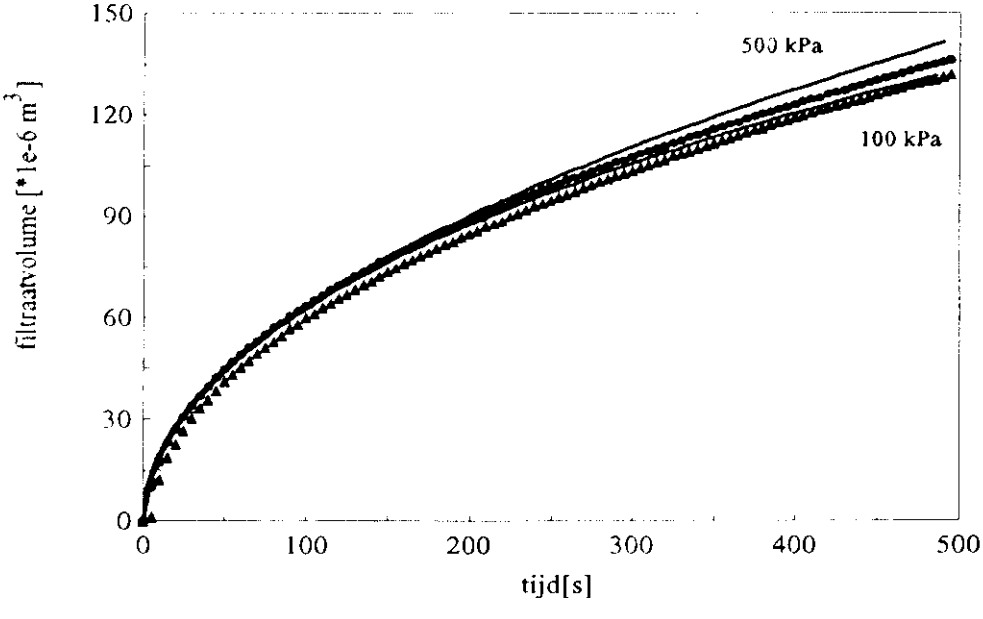
In figuur 15 is een resultaat getoond van een modelberekening en een drainage-experiment met hetzelfde slib, alleen geflocculeerd met 20 gew.% ijzerchloride en 20 gew.% kalk. Er is wederom een goede overeenkomst tussen experiment en model. De aanname dat het materiaal zich elastisch gedraagt tijdens filtratie en drainage is voldoende voor deze experimenten.

In figuur 16 is een resultaat weergegeven van een modelberekening en een meting van een normaal filtratie-experiment met secundair Eindhoven-slib geflocculeerd met 15 gew.% ijzerchloride en 20 gew.% kalk op drogestofbasis. Het materiaal is verondersteld zich elastisch te gedragen. Het secundaire slib komt direct van de beluchtingstank en heeft een andere vlokstructuur dan het Mierlo-slib. De permeabiliteit is iets lager dan van Mierlo-slib. De overeenkomst tussen experiment en model is goed zoals is te zien in figuur 16. Omdat het

slib meer compressibel is ($\delta = 1.8$) dan het Mierlo-slib (voor deze voorbeelden), is het verschil in filtraatvolume voor een aangelegde druk van 100 kPa en 500 kPa gering.

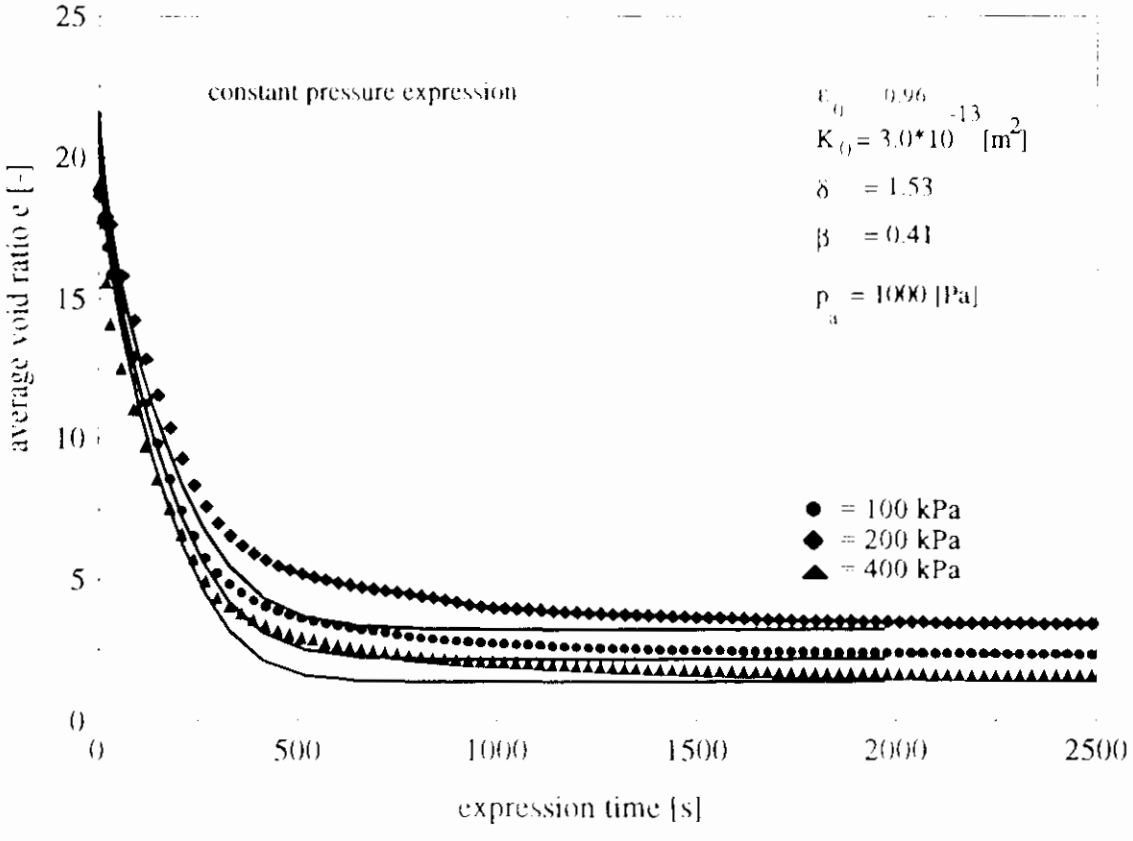


Figuur 15 *Drainage flux versus tijd volgens experiment (bolletjes) en model (lijn), elastisch materiaalgedrag. Mierlo-slib geflocculeerd met 20 gew. % ijzerchloride en 20 gew. % kalk.*



Figuur 16 *Filtraatvolume versus tijd volgens experiment (bolletjes, driehoeken) en model (lijnen), elastisch materiaalgedrag. Secundair slib van de rwzi Eindhoven geflocculeerd met 15 gew.% ijzerchloride en 20 gew. % kalk op drogestofbasis.*

In figuur 17 is een resultaat weergegeven van een modelberekening en een meting van een expressie-experiment met Mierlo-slib geflocculeerd met 15 gew.% ijzerchloride en 20 gew.% kalk op droge-stofbasis. De afname van de gemiddelde voidratio is uitgezet tegen de tijd. De filtratiefase van dit experiment is weergegeven in figuur 14. Het materiaalgedrag is wederom verondersteld zich elastisch te gedragen. Zoals is te zien aan de hand van figuur 17 is er een acceptabele overeenkomst tussen experiment en model voor de initiële periode van de expressiefase. De latere periode van de expressiefase kan niet nauwkeurig genoeg worden beschreven op basis van elastisch materiaalgedrag, ondanks het feit dat de verandering van de permeabiliteit met de compressiedruk wordt meegenomen in de modellering. Dit moet daarom worden beschouwd als een tekortkoming van het model.



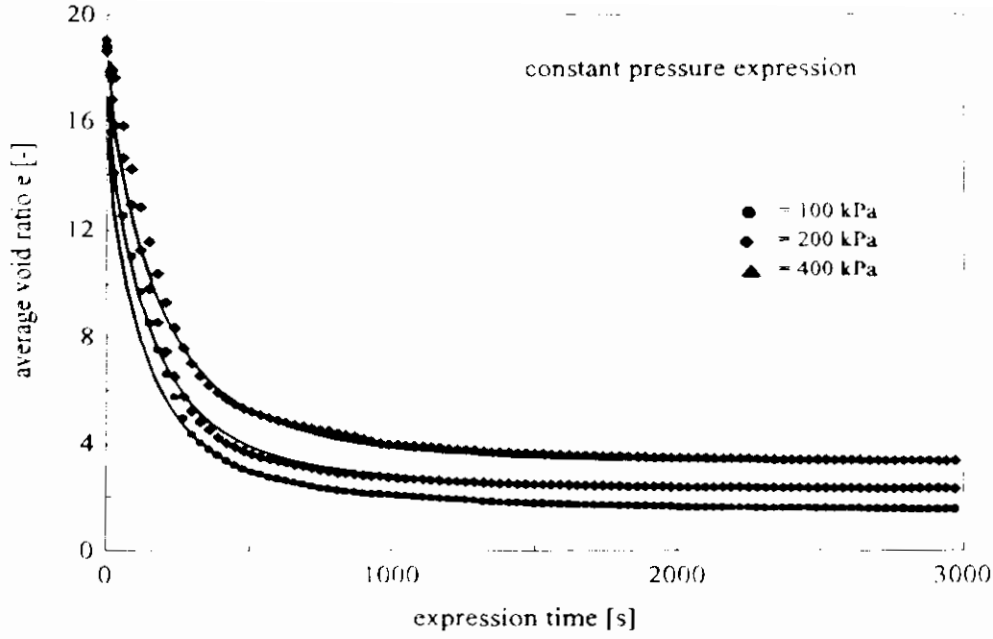
Figuur 17 *Gemiddelde voidratio versus tijd volgens experiment (bolletjes, driehoeken, vierkanten) en model (lijnen), elastisch materiaalgedrag. Mierlo-slib geflocculeerd met 10 gew.% ijzerchloride en 20 gew.% kalk op drogestofbasis.*

4.3.2 Visco-elastisch materiaalgedrag

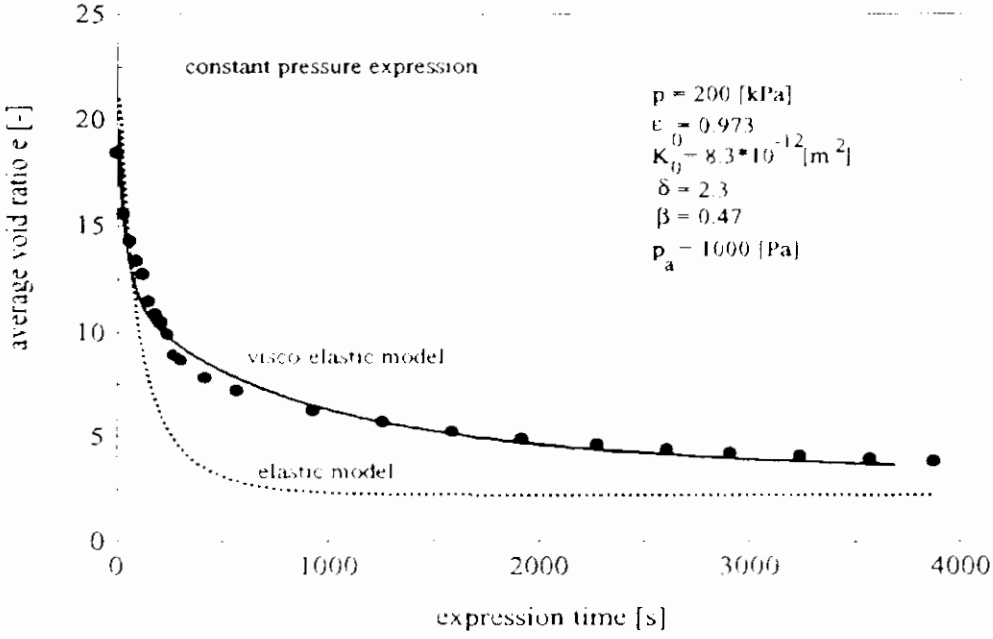
In figuur 18 zijn resultaten weergegeven van modelberekeningen gebaseerd op visco-elastisch materiaalgedrag en dezelfde experimenten als getoond in figuur 17. Er kan worden

geconcludeerd dat berekeningen gebaseerd op visco-elastisch materiaalgedrag een goede overeenkomst tonen tussen experiment en model. Het laatste gedeelte van de expressiefase kan nu beter worden beschreven. Het duurt vrij lang voordat een evenwichtssituatie wordt bereikt, het slib vertoont enige kruip. De evenwichtssituatie wordt na ± 6000 seconden bereikt maar is niet getoond in deze figuur. Het was niet mogelijk om deze experimenten nauwkeurig te beschrijven met constante waarden voor E_1 en η. Deinitiële afname van de gemiddelde voidratio wordt niet alleen bepaald door de permeabiliteit, maar ook door E_1 en η, indien het materiaalgedrag wordt beschreven door het vastestofmodel. Als E_1 en η niet afhankelijk zijn van de porositeit, dan verandert de porositeit evenredig met de compressiedruk volgens vergelijking (72). Indien vergelijking (73) wordt gebruikt, vertoont het model goede overeenkomst met experiment, ook voor verschillende drukken. Dit wordt aan de ene kant teweeggebracht door het feit dat E_1 en η een functie zijn van de porositeit en aan de andere kant door het feit dat de uiteindelijke evenwichtssituatie goed wordt voorspeld omdat deze evenwichtssituaties de gemeten waarden zijn met de CP-cel. Het Maxwell-element is onderdrukt en de compressiedruk rust alleen op veer E_2, die verantwoordelijk is voor de CP-celdata.

