

---

# Van Edelman naar Bruggeman

T.N. Olsthoorn

---

*De meeste boeken over grondwaterstroming geven de formules van Edelman voor het berekenen van de tijdsafhankelijke stijghoogte en stroming in een halfoneindig uitgestrekt watervoerend pakket dat grenst aan open water waarin de randvoorwaarde vanaf  $t = 0$  verandert volgens een bepaald verloop.*

*Met een kleine aanvulling van een oplossing van Bruggeman reduceren alle gevallen (stromingsproblemen) waarvoor de formules van Edelman kunnen worden ingezet tot één uiterst eenvoudige formule die bovendien niet slechts vier, maar een oneindige reeks gevallen omvat. De oplossing is gegeven in een wiskundige functie die gemakkelijk geïmplementeerd kan worden, bijvoorbeeld als een functie in Excel; we hoeven dan geen tabellen in boeken meer te raadplegen om functiewaarden op te zoeken.*

*Mijns inziens hoort in het vervolg de formule van Bruggeman (in aangepaste vorm) in elk hydrologieboek thuis en mogen we de Edelmanformules in de geschiedenisboeken bijschrijven.*

## Inleiding

Het berekenen van de dynamische interactie tussen grondwater en oppervlaktewater is in de praktijk belangrijk, bijvoorbeeld om te bepalen hoeveel oppervlaktewater in de oevers wordt geborgen of uit de oevers vrij komt bij een variatie van het peil van het oppervlaktewater. Deze en een drietal andere situaties kunnen analytisch worden berekend met de formules die ooit door Edelman (1947) zijn afgeleid om de toestroming naar kanalen te berekenen in de Amsterdamse Waterleidingduinen.

Dergelijke analytische oplossingen worden aan hydrologiestudenten onderwezen omdat zij veel beter dan een numeriek model direct inzicht verschaffen in de relatie tussen de parameters en omdat zij bij slim gebruik, onder meer door toepassing van superpositie in tijd en ruimte en convolutie, in de praktijk bewezen zeer effectief te zijn om situaties adequaat in te schatten zonder model of om een model te controleren.

In de formules van Edelman was moeilijk een heldere lijn te ontdekken. Daarom wordt in dit artikel getoond dat alle formules van Edelman in een simpele relatie kunnen worden gevat, die bovendien nog gemakkelijk in Excel of Matlab kan worden geïmplementeerd en berekend.

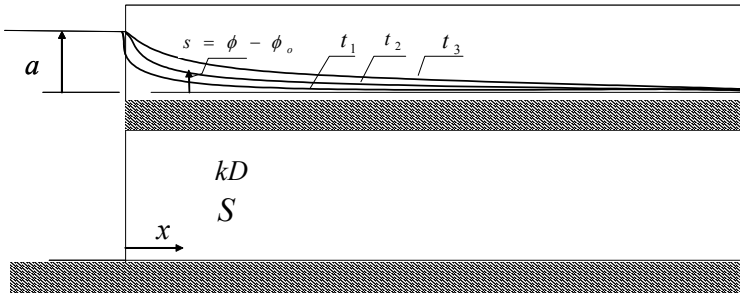
## Van Edelman naar Bruggeman

De formules van Edelman hebben alle betrekking op ééndimensionale, niet-stationaire stroming in een half-oneindig uitgestrekt watervoerend pakket, grenzend aan een rechte rivier, zoals weergegeven in figuur 1. De stroming voldoet aan de bekende differentiaal-

vergelijking:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{S}{kD} \frac{\partial s}{\partial t} \quad (1)$$

Hierin staat  $s$  [L] voor de verandering van de stijghoogte,  $s = \phi - \phi_o$ . Voorts is  $x$  de afstand gerekend vanaf de 'rivier',  $kD$  [L<sup>2</sup>/T] het doorlaatvermogen en (hoofdletter)  $S$  [-] de bergingscoëfficiënt. De vergelijking beschrijft derhalve ééndimensionale stroming voor een situatie met ruimtelijk constante  $kD$  en  $S$ , zonder voeding (neerslag, verdamping, lek). De beperkingen lijken stringent, maar dat maakt dat de analytische oplossingen eenvoudig toepasbaar zijn. Bovendien zijn de beperkingen in de praktijk te reduceren, bijvoorbeeld door slim gebruik te maken van het superpositiebeginsel.



