

Voortgang parameteronderzoek

(S - 80.055)

december 1981

Inhoud

1. Inleiding.
2. Stationaire problemen met analytische oplossing.
 - 2.1. Basisformules voor stroming in aquifers.
 - 2.2. Specifieke problemen.
 - 2.2.1. Confined aquifer.
 - 2.2.2. Semi-confined aquifer.
 - 2.2.3. Unconfined aquifer.
 - 2.3. Samenvatting stroming in aquifers.
3. Voortzetting onderzoek.

1. Inleiding

In eerste instantie richt het onderzoek zich op de stationaire grondwaterstroming. De uitkomsten van dit deelonderzoek kunnen dan als basis fungeren voor verder onderzoek.

De van belang zijnde parameters bij stationaire grondwaterstromingsproblemen zijn te scheiden in parameters die de geometrie bepalen (lengte en dikte van grondlagen) en parameters die de doorlatendheid bepalen (k-waarden).

Voor stationaire stroming gelden de wet van Darcy en de continuïteitsvergelijking, hieruit volgt de differentiaalvergelijking van Laplace:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

Afhankelijk van de randvoorwaarden kunnen eenduidige oplossingen bepaald worden.

Aan de hand van literatuuronderzoek is voor een aantal, relatief eenvoudige situaties een analytische oplossing aan te geven.

Het bepalen van de invloed van de verschillende parameters op de stijghoogte is voor deze situaties eenvoudig. Met behulp van analytische berekeningen kan deze invloed vastgesteld worden.

Voor meer gecompliceerde situaties, waarvoor geen analytische oplossing is, zal teruggegrepen moeten worden op modelonderzoek.

Hierbij kan gedacht worden aan computermodellen en aan elektrische analogiemodellen (ELNAG, Teledeltos-papier).

Gestart is met een opsomming van de, in de literatuur vermelde, situaties waarvan een analytische oplossing bekend is.

2. Stationaire problemen met analytische oplossing

Bij dijken hebben we vrijwel altijd te maken met "aquifers".

Het betreft hier stroming in goed doorlatende lagen waarin de verticale snelheidscomponent klein is ten opzichte van de horizontale componenten. In deze gevallen kan het probleem zodanig geschematiseerd worden dat de veranderingen van de stijghoogte in verticale zin verwaarloosd worden.

2.1. Basisformules voor stroming in aquifers

1^e. Volkomen spanningswater (confined aquifer)

Bij een goed doorlatende watervoerende laag van constante dikte tussen twee ondoorlatende lagen kan de stroming loodrecht op het vlak van de laag worden verwaarloosd.

Dus: $\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$, ingevuld in (1) geeft:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

met: ϕ = stijghoogte ten opzichte van willekeurig gekozen referentievlak.

Indien er slechts stroming in één richting is gaat (2) over

in:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0 \quad (3)$$

2^e. Onvolkomen spanningswater (semi-confined aquifer)

Bij een goed doorlatende watervoerende laag van constante dikte opgesloten tussen twee slecht doorlatende lagen (of tussen een slecht doorlatende- en ondoorlatende laag) kan de verticale stroming niet meer worden verwaarloosd.

Vergelijking (1) gaat over in:

$$kH \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right\} - \frac{\phi - \phi_1}{c_1} - \frac{\phi - \phi_2}{c_2} = 0 \quad (4)$$

met k = doorlatendheid zandpakket

H = dikte zandpakket

$c_i = d_i / k'_i$ = weerstand kleilaag

d_i = dikte kleilaag

k'_i = doorlatendheid kleilaag

ϕ = stijghoogte in het zandpakket t.o.v. gekozen referentievlak

ϕ_i = stijghoogte boven/onder het zandpakket t.o.v. gekozen referentievlak

index 1 = kleilaag boven

index 2 = kleilaag onder

Opmerking: indien volkomen spanningswater dan is $\phi = \phi_1 = \phi_2$ en gaat (4) over in (2).

3^e. Freatisch water (unconfined aquifer)

De grondwaterstroming vindt hier plaats in een goed doorlatende laag, aan de onderzijde begrensd door een ondoorlatende laag. Aan de bovenzijde ontbreekt de afdekking zodat er een vrije grondwaterspiegel is. Door capillaire opstijging is de grondwaterspiegel altijd hoger gelegen dan het freatisch vlak.

We nemen aan dat deze capillaire opstijging te verwaarlozen is. Daarnaast wordt de aanname van Dupuit-Forchheimer gedaan wat wil zeggen dat de stijghoogte in een verticale doorsnede constant is.