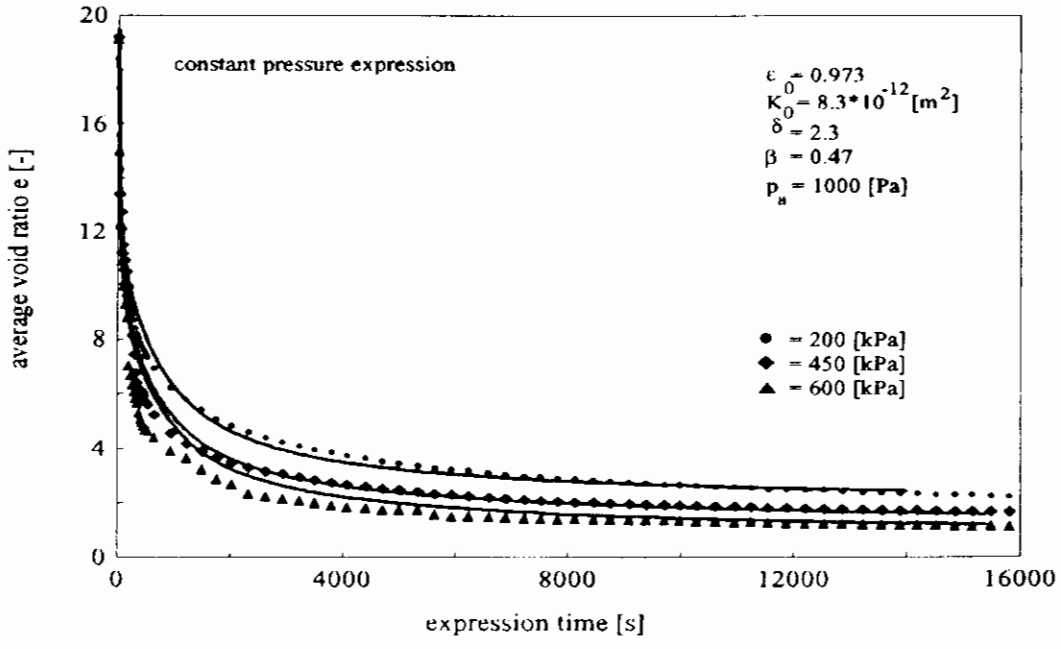
In figuur 19 is een resultaat weergegeven van een modelberekening en een expressie-experiment van Mierlo-slib geflocculeerd met 1,5 gew.% polyelektrolyt (Röhm KF975). Wederom is de afname van de gemiddelde voidratio versus tijd weergegeven. De gestippelde lijn is een resultaat van een berekening op basis van elastisch materiaalgedrag en de doorgetrokken lijn is een resultaat van visco-elastische berekeningen. De expressie van slib geflocculeerd met polyelektrolyt vertoont altijd kruip: het duurt behoorlijk lang voordat de evenwichtssituatie is bereikt. Niet alleen vloeistofstroming maar ook de deformatie van het materiaal speelt een belangrijke rol in de uiteindelijke expressietijd. De initiële permeabiliteit K_0 ($8{,}0*10^{-12}$) is relatief hoog in vergelijking met die van slib geflocculeerd met ijzerchloride en kalk ($3{,}0*10^{-13}$). Dit wordt veroorzaakt door de relatief grote en zeer poreuze vlokken die worden gevormd indien slib wordt geflocculeerd met polyelektrolyt. In figuur 20 is de afname van de gemiddelde voidratio voor verschillende drukken volgens experiment en model getoond. Zoals is te zien aan de hand figuur 20 kan worden geconcludeerd dat de overeenkomst tussen model en experiment acceptabel is.



Figuur 18 *Gemiddelde voidratio versus tijd volgens experiment (bolletjes, vierkanten en driehoeken) en model, visco-elastisch materiaalgedrag (lijnen). Mierlo-slib geflocculeerd met 10 gew.% ijzerchloride en 20 gew.% kalk op drogestofbasis. Visco-elastische parameters: E_{I0} 8,0*10^4 Pa, η_{S0} 8,0*10^7 Pa.s (τ_0 1000 s), κ 1,05, ξ 1,3*



Figuur 19 *Gemiddelde voidratio versus tijd volgens experiment (bolletjes) en model, elastisch materiaalgedrag (gestippelde lijn) en visco-elastisch materiaalgedrag (doorgetrokken lijn). Mierlo-slib geflocculeerd met 1.5 gew.% polyelektrolyt op drogestofbasis.*



Figuur 20 *Gemiddelde voidratio versus tijd volgens experiment (bolletjes) en model, elastisch materiaalgedrag (gestippelde lijn) en visco-elastisch materiaalgedrag (doorgetrokken lijn). Visco-elastische parameters:* E_{10}*=2,5*10*^{4}*,* η_{s0}*= 3,5*10*^{8}*,* κ*=1,05,* ξ*=1,3.*

4.4 Conclusies

Het filtratie- en expressiegedrag van slib kan redelijk worden beschreven met de gepresenteerde modellen in paragraaf 1. De deformatie van de slibfilterkoek tijdens expressie is gecompliceerd en kan vaak niet op basis van simpel elastisch materiaalgedrag worden beschreven; berekeningen op basis van visco-elastisch materiaalgedrag vertonen betere resultaten. De slibben vertonen 'kruip" aan het einde van de expressiefase. Het kan een behoorlijk lange tijd duren voordat de evenwichtssituatie wordt bereikt vanwege deze kruip. Tijdens de filtratiefase is de compressiedruk vrijwel gelijk aan nul door het grootste gedeelte van de koek. Dit betekent dat de deeltjes in de koek nauwelijks spanning "voelen" en daarom zal de deformatie van de deeltjesmatrix nauwelijks de totale filtratietijd beïnvloeden. Echter tijdens expressie neemt de spanning op de deeltjes sterk toe en tijdens deze fase vinden de grootste relatieve verschuivingen tussen de deeltjes plaats. De vervormingssnelheid van de deeltjesmatrix wordt belangrijk en moet vaak worden beschouwd als visco-elastisch. De deformatie van de deeltjesmatrix is niet instantaan, maar het duurt enige tijd om te deformeren. Dit visco-elastische materiaalgedrag is vooral belangrijk wanneer slib geflocculeerd is met polyelektrolyt. Het beschrijven van de kruip is belangrijk, omdat kleine

veranderingen in de voidratio gelijk zijn aan aanzienlijke verschillen in drogestofgehalte. Elke procent winst in drogestof reduceert de verwerkingskosten aanzienlijk.

Ofschoon er veel kritiek is op de CP-cel, heeft eigenlijk alleen Stamatakis[3] een goed alternatief besproken om de constitutieve parameters voor de filtratiefase te bepalen. Een minimalisatieprocedure, zoals voorgesteld door Stamatakis, zal de fitparameters van de CP cel-experimenten bijstellen. Dit resulteert in een meer nauwkeurige overeenkomst tussen experiment en model, hoewel directe vergelijking tussen modelberekeningen op basis van CP-celwaarden en experimenten kan resulteren in goede resultaten zoals is getoond in dit hoofdstuk. Omdat de expressietijd belangrijker is in de ontwatering van slib (filtratietijd : expressietijd ≅ 300 : 5000 seconden), is het adviseerbaar om alleen een fitprocedure toe te passen om de visco-elastische parameters te vinden en de parameters verkregen met behulp van de CP-cel te handhaven. De visco-elastische parameters kunnen alleen worden bepaald door direct een experiment te fitten in tegenstelling tot de elastische parameters.

5 SYMBOLENLIJST

A	=	oppervlak	[m^2]
A_l	=	doorsnee oppervlak van de vloeistoffase	[m^2]
A_s	=	doorsnee oppervlak van de vaste fase	[m^2]
e	=	voidratio	[-]
e_0	=	voidratio bij $P_s = 0$	[-]
E	=	elasticiteitsmodulus	[Pa]
E_1	=	elasticiteitsmodulus uit het vastestofmodel	[Pa]
E_2	=	elasticiteitsmodulus uit het vastestofmodel	[Pa]
$E_{2,0}$	=	elasticiteitsmodulus E_2 bij $P_s = 0$	[Pa]
F_s	=	meesleepkracht	[N]
g	=	zwaartekrachtversnelling	[m/s^2]
h	=	vastestofhoogte	[m]
h_0	=	vastestofhoogte bij $P_s = 0$	[m]
I	=	impulsoverdracht	[N]
K	=	permeabiliteit	[m^2]
K_0	=	permeabiliteit bij $P_s = 0$	[m^2]
L	=	koekdikte	[m]
m_d	=	massa droge koek	[kg]
m_n	=	massa natte koek	[kg]
P_l	=	filtratiedruk	[Pa]
P_a	=	constante uit constitutieve vergelijkingen	[Pa]
P_l	=	vloeistofdruk	[Pa]
P_s	=	compressiedruk	[Pa]
q_l	=	superficiële vloeistofsnelheid in de koek	[m/s]
$q_{l,0}$	=	superficiële vloeistofsnelheid in de koek bij het koek/slurry-oppervlak	[m/s]
$q_{l,m}$	=	superficiële vloeistofsnelheid in het filtermedium	[m/s]
$q_{l,sl}$	=	superficiële vloeistofsnelheid in de slurry	[m/s]
q_{ls}	=	superficiële verschilsnelheid tussen vloeistof en vaste fase in koek	[m/s]
q_s	=	superficiële vastestofsnelheid in de koek	[m/s]
$q_{s,0}$	=	superficiële vastestofsnelheid in de koek bij het koek/slurry-oppervlak	[m/s]
$q_{s,sl}$	=	superficiële vastestofsnelheid in de slurry	[m/s]
t	=	tijd	[s]
u_l	=	snelheid van de vloeistoffase in de koek	[m/s]
$u_{l,sed}$	=	snelheid van de vloeistoffase in de slurry bij batchsedimentatie	[m/s]
$u_{l,sl}$	=	snelheid van de vloeistoffase in de slurry	[m/s]
u_s	=	snelheid van de vaste stof in de koek	[m/s]

$u_{s,sed}$	=	snelheid van de vaste stof in de slurry bij batchsedimentatie	[m/s]
$u_{s,sl}$	=	snelheid van de vaste stof in de slurry	[m/s]
u_t	=	slipsnelheid tussen de vloeistof- en vaste fase	[m/s]
V	=	volume	[m^3]
x	=	reële hoogte in de filterkoek tussen 0 en L(t)	[m]
Δx_m	=	dikte van het filtermedium	[m]
y	=	vastestofcoördinaat	[m]

Griekse symbolen

α	=	coëfficiënt van de elasticiteitsmodulus E_2 uit het vastestofmodel	[-]
β	=	compressibiliteitscoëfficiënt	[-]
ε_l	=	porositeit van de vloeistoffase in de koek	[-]
$\varepsilon_{l,0}$	=	porositeit van de vloeistoffase in de koek bij $P_s = 0$	[-]
$\varepsilon_{l,sl}$	=	porositeit van de vloeistoffase in de slurry	[-]
ε_s	=	porositeit van de vaste fase in de koek	[-]
$\varepsilon_{s,0}$	=	porositeit van de vaste fase in de koek bij $P_s = 0$	[-]
$\varepsilon_{s,sl}$	=	porositeit van de vaste fase in de slurry	[-]
ϵ	=	rek	[-]
δ	=	compressibiliteitscoëfficiënt	[-]
ϕ	=	snelheidspotentiaal	[m^2/s]
φ	=	dimensieloze hoogte = x/L(t)	[-]
ρ_l	=	dichtheid van de vloeistof	[kg/m^3]
ρ_s	=	dichtheid van de vaste stof	[kg/m^3]
σ	=	spanning	[Pa]
σ_1	=	spanning van het Maxwell-element in het vastestofmodel	[Pa]
σ_2	=	spanning van de parallel geschakelde veer in het vastestofmodel	[Pa]
τ_r	=	relaxatietijd	[s]
η	=	dynamische viscositeit van de vloeistoffase	[Pa·s]
$\acute{\eta}$	=	viscositeit demper	[Pa·s]

6 LITERATUURLIJST

[1] Muskat, M., Flow of homogeneous fluids through porous media, Mc Graw Hill Inc, Ann Arbor, 1946, pp 129, 287.

[2] Tiller, F.M., Yeh, C.S., The Role of Porosity in Filtration, Part XI: Filtration followed by expression, AIChE Journal, Vo.. 33, no. 8, 1987, pp. 1241-1256

[3] Stamatakis, K., Analysis of cake formation and growth in liquid-solid separations, PhD thesis, University of Syracuse, USA, 1991.

APPENDIX A. IMMOBILISATIE VAN DE VERSCHUIVENDE RANDVOORWAARDE

Op plaats x=L in de koek is de randvoorwaarde $P_s=0$ geldig. Een probleem bij het oplossen van de parabolische differentiaalvergelijking is dat de koek groeit en L voortdurend verschuift. Door de introductie van de dimensieloze coördinaat φ wordt de bewegende randvoorwaarde geïmmobiliseerd. Als onafhankelijke variabelen kiezen we x en t, φ en τ worden als afhankelijke variabelen gekozen.

$$\varphi = f(x,t) = \frac{x}{L(t)} \tag{A.1}$$

$$\tau = f(t) = t \tag{A.2}$$

Voor de afgeleiden van φ en τ gelden:

$$d\varphi = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_t dx + \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]_x dt \tag{A.3}$$

$$d\tau = dt \tag{A.4}$$

De porositeit ε is een functie van φ en τ.

$$d\varepsilon = \left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi}\right]_\tau d\varphi + \left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right]_\varphi d\tau \tag{A.5}$$

Invullen van (A.3) en (A.4) in (A.5) levert een uitdrukking voor $d\varepsilon$.

$$d\varepsilon = \left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi}\right]_\tau \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_t dx + \left\{\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi}\right]_\tau \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]_x + \left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right]_\varphi\right\} dt \tag{A.6}$$

De porositeit ε is tevens een functie van x en t zodat

$$d\varepsilon = \left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right]_t dx + \left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right]_x dt \tag{A.7}$$

Uit (A.6) en (A.7) volgt de relatie tussen de partieel afgeleiden.

$$\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right]_t = \left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi}\right]_\tau \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_t \tag{A.8}$$

Uit partieel differentiëren van (A.1) volgt:

$$\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right]_x = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi}\right]_\tau \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]_x + \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\right]_\varphi \tag{A.9}$$

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right]_t = \frac{1}{L} \tag{A.10}$$

$$\left[\frac{\partial x}{\partial t}\right]_\varphi = \varphi \frac{dL}{dt} \tag{A.11}$$

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]_x = -\left[\frac{\partial x}{\partial t}\right]_\varphi \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right]_t = -\frac{\varphi}{L}\frac{dL}{dt} \tag{A.12}$$

Invullen van (A.10) t/m (A.12) in (A.8) en (A.9) levert het uiteindelijke verband tussen de partiële afgeleiden van ε naar reële en dimensieloze coördinaten.

$$\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right]_t = \frac{1}{L}\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi}\right]_\tau \tag{A.13}$$

$$\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right]_x = -\frac{\varphi}{L}\frac{dL}{dt}\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi}\right]_\tau + \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\right]_\varphi \tag{A.14}$$

Invoeren van de voidratio.