**Figuur 1:** Situatie beschouwd door Edelman (geval 1).

De vier situaties waarvoor Edelman vergelijkingen heeft afgeleid kennen alle dezelfde beginvoorwaarde (namelijk dat de  $s = 0$  voor alle  $x$  op  $t = 0$ ). Zij verschillen in de randvoorwaarden die zich op  $x = 0$  vanaf  $t = 0$  voordoen:

- 1 Rivierstand verandert plotseling met een vast waarde
- 2 Vaste onttrekking start op  $x = 0$
- 3 Rivierstand stijgt met constante snelheid
- 4 Onttrekking neemt met constante snelheid toe

Bruggeman (1999), oplossing 123.05, pag 63, geeft een overkoepelende oplossing voor een oneindig lange reeks gevallen, waarvan de eerste vier de gevallen van Edelman vormen. De formule geldt namelijk voor alle gevallen waarvan de stijghoogte op  $x = 0$  verandert volgens:

$$F(t) = at^{n/2}$$

en luidt:

$$s(x,t) = a \cdot 2^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right) t^{n/2} i^n \operatorname{erfc}(u) \quad \text{met } u = \sqrt{\frac{x^2 S}{4kDt}}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Zoals we zullen zien vallen hier alle gevallen Edelman onder.

De  $i^n \operatorname{erfc}(z)$  is een 'gewone' wiskundige functie, de zogenoemde ' $n$ -de herhaalde inte-

graal van de complementaire errorfunctie'. Dit is een hele mond vol, maar zij kan gemakkelijk recursief worden berekend mits we de eerste twee hebben:  $i^{-1}erfc(z)$  en de  $i^0erfc(z)$  (zie appendix). De laatste is gelijk aan de gewone complementaire errorfunctie  $erfc(z)$  (zie appendix). Deze vergelijking van Bruggeman is te vereenvoudigen door gebruik te maken van de relatie:

$$i^n \operatorname{erfc}(0) = \frac{1}{2^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}, \quad n = -1, 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

(zie Abramowitz en Stegun, 1965, sectie 7.2.7)

Aldus wordt een zeer overzichtelijke uitdrukking verkregen:

$$s(x, t) = at^{n/2} \frac{i^n \operatorname{erfc}(u)}{i^n \operatorname{erfc}(0)} \quad (4)$$

Deze uitdrukking hoort mijns inziens in elk toekomstig hydrologieboek thuis! Onmiddellijk blijkt dat:

$$s(0, t) = at^{n/2}$$

Ook zal duidelijk zijn dat, indien we  $i^n \operatorname{erfc}(z)$  kunnen berekenen, we dat ook voor  $z=0$  kunnen doen en vergelijking (4) daarmee bekend is. Tevens blijkt dat (4) niet beperkt is tot het gevolg van een plotselinge stap van de rivierstand (geval  $n = 0$ ), maar dat ook alle situaties worden omvat waarin de rivierstand vanaf  $t = 0$  verandert volgens  $at^{n/2}$ .

We zullen nu laten zien dat (4) ook opgaat voor stromingsproblemen waarvoor Edelman formules heeft afgeleid waarin een bepaald debietsverloop op van  $x = 0$  (en  $t > 0$ ) als randvoorwaarde is opgelegd. Dit debiet is volgens Darcy gelijk aan:

$$q(x, t) = -kD \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Aangezien de afgeleide van  $i^n \operatorname{erfc}(z)$  gelijk is aan  $-i^{n-1} \operatorname{erfc}(z)$  (zie appendix) wordt dit na

invulling in de vergelijking (4) met  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{kD}} \frac{1}{\sqrt{t}}$ :

$$q(x, t) = \frac{a}{2} t^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{kDS} \frac{i^{n-1} \operatorname{erfc}(u)}{i^n \operatorname{erfc}(0)} \quad (5)$$