Met behulp van de wet van Darcy en de continuïteitsvergelijking is af te leiden dat de algemene oplossing is:

$$\frac{\partial^2(h^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(h^2)}{\partial y^2} + \frac{2N}{k} = 0 \quad (5)$$

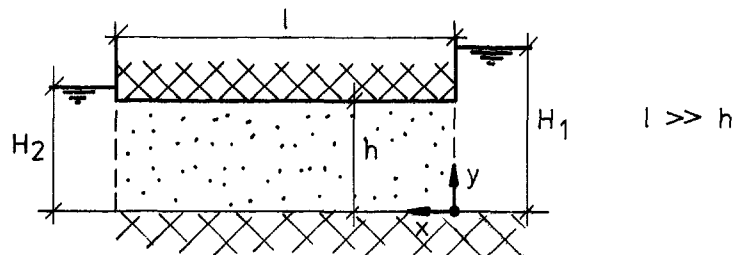
met: h = stijghoogte
 N = infiltratie
 k = doorlatendheid zandpakket

2.2. Specifieke problemen

Voor de drie eerder genoemde aquifers zullen nu een aantal specifieke situaties bekeken worden.

2.2.1. Confined aquifer

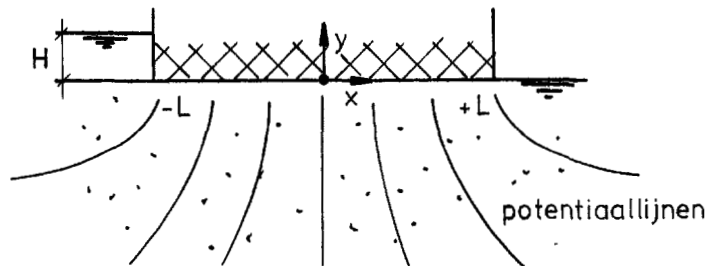
con-1



Stroming in één richting zodat (2) overgaat in (3).

Oplossing: $\phi(x) = H_1 + (H_2 - H_1) \frac{x}{l}$ (6)
 (Verruyst)

con-2



De doorlatende laag strekt zich uit tot in het oneindige.

Oplissing :

$$\left. \begin{aligned} \text{(Verruyt)} \quad \frac{x}{L} &= \cos\left(\frac{\pi\phi}{kH}\right) \cosh\left(\frac{\pi\psi}{kH}\right) \\ \frac{y}{L} &= -\sin\left(\frac{\pi\phi}{kH}\right) \sinh\left(\frac{\pi\psi}{kH}\right) \end{aligned} \right\} (7)$$

met : $\phi = k\phi$

$\psi =$ stroomfunctie gedefiniëerd door de relaties:

$$q(x) = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \text{ en } q(y) = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

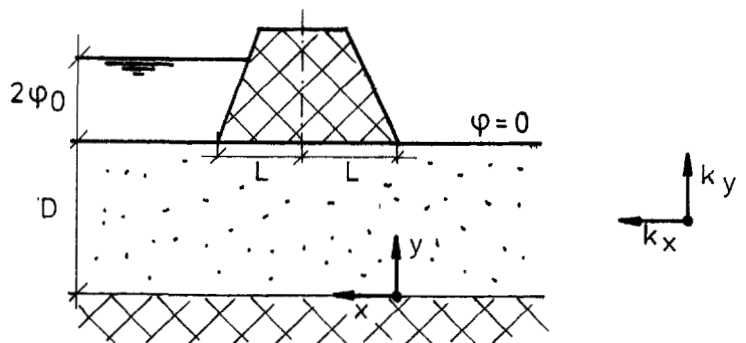
Langs de x-as ($y = 0$) geldt:

$$-\infty \leq x \leq -L \quad \left\{ \begin{aligned} \phi &= kH \\ 0 &\leq \psi \leq \infty \\ \frac{x}{L} &= -\cosh\left(\frac{\pi\psi}{kH}\right) \end{aligned} \right.$$

$$-L \leq x \leq L \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &\leq \phi \leq kH \\ \psi &= 0 \\ \frac{x}{L} &= \cos\left(\frac{\pi\phi}{kH}\right) \end{aligned} \right.$$

$$L \leq x \leq \infty \quad \left\{ \begin{aligned} \phi &= 0 \\ 0 &\leq \psi \leq \infty \\ \frac{x}{L} &= \cosh\left(\frac{\pi\psi}{kH}\right) \end{aligned} \right.$$

con-3



Ondoorlatende dijk op zandpakket met dikte D.