De voidratio e is gedefinieerd als:

$$e = \frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_s} \tag{A.15}$$

Men kan ε_l, ε_s, $d\varepsilon_l$ en $d\varepsilon_s$ als functie van de voidratio schrijven:

$$\varepsilon_l = \frac{e}{1+e} \quad ; \quad \varepsilon_s = \frac{1}{1+e} \tag{A.16}$$

$$d\varepsilon_l = \frac{1}{(1+e)^2}\,de \quad ; \quad d\varepsilon_s = -\frac{1}{(1+e)^2}\,de \tag{A.17}$$

APPENDIX B. TRANSFORMATIE NAAR VASTESTOFCOÖRDINAAT

Daar de totale koekhoogte niet en de hoogte van de vaste stof wel constant is, schrijven we de x-coördinaat om naar de vastestofcoördinaat y met behulp van vergelijking (18). Voor de afgeleide van de vastestofcoördinaat y naar x geldt:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_t = 1-\varepsilon \tag{B.1}$$

De partiële afgeleide van de porositeit naar de plaats x kan als volgt geschreven worden:

$$\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right]_t = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right]_y \left[\frac{\partial t}{\partial x}\right]_t + \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right]_t \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_t \tag{B.2}$$

Bij constante t is dt gelijk aan nul zodat vergelijking (B.2) geschreven kan worden als:

$$\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right]_t = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right]_t (1-\varepsilon) \tag{B.3}$$

Voor de partiële afgeleide van de porositeit naar de tijd geldt:

$$\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right]_x = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right]_y \left[\frac{\partial t}{\partial t}\right]_x + \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right]_t \left[\frac{\partial y}{\partial t}\right]_x \tag{B.4}$$

Voor de partiële afgeleide van de vaste stofcoördinaat naar de tijd kan met behulp van vergelijking (24) worden afgeleid:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial t}\right]_x = -\int_0^x \frac{\partial}{\partial t}(1-\varepsilon)dx = -\int_0^x \partial\varepsilon \frac{dx}{\partial t} \tag{B.5}$$

Met de continuïteitsvergelijking (2) is deze op te lossen tot:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial t}\right]_x = -q_l + q_{l,m} \tag{B.6}$$

Deze vergelijking invullen in vergelijking (B.4) levert:

$$\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right]_x = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right]_y - \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right]_t (q_{l_q} - {}_{l,m}) \tag{B.7}$$

De voidratio wordt gedefinieerd als:

$$e = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \tag{B.8}$$

Voor de partiële afgeleide van de voidratio naar de tijd geldt:

$$\left[\frac{\partial e}{\partial t}\right]_y = \frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right]_t \tag{B.9}$$

Invullen van vergelijking (B.7) in (B.9) levert:

$$\left[\frac{\partial e}{\partial t}\right]_y = \frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\left[\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right]_y - \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right]_t (q_l - q_{l,m})\right] \tag{B.10}$$

Voor de partiële afgeleide van de plaatscoördinaat x naar de vastestofcoördinaat y geldt (vergelijking (B.1)):

$$\left[\frac{\partial x}{\partial y}\right]_t = \frac{1}{1-\varepsilon} \tag{B.11}$$

Vergelijking (B.11) en de continuïteitsvergelijking (4) invullen in vergelijking (B.5) levert:

$$\left[\frac{\partial e}{\partial t}\right]_y = \frac{1}{1-\varepsilon}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{q_l - q_{l,m}}{1-\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right]_t \tag{B.12}$$

Deze vergelijking kan geschreven worden als:

$$\left[\frac{\partial e}{\partial t}\right]_y = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{q_l - q_{l,m}}{1-\varepsilon}\right] \tag{B.13}$$

Voor de superficiële vloeistofsnelheid kan geschreven worden:

$$q_l = q_l \varepsilon \quad (1-\varepsilon)\frac{K}{\eta}\frac{\partial P_s}{\partial x} \tag{B.14}$$

Nu geldt ook:

$$\frac{u_l - u_{lm}}{1 \quad \varepsilon} = u_{lm} - \frac{K}{\eta}\frac{\partial P_s}{\partial x} \tag{B.15}$$

Na invullen van deze vergelijking in vergelijking (B.12) volgt:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}[q_{lm} \quad \frac{K}{\eta}\frac{1}{1+e}\frac{\partial P_s}{\partial e}(\frac{\partial e}{\partial y})_t] \tag{B.16}$$

Waarbij de term ($\partial q_{lm}/\partial y$) gelijk is aan 0, omdat de totale uitstroomsnelheid q_{lm} constant is over de gehele koek.

APPENDIX C. INITIALISATIE

De initialisatie wordt uitgevoerd omdat voor het oplossen van de parabolische differentiaalvergelijking een initiële koekdikte en -groeisnelheid bekend moet zijn. Om deze initiële waarden te kunnen berekenen wordt aan het begin van de filtratie aangenomen dat het drukverschil bijna geheel over het filtermedium staat. De superficiële vloeistofsnelheid in het filtermedium kan in dat geval gelijk gesteld worden aan de superficiële vloeistofsnelheid in de koek [3], q_s in de koek wordt nul verondersteld.

$$q_l = q_{lm} \tag{C.1}$$

Voor q_l kan de Darcy-Shirato-vergelijking worden ingevuld ($q_s=0$) zodat vergelijking (C.1) overgaat in:

$$\frac{K}{\eta}\frac{\partial P_l}{\partial x} = q_{lm} \tag{C.2}$$

Deze vergelijking kan met behulp van de krachtenbalans worden omgeschreven in termen van P_s. De zwaartekrachteffecten in de koek worden verwaarloosd. Ook K schrijven we als functie van P_s zodat vergelijking (C.2) over gaat in vergelijking (C.3).

$$-\frac{K_0}{\eta}\left(1+\frac{P_s}{P_a}\right)^{-\delta} \partial P_s = q_{lm}\,\partial x \tag{C.3}$$

De bijbehorende randvoorwaarden zijn:

$$x = 0 \rightarrow P_s = P_s|_{x=0} \tag{C.4}$$

$$x = L \rightarrow P_s = 0 \tag{C.5}$$

Uit integratie van vergelijking (C.3) tezamen met de randvoorwaarden (C.4) en (C.5) volgt de initiële koekdikte.

$$L = \frac{K_0 P_a \Delta x_m}{K_m(1-\delta)}\frac{1}{(P_l - P_s|_{x=0})}\left\{\left(1+\frac{P_s|_{x=0}}{P_a}\right)^{(1-\delta)} - 1\right\} \tag{C.6}$$

De initiële groeisnelheid volgt uit differentiatie van (C.6) naar de tijd.
De initiële koekdikte en -groeisnelheid kan berekend worden indien $P_s|_{x=0}$ bekend is. $P_s|_{x=0}$ is als volgt te bepalen. In 2.7 is voor dL/dt de volgende vergelijking afgeleid.

$$\frac{dL}{dt} = \frac{K_0 P_a \Delta x_m}{K_m (1-\delta)} \frac{1}{(P_1 - P_s|_{x=0})^{\delta}} *$$

$$\left\{ \left[\left\{ \left[1 + \frac{P_s|_{x=0}}{P_a} \right]^{(1-\delta)} - 1 \right\} + \frac{(1-\delta)}{P_a} (P_1 - P_s|_{x=0}) \left[1 + \frac{P_s|_{x=0}}{P_a} \right]^{-\delta} \right\} \right\} \frac{dP_s|_{x=0}}{dt} \tag{C.7}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{q_{l,st} - q_{l,0}}{\varepsilon_{l,0} - \varepsilon_{l,st}} \tag{C.8}$$

De zwaartekrachteffecten worden tijdens de initialisatie verwaarloosd zodat voor $q_{l,st}$ en $q_{l,0}$ de volgende formules gelden.

$$q_{l,st} = \varepsilon_{l,st} u_{l,st} = \varepsilon_{l,st} q_{lm} \tag{C.9}$$

$$q_{l,0} = q_{lm} \tag{C.10}$$

q_{lm} wordt bepaald door de Darcy-Shirato-vergelijking toe te passen op het filtermedium. De randvoorwaarden die hierbij horen zijn:

$$x = 0 \rightarrow P_l = P_1 - P_s|_{x=0} \tag{C.11}$$

$$x = -\Delta x_m \rightarrow P_l = 0 \tag{C.12}$$

Integratie van de Darcy-Shirato-vergelijking (vergelijking (C.2)) met bovenstaande randvoorwaarden levert een term voor q_{lm}.

$$q_{lm} = \frac{K_m}{\eta} \frac{(P_1 - P_s|_{x=0})}{\Delta x_m} \tag{C.13}$$

Combinatie van de vergelijkingen (C.8) t/m (C.13) leidt tot een uitdrukking voor dL/dt.

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\varepsilon_{l,st}}{(\varepsilon_{l,st} - \varepsilon_{l,0})} \frac{K_m}{\eta} \frac{(P_1 - P_s|_{x=0})}{\Delta x_m} \tag{C.14}$$

Uit het gelijkstellen van vergelijking (C.7) en (C.14) volgt $dP_s|_{x=0}/dt$.

$$\frac{dP_s|_{x=0}}{dt} = \frac{\dfrac{\varepsilon_{s,sl}}{(\varepsilon_{l,sl}-\varepsilon_{l,0})}\dfrac{K_m^2(1-\delta)}{K_0\eta P_a}\dfrac{(P_1-P_s|_{x=0})^3}{\Delta x_m^2}}{\left\{\left[\left(1+\dfrac{P_s|_{x=0}}{P_a}\right)^{(1-\delta)}-1\right]+\dfrac{(1-\delta)}{P_a}(P_1-P_s|_{x=0})\right\}\left(1+\dfrac{P_s|_{x=0}}{P_a}\right)^{-\delta}} \qquad \text{(C.15)}$$

Met de beginvoorwaarde:

$$t = 0 \rightarrow P_s|_{x=0} = 0 \qquad \text{(C.16)}$$

Invullen van de beginvoorwaarde (C.16) in (C.15) levert voor kleine t een uitdrukking voor $P_s|_{x=0}$.

$$P_s|_{x=0} = \frac{\varepsilon_{s,sl}}{(\varepsilon_{l,sl}-\varepsilon_{l,0})}\frac{K_m^2}{K_0\eta\Delta x_m^2}P_1^2 t \qquad \text{(C.17)}$$

Met de formules (C.6), (C.7) en (C.17) kunnen respectievelijk de initiële koekdikte, -groeisnelheid en $P_s|_{x=0}$ berekend worden. De profielen van P_s en de voidratio volgen uit de integratie van de Darcy-Shirato-vergelijking tezamen met de randvoorwaarden (C.4) en (C.5). Integratie tussen 0 en x levert een uitdrukking op voor x.

$$x = \frac{K_0 P_a}{q_l\eta(1-\delta)}\left\{\left(1+\frac{P_s|_{x=0}}{P_a}\right)^{(1-\delta)}-\left(1+\frac{P_s}{P_a}\right)^{(1-\delta)}\right\} \qquad \text{(C.18)}$$

De koekdikte L volgt uit integratie van de Darcy-Shirato-vergelijking tussen de grenzen 0 en L.

$$L = \frac{K_0 P_a}{q_l\eta(1-\delta)}\left(1+\frac{P_s|_{x=0}}{P_a}\right)^{(1-\delta)} \qquad \text{(C.19)}$$

Combinatie van (C.18) en (C.19) leidt tot het verband tussen x/L ($=\varphi$) en P_s.

$$\frac{x}{L} = 1 - \frac{\left[1 + \frac{P_s}{P_a}\right]^{(1-\delta)} - 1}{\left[1 + \frac{P_s|_{x=0}}{P_a}\right]^{(1-\delta)} - 1} \qquad \text{(C.20)}$$

P_s expliciet schrijven als functie van de plaats φ in de koek levert:

$$P_s = \left\{ (1 - \varphi) \left[\left[1 + \frac{P_s|_{x=0}}{P_a} \right]^{(1-\delta)} - 1 \right] + 1 \right\}^{\frac{1}{(1-\delta)}} * P_a - P_a \qquad \text{(C.21)}$$

De voidratio volgt via de constitutieve vergelijking (37) direct uit P_s.

$$e = (1 + e_0) \left[1 + \frac{P_s}{P_a} \right]^{-\beta} - 1 \qquad \text{(C.22)}$$