waaruit  $q(0, t)$  volgt door voor  $u$  nul in te vullen. Uit (5) blijkt dat ook de situaties met het debiet als randvoorwaarde een hele reeks vormen. De  $i^{n-1} \operatorname{erfc}(0)$  en  $i^n \operatorname{erfc}(0)$  kunnen we straks direct uitrekenen, zodat bovenstaande betrekking geen probleem hoeft te zijn. De breuk met beide erfc-functies vormt een simpele constante. We hebben dus het paar bij behorende uitdrukkingen met als randvoorwaarde de opgelegde (constante of tijdsafhan-

kelijke) waterstand in de rivier  $s(0,1) = at^{\frac{n}{2}}$  :

$$s(x,t) = at^{n/2} \frac{i^n \operatorname{erfc}(u)}{i^n \operatorname{erfc}(0)}, \quad q(x,t) = \frac{a}{2} t^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{kDS} \frac{i^{n-1} \operatorname{erfc}(u)}{i^n \operatorname{erfc}(0)} \quad n=0,1,2,\dots \quad (6)$$

We kunnen de vergelijkingen ook omwerken naar de situatie dat het debiet gegeven is:

$$q(0,t) = bt^{\frac{n-1}{2}}, \text{ dan volgt hieruit:}$$

$$bt^{\frac{n-1}{2}} = \frac{a}{2} t^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{kDS} \frac{i^{n-1} \operatorname{erfc}(0)}{i^n \operatorname{erfc}(0)} \text{ en dus } a = \frac{2b}{\sqrt{kDS}} \frac{i^n \operatorname{erfc}(0)}{i^{n-1} \operatorname{erfc}(0)}$$

Als we dit invullen in (4) krijgen we het paar uitdrukkingen (7) met als randvoorwaarde het opgelegd debiet  $q(0,t) = bt^{\frac{n-1}{2}}$  :

$$s(x,t) = \frac{2b}{\sqrt{kDS}} t^{\frac{n}{2}} \frac{i^n \operatorname{erfc}(u)}{i^{n-1} \operatorname{erfc}(0)}, \quad q(x,t) = bt^{\frac{n-1}{2}} \frac{i^{n-1} \operatorname{erfc}(u)}{i^{n-1} \operatorname{erfc}(0)}, \quad n=0,1,2,\dots \quad (7)$$

Met  $b$  een willekeurige constante (net als  $a$  voor de situaties waarbij de stijghoogte als randvoorwaarde is opgelegd (6)). In appendix 1 wordt uitgelegd hoe de functies berekend kunnen worden. In appendix 2 voor de vier gevallen van Edelman een vergelijking gemaakt met de hier gegeven formules.

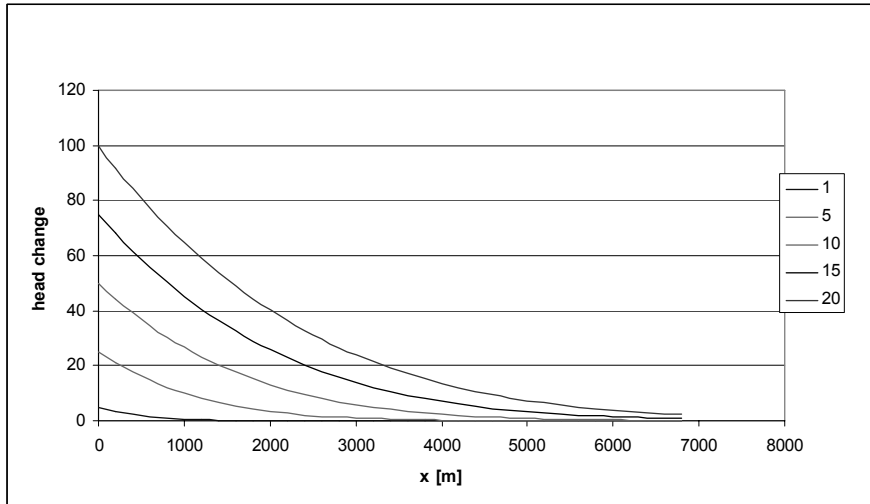
## Voorbeeld

Het Nasser-meer in Egypte is vanaf 1971 opgevuld met water uit de Nijl. Het was omstreeks 1991 vol. In 20 jaar was het peil derhalve met 100 m gestegen. De doorlatendheid van de zandsteenformaties rond een deel van het meer is ongeveer 0,1 m/d, bij een laagdikte van zo'n 200 m en een bergingscoëfficiënt van zeg 2%. De vraag is nu: Hoe verandert (veranderde) de grondwaterstand langs de oevers, aannemende dat het peil in het meer lineair is toegenomen met 5 m/jaar?