Oplissing:

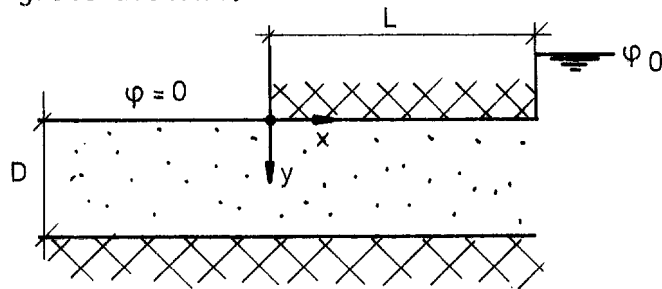
$$\text{(Bruggeman)} \quad \phi(x, 0) = \phi_0 - \phi_0 \cdot \frac{F(\arcsin u|m)}{K(m)}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{met: } u &= \frac{\text{tanh} \left(\frac{\pi a(L-x)}{2D} \right)}{\text{tanh} \left(\frac{\pi aL}{2D} \right)} \\ m &= \text{tanh}^2 \left(\frac{\pi aL}{2D} \right) \\ a &= \sqrt{\frac{k_y}{k_x}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$F(\arcsin u|m)$ = incomplete elliptische integraal v/d 1^e soort

$K(m)$ = complete elliptische integraal v/d 1^e soort

Indien $aL > 0,9D$ mag, met een fout $< 1\%$, het debiet onder het midden van de dijk gelijkmatig verdeeld over het pakket worden aangenomen en gaat dit stromingsgeval over in onderstaand geval met een vaste potentiaal op grote afstand.



Oplossing: (Bruggeman) $\phi(x,y) = \frac{2q}{\pi a k_x} \operatorname{arccosh} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{v^2 + (u+1)^2} + \frac{1}{2} \sqrt{v^2 + (u-1)^2} \right\} \quad (9)$

$$\text{met: } \begin{aligned} u &= e^{\frac{\pi a x}{2D}} \cdot \cos\left(\frac{\pi y}{2D}\right) \\ v &= e^{\frac{\pi a x}{2D}} \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{2D}\right) \end{aligned}$$

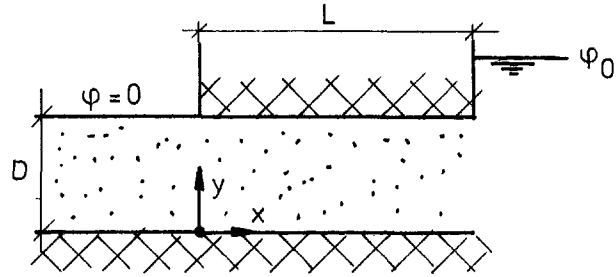
Aan de onderkant van de kleilaag ($y=0$) geldt:

$$\phi(x,0) = \frac{2q}{\pi a k_x} \operatorname{arccosh} \left(e^{\frac{\pi a x}{2D}} \right) \quad (10)$$

Voor $x = L$ is $\phi = \phi_0$ zodat $\frac{2q}{\pi a k_x} = \frac{\phi_0}{\operatorname{arccosh}(e^{\pi a L / 2D})}$

$$\text{Er volgt: } \phi(x,0) = \phi_0 \cdot \frac{\operatorname{arccosh} \left(e^{\frac{\pi a x}{2D}} \right)}{\operatorname{arccosh} \left(e^{\frac{\pi a L}{2D}} \right)} \quad (11)$$

Het laatste stromingsgeval blijkt overeen te komen met de volgende oplossing:



Oplossing: $e^{\frac{\pi X}{2D}} = \left\{ \left(\sinh \frac{\pi \Phi}{2Q} \cos \frac{\pi \Psi}{2Q} \right)^2 + \left(\cosh \frac{\pi \Phi}{2Q} \sin \frac{\pi \Psi}{2Q} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$
 (Verruyt) (12)

$\text{tang } \frac{\pi \Psi}{2D} = \text{tang} \frac{\pi \Psi}{2Q} / \text{tangh } \frac{\pi \Phi}{2Q}$

Aan onderkant kleilaag ($y=D$) geldt $\phi = Q \rightarrow \phi = \frac{2Q}{\pi} \text{arccosh } e^{\frac{\pi X}{2D}}$ (13)

Er volgt:

	$y=0$	$y=D$
$0 \leq x \leq \infty$	$\begin{cases} \frac{2Q}{\pi} \ln(1+\sqrt{2}) \leq \Phi \leq \infty \\ \Psi = 0 \\ e^{\frac{\pi X}{2D}} = \sinh \frac{\pi \Phi}{2Q} \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \leq \Phi \leq \infty \\ \Psi = Q \\ e^{\frac{\pi X}{2D}} = \cosh \frac{\pi \Phi}{2Q} \end{cases}$
$x = 0$	$\begin{cases} \Phi = \frac{2Q}{\pi} \ln(1+\sqrt{2}) \\ \Psi = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \Phi = 0 \\ \Psi = Q \end{cases}$
$-\infty \leq x \leq 0$	$\begin{cases} 0 \leq \Phi \leq \frac{2Q}{\pi} \ln(1+\sqrt{2}) \\ \Psi = 0 \\ e^{\frac{\pi X}{2D}} = \sinh \frac{\pi \Phi}{2Q} \end{cases}$	$\begin{cases} \Phi = 0 \\ 0 \leq \Psi \leq Q \\ e^{\frac{\pi X}{2D}} = \sin \frac{\pi \Psi}{2Q} \end{cases}$

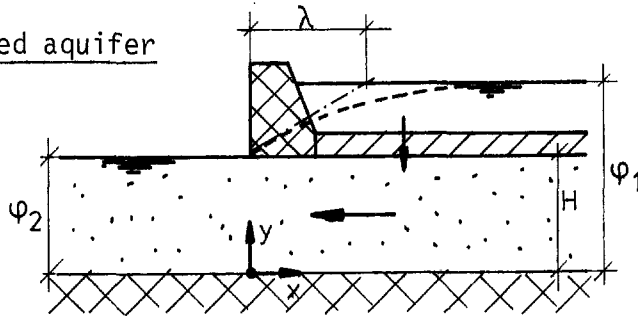
Vergelijking (10) en (13) zijn inderdaad identiek ($\phi = k_x \cdot \phi$)

voor $a = 1$.

Uit (13) kan, analoog aan (10) \rightarrow (11), volgen dat $\phi = \phi_0 \cdot \frac{\text{arccosh}(e^{\frac{\pi X}{2D}})}{\text{arccosh}(e^{\frac{\pi L}{2D}})}$ (14)

2.2.2. Semi-confined aquifer

semi-1



half-oneindige
toplaag

ϕ_1 wordt bereikt voor $x \rightarrow \infty$.

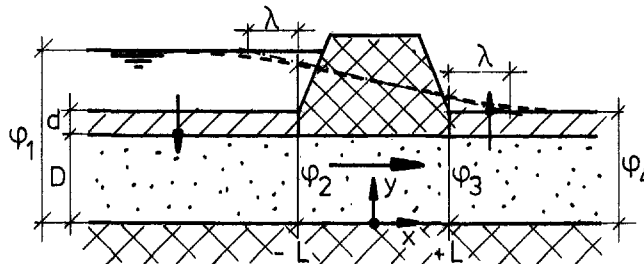
Aangezien $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ en de onderzijde ondoorlatend is gaat (4) over in:

$$kH \frac{d^2 \phi}{dx^2} - \frac{\phi - \phi_1}{c} = 0 \quad (15)$$

Oplossing: $\phi_x = \phi_1 - (\phi_1 - \phi_2) \cdot e^{-x/\lambda}$ (16)
(Verruyt)

met: $\lambda = \sqrt{k \cdot H \cdot c}$ (lekfactor of uittreelengte)
 $c = d/k$ (kleilaag)

semi-2



Oneindig lange slecht doorlatende toplaag.

Voor de berekening van de potentiaal onder de kleilaag onderscheiden we drie delen.

Oplossing:

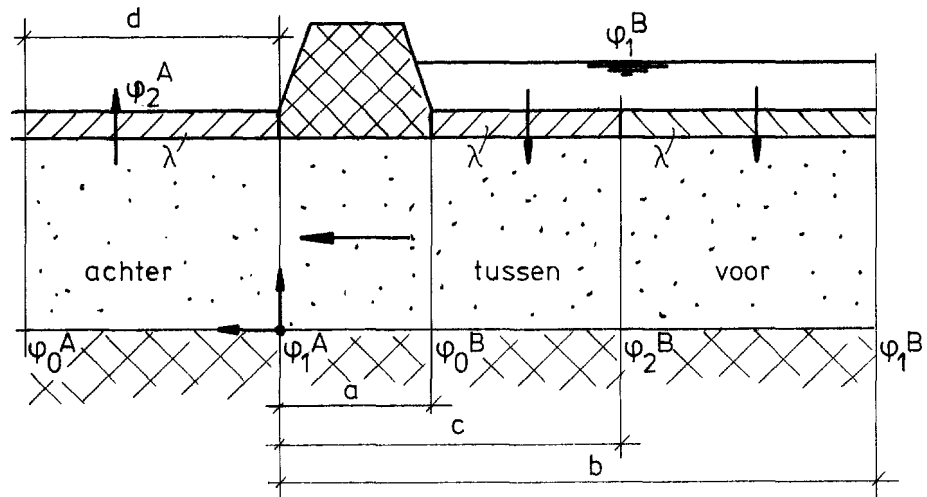
- $\infty \leq x \leq -L$	$\phi = \phi_1 - (\phi_1 - \phi_2) e^{\frac{x+L}{\lambda}}$	}	(17)
- $L \leq x \leq L$	$\phi = \frac{1}{2} (\phi_2 + \phi_3) - \frac{1}{2} (\phi_2 - \phi_3) \cdot \frac{x}{L}$		
$L \leq x \leq \infty$	$\phi = \phi_4 - (\phi_4 - \phi_3) e^{\frac{-(x-L)}{\lambda}}$		

met: $\lambda = \sqrt{kDc}$

$$\phi_2 = \phi_1 - \frac{\phi_1 - \phi_4}{2L + 2\lambda} \cdot \lambda$$

$$\phi_3 = \phi_4 + \frac{\phi_1 - \phi_4}{2L + 2\lambda} \cdot \lambda$$

semi-3



Bovenstaande situatie, met drie verschillende afdekkende kleilagen is analytisch opgelost, waarbij het stijghoogteverloop aan de onderzijde van de kleilagen is bepaald.

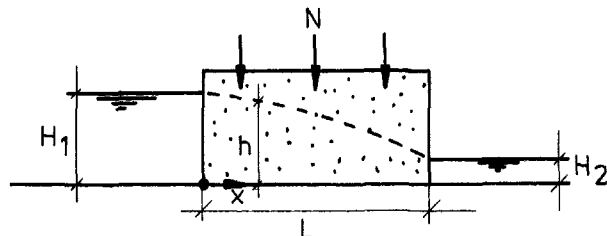
Het stijghoogteverloop onder de (ondoorlatende) dijkbasis verloopt uiteraard lineair van ϕ_1^A naar ϕ_0^B .

Indien de twee kleilagen aan de voorzijde identiek zijn vereenvoudigd het stelsel vergelijkingen (18).

Dit geldt ook voor het geval dat $d \rightarrow \infty$.

2.2.3. Unconfined aquifer

un-1



Aangezien h alleen een functie van x is en niet van y wordt (5):

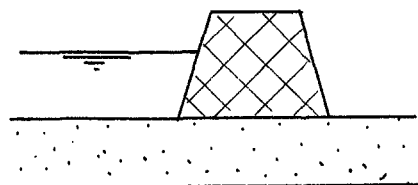
$$\frac{d^2(h^2)}{dx^2} + \frac{2N}{k} = 0 \quad (19)$$

Oplossing:
(Verruyt)
$$h^2 = H_1^2 - (H_1^2 - H_2^2) \cdot \frac{x}{L} + \frac{N}{k} \cdot x(L-x) \quad (20)$$

2.3. Samenvatting stroming in aquifers

1^e. Confined aquifer

Als basisprobleem kan con-3 fungeren. aangezien andere situaties hieruit af te leiden zijn.

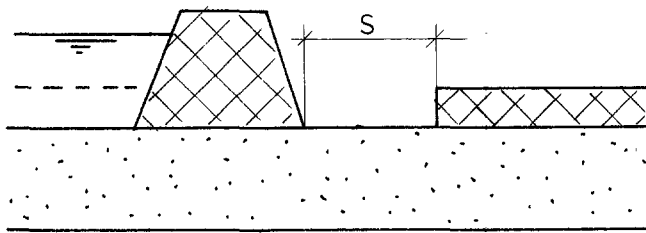


basisprobleem 1

Voor dit probleem staat de oplossing van Bruggeman (zie (8)) ter beschikking.