APPENDIX D. PROGRAMMALISTINGS

```
C-----
C       Klas.for

C       Dit programma berekent porositeits- en compressiedruk profielen in
C       een elastische en compressibele filterkoek tijdens filtratie.
C       Hierbij wordt rekening gehouden met sedimentatie-effecten. Voor
C       het oplossen van de PDV wordt de NAG-routine D03PGF gebruikt

C       Uitvoer: - Beeldscherm, controle programma verloop
C                - FOR001.DAT,  tussenresultaten: Tijd, koekdikte en
C                               de profielen van e, Ps en Pl.
C                - FOR011.DAT,  tussenresultaten: tyd, dL/dt, L, Pv(z=0),
C                               VT, filtraatvolume en een controle-
C                               parameter voor het integratieverloop.
C-----
C       OPTIONS/CHECK/EXTEND_SOURCE

        INTEGER   I,NPDE,M,IU,INORM,INON,IBAND,IND,IFAIL
        INTEGER   IR,IWK,AANTAL_ITERATIES
        PARAMETER (IR  =  50)
        PARAMETER (IWK = 1000)
        REAL*8    TYD,TYD_ITER,TYD_AANROEP,TYD_FILE,TYD_INIT,TYD_EIND
        REAL*8    RELERR,ABSERR,WORK(IWK)
        REAL*8    DLDT_FOUT,GRID_OPBOUW,GRID_GRENS
        REAL*8    US,PHI(IR),Z(1,IR)
        REAL*8    L,DLDT_GESCHAT
        REAL*8    E_OLD(IR)
        REAL*8    ETA,PA,P1,K0,DELTA,BETA,E_0,E_SL,RHO_L,RHO_S,G,KM,DKM
        EXTERNAL  PDEF,BNDY,MONTR
        COMMON    /GEGEVENS   /L,DLDT_GESCHAT
        COMMON    /VOIDRATIO  /E_OLD
        COMMON    /CONSTANTEN /ETA,PA,P1,K0,DELTA,BETA,E_0,E_SL,
     &                         RHO_L,RHO_S,G,KM,DKM

C-----  Programma instellingen.

        TYD_INIT          = 1.0D-4
        TYD_AANROEP       = 2.0
        TYD_EIND          = 8.0D+2
        AANTAL_ITERATIES  = 2.0D+3
        DLDT_FOUT         = 1.0D-4
        GRID_OPBOUW       = 1.5
        GRID_GRENS        = 0.8

C-----  Fysische Constanten

        ETA    = 1.0D-3
        PA     = 1.0D+5
        P1     = 1.0D+5
        K0     = 4.4D-14
        DELTA  = 1.77
        BETA   = 0.42
        E_0    = 10.67
        E_SL   = 42.3
        RHO_L  = 1000
        RHO_S  = 1270
        G      = 9.81
        KM     = 9.0D-15
        DKM    = 1.0D-3
        US     = 1.0D-6

C-----  Instellingen variabelen voor de NAG-routine D03PGF

        NPDE   =  1
        M      =  0
        IU     =  1
        INORM  =  0
        INON   =  0
        IBAND  =  1
        IND    = -1
        IFAIL  =  0
        RELERR =  1.0D-3
        ABSERR =  1.0D-4

C-----  Beeldscherm-output.

        WRITE(*,*) ' ------------------------------------------------------'
        WRITE(*,*) '              COMPRESSIBLE CAKE FILTRATION'
        WRITE(*,*) ' ------------------------------------------------------'
        WRITE(*,*)
        WRITE(*,*) '            Tijd  (s)      Voidratio op z=0'
        WRITE(*,*)

C-----  Aanroep subroutine 8.

        TYD      = TYD_INIT
        TYD_FILE = 2*TYD_INIT
        CALL GRID(IR,GRID_GRENS,GRID_OPBOUW,PHI)
        CALL INIT(IR,TYD,L,DLDT_GESCHAT,PHI,E)
        CALL FILE(IR,TYD,L,PHI,E)
        WRITE(*,'(2E20.6,E2)') TYD,E(1,1)
C-----
C       Tijden worden bepaald waarbij tussenresultaten worden weggeschreven
C       naar file en beeldscherm. Subroutine ITERATIE wordt aangeroepen.
C-----
        DO WHILE (TYD.LT.TYD_EIND)
           TYD_ITER = TYD_AANROEP*TYD
           CALL ITERATIE(NPDE,M,PDEF,BNDY,TYD,TYD_ITER,E,IU,IR,PHI,RELERR,
     &                   ABSERR,INORM,MONTR,INON,IBAND,WORK,IWK,IND,IFAIL,
     &                   DLDT_FOUT,AANTAL_ITERATIES,US)
           WRITE(*,'(2E20.6,E2)') TYD,E(1,1)
           IF (TYD.GE.TYD_FILE) THEN
             CALL FILE(IR,TYD,L,PHI,E)
             TYD_FILE = 2*TYD_FILE
           END IF
        END DO
        CALL FILE(IR,TYD,L,PHI,E)
        END

        SUBROUTINE GRID(IR,GRID_GRENS,GRID_OPBOUW,PHI)
C-----
C       Gridopbouw, in te stellen met parameters GRID_OPBOUW en GRID_GRENS.
C       Fijn grid nabij medium:              Grid_opbouw > 1.
C       Fijn grid nabij koek/slurry-opp:     Grid_opbouw < 1.
C       Grid over hele koek steeds fijner:   Grid_grens  < 1.
C       Grid over gedeelte v/d koek fijner:  Grid_grens  > 1.
C-----
          INTEGER I,IR
          REAL*8  GRID_GRENS,GRID_OPBOUW,SUM,PHI(IR)

          PHI(1) = 0.0
          PHI(2) = 1.0
          SUM    = 1.0
          DO I=3,IR
             IF (I.LE.(GRID_GRENS*IR)) THEN
                PHI(I) = PHI(I-1)*GRID_OPBOUW
             ELSE
                PHI(I) = PHI(I-1)
             END IF
             SUM = SUM+PHI(I)
          END DO
          DO I=2,IR
             PHI(I) = PHI(I-1)+PHI(I)/SUM
          END DO
        END

        SUBROUTINE INIT(IR,TYD_INIT,L,DLDT_INIT,PHI,E)
C-----
C       Initialisatie
C-----
          INTEGER I,IR
          REAL*8  TYD_INIT,L,DLDT_INIT
          REAL*8  PHI(IR),E(IR),PS(50)
          REAL*8  MACHT,EPS_0,EPS_SL,TERM_PS,TERM_L
          REAL*8  UT_0,PS_0,PL(50)
          REAL*8  ETA,PA,P1,K0,DELTA,BETA,E_0,E_SL,RHO_L,RHO_S,G,KM,DKM
          COMMON  /MONITOR     /UT_0,PS_0,PL
          COMMON  /CONSTANTEN /ETA,PA,P1,K0,DELTA,BETA,E_0,E_SL,
     &                         RHO_L,RHO_S,G,KM,DKM

          MACHT     = 1-DELTA
          EPS_SL    = E_SL/(1+E_SL)
          EPS_0     = E_0/(1+E_0)
          TERM_PS   = (KM*P1/DKM)**2/(K0*ETA)
          TERM_L    = K0*PA*DKM/KM/MACHT
          PS_0      = (1-EPS_SL)/(EPS_SL-EPS_0)*TERM_PS*TYD_INIT
          UT_0      = KM/ETA/DKM*(P1-PS_0)
          L         = TERM_L*((1+PS_0/PA)**MACHT-1)/(P1-PS_0)
          DLDT_INIT = (1-EPS_SL)/(EPS_SL-EPS_0)*KM/ETA/DKM*(P1-PS_0)
          DO I=1,IR
             PS(I) = ((1-PHI(I))*((1+PS_0/PA)**MACHT-1)+1)**(1/MACHT)*PA-PA
             PL(I) = P1-PS(I)
             E(1,I)  = (1+E_0)*(1+PS(I)/PA)**(-BETA)-1
          END DO
        END

        SUBROUTINE FILE(IR,TYD,L,PHI,E)
C-----
C       Wegschrijven L, e, Ps en Pl als functie van de
C       dimensieloze hoogte Phi en tijd naar FOR001.DAT.
C-----
          INTEGER I,IR
          REAL*8  TYD,L,PS,MACHT
          REAL*8  PHI(IR),E(IR)
          REAL*8  UT_0,PS_0,PL(50)
          REAL*8  ETA,PA,P1,K0,DELTA,BETA,E_0,E_SL,RHO_L,RHO_S,G,KM,DKM
          COMMON  /MONITOR     /UT_0,PS_0,PL
          COMMON  /CONSTANTEN /ETA,PA,P1,K0,DELTA,BETA,E_0,E_SL,
     &                         RHO_L,RHO_S,G,KM,DKM

          WRITE(1,'(A,F14.6)') '  Tijd  =',TYD
          WRITE(1,'(A,E13.6E2)') '  Koekdikte  =',L
          WRITE(1,*) '      Phi      e          Ps          Pl'
          MACHT = 1/BETA
          DO I=1,IR
             PS = ((1+E_0)/(1+E(I)))**MACHT*PA-PA
             WRITE(1,'(2X,E13.6E2,2X,F8.5,2X,F8.1,2X,E13.6E2)')
     &             PHI(I),E(I),PS,PL(I)
          END DO
          WRITE(1,*)
        END

        SUBROUTINE ITERATIE(NPDE,M,PDEF,BNDY,TYD,TYD_ITER,E,IU,IR,PHI,RELERR,
     &                      ABSERR,INORM,MONTR,INON,IBAND,WORK,IWK,IND,IFAIL,
     &                      DLDT_FOUT,AANTAL_ITERATIES,US)
C-----
C       Berekend en vergelijkt na iedere aanroep van NAG-routine D03PGF
C       de oude en nieuwe dL/dt. Indien nodig wordt een iteratieve
C       berekening uitgevoerd.
C-----
          INTEGER  I,IR,TELLER,QUIT,AANTAL_ITERATIES
          INTEGER  NPDE,M,IU,INORM,INON,IBAND,IWK,IND,IFAIL
          REAL*8   TYD,TYD_OLD,TYD_ITER,TYD_STOP,TYDSTAP
          REAL*8   E(1,IR),PHI(IR)
          REAL*8   RELERR,ABSERR,WORK(IWK)
          REAL*8   MACHT,COUNT1,COUNT2
          REAL*8   DPHI,PHIGEM,DPS_DPHI
          REAL*8   EPS1,EPS2,EPS_OLD1,EPS_OLD2,DEPS
          REAL*8   EPS_0,EPS_SL,EPSSL_CONTROLE,CONTROLE
          REAL*8   US,DLDT_NEW,DLDT_FOUT,L_OLD
          REAL*8   FOUT,FOUTMIN,FOUTMAX
          REAL*8   FILTRAAT,AANVOEP_0
          SAVE     FILTRAAT,AANVOEP_0
          DATA     FILTRAAT  /0./,AANVOEP_0  /0./teller  1/
          REAL*8   UT,PS_0,PL(50)
          REAL*8   E_OLD(50)
          REAL*8   L,DLDT_GESCHAT
          REAL*8   ETA,PA,P1,K0,DELTA,BETA,E_0,E_SL,RHO_L,RHO_S,G,KM,DKM
          EXTERNAL PDEF,BNDY,MONTR
          COMMON   /MONITOR     UT,PS_0,PL
          COMMON   /VOIDRATIO   E_OLD
          COMMON   /GEGEVENS    L,DLDT_GESCHAT
          COMMON   /CONSTANTEN  ETA,PA,P1,K0,DELTA,BETA,E_0,E_SL,
     &                         RHO_L,RHO_S,G,KM,DKM

          MACHT   = 1/BETA
          EPS_0   = E_0/(1+E_0)
          EPS_SL  = E_SL/(1+E_SL)
          TYDSTAP =  TYD_ITER-TYD)/AANTAL_ITERATIES
          TELLER  = 1
          DO WHILE(TYD.LT.TYD_ITER)
            TYD_OLD       = TYD
            TYD_STOP      = TYD+TYDSTAP
            DO I=1,IR
              E_OLD(I) = E(1,I)
            END DO
            QUIT = 0
            DO WHILE (QUIT.NE.1)

C-----        Quit = 1 als dL/dt geconvergeerd is.
C
C             Aanroep van NAG-routine D03PGF. Vervolgens wordt uit het
C             oude en nieuwe porositeitsprofiel een nieuwe schatting
C             van dL/dt gemaakt met de volgende formule:
C
C                     (1-eps_sl)*(UT+US)+L*integraal(depe/dt*dPhi)
C             dL/dt = --------------------------------------------
C                                    (eps_sl - eps_0)
C-----
              CALL D03PGF(NPDE,M,PDEF,BNDY,TYD,TYD_STOP,E,
     &                    IU,IR,PHI,RELERR,ABSERR,INORM,MONTR,
     &                    INON,IBAND,WORK,IWK,IND,IFAIL)
              COUNT1 = 0
              COUNT2 = 0
              DO I=1,(IR-1)
                 DPHI    = PHI(I+1)-PHI(I)
                 PHIGEM  =  PHI(I)+PHI(I+1))/2
                 EPS1    = E(1,I)/(1+E(1,I))
                 EPS2    = E(1,I+1)/(1+E(1,I+1))
                 EPS_OLD1 = E_OLD(I)/(1+E_OLD(I))
                 EPS_OLD2 = E_OLD(I+1)/(1+E_OLD(I+1))
                 DEPS    = EPS2-EPS1
                 COUNT1  = COUNT1+((EPS1-EPS_OLD1)+(EPS2-EPS_OLD2))/2/
     &                     TYDSTAP*DPHI
```

```
            COUNT2   = COUNT2+PHIGEM*DEPS
          END DO
          DLDT_NEW = ((1-EPS_SL)*(UT+US)+L*COUNT1)/(EPS_SL-EPS_0+COUNT2)
C-----
C         Controle of geschatte en berekende dL/dt met elkaar overeenkomen,
C         zo niet dan worden de tijd, en de waarden van e teruggezet en
C         wordt de integratie opnieuw uitgevoerd met de nieuwe dL/dt.
C-----
          FOUT     = ABS(DLDT_NEW/DLDT_GESCHAT)
          FOUTMAX  = 1+DLDT_FOUT
          FOUTMIN  = 1/FOUTMAX
          IF ((FOUT.GE.FOUTMAX).OR.(FOUT.LE.FOUTMIN)) THEN
             TYD          = TYD_OLD
             TYD_STOP     = TYD_OLD+TYDSTAP
             DLDT_GESCHAT = DLDT_NEW
             DO I=1,IR
                E(1,I) = E_OLD(I)
             END DO
          ELSE
C-----
C            Controle integratieverloop m.b.v. een massabalans:
C
C                        L*int((1-eps)*dPhi)
C            eps_sl = 1 - -------------------
C                          int((ut+us)*dt) + L
C-----
             QUIT     = 1
             COUNT1   = 0
             FILTRAAT = FILTRAAT + UT*TYDSTAP
             AANVOER_S = AANVOER_S + (UT+US)*TYDSTAP
             DO I=1,(IR-1)
                DPHI   = PHI(I+1)-PHI(I)
                EPS1   = E(1,I)/(1+E(1,I))
                EPS2   = E(1,I+1)/(1+E(1,I+1))
                COUNT1 = COUNT1+(1-(EPS1+EPS2)/2)*DPHI
             END DO
             EPSSL_CONTROLE = 1-L*COUNT1/(AANVOER_S+L)
             CONTROLE       = EPSSL_CONTROLE/EPS_SL
C-----
C            Tijd, dL/dt, koekdikte, Ps, Ut en controle-parameter voor
C            het integratieverloop worden naar file FOR011.DAT geschreven.
C-----
             IF (TELLER.LT.(AANTAL_ITERATIES/5)) THEN
                TELLER = TELLER+1
             ELSE
                WRITE(11,'(E11.4E2,2E11.4E2,F10.1,E12.5E2,E10.3E2,F7.4)')
     &                 TYD,DLDT_NEW,L,PS_0,UT,FILTRAAT,CONTROLE
                TELLER = 1
             END IF
C-----
C            Voor de volgende tijdstap wordt een nieuwe dL/dt geschat.
C
C                   (1-eps_0)*(k/eta*(-dPs/dx+(rho_l-rho_s)(1-eps_0)*g))x=1