Antwoord:

$$\phi(x,t) = at \frac{i^2 \operatorname{erfc}(u)}{i^2 \operatorname{erfc}(0)}$$

met  $a = 5 \text{ m/a}$ ,  $k = 36,5 \text{ m/a}$ ,  $D = 200 \text{ m}$ ,  $S = 0,02$ ,  $t = 20 \text{ a}$ , levert het verloop op zoals weer-gegeven in figuur 2. De hoeveelheid water is natuurlijk maar een schijntje van de afvoer van de Nijl; de totale infiltratie berekend voor de hele oever na 20 jaar is bij 1000 km lengte in de orde van 2 miljard  $\text{m}^3$ , ofwel circa 0,2% van de afvoer van de Nijl (orde 1000 miljard  $\text{m}^3$  in 20 jaar).



**Figuur 2:** Voorbeeld van infiltratie in de oevers van het Nasser meer bij  $kD=7300\text{m}^2/\text{y}$ ,  $S=0.02$ , na 1, 5, 10, 15 en 20 jaar.

## Conclusie

De formules die Edelman in 1947 afleidde voor vier situaties van niet-stationaire grondwaterstroming in een half-oneindig pakket grenzend aan een rechte rivier, kunnen door één enkele worden vervangen, die is afgeleid door Bruggeman (1999). Het resultaat van Bruggeman omvat niet vier maar een oneindige reeks gevallen. Met een kleine aanpassing is de formule van Bruggeman eenvoudig en inzichtelijk gemaakt.

De aangepaste formule van Bruggeman kan gemakkelijk worden geïmplementeerd, bijvoorbeeld als een functie in Excel. Het is dan niet meer nodig om functiewaarden in tabellen op te zoeken.

De aangepaste formule van Bruggeman hoort m.i. in elk hydrologieboek thuis. We mogen dan, zij het wellicht met enige weemoed, de Edelmanformules in de geschiedenisboeken bijschrijven.

Graag dank ik de reviewers voor hun waardevolle commentaar.

## Referenties

- Abramowitz, M. en I. A. Stegun (1965)** Handbook of mathematical functions; New York, Dover Publications.
- Bruggeman, G. A. (1999)** Analytical solutions of geohydrological problems; Elsevier, Amsterdam.
- Huisman, L. (1972)** Groundwater Recovery; MacMillan, Bath.
- Huisman, L. en T. N. Olsthoorn (1983)** Artificial Groundwater Recharge; Pitman Books, London.

## Appendix 1: Berekenen van $i^n \operatorname{erfc}(z)$

Per definitie is (Abramowitz en Stegun, 1965):

$$i^n \operatorname{erfc}(z) = \int_z^\infty i^{n-1} \operatorname{erfc}(\xi) d\xi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Ergo

$$\frac{d(i^n \operatorname{erfc}(z))}{dz} = -i^{n-1} \operatorname{erfc}(z) \quad (9)$$

De  $i^n \operatorname{erfc}(z)$  kan recursief worden berekend uit  $i^{n-1} \operatorname{erfc}(z)$  en  $i^{n-2} \operatorname{erfc}(z)$  volgens

$$i^n \operatorname{erfc}(z) = -\frac{z}{n} i^{n-1} \operatorname{erfc}(z) + \frac{1}{2n} i^{n-2} \operatorname{erfc}(z), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

Voorts geldt

$$\begin{aligned} i^0 \operatorname{erfc}(z) &= \operatorname{erfc}(z) \\ i^{-1} \operatorname{erfc}(z) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \end{aligned} \quad (11)$$

waarmee de recursieve berekening kan worden opgestart.