Indien $a L > 0,9 D$ dan kan de vereenvoudigde oplossing van Bruggeman (zie (11)) gebruikt worden. Deze oplossing komt voor het geval $a = 1$, overeen met Verruyt (zie (14)).

Naast bovengenoemd basisprobleem is er nog een apart probleem, n.l. een confined aquifer met een sloot in de afdekkende kleilaag in het achterland.

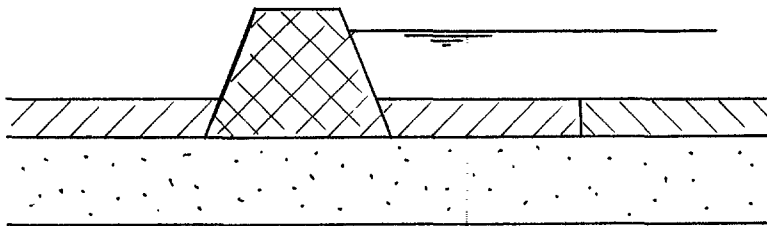


basisprobleem 2

Dit probleem is door Sellmeijer opgelost voor het geval dat $a = 1$.

2^e. Semi-confined aquifer

Ook hier kan één probleem als basis dienen voor andere situaties, n.l. semi-3.



basisprobleem 3

Met behulp van de oplossing van Beijersbergen (zie (18)) is het stijghoogteverloop te bepalen.

3^e. Unconfined aquifer

Het genoemde probleem un-1 heeft een eenvoudige en bruikbare oplossing, aangegeven door Verruyt (zie (20)).



basisprobleem 4

3. Voortzetting onderzoek

Als eerste stap zullen de vier voornoemde basisproblemen aangepakt worden. Bij de bepaling van de invloed van de verschillende parameters op de stijghoogte beperken we ons tot de invloed op de stijghoogte aan de onderzijde van de afdekkende laag of dijkbasis. Teneinde een dimensieloze grootte te verkrijgen wordt de stijghoogte gedeeld door het verval.

Als variabelen bij deze problemen kunnen worden genoemd:

k_{z_x} = horizontale doorlatendheid zandpakket.

k_{z_y} = verticale doorlatendheid zandpakket.

k_k = doorlatendheid afdekkende kleilaag.

d = dikte kleilaag

D = dikte zandpakket

H = verval

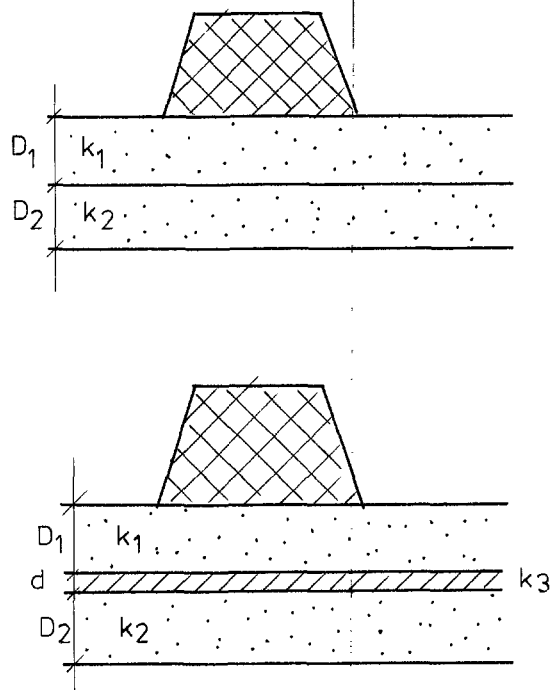
L = lengte dijkbasis

s = slootbreedte

Q = debiet

Vervolgens zullen de (stationaire) problemen waarvoor geen analytische oplossing bekend is onderzocht worden.

Te denken valt b.v. aan onderstaande problemen.



Mocht nader literatuuronderzoek niets opleveren dan kunnen deze problemen m.b.v. modellen onderzocht worden.

Bij het eerste probleem kan b.v. de invloed van

$\frac{k_1}{k_2}$ of $\frac{D_1}{D_2}$ op de stijghoogte onderzocht worden.

Kortweg ziet de opzet van het verdere onderzoek er als volgt uit:

- a. Analytische berekeningen stationaire basisproblemen.
- b. Conclusies stationaire basisproblemen.
- c. Modelonderzoek voor stationaire problemen zonder analytische oplossing (computer/ELNAG).
- d. Conclusies modelonderzoek.
- e. Samenvattende conclusies stationaire problemen.
- f. Voortzetting onderzoek niet-stationaire problemen.