C            dL/dt = ------------------------------------------------------
C                                    (eps_sl-eps_0)
C
C                   (1-eps_sl)*Us
C                 + --------------  - Ut
C                   (eps_sl-eps_0)
C-----
             DPS_DPHI     = (((1+E_0)/(1+E(1,IR-1)))**MACHT*PA-PA)/
     &                      (PHI(IR-1)-1)
             DLDT_GESCHAT= (1-EPS_0)/(EPS_SL-EPS_0)*KO/ETA*
     &                      (-DPS_DPHI/L+(RHO_L-RHO_S)*(1-EPS_0)*G) +
     &                      (1-EPS_SL)*US/(EPS_SL-EPS_0) - UT
             L            = L+DLDT_NEW*TYDSTAP
          END IF
        END DO
      END DO
    END DO
  END

  SUBROUTINE PDEF(NPDE,PHI,TYD,E,DEDPHI,P,G,C)
C-----
C     Definitie PDV in de vorm:
C
C     C * de/dt =  d/dPhi*(G*de/dPhi) + F
C
C     met C = f(Phi,t,e,de/dPhi)
C         F = f(Phi,t,e,de/dPhi)
C         G = f(Phi,t,e)
C-----
      INTEGER NPDE
      REAL*8  PHI(NPDE),TYD
      REAL*8  E(NPDE),DEDPHI(NPDE)
      REAL*8  P(NPDE),G(NPDE),C(NPDE)
      REAL*8  MACHT1,MACHT2,G1,G2,G3,F1,F2,F3
      REAL*8  UT,PS_0,PL(50)
      REAL*8  L,DLDT
      REAL*8  ETA,PA,P1,KO,DELTA,BETA,E_0,E_SL,RHO_L,RHO_S,GZ,KN,DXN
      COMMON  /MONITOR    /UT,PS_0,PL
      COMMON  /GEGEVENS   /L,DLDT
      COMMON  /CONSTANTEN /ETA,PA,P1,KO,DELTA,BETA,E_0,E_SL,
     &                     RHO_L,RHO_S,GZ,KN,DXN

      MACHT1 = (1-DELTA)/BETA
      MACHT2 = 2-DELTA/BETA
      G1     = PA*KO/ETA/BETA
      G2     = 1/(1+E(1))**2
      G3     = ((1+E_0)/(1+E(1)))**MACHT1
      F1     = MACHT2*(RHO_L-RHO_S)*GZ*KO/ETA/(1+E_0)**2
      F2     = (1+E(1))*((1+E_0)/(1+E(1)))**MACHT2
      F3     = L/(1+E(1))**2*DEDPHI(1)
      C(1)   = (L/(1+E(1)))**2
      G(1)   = G1*G2*G3
      P(1)   = (UT+PHI(1)*DLDT-F1*F2)*F3
    END

    SUBROUTINE BNDY(NPDE,TYD,E,IBND,P,Q,R)
C-----
C     Randvoorwaarden in de vorm:
C
C     P(t) * e + Q(t) * de/dPhi = R(t,e)
C
C     Tussen de grenzen Phi = 0 (IBND=0)
C                   en Phi = 1 (IBND=1)
C-----
      INTEGER NPDE,IBND
      REAL*8  TYD,E(NPDE),P(NPDE),Q(NPDE),R(NPDE)
      REAL*8  MACHT,Q1,Q2
      REAL*8  UT,PS_0,PL(50)
      REAL*8  L,DLDT
      REAL*8  ETA,PA,P1,KO,DELTA,BETA,E_0,E_SL,RHO_L,RHO_S,GZ,KN,DXN
      COMMON  /MONITOR    /UT,PS_0,PL
      COMMON  /GEGEVENS   /L,DLDT
      COMMON  /CONSTANTEN /ETA,PA,P1,KO,DELTA,BETA,E_0,E_SL,
     &                     RHO_L,RHO_S,GZ,KN,DXN

      MACHT = (1-DELTA)/BETA
      Q1    = PA*KO/ETA/BETA/L
      Q2    = ((1+E_0)/(1+E(1)))**MACHT
      IF (IBND.EQ.0) THEN
```

```
         Q(1) = -(Q1*Q2)
         R(1) = KO/ETA*((1+E_0)/(1+E(1)))**(-DELTA/BETA)*(RHO_L-RHO_S)*G-UT
      ELSE
         P(1) = 1
         Q(1) = 0
         R(1) = E_0
      END IF
    END

    SUBROUTINE MONTR(NPDE,PHI,IR,TYD,TYD_DAARVOOR,E,IU,
     &                TYD_STOP,TYDSTAP)
C-----
C     Subroutine voor tussentijdse berekeningen van Ps_0 en Ut.
C-----
      INTEGER I,IR,NPDE,IU
      REAL*8  PHI(IR),E(1,IR)
      REAL*8  TYD,TYD_DAARVOOR,TYD_STOP,TYDSTAP,MACHT
      REAL*8  COUNT,PS,DPHI,EPS1,EPS2,EPS_GEM
      REAL*8  UT,PS_0,PL(50)
      REAL*8  L,DLDT
      REAL*8  ETA,PA,P1,KO,DELTA,BETA,E_0,E_SL,RHO_L,RHO_S,G,KN,DXN
      COMMON  /MONITOR    /UT,PS_0,PL
      COMMON  /GEGEVENS   /L,DLDT
      COMMON  /CONSTANTEN /ETA,PA,P1,KO,DELTA,BETA,E_0,E_SL,
     &                     RHO_L,RHO_S,G,KN,DXN

      MACHT  = 1/BETA
      COUNT  = 0
      PL(IR) = P1
      DO I=(IR-1),1,-1
         DPHI    = PHI(I+1)-PHI(I)
         EPS1    = E(1,(I+1))/(1+E(1,(I+1)))
         EPS2    = E(1,I)/(1+E(1,I))
         EPS_GEM = (EPS1+EPS2)/2
         PS      = ((1+E_0)/(1+E(1,I)))**MACHT*PA-PA
         COUNT   = COUNT+(RHO_S*(1-EPS_GEM)+RHO_L*EPS_GEM)*G*L*DPHI
         PL(I)   = P1-PS+COUNT
      END DO
      PS_0  = ((1+E_0)/(1+E(1,1)))**MACHT*PA-PA
      UT    = KN/ETA/DXN*PL(1)
    END
```

```
C
C filtra for
C dit programma berekent porositeits- en compress.wdr.v profiel.en
C in een compressibele filterkoek tijdens filtratie
C voor integratie van de PDV wordt de NAG-subroutine D01PCF gebruikt
C
C vaste stof wordt als elastisch beschouwd
C
C constitutieve vergelijkingen
C 1/(1+e)=1/(1+e0)*(1+pe/pa)^beta
C K=K0*(1+e0)/(1+e)]^(-delta/beta
C
      OPTIONS/CHECK/EXTEND_SOURCE
C
      REAL*8   TYD,TYD_INTERVAL,TYD_STOP
      REAL*8   VOIDRATIO(1:20),VOIDRATIO_0,SUM
      REAL*8   RELERR,ABSERR,WORK(65)
      REAL*8   X(20),Z(25),H(20),A(4),PS(1:25)
      REAL*8   PI,ETA,YMAX
      REAL*8   RM,GAMMA,UT,HOOGTE_TC
      REAL*8   PSTER,RANDVOORWAARDE,EAVINT
      REAL*8   V,ETA1,PL(1:25),PABAR(1:25)
      REAL*8   DELTA,GEMVOIDRATIO,LAMBDA,BETA
      REAL*8   T1MAX,PA,KC,INTEGRAAL,MACHT
      REAL*8   GEMPS,INTTERM,LIQVOLINT
      REAL*8   SOLVOL,PSBAR(1:25),INTEGRAND(1:25)
C
      INTEGER  NPDE,M,IU,INORM,INUM,IBAND,IWF,IND,IFAIL
      INTEGER  I,IR,IGRENS,AANTAL_GRID_PUNTEN,ISS
C
      EXTERNAL PDEF,BNDY,MONIT
C
      COMMON   /GEMVOID/EAVINT
      COMMON   /GEMSPANNING/GEMPS
      COMMON   /CONVECT/UT
      COMMON   /GRID/AANTAL_GRID_PUNTEN
      COMMON   /CONSTANTEN/ETA,PA,KC,DELTA,BETA,LAMBDA,PI,
     *                     HOOGTE_TC,VOIDRATIO_0,RM
      COMMON   /RAND/RANDVOORWAARDE
C
      CALL CONSTANTEN(ETA,PA,KC,DELTA,BETA,LAMBDA,PI,
     *                HOOGTE_TC,VOIDRATIO_0,RM)
C
C
C berekenen ymax waarde
C
      YMAX=1.0D0/(1.0D0-VOIDRATIO_0)*HOOGTE_TC
C
C roosterpunten grid berekenen  wordt geschreven naar PGRID.DAT
C grid wordt steeds zicht.baar.  filtermedium
C
      AANTAL_GRID_PUNTEN=17 !ISS
      IR=AANTAL_GRID_PUNTEN
      GAMMA=1.5 !4
      IGRENS=0.5*IR
      H(1)=1.0
      SUM=1.0
      DO I=2,IR-1
         IF (I.LE.IGRENS) THEN
            H(I)=H(I-1)*GAMMA
         ELSE
            H(I)=H(I-1)
         END IF
         SUM=SUM+H(I)
      END DO
      X(1)=0.0D0
      DO I=1,IR-1
         H(I)=H(I)*YMAX/SUM
         X(I+1)=X(I)+H(I)
      END DO
C Berekenen H/2.
      H(20)=H(19)*GAMMA
C
C beginvoorwaarden
C
      DO I=1,IR
         VOIDRATIO(I)=I*VOIDRATIO_0
      END DO
      DO I=1,IR
         PL(I)=PI
         PS(I)=PI*PL(I)
      END DO
      IU=1
      UT=0.0D0
      DO I=1,IR
         Z(I)=X(I)*(1.0-VOIDRATIO_0)
      END DO
C
      DO I=1,IR
         INTEGRAND(I)=1.0-VOIDRATIO(I)
      END DO
      LIQVOLINT=0.0D0
      INTTERM=1.0D0
        DO I=2,IR
          INTTERM=INTTERM+.5D0*(INTEGRAND(I-1)+INTEGRAND(I))*
     *              (X(I)-X(I-1))/YMAX
          LIQVOLINT=INTTERM
        END DO
      EAVINT=LIQVOLINT
C
      NPDE=1
      M=0
      RELERR=0.000001
      ABSERR=0.000001
      INORM=0
      INUM=0
      IBAND=1
      IND=1
      IWF=65
      IFAIL=0
C
C start tijd en tijdsinterval, waarbij waarden resultaten worden opgegeven
C
      TYD=0.0
      TYD_INTERVAL=.1
C
C berekenen op het scherm
C
      TYPE 97
   96 FORMAT
      TYPE 97
   97 FORMAT (10X,'UNPREDICTABLE AXIS FILTRATION
     *')
      TYPE 97
   97 FORMAT (10X,'ERIK LA HEIJ')
C
      TYPE 100
  100 FORMAT (10X,'START BEREKENINGEN')
     *       /10X,'------ -----')
     *       /10X,'TIJD',3X,'VOIDRATIO(1)')
      TYPE 101,TYD,VOIDRATIO(1)
  101 FORMAT (10X,F10.4,15X,F10.4)
C
C beginvoorwaarden wegschrijven naar file
C
      DO I=1,IR
         WRITE(1,*) Z(I),VOIDRATIO(I),PS(I)
      END DO
C
C start integratie PDV
C zo.if een bepaalde subroutine gebruikt wordt
C
      DO WHILE (TYD.LT.10.0)
         TYD=TYD+TYD_INTERVAL
         CALL D03PCF(NPDE,M,PDEF,TYD,TYD+TYD_INTERVAL,
     *               IR,PS,RELERR,ABSERR,INORM,INUM,IBAND,
     *               IBAND,WORK,IWF,IND,IFAIL)
C
C tussenresultaten naar scherm en file  PGRID.DAT en PGRID.DAT
C
         DO I=1,IR
            WRITE(1,*) Z(I),VOIDRATIO(I),PS(I)
         END DO
            TYPE 101,TYD,VOIDRATIO(1)
C
C roosterpunten worden weggeschreven naar PGRID.DAT
C
      DO I=2,IR
         Z(I)=Z(I-1)+H(I-1)*(1.0D0-VOIDRATIO(I-1))/(1.0D0-VOIDRATIO(I))
      END DO
C
C tussenresultaten naar scherm en file  PGRID.DAT en PGRID.DAT
C
         DO I=1,IR
            WRITE(1,*) Z(I),VOIDRATIO(I),PS(I)
         END DO
            TYPE 101,TYD,VOIDRATIO(1)
C
C hydraulische en compressibiliteit profielen worden berekend en geschreven naar
C PGRAD.DAT
C
         DO I=1,IR
            MACHT=1.0D0/BETA
            PABAR(I)=(1.0-VOIDRATIO(I))/(1.0-VOIDRATIO(1))**MACHT
            PS(I)=PABAR(I)*PA
            PL(I)=PS(I)/PI
         END DO
         WRITE(1,*) TYD,'Zeit Sec'
C
C Berekenen van de gemiddelde  voidratio  EAVINT  en compress.wdr.v  GEMPS
C
      DO I=1,IR
         INTEGRAND(I)=1.0-VOIDRATIO(I)
      END DO
C
      IF (TYD.GT.1.0D-10) THEN
         LIQVOLINT=0.0D0
         INTTERM=1.0D0
           DO I=2,IR
             Z(I)=Z(I-1)
             INTTERM=INTTERM+.5D0*(INTEGRAND(I-1)+INTEGRAND(I))*
     *                 (X(I)-X(I-1))/YMAX
             LIQVOLINT=INTTERM
           END DO
         EAVINT=LIQVOLINT
         WRITE(8,*) TYD,'Zeit Sec',EAVINT
C
      END IF
         DO I=1,IR
           MACHT=1.0D0/BETA
           PSBAR(I)=(1.0-VOIDRATIO(I))/(1.0-VOIDRATIO(1))**MACHT
           PS(I)=PSBAR(I)*PA
         END DO
      INTEGRAAL=0.0D0
         DO I=1,IR
         Z(I)=0.0D0
            INTEGRAAL=INTEGRAAL+.5D0*(INTEGRAND(I-1)+INTEGRAND(I))*
     *                (X(I)-X(I-1))/YMAX
            GEMPS=INTEGRAAL
         END DO
      END DO
      END
C
      SUBROUTINE PDEF(NPDE,T,TYD,VOIDRATIO,DVOIDRATIO,P,R,S)
C
      INTEGER NPDE,I,AANTAL_GRID_PUNTEN,IR
      REAL*8  X(25),TYD,VOIDRATIO(1:25),DVOIDRATIO(1:25)
      REAL*8  P(25),R(25),S(25),PABAR(25),PSTER
      REAL*8  UT,VOIDRATIO_0,MACHT,PA,KC
      REAL*8  PI,PL(25),ETA,DP,APS,DM,RM,GAMMA,HOOGTE_TC
      REAL*8  DELTA,BETA,LAMBDA
C
      COMMON  /CONVECT/UT
      COMMON  /GRID/AANTAL_GRID_PUNTEN
      COMMON  /CONSTANTEN/ETA,PA,KC,DELTA,BETA,LAMBDA,PI,
     *                    HOOGTE_TC,VOIDRATIO_0,RM
C
      MACHT=1.0D0/BETA
      PABAR(1)=(1.0D0-VOIDRATIO(1))/(1.0D0-VOIDRATIO_0)**MACHT
      PSTER=PABAR(1)*PA
      QD=1.0D0*ETA/BETA*PA*KC
      C1=1.0D0/(1.0D0-VOIDRATIO(1))**2
      C2=1.0D0/(VOIDRATIO(1)*(1.0D0-VOIDRATIO(1)))**(DELTA/BETA)
C
      P(1)=0.0D0
      R(1)=QD*C1*C2*(1.0D0-PSTER/PA)
      P(2)=0.0D0
C
      RETURN
      END
C
C
      SUBROUTINE BNDY(NPDE,TYD,VOIDRATIO,IBND,R,S,D)
C
      INTEGER I,AANTAL_GRID_PUNTEN,NPDE,IBND
      REAL*8  TYD,VOIDRATIO(*),R(*),S(*),D(*)
      REAL*8  VOIDRATIO_0,PI,ETA,PA,KC
      REAL*8  DP,RM,GAMMA,HOOGTE_TC,UT
```

```
      REAL*8  DVOIDRATIO_X,Q0,Q1,MACHT
      REAL*8  PABAR,PSTER,P2,P3,V,ETA1
      REAL*8  BETA,DELTA,N,Q2,LAMBDA

C
      COMMON  /CONVECT/UT
      COMMON  /GRID/AANTAL_GRID_PUNTEN
      COMMON  /CONSTANTEN/ETA,PA,RO,DELTA,BETA,LAMBDA,P1,
     *                    HOOGTE_TO,VOIDRATIO_0,RM



C
C randvoorwaarde op x=H(t)
C
      IF (IBND.EQ.1) THEN
         P(1)=1.0
         Q(1)=0.0
         S(1)=VOIDRATIO_0
      ELSE
C
C randvoorwaarde op x=0  ut=ulokRM*(P1-ps,x=0)
C
      MACHT=1.0D0/BETA
      PABAR=((1.0D0+VOIDRATIO_0)/(1.0D0+VOIDRATIO(1)))**(MACHT)
      PSTER=(PABAR-1.0)*PA
      Q0=(1.D/ETA/BETA)*PA*RO
      Q1=(1.0/(1.0+VOIDRATIO(1)))**2.0
      Q2=((1.0D0+VOIDRATIO_0)/(1.0D0+VOIDRATIO(1)))**(-DELTA/BETA)



      P(1)=0
      Q(1)=Q0*Q1*Q2*(1.0D0+PSTER/PA)
      S(1)=ut
C
      END IF
C
      RETURN
      END
C
C
      SUBROUTINE MONTR(NPDE,X,IR,TYD,TYD_DAARVOOR,VOIDRATIO,IU,
     *                 TYD_STOP,TYDSTAP)
C
      INTEGER IU,NPDE,IR,IMB,I,AANTAL_GRID_PUNTEN
      REAL*8  X(*),TYD,TYD_DAARVOOR,VOIDRATIO(1:*),1:40)
      REAL*8  UT,TYD_STOP,TYDSTAP
      REAL*8  P1,PO,ETA,DP,APS,DM,MUM,F,DX,RM
      REAL*8  GAMMA,HOOGTE_TO,VOIDRATIO_0,MACHT
      REAL*8  PSTER,PABAR,PSTEP1,PABAR1,PL1,PL1
      REAL*8  DELTA,RO,PA,V,ETA1
      REAL*8  TERM1,TERM2,TERM3,LAMBDA,BETA
      REAL*8  EAVINT,SOLVOL,LIQVOLINT,INTTERM
      REAL*8  GEMPS,PS(1:25),INTEGRAAL,PSBAR(1:25)
C