Hieronder volgt een implementatie in Visual Basic, direct voor Excel. Na implementatie is de functie in Excel beschikbaar zoals elke andere functie. Hij is dan in een Excel-cel te gebruiken als **=ierfc(u,n)** voor  $i^n \operatorname{erfc}(u)$ . [Visual Basic gebruikt Sqr(-) ipv Sqrt. Merk op dat de functie recursief is, dus zichzelf aanroept om zo telkens de waarde van  $n$  met 1 te verminderen, totdat  $n=0$ ]

```
Public Function ierfc(z As Double, n As Integer) As Double
Const pi=3.141592654
If n = -1 Then
    ierfc = 2 / Sqr(pi) * Exp(-z * z)
ElseIf n = 0 Then
    ierfc = erfc(z)
Else
    ierfc = -z / n * ierfc(z, n - 1) + 1 / (2 * n) * ierfc(z,
n - 2)
    If ierfc < 0 Then
        ierfc = 0
    End If
End If
End Function
```

Het enige dat nog ontbreekt is de functie **erfc(z)** die in de ierfc wordt aangeroepen. Deze

moet apart worden geïmplementeerd. Een mogelijkheid is via de machtreeks:

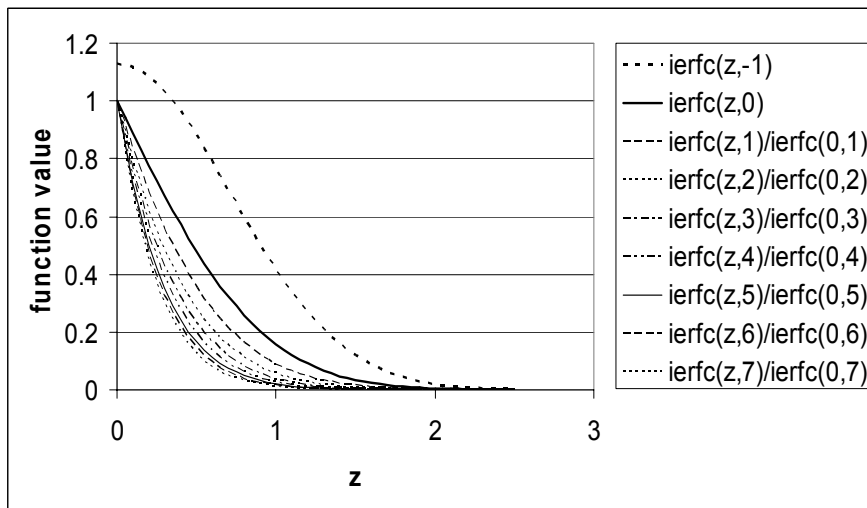
$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)} \text{ en } erfc(z) = 1 - erf(z) \quad (12)$$

Handiger en rekenkundig efficiënter is een rationale benadering. Abramowitz & Stegun (1965) geven een aantal mogelijkheden. Gezien de vereiste nauwkeurigheid bij hogere waarden van  $n$ , is hieronder die gekozen met een fout  $< 10^{-7}$  voor het hele traject  $0 \leq z \leq \infty$ . De  $erfc(z)$  kan vervolgens in Excel worden aangeroepen als **=erfc(u)**.

```
Public Function erf(ByVal x As Double) As Double
' Efficient numerical approximation from Abramowitz & Stegun
Eps order 10^-7
Dim t As Double
t = 1 / (1 + 0.3275911 * x)
erf = 1 - (0.254829592 * t - 0.284496736 * t ^ 2 +
1.421413741 * t ^ 3 -
- 1.453152027 * t ^ 4 + 1.061405429 * t ^ 5) *
Exp(-x ^ 2)
End Function

Public Function erfc(ByVal z As Double) As Double
erfc = 1 - erf(z)
End Function
```

Onderstaande grafiek geeft het verloop van  $i^n erfc(z)$  voor  $-1 \leq n \leq 10$



**Figuur 3:** Herhaalde integralen van de (geschaalde) complementaire errorfuncties  $i^n erfc(z)$  resp.  $i^n erfc(z) / i^n erfc(0)$ . Berekend met de gegeven Visual Basic functies en gecontroleerd met de tabellen in Abramowitz en Stegun, pag 317-318.