      COMMON  /GEMVOID/EAVINT
      COMMON  /GEMSPANNING/GEMPS
      COMMON  /CONVECT/UT
      COMMON  /GRID/AANTAL_GRID_PUNTEN
      COMMON  /CONSTANTEN/ETA,PA,RO,DELTA,BETA,LAMBDA,P1,
     *                    HOOGTE_TO,VOIDRATIO_0,RM
C
      MACHT=1.0D0/BETA
      PABAR=(1.0D0+VOIDRATIO_0)/(1.0D0+VOIDRATIO(1,1))**(MACHT)
      PSTER=(PABAR-1.0D0)*PA


      PL1=P1-PSTER

C
      UT=RM*PL1
C
C tijd,tijdstap en ut wegschrijven naar FOR003.DAT
C
      WRITE(3,'(2e15.5e2)') TYD,UT
C
C


      RETURN
      END
C
C
      SUBROUTINE CONSTANTEN(ETA,PA,RO,DELTA,BETA,LAMBDA,P1,HOOGTE_TO,VOIDRATIO
     *                      RM)
C
      REAL*8 P1,ETA,PA,RM,DELTA,LAMBDA,BETA
      REAL*8 HOOGTE_TO,VOIDRATIO_0,RO
C
      ETA=1.0D-3
      PA=3.7*D3
      RO=4.5D-14
      DELTA=2.05891D0
      BETA=0.3150D0
      LAMBDA=1D-2
      P1=2D5
      HOOGTE_TO=4.5D-2
      VOIDRATIO_0=11.40D0
      RM=5.89D-9
C
C P1=aangelegde druk
C ETA=viscositeit filtraat
C PA=omrekeningsconstante
C RO=permeabiliteitsconstante
C lambda delta=compressieconstanten
C HOOGTE_TO=dikte filterkoek op t=0
C VOIDRATIO_0=beginvoidratio op tijdstip t=0
C RM=weerstand filtermedium/viscositeit
C RM=RM/idr*ETA1


      RETURN
      END
```

```
C expressie for
C variable 1 0
C dit programma berekent porositeits- en compressiedruk profielen
C in een compressibele filtercoek tijdens expressie
C berekeningen zijn gebaseerd op algemeen aanvaardbare
C differentiaalvergelijkingen zoals weergegeven in de filtrat.e.literatuur
C voor integratie van de PDV wordt de NAG-subroutine D03PCF gebruikt
C
C
C vaste stof wordt als elastisch beschouwd
C
C constitutieve vergelijkingen
C 1/(1+e)=1/(1+e0)*(1+ps/pa)**beta
C K=K0*((1+e0)/(1+e))**(-delta/beta)
C
      OPTIONS/CHECK/EXTEND_SOURCE
C
      REAL*8   TYD,TYD_INTERVAL,TYD_STOP,W
      REAL*8   VOIDRATIO(1,20), VOIDRATIO_0,LAMBDA,SUM
      REAL*8   RELERR,ABSERR,WORK(800)
      REAL*8   X(20),Z(20),H(20),A(20),PS(1,25)
      REAL*8   P1,PO,ETA,BETA,YMAX,Y(25)
      REAL*8   K,DX,RM,GAMMA,UT,HOOGTE_TO, HOOGTE_TOP
      REAL*8   PSTER,RANDVOORWAARDE,MACHT
      REAL*8   Q1(1,25),Q2,Q3,Q4(1,25),Q5(1,25),Q6(1,25)
      REAL*8   N,DELTA,GEMVOIDRATIO,PABAR(1,25),poro(1,20)
      REAL*8   YINAX,PA,K0,INTEGRAAL,GEMPS
      REAL*8   EAVINT,EPSAVPL,PL(1,25),EPSAVINT
      REAL*8   INTEGRAND(1,25),INTTERM,LIQVOLINT
C
      INTEGER  NPDE,M,IU,INORM,INON,IBAND,IWK,IND,IFAIL
      INTEGER  I,IR,IGRENS,AANTAL_GRID_PUNTEN,IOS
C
      EXTERNAL PDEF BNDY MONTR
C
      COMMON   /CONVECT/UT,PS
      COMMON   /GEMV/GEMVOIDRATIO
      COMMON   /GRID/AANTAL_GRID_PUNTEN
      COMMON   /CONSTANTEN/ETA,PA,K0,DELTA,BETA,LAMBDA,N,P1,
     *                     HOOGTE_TO,HOOGTE_TOP,VOIDRATIO_0,RM
      COMMON   /RAND/RANDVOORWAARDE
      COMMON   /MASSABALANS/EPSAVINT,EPSAVPL
C
      CALL CONSTANTEN(ETA,PA,K0,DELTA,BETA,LAMBDA,N,P1,
     *                HOOGTE_TO,HOOGTE_TOP,VOIDRATIO_0,RM)
C
C
C berekening ymax waarde
C
      YMAX=1.0D0/(1.0D0-VOIDRATIO_0)*HOOGTE_TOP
C
C roosterpunten grid berekenen. wordt geschreven naar FOR002.DAT
C grid wordt steeds fijner naar bij filtermedium
C
      AANTAL_GRID_PUNTEN=17
      IP=AANTAL_GRID_PUNTEN
      GAMMA=1.3
      IGRENS=0.5*IP
      H(1)=1
      SUM=1.0
      DO I=2,IP-1
         IF (I.LE.IGRENS) THEN
            H(I)=H(I-1)*GAMMA
         ELSE
            H(I)=H(I-1)
         ENDIF
         SUM=SUM+H(I)
      ENDDO
      X(1)=0.0D0
      DO I=1,IP-1
         H(I)=H(I)*YMAX/SUM
         X(I+1)=X(I)+H(I)
      ENDDO
C
C beginvoorwaarden worden ingelezen van for001.dat. eindsituatie van filtrat
C fase
C
      OPEN (UNIT=11, FILE='for011.DAT', STATUS='OLD', IOSTAT=IOS)
      IF (IOS.NE.0) THEN
         PRINT *,'OPEN-FOUT    IOS
      ELSE
        DO I=1,IP
           READ(11,'(4e13.5e2)') X(I),Y(I),VOIDRATIO(1,I),PS(1,I)
        ENDDO
      ENDIF
      TYD=0.0
C Uitrekenen van de gemiddelde voidratio bij het begin van de expressie
      DO I=2,IP
        Z(1)=0
        Z(I)=Z(I-1)+H(I-1)*(1.0D0+(VOIDRATIO(1,I-1)+VOIDRATIO(1,I))/2.0D0)
      ENDDO
      LIQVOLINT=0.0D0
      INTEGRAAL=0.0D0
         DO I=2,IP
            INTEGRAAL=INTEGRAAL+((VOIDRATIO(1,I-1)+VOIDRATIO(1,I))*
     *           ((X(1)-X(I-1))-(X(1)-X(I))))/(YMAX*2.0D0)
            LIQVOLINT=INTEGRAAL
         ENDDO
      GEMVOIDRATIO=LIQVOLINT
      RANDVOORWAARDE=VOIDRATIO(1,1)
      IU=1
      UT=0.0D0
C
      YINAX=1.0D0-1.0D0*GEMVOIDRATIO*HOOGTE_TO
      H(1)=1.0
      SUM=1.0
      DO I=2,IP-1
         IF (I.LE.IGRENS) THEN
            H(I)=H(I-1)*gamma
         ELSE
            H(I)=H(I-1)
         ENDIF
         SUM=SUM+H(I)
      ENDDO
      X(1)=0.0D0
      DO I=1,IP-1
         H(I)=H(I)*YINAX/SUM
         X(I+1)=X(I)+H(I)
      ENDDO
C
      DO I=1,IP
         Z(I)=X(I)*(1.0D0+GEMVOIDRATIO)
      ENDDO
      NPDE=1
      M=0
      RELERR=0.000001
      ABSERR=0.000001
      INORM=1
      INON=1
      IBAND=1
      IND=1
      IWK=810
      IFAIL=1
C
C start tijd en eindinterval, waarbinnen resultaten worden opgegeven
C
      TYD=1.0
      TYD_INTERVAL=1
      W=0.1
C
C berichten op het scherm
C
      TYPE 97
90    FORMAT
      TYPE 95
95    FORMAT(10X,'COMPRESSIBLE CAKE FILTRATION'
     *)
      TYPE 97
97    FORMAT(10X,'EXPRESSION OF FILTER CAKE'
     *)
      TYPE 100
100   FORMAT(10X,'START BEREKENINGEN
     *          10X,'-------------------
     *          10X,'TIJDIS      VOIDRATIO X=')
      TYPE 101,TYD,VOIDRATIO(1,20
101   FORMAT(15X,F7.1,10X,F7.4)
C
C beginvoorwaarden wegschrijven naar file
C
      DO I=1,IP
         poro(1,I)=voidratio(1,I)/(1+voidratio(1,I))
         WRITE(21,*) tyd,x(i), voidratio(1,I)
      ENDDO
         WRITE 21,*
C
C start integratie PDV
C zelf een bepaalde 'eindintegratietijd' invullen
C
      DO WHILE (TYD.LT.100000)
         TYD_STOP=TYD+1*TYD_INTERVAL
         CALL D03PCF(NPDE,M,PDEF,BNDY,TYD,TYD_STOP,VOIDRATIO,
     *               IU,IP,X,RELERR,ABSERR,INORM,MONTR,INON,
     *               IBAND,WORK,IWK,IND,IFAIL)
C
      DO I=2,IP
         Z(1)=0
         Z(I)=Z(I-1)+H(I-1)*(1.0D0+(VOIDRATIO(1,I-1)+VOIDRATIO(1,I))/2.0D0)
      ENDDO
C
C tussenresultaten naar scherm en file (FOR001.DAT)
C
         if (tyd.ge.w) then
           DO I=1,IP
             poro(1,I)=voidratio(1,I)/(1+voidratio(1,I))
             WRITE(11,*) TYD,x(i),voidratio(1,I)
             write(9,'(2e13.5e2)') tyd,x(i),
           ENDDO
           WRITE 11,*
           type 101,tyd,voidratio(1,20
           w=w+0.1*w
         end if
C
C hydraulische en compressiedruk profielen worden geschreven naar FOR016.DAT
C
         DO I=1,IP
            MACHT=1.0-BETA
            PABAR(1,I)=((VOIDRATIO(1,I)-VOIDRATIO(1,IP))/(VOIDRATIO(1,1)-VOIDRATIO(1,IP)))**MACHT
            PS(1,I)=PABAR(1,I)*PA
            PL(1,I)=P1*PS(1,I)
         ENDDO
         DO I=1,IP
            INTEGRAND(1,I)=(VOIDRATIO(1,I)/(1+VOIDRATIO(1,I)))
         ENDDO
         LIQVOLINT=0.0D0
         INTTERM=0.0D0
          DO I=2,IP
            INTTERM=(INTEGRAND(1,I-1)+INTEGRAND(1,I))*
     *              (X(I)-X(I-1))/(YMAX*2.0D0)
            LIQVOLINT=INTTERM
          ENDDO
         EAVINT=LIQVOLINT*PS(1,IP)
C
         INTEGRAAL=0.0D0
         DO I=2,IP
            Z(1)=0.0D0
              INTEGRAAL=INTEGRAAL+(PS(1,I-1)+PS(1,I))*((YINAX-X(I-1))-
     *                  (YINAX-X(I)))/(YINAX*2.0D0)
            GEMPS=INTEGRAAL*1.0D0
         ENDDO
C
C gemiddelde voidratio volgens profiel en volgens flux worden
C geschreven naar FOR009.DAT (check van massabalans
C
C
      ENDDO
      ENDDO
C
      SUBROUTINE PDEF(NPDE,X,TYD,VOIDRATIO,DVOIDRATIO_X,P,Q,C)
C
      INTEGER NPDE,I,AANTAL_GRID_PUNTEN,IP
      REAL*8  X(1),TYD,VOIDRATIO(1),DVOIDRATIO_X(1)
      REAL*8  P(1,1),Q(1),C(1),PABAR,PSTER
      REAL*8  UT,VOIDRATIO_0,MACHT,GO,G1
      REAL*8  P1,PO,ETA,K,DX,RM,GAMMA,HOOGTE_TO,HOOGTE_TOP
      REAL*8  BETA,PA,K0,G2,DELTA,N,GEMVOIDRATIO,PS
      REAL*8  LAMBDA
C
      COMMON   /CONVECT/UT,PS
      COMMON   /GEMV/GEMVOIDRATIO
      COMMON   /GRID/AANTAL_GRID_PUNTEN
      COMMON   /CONSTANTEN/ETA,PA,K0,DELTA,BETA,LAMBDA,N,P1,
     *                     HOOGTE_TO,HOOGTE_TOP,VOIDRATIO_0,RM
C
      MACHT=1.0D0/BETA
      PABAR=(1.0-VOIDRATIO(1))/(1.0-VOIDRATIO(1))**MACHT
      PSTER=PABAR*1.0*PA
      GO=1.0D0/BETA/PA**N
```

```
      G1=(1.0d0/(1.0d0+VOIDRATIO_0))**(2.0)
      G2=((1.0+VOIDRATIO_0)/(1.0+VOIDRATIO))**(-DELTA/BETA)
C
      C(1)=1.0
      G(1)=G0*G1*G2*(1.0D0-PSTEP/PA)
      F(1)=0
C
      RETURN
      END
C
C
      SUBROUTINE RNDV(NPDE,TYD,VOIDRATIO,IBND,P,Q,S)
C
      INTEGER I,AANTAL_GRID_PUNTEN,NPDE,IBND
      REAL*8  TYD,VOIDRATIO(*),P(*),Q(*),S(*)
      REAL*8  VOIDRATIO_0,P1,ETA,PA,KO,LAMBDA
      REAL*8  DX,RM,GAMMA,HOOGTE_TO,HOOGTE_TOP,UT
      REAL*8  DVOIDRATIO_X,QO,G1,MACHT
      REAL*8  PABAR,PSTEP,RANDVOORWAARDE
      REAL*8  BETA,DELTA,N,PS,GEMVOIDRATIO
C
      COMMON  /CONVECT/UT,PS
      COMMON  /GEMV/GEMVOIDRATIO
      COMMON  /GRID/AANTAL_GRID_PUNTEN
      COMMON  /CONSTANTEN/ETA,PA,KO,DELTA,BETA,LAMBDA,N,P1,
     *                    HOOGTE_TO,HOOGTE_TOP,VOIDRATIO_0,RM
      COMMON  /RAND/RANDVOORWAARDE
C
C randvoorwaarde op x=H(t)
C
      IF (IBND EQ.0) THEN
         P(1)=1.0
         Q(1)=0.0
         S(1)=RANDVOORWAARDE
      ELSE
C
C randvoorwaarde op x=0 voidratio wordt bepaald aan het einde van filtratiefase
C
         P(1)=0.0
         Q(1)=1.0
         S(1)=0.0
C
      END IF
C
      RETURN
      END
C
C
      SUBROUTINE MONTR(NPDE,X,IR,TYD,TYD_GAARVOOR,VOIDRATIO,IU,
     *                 TYD_STOP,TYDSTAP)
C
      INTEGER IU,NPDE,IR,IMB,AANTAL_GRID_PUNTEN
      REAL*8  X(*),TYD,TYD_GAARVOOR,VOIDRATIO(*),U(*),
      REAL*8  UT,TYD_STOP,TYDSTAP
      REAL*8  P1,PO,ETA,DM,MUW,Y,DX,RM
      REAL*8  GAMMA,HOOGTE_TO,HOOGTE_TOP,VOIDRATIO_0,MACHT
      REAL*8  PSTEP,PABAR,PSTEP1,PABAR1,PLIV,PLIO
      REAL*8  DELTA,BETA,N,PS,PA,PL1,PL2
      REAL*8  PABAR2,PABAR3,PSTEP2,PSTEP3
      REAL*8  LIQVOL,LIQVOLINT,SOURCE,EPSAVFL,EAVFL
      REAL*8  INTTERM,PERMST,FLUX,EAVINT,EPSAVINT,OLDFLUX
      REAL*8  PS,GEMVOIDRATIO,LAMBDA

C
      COMMON  /CONVECT/UT,PS
      COMMON  /GEMV/GEMVOIDRATIO
      COMMON  /GRID/AANTAL_GRID_PUNTEN
      COMMON  /CONSTANTEN/ETA,PA,KO,DELTA,BETA,LAMBDA,N,P1,
     *                    HOOGTE_TO,HOOGTE_TOP,VOIDRATIO_0,RM
      COMMON  /MASSABALANS/EPSAVINT,EPSAVFL

      RETURN
      END
C
C
      SUBROUTINE CONSTANTEN(ETA,PA,KO,DELTA,BETA,LAMBDA,N,P1,
     *                      HOOGTE_TO,HOOGTE_TOP,VOIDRATIO_0,RM)

      REAL*8 P1,ETA,PA,RM,BETA,DELTA,N
      REAL*8 HOOGTE_TO,HOOGTE_TOP,VOIDRATIO_0,KO,LAMBDA

C
      ETA=1.0D-3
      PA=3.750D3
      KO=11.6D-14
      DELTA=2.05891D0
      BETA=0.3150D0
      LAMBDA=0.01D0
      N=1.74D0
      P1=2D5
      HOOGTE_TO=1.2D-2
      HOOGTE_TOP=1.6D-2
      VOIDRATIO_0=11.4D0
      RM=5.89D-9

C
C P1=aangelegde druk:
C ETA=viscositeit filtraat.
C PA=omrekeningsconstante
C KO=permabiliteitsconstante
C beta,n,delta=compressie-constante:
C HOOGTE_TO=dikte filterkoek op t=0 (Expressie):
C HOOGTE_TOP=dikte filterkoek op t=0 (Filtratie)
C VOIDRATIO_0=beginvoidratio op tijdstip t=0
C RM=weerstand filtermedium
C
C
      RETURN
      END
```

```
C expres_via for
C versie 1.0
C dit programma berekent porositeits- en compressiedruk profiel van
C in een compressibele filterkoek tijdens expressie
C berekeningen zijn gebaseerd op algemeen aanvaardbare
C differentiaalvergelijkingen zoals weergegeven in de filtratieliteratuur
C voor integratie van de PDV wordt de MAC-Gutbrouliw DOIPDF gebruikt
C
C
C waare grijs wordt als visco elastisch beschouwd
C
C constitutieve vergelijkingen
C 1/(1-eta1/(1-eG1**1+pa/pa/(beta
C K=F0**(1-e01**(1-e1**(1-delta/beta
C
      OPTIONS/CHECK/EXTEND_SOURCE
C
      REAL*8   TYD,TYD_INTERVAL,TYD_STOP
      REAL*8   VOIDRATIO(1,20), VOIDRATIO_C LAMBDA2 SUM W
      REAL*8   RELERR,ABSERR,WORK(600),phi(20),pa_c(d(1 20   ws(d 1,20)
      REAL*8   X(20), Z(20), H(20), PS(1,25), e2(20), de2dvoid(20), ws(d new
      REAL*8   PI,PS,ETA,BETA,YMAX,Y(25), voidx,void_old(20), rer_c(d(20)
      REAL*8   K,DE,RM,GAMMA,UT,HOOGTE_TO,HOOGTE_TOP fout,re1,re2, a,b,c
      REAL*8   PSTER,RANDVOORWAARDE,RACHT,e2x,de2dvoidx,rer
      REAL*8   G1(1,25),G2,G3,G4(1,25),G5(1,25),G6(1,25), pan 1,20
      REAL*8   M,DELTA,GEMVOIDRATIO PABAR(1,25),pors(1,25),
      REAL*8   YMAX,PA,KC,INTEGRAAL GEMPS,tau,e,ei
      REAL*8   EAVINT,EPSAVFL,PL(1,25),EPSAVINT
      REAL*8   INTEGRAND(1,25),INTTERM,LIQVOLINT
C
      INTEGER  NPDE,M,IG,INORM,INON IBAND,IWK INC IFAIL
      INTEGER  I,IR,IGRENS,AANTAL_GRID PUNTEN,IOS
C
      EXTERNAL PDEF,BNDY,MONTR
C
      COMMON   /CONVECT/void
      COMMON   /GEMV/GEMVOIDRATIO
      COMMON   /GRID/AANTAL_GRID PUNTEN ir
      COMMON   /CONSTANTEN/ETA,PA,KC,DELTA,BETA,LAMBDA2,M,PI
     *                 HOOGTE_TO,HOOGTE_TOP,VOIDRATIO_0,RM tau,ei,e
      COMMON   /RAND/RANDVOORWAARDE
      COMMON   /MASSABALANS/EPSAVINT,EPSAVFL
      common   /phi/phi
      common   /void/voidratio,pae
C
      CALL CONSTANTEN ETA,PA,KC,DELTA,BETA,LAMBDA2,M,PI
     *                 HOOGTE_TO,HOOGTE_TOP,VOIDRATIO_0,RM,tau,ei,e
C
C
C berekenen ymax waarde
C
      YMAX=1.0D0 - 1.0D0*VOIDRATIO_0 **HOOGTE_TOP
C
C controlepunten grid berekenen  wordt geschreven naar PORTL.DAT
C grid wordt steeds tijdens run opnieuw berekend
C
      AANTAL_GRID PUNTEN=120
      IP=AANTAL_GRID_PUNTEN
      GAMMA=1.0 0
      IGRENS=0.9*IP
      H(1)=0.0
      SUM=0.0
      DO 10 I=1,IP-1
         IF (I.LE.IGRENS) THEN
            H(I+1)=H(I)+1.0/gamma
         ELSE
            H(I+1)=H(I)+1.0/YMAX-SUM
            X(I+1)=X(I)+H(I+1)
         END IF
         SUM=SUM+H(I)
10    CONTINUE
      X(1)=0.0D0
      DO 20 I=1,IP-1
         X(I+1)=X(I)+H(I+1)
20    CONTINUE
C
C
C start tijd en tijdsinterval, waarbinnen berekeningen worden uitgevoerd
C
      TYD=0.0
      TYD_INTERVAL=1.0D0
C
C berekenen pa bij eerste
C
      TYPE 90
90    FORMAT (' ')
      TYPE 95
95    FORMAT (10X,'COMPRESSIBLE CAKE FILTRATION'
     *     )
      TYPE 97
97    FORMAT (10X,'EXPRESSION OF FILTER CAKE'
     *     )
      TYPE 100
100   FORMAT (10X,'START BEREKENINGEN'
     *     /10X,'----------'
     *     /10X,'TIJD=0       VOIDRATIO /x='
      TYPE 101,TYD,VOIDRATIO(1,1)
101   FORMAT (15X,F7.1,10X,F7.4)
C
C beginwaardenwegschrijven naar file
C
      DO 11 IP
         pore(1,ip)=voidratio(1,ip)+voidratio(1,1
         WRITE(21,*) tyd,x(ip),voidratio(1,ip)
      END DO
         WRITE(21,*)
C
C start integratie PDE
C zelf een subroutine 'm.nd.integratie(ip)' schrijven
C
      DO WHILE (TYD.LT.10000)
         TYD_STOP=TYD+ TYD_INTERVAL
         CALL D03PCF(NPDE,M,PDEF,BNDY,TYD,TYD_STOP,pa
     *                 IG,IR,X,RELERR,ABSERR,INORM,MONTR,INON
     *                 IBAND,WORK,IWK INC,IFAIL)
C
      DO 1+1 IP
```

```
            H(I)=H(I-1)
         END IF
         SUM=SUM+H(I)
      END DO
      X(1)=0.0D0
      DO 1+1 IP-1
         H(I+1)=H(I)*YMAX/SUM
         X(I+1)=X(I)+H(I+1)
      END DO
C
C begincwaardenwaarden worden ingelezen van for001.dat  eindwaarde van filtratie
C fase
C
      OPEN (UNIT=11, FILE='for011.DAT', STATUS='OLD',  IOSTAT=IOS
      IF (IOS.NE.0) THEN
         PRINT *,'OPEN FOUT ', IOS
      ELSE
        DO I=1,IP
           READ (11, '(e12.5e2,1X)') z(I),Y(I),VOIDRATIO(1,I),pe(I,1),
        END DO
      END IF
      TYD=0.0
C
      do i=1,ip
            pe(i,1)=pe(1,1)
      end do
C
C uitrekenen van de gemiddelde voidratio bij het begin van de expressie
C
      DO I=2,IP
         I(1)=0
         I(I+1)=I(I)+H(I)*0.5D0*(VOIDRATIO(1,I-1)+VOIDRATIO(1,I)) /2.0D0
      END DO
C
      LIQVOLINT=0.0D0
      INTEGRAAL=0.0D0
         DO I=2,IP
            INTEGRAAL=INTEGRAAL+ (VOIDRATIO(1,I-1)+VOIDRATIO(1,I))*
     *                 (Y(I)-Y(I-1))/(ymax*1.0)
            LIQVOLINT=INTEGRAAL
         END DO
      GEMVOIDRATIO=LIQVOLINT
C
      RANDVOORWAARDE=pe(1,1)
      IU=1
      UT=0.0D0
C
C
      YMAX=1.0D0 - 1.0D0*GEMVOIDRATIO**HOOGTE_TO
C
C
      H(1)=0.0
      SUM=0.0
      DO I=1,IP-1
         IF (I.LE.IGRENS) THEN
            H(I+1)=H(I)+1.0/gamma
         ELSE
            H(I+1)=H(I)+1.0/YMAX-SUM
         END IF
         SUM=SUM+H(I)
      END DO
      X(1)=0.0D0
      DO I=1,IP-1
```

```
         H(I+1)=H(I)+1.0/YMAX-SUM
         X(I+1)=X(I)+H(I+1)
      END DO
      DO 30 I=1,IP
       pa(I)=0.0D0
      end DO
C
      DO I=1,IP
         pa(I)=1.0D0-VOIDRATIO(1,I)**HOOGTE_TOP
      END DO
C
C
C begincwaardenwaarden wegschrijven naar file
C
      DO 31 IP
         pore(1,ip)=voidratio(1,ip)+voidratio(1,1
         WRITE(21,*) tyd,x(ip),voidratio(1,ip)
      END DO
         WRITE(21,*)
C
C start integratie PDE
C zelf een subroutine 'm.nd.integratie(ip)' schrijven
C
      DO WHILE (TYD.LT.10000)
         TYD_STOP=TYD+ TYD_INTERVAL
         CALL D03PCF(NPDE,M,PDEF,BNDY,TYD,TYD_STOP,pa
     *                 IG,IR,X,RELERR,ABSERR,INORM,MONTR,INON
     *                 IBAND,WORK,IWK INC,IFAIL)
C
      DO I=1,IP
         I(I+1)=I(I)+H(I)*0.5D0*(VOIDRATIO(1,I)+VOIDRATIO(1,I+1))
      END DO
C
C uitschrijven naar bestand op file PORTL.DAT
C
      IF (TYD.GE.0.0) THEN
         DO I=1,IP
            WRITE(22,*) TYD,X(I),VOIDRATIO(1,I),pa(I)
         END DO
         WRITE(22,*)
         WRITE(22,*)
      end if
C
C bijschrijven op [illegible] op file, welke gebruikt naar PORTL.DAT
C
         DO I=1,IP
            pore(1,I)=VOIDRATIO(1,I)
         END DO
         DO I=1,IP
            INTEGRAND(1,I)=VOIDRATIO(1,I)
         END DO
         LIQVOLINT=0.0D0
         INTTERM=0.0D0
          DO I=1,IP
            INTTERM=INTTERM+(INTEGRAND(1,I-1)+INTEGRAND(1,I))*
     *                 (Y(I)-Y(I-1))/(ymax*1.0)
            LIQVOLINT=INTTERM
          END DO
         EAVINT=LIQVOLINT
C
         INTEGRAAL=0.0D0
         DO I=1,IP
            PS(1,I)=0.0D0
            INTEGRAAL=INTEGRAAL+ PS(1,I-1)+PS(1,I)*(Y(I)-Y(I-1))/(ymax*1.0)
            GEMPS=INTEGRAAL
         END DO
C
C gemiddelde voidratio volgens profiel en volgens filter worden
C geschreven naar PORTL.DAT  check van massabalans
C
C
C            TYPE 102,TYD,VOIDRATIO(1,1)
      END DO
      END
C
      SUBROUTINE PDEF(NPDE,T,TYD,pa,dpa,P,Q,R)
C
      INTEGER NPDE,AANTAL_GRID_PUNTEN,IP
      REAL*8  X(1),  TYD,VOIDRATIO(1,20),  dpa(1
      REAL*8  P(1,1),Q(1,1),R(1),  PABAR,PSTER,void(1,20)
      REAL*8  VOIDRATIO_0,RACHT,DE2DVOIDX,phi(20)
      REAL*8  PI,PS,ETA,K,KC,PA,DELTA,GAMMA,HOOGTE_TO,HOOGTE_TOP
      REAL*8  BETA,PA,KC,M,DELTA,M,GEMVOIDRATIO,PS,T
      REAL*8  LAMBDA2,e1,IG,IR,e,tau,rer,de2dvoidx,e1x
C
      COMMON  /CONVECT/void
      COMMON  /GEMV/GEMVOIDRATIO
      COMMON  /GRID/AANTAL_GRID_PUNTEN,IP
      COMMON  /CONSTANTEN/ETA,PA,KC,DELTA,BETA,LAMBDA2,M,PI
     *                 HOOGTE_TO,HOOGTE_TOP,VOIDRATIO_0,RM,tau,ei,e
```

```
      common  /phi/phi
      common  /void/voidratio

C

      do i=1,ir
            if (x(i).eq.phi(1)) then
                  if (void(1,i).eq.0) then
                        void(1,i)=voidratio(1,i)
                  end if
                        voidx=void(1,i)
            end if
      end do

      G0=(1.0d0/ETA)*K0
      G1=(1.0d0/(1.0d0+VOIDx))
      G2=((1.0+VOIDRATIO_0)/(1.0+VOIDx))**(-DELTA/BETA)
      e2x=e*(voidx/voidratio_0)**(-lambda2)
      de2dvoidx=-((e*lambda2)/voidx)*(voidx/voidratio_0)**(-lambda2)
      rek=(voidx-voidratio_0)/(1+voidratio_0)

C

      C(1)=1.0/((e1-e2x)/(1+voidratio_0)+rek*de2dvoidx)
      G(1)=G0*G1*G2
      F(1)=-(ps(1)-e2x*rek)/((e1-e2x)*tau/(1+voidratio_0)+rek*tau*
     *      de2dvoidx)

      RETURN
      END

C
C
      SUBROUTINE BNDY(NPDE,TYD,ps,IBND,P,Q,S)

C
      INTEGER I,AANTAL_GRID_PUNTEN,NPDE,IBND,ir
      REAL*8  TYD,VOIDRATIO(1,20),P(*),Q(*),S(*)
      REAL*8  VOIDRATIO_0,P1,ETA,PA,K0,LAMBDA2,tau,e,e1
      REAL*8  DX,RN,GAMMA,HOOGTE_T0,HOOGTE_TOF,UT
      REAL*8  DVOIDRATIO_X,G0,G1,MACHT
      REAL*8  PABAR,PSTER,RANDVOORWAARDE,void(1,20)
      REAL*8  BETA,DELTA,N,PS(*),GEMVOIDRATIO
C
      COMMON  /CONVECT/void
      COMMON  /GEMV/GEMVOIDRATIO
      COMMON  /GRID/AANTAL_GRID_PUNTEN,ir
      COMMON  /CONSTANTEN/ETA,PA,K0,DELTA,BETA,LAMBDA2,N,P1,
     *                    HOOGTE_T0,HOOGTE_TOF,VOIDRATIO_0,RN,tau,e1,e
      COMMON  /RAND/RANDVOORWAARDE
C
C randvoorwaarde op x=H(t)
C
      IF (IBND.EQ.0) THEN
         P(1)=1.0
         Q(1)=0.0
         S(1)=RANDVOORWAARDE
      ELSE
C
C randvoorwaarde op x=0 voldraic wordt bepaald aan het einde van filtratiefase
C
      P(1)=0.0
      Q(1)=1.0
      S(1)=0.0
C
      END IF
C
      RETURN
      END

C
C
      SUBROUTINE MONTR(NPDE,X,IR,TYD,TYD_DAARVOOR,ps,IU,
     *                 TYD_STOP,TYDSTAP)
C
      INTEGER IU,NPDE,IR,INB,I,AANTAL_GRID_PUNTEN
      REAL*8  X(*),TYD,TYD_DAARVOOR,VOIDRATIO(1,20),Z(40)
      REAL*8  UT,TYD_STOP,TYDSTAP,e,e1,tau,void(1,20)
      REAL*8  P1,P0,ETA,DN,MUW,K,DX,RN,ps0(1,20)
      REAL*8  GAMMA,HOOGTE_T0,HOOGTE_TOF,VOIDRATIO_0,MACHT
      REAL*8  PSTER,PABAR,PSTER1,PABAR1,PL19,PL20
      REAL*8  DELTA,BETA,N,K0,PA,PL1,PL2
      REAL*8  PABAR2,PABAR3,PSTER2,PSTER3,delta_t,e2(20),de2dvoid(20),fout
      REAL*8  LIQVOL,LIQVOLINT,SOLVOL,EPSAVFL,EAVFL,a,b,c,rek1,rek2,rek_old(2
      REAL*8  INTTERM,PERMSF,FLUX,EAVINT,EPSAVINT,OLDFLUX,void_new
      REAL*8  PS(1,*),GEMVOIDRATIO,LAMBDA2,ps_old(1,20),void_old(1,20)

C
      COMMON  /CONVECT/void
      COMMON  /GEMV/GEMVOIDRATIO
      COMMON  /GRID/AANTAL_GRID_PUNTEN
      COMMON  /CONSTANTEN/ETA,PA,K0,DELTA,BETA,LAMBDA2,N,P1,
     *                    HOOGTE_T0,HOOGTE_TOF,VOIDRATIO_0,RN,tau,e1,e
      COMMON  /MASSABALANS/EPSAVINT,EPSAVFL
      common  /void/voidratio,ps0

      delta_t=tyd-tyd_daarvoor

      do i=1,ir
       if (void(1,i).eq.0) then
            void(1,i)=voidratio(1,i)
            ps_old(1,i)=ps0(1,i)
        end if

        void_old(1,i)=void(1,i)
        rek_old(i)=(void_old(1,i)-voidratio_0)/(1+voidratio_0)
      end do

C     Uitrekenen voidratio

      if (delta_t eq 0) then
            do i=1,ir
              void(1,i)=voidratio(1,i)
            end do
      else

      do i=1,ir
      fout=1
      if (fout.gt.1d-5) then
      e2(i)=e*(void(1,i)/voidratio_0)**(-lambda2)
      de2dvoid(i)=-lambda2/void(1,i)*E2(i)

      a= 1+voidratio_0*de2dvoid(i)
      b=(e1-e2(i))-rek_old(i)*(1+voidratio_0)*de2dvoid(i)-E2(i)*delta_t/tau
      c=ps(1,i)*delta_t/tau+(ps(1,i)-ps_old(1,i))-rek_old(i)*(E1-E2(i))

      if (a eq 0) then
            rek1=-c/b
      else
            rek1=(-b+(b**2-4*a*c)**0.5)/(2*a)
            rek2=(-b-(b**2-4*a*c)**0.5)/(2*a)
      end if

      void_new=rek1*(1+voidratio_0)+voidratio_0
      fout=abs(1-void_new/void(1,i))
```

```
      void(1,i)=void_new
      void(1,i)=voidratio(1,i)
      end if
      end do
      end if

      do i=1,ir
            ps_old(1,i)=ps(1,i)
      end do



      RETURN
      END

C
C
      SUBROUTINE CONSTANTEN(ETA,PA,K0,DELTA,BETA,LAMBDA2,N,P1,
     *                      HOOGTE_T0,HOOGTE_TOF,VOIDRATIO_0,RN,tau,e1,e)

      REAL*8 P1,ETA,PA,RN,BETA,DELTA,N
      REAL*8 HOOGTE_T0,HOOGTE_TOF,VOIDRATIO_0,K0,LAMBDA2,tau,e,e1

C
      ETA=1.0D-3
      PA=3.75D3
      K0=11.6D-14
      DELTA=1.0589D0
      BETA=0.3150D0
      LAMBDA2=2.5D0
      N=1.74D0
      P1=2D5
      HOOGTE_T0=1.17D-2
      HOOGTE_TOF=1.6D-2
      VOIDRATIO_0=11.40D0
      RN=5.84D-9
      tau=100
      e1=1d6
      e=1d4

C
C P1=aangelegde druk
C ETA=viscositeit filtraat
C PA=omrekeningsconstante
C K0=permeabiliteitsconstante
C beta,n,delta=compressie-constante
C HOOGTE_T0=dikte filterkoek op t=0 (Expressie)
C HOOGTE_TOF=dikte filterkoek op t=0 (Filtratie)
C VOIDRATIO_0=beginvoidratio op tijdstip t=0
C RN=weerstand filtermedium
C
C
      RETURN
      END
```