## Appendix 2: Vergelijking Bruggeman en Edelman

Om vergelijking met de bekende literatuur mogelijk te maken is onderstaande tabel opgenomen, waarin de hier gegeven formules naast die van Edelman zijn gezet, zoals die in boeken wordt gegeven (Huisman 1972), (Huisman and Olsthoorn 1983). De linker kolom is oplopend, zonder extra coëfficiënten; het betreft in feite slechts één formule waarin  $n$  “het geval” aangeeft. De rechter Edelmankolom is veel minder gelijkmatig, in feite zelfs verwarrend. Bovendien geldt de formule van Bruggeman voor een oneindige reeks gevallen. De in de tekst gegeven formules, waarin helder onderscheid wordt gemaakt in de serie situaties met gegeven stijghoogte en die met gegeven debiet zijn feitelijk overzichtelijker dan de tabel, die alleen nodig is als referentie en om de implementatie te kunnen checken met de tabellen in bestaande hydrologieboeken.

**Tabel 1:** Vergelijking tussen de formule van Bruggeman (links) en de formules van Edelman (rechts) voor de vier stromingssituaties die door Edelman zijn opgelost. De  $n$  verwijst naar de  $n$  in  $i^n \operatorname{erfc}(u)$  in de formule van de stijghoogteverandering  $s(x, t)$  in de linkerkolom. Deze  $n$  correspondeert met de 4 stromingssituaties van Edelman.

$n = 0$ , plotselinge verandering rivierstand ( $s(0, t) = a$ )

$s(x, t) = a \frac{i^0 \operatorname{erfc}(u)}{i^0 \operatorname{erfc}(0)}$	$s(x, t) = aE_1(u)$
$q(x, t) = \frac{a \sqrt{kDS}}{2} \frac{i^{-1} \operatorname{erfc}(u)}{\sqrt{t} i^0 \operatorname{erfc}(0)}$	$q(x, t) = a \frac{\sqrt{kDS}}{\sqrt{t}} \frac{E_2(u)}{\sqrt{\pi}}$

$n = 1$ , plotselinge start constante infiltratie  $q(0, t) = b \text{ m}^2/\text{d}$  (onttrekking negatief)

$s(x, t) = 2b \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{kDS}} \frac{i^1 \operatorname{erfc}(u)}{i^0 \operatorname{erfc}(0)}$	$s(x, t) = b \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{kDS}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} E_3(u)$
$q(x, t) = b \frac{i^0 \operatorname{erfc}(u)}{i^0 \operatorname{erfc}(0)}$	$q(x, t) = bE_1(u)$

$n = 2$ , lineair verloop waterstand volgen ( $s(0, t) = at$ ) op  $x = 0$  en  $t > 0$

$s(x, t) = at \frac{i^2 \operatorname{erfc}(u)}{i^2 \operatorname{erfc}(0)}$	$s(x, t) = atE_4(u)$
$q(x, t) = \frac{a}{2} \frac{\sqrt{t} \sqrt{kDS}}{\sqrt{t} \sqrt{kDS}} \frac{i^1 \operatorname{erfc}(u)}{i^2 \operatorname{erfc}(0)}$	$q(x, t) = a \frac{\sqrt{t} \sqrt{kDS}}{\sqrt{\pi}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} E_3(u)$

$n = 3$ , lineair verloop infiltratie ( $q(0, t) = bt$ ) op  $x = 0$  vanaf  $t = 0$

$s(x, t) = 2b \frac{t\sqrt{t}}{\sqrt{kDS}} \frac{i^3 \operatorname{erfc}(u)}{i^2 \operatorname{erfc}(0)}$	$s(x, t) = b \frac{t\sqrt{t}}{\sqrt{kDS}} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} E_5(u)$
$q(x, t) = bt \frac{i^2 \operatorname{erfc}(u)}{i^2 \operatorname{erfc}(0)}$	$q(x, t) = btE_4(u)$