PUBLIKATIEREEKS "TOEKOMSTIGE GENERATIE RIOOLWATERZUIVERINGSINRICHTINGEN RWZI 2000" [1]

1 "Behandeling van stedelijk afvalwater in de toekomst"
Een haalbaarheidsonderzoek. I. Eindrapport II. Werkrapport
RIZA, TNO-Maatschappelijke Technologie en Witteveen & Bos Raadgevende ingenieurs
Juli 1986

2 "Toekomstige generatie rioolwaterzuiveringsinrichtingen; RWZI 2000"
Onderzoekplan
RIZA, STORA
Januari 1988

3 "Jaarverslag 1988"
RIZA, STORA
Maart 1989

4 "Slibontwatering; een voorstudie"
TU-Delft, TU-Eindhoven
RWZI 2000 89-01
Januari 1989

5 "Knelpunten bij de invoering van defosfatering"
Witteveen & Bos Raadgevende ingenieurs
RWZI 2000 89-02
April 1989

6 "Selectieve verwijdering van zware metalen uit ruw rioolwater met behulp van een magneetsysteem"
Smit-Nymegen, TNO-Maatschappelijke Technologie
RWZI 2000 89-03
Oktober 1989

7 "Verwijdering van zware metalen uit zuiveringsslib door elektrolyse"
TNO-Maatschappelijke Technologie
RWZI 2000 89-04
Oktober 1989

---

[1] Te bestellen bij:
STOWA, Postbus 8090, 3503 RB Utrecht
tel. 030-321199

8 "Hydrolyse van zuiveringsslib in combinatie met anaërobe vergisting"
TNO-Maatschappelijke Technologie
RWZI 2000 89-05
Oktober 1989

9 "Het drogen van zuiveringsslib met het Carver-Greenfieldproces"
TNO-Maatschappelijke Technologie, Witteveen & Bos Raadgevende ingenieurs
RWZI 2000 89-06
December 1989

10 "Natte oxydatie van zuiveringsslib met het Vertech-systeem"
TNO-Maatschappelijke Technologie, Witteveen & Bos Raadgevende ingenieurs
RWZI 2000 89-07
December 1989

11 "Symposium "RWZI 2000" d.d. 5 oktober 1989"
RIZA, STORA
RWZI 2000 89-08
December 1989

12 "Jaarverslag 1989"
RIZA, STORA
RWZI 2000 90-01
Maart 1990

13 "AB-Systemen; een inventarisatie"
DHV Raadgevend Ingenieursbureau BV
RWZI 2000 90-02
September 1990

14 "Vergisting van aëroob gestabiliseerd slib"
DHV Raadgevend Ingenieursbureau BV
RWZI 2000 90-03
Augustus 1990

15 "Het afleiden van procestechnologische relaties uit bedrijfsgegevens van rwzi's"
DHV Raadgevend Ingenieursbureau BV
RWZI 2000 90-04
December 1990

16 "Automatische regeling van het slibgehalte in beluchtingstanks"
Adviesbureau BKH
RWZI 2000 90-05
September 1990

17 "Verkenning Bio-Denitro/Bio-Denipho"
Witteveen & Bos Raadgevende ingenieurs
RWZI 2000 90-06
Juni 1990

18 "Linpor-sponsjes als dragermateriaal bij de aërobe zuivering van rioolwater"
TNO-Maatschappelijke Technologie
RWZI 2000 90-07
Oktober 1990

19 "Jaarverslag 1990"
RIZA, STORA
RWZI 2000 91-01
Maart 1991

20 "Deep Shaft-systemen; een inventarisatie"
DHV Raadgevend Ingenieursbureau BV
RWZI 2000 91-02
Maart 1991

21 "Perspectives for the utilization of membrane-assisted sludge retention in municipal waste water treatment plants"
A feasibility study
RU-Groningen
RWZI 2000 91-03
Juni 1991

22 "Jaarverslag 1991"
RIZA, STOWA
RWZI 2000 92-01
Maart 1992

23 "Vergisten van zuiveringsslib; een vergelijking tussen thermofiele en mesofiele slibgisting"
Haskoning B.V., RIZA, LU-Wageningen, DHV Water B.V.
RWZI 2000 92-02
Maart 1992

24 "First Dutch-Japanese workshop on the treatment of municipal waste water; 8-11 april 1991, Heelsum, The Netherlands. Part I and part II.
RIZA, STOWA, TU-Delft
RWZI 2000 92-03
Maart 1992

25 "Biologische fosfaatverwijdering in combinatie met een korrelreactor"
LU-Wageningen, DHV Water B.V.
RWZI 2000 92-04
Augustus 1992

26 "Anaërobe behandeling van stedelijk afvalwater in Nederland"
Covernota van het uitgevoerde onderzoek 1976 - 1991
LU-Wageningen, Haskoning B.V.
RWZI 2000 92-05
Mei 1992

27 "Vergaande nutriëntenverwijdering op een zeer laagbelaste aktiefslibinstallatie"
Zuiveringsschap Hollandse Eilanden en Waarden, Grontmij N.V.
RWZI 2000 92-06
Oktober 1992

28 "Ontwikkeling van een slib-op-drager systeem voor de aërobe zuivering van stedelijk afvalwater"
Fase II: Onderzoek naar de processtabiliteit en optimalisatie van het zuiveringsrendement.
TNO-IMW
RWZI 2000 92-07
Oktober 1992

29 "Behandeling van stedelijk afvalwater met het schachtreactorsysteem"
V & P Waste Water Management B.V.
RWZI 2000 92-08
Juli 1994

30 "Stikstofverwijdering uit interne stromen op rwzi's"
DHV Water B.V.
RWZI 2000 92-09
December 1992

31 "Jaarverslag 1992"
RIZA, STOWA
RWZI 2000 93-01
April 1993

32 "Onderzoek demonstratie-installaties magnetische defosfatering"
Envimag B.V.
RWZI 2000 93-02
April 1993

33 "Modelvorming en optimalisatie van biologische defosfatering van afvalwater: Microbiële aspekten"
LU-Wageningen, vakgroep Microbiologie
RWZI 2000 93-03
November 1993

34 "Jaarverslag 1993"
RIZA, STOWA
RWZI 2000 94-01
Juli 1994

35 "Fundamentele aspekten van slibontwatering"
Deel 1: Samenvattend verslag
Deel 2: Flocculatiemechanismen
Deel 3: Filtratie-expressie modellering
Deel 4: Filtratie expressie experimenten
Deel 5: Slib-water binding
Deel 6: Karakterisering van slibben
Deel 7: Ontwikkeling nieuw CST-apparaat
Deel 8: Congresbijdragen
TU-Eindhoven, Laboratorium voor Scheidingstechnologie
RWZI 2000 94-02
Juli 